Publications of the Institute
for the History of Arabic-Islamic Science

Islamic Mathematics
and
Astronomy
Volume 66

Publications of the
Institute for the History of
Arabic-Islamic Science

Edited by
Fuat Sezgin

ISLAMIC
MATHEMATICS
AND
ASTRONOMY

Volume
66

al-Sijzī
Aḥmad ibn Muḥammmad ibn ʿAbdaljalīl
(4th/10th cent.)

Texts and Studies
Collected and Reprinted

1998

Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

ISLAMIC MATHEMATICS AND ASTRONOMY

Volume
66

AL-SIJZĪ
AḤMAD IBN MUḤAMMAD IBN ʿABDALJALĪL
(4th/10th cent.)

TEXTS AND STUDIES

Collected and reprinted
by
Fuat Sezgin

in collaboration with
Mazen Amawi, Carl Ehrig-Eggert,
Eckhard Neubauer

1998

Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

100 copies printed

Beethovenstrasse 32, D-60325 Frankfurt am Main
Federal Republic of Germany

Printed in Germany by
Strauss Offsetdruck, D-69509 Mörlenbach

TABLE OF CONTENTS

NOTICES ET EXTRAITS

DES

MANUSCRITS

DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI

ET AUTRES BIBLIOTHÈQUES;

PUBLIÉS PAR L'INSTITUT ROYAL DE FRANCE;

FAISANT SUITE

AUX NOTICES ET EXTRAITS LUS AU COMITÉ ÉTABLI DANS L'ACADÉMIE
DES INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES.

TOME TREIZIÈME.

PARIS.

IMPRIMERIE ROYALE.

M DCCC XXXVIII.

OPUSCULES mathématiques.

NOTICE
DE PLUSIEURS OPUSCULES MATHÉMATIQUES

QUI COMPOSENT LE MANUSCRIT ARABE N° 1104, ANCIEN FONDS DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI,

PAR M. L. AMÉLIE SÉDILLOT,

PROFESSEUR D'HISTOIRE AU COLLÉGE ROYAL DE SAINT-LOUIS.

A une époque où les sciences et les lettres étaient entièrement négligées en Europe, les khalifes les honoraient d'une faveur particulière, et appelant auprès d'eux les hommes les plus instruits des provinces qu'ils avaient réunies à leur empire, ils faisaient traduire du grec les livres d'Aristote, d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, de Ptolémée, etc., dont plusieurs devaient nous être transmis immédiatement par les Arabes, avant qu'on eût retrouvé les originaux grecs. Les mêmes princes instituaient à Bagdad des bibliothèques et des académies, et fondaient cette école célèbre qui éleva les plus beaux monuments de l'astronomie du moyen âge.

L'histoire des sciences chez les peuples de l'Asie ne pouvait être oubliée, au milieu de l'impulsion donnée, en France, dès le commencement de ce siècle, aux études orientales, et si puissamment secondée par les immenses travaux de M. le baron Silvestre de Sacy; la publication de la Grammaire arabe de cet illustre maître, et de sa Chrestomathie, ouvrages où brille de toute part la plus rare érudition et qui manquaient à notre système général d'enseignement, rendait plus facile l'accès d'une carrière que tant d'obstacles environnaient,

OPUSCULES mathématiques.

et, sous ses auspices, les recherches s'étendirent et amenèrent des résultats inespérés.

Les Arabes s'étaient appliqués d'une manière toute spéciale à l'astronomie; non moins habiles à construire les instruments qu'à en faire usage, ils ajoutèrent leurs propres découvertes à celles des Chaldéens et des Grecs [1], et remplirent par leurs observations l'intervalle de plusieurs siècles qui sépare les derniers temps de l'école d'Alexandrie des premiers travaux astronomiques des Européens.

Nous avons rappelé quelles lumières nouvelles M. Sédillot, mon père, avait jetées sur cette branche importante de l'histoire des sciences, en publiant sa traduction du *Traité des instruments astronomiques d'Aboul Hhassan* [2], et nous avons en même temps indiqué quels points principaux restaient maintenant à éclaircir [3]. Les Arabes nous ont laissé sur leur astronomie des ouvrages qui n'ont pas encore été compulsés et qui sont dignes d'une attention très-sérieuse; il en est de même de ceux qu'ils ont composés sur plusieurs autres sciences physico-mathématiques, sur diverses parties de la géométrie pure, et sur l'algèbre que nous tenons d'eux et qui, après l'introduction

[1] On trouvera des notions fort étendues sur ce sujet dans un grand travail que nous venons de terminer (août 1837) et qui a pour titre : *Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes;* parmi les manuscrits de la Bibliothèque du Roi que nous avons consultés ou analysés pour ce mémoire, nous mettrons au premier rang les manuscrits arabes n^os 1103, 1138, 1148, 1157, et le manuscrit persan n° 173.

[2] *Traité des instruments astronomiques des Arabes* d'Aboul Hhassan Ali, de Maroc, traduit par J. J. Sédillot, et publié par L. Am. Sédillot, 2 vol. in-4°, Imprimerie royale, 1834-1835; voyez aussi notre introduction à cet ouvrage, p. 3.—Le mémoire dont nous venons de faire mention (note 1) doit servir de complément au traité d'Aboul Hhassan.

[3] *Lettre au Bureau des longitudes*, Moniteur du 28 juillet 1834. Voyez aussi nos *Nouvelles recherches pour servir à l'histoire de l'astronomie chez les Arabes* (*Nouveau journal asiatique*, 1836) : c'est dans ce dernier mémoire que nous avons revendiqué pour l'astronome de Bagdad, Aboul Wefa (998), l'honneur de la découverte de la Variation, attribuée jusqu'à présent à Tycho-Brahé (1602).—*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 27 février, 14 et 28 mars 1836.

OPUSCULES mathématiques.

des signes de Viète et l'invention du calcul infinitésimal, est devenue dans les mains des modernes l'instrument de leurs plus utiles découvertes.

L'examen d'une question encore controversée parmi les savants nous a conduit à publier ce mémoire; Montucla n'avait pas balancé à affirmer que, jusqu'à présent, rien n'autorisait à croire que les algébristes arabes eussent été au delà des équations du second degré; la lecture du manuscrit 1104 de la Bibliothèque du Roi nous fit reconnaître que cette assertion devait être rectifiée. En effet, le fragment que nous y avons trouvé [1] prouve incontestablement que les Arabes ont traité des équations cubiques. Nous avons pensé devoir faire suivre l'analyse que nous donnons aujourd'hui de ce fragment de celle de quelques autres opuscules, compris dans ce manuscrit et intéressants à différents titres; déjà nous avons fait paraître la notice de l'un de ces petits traités intitulé : *Des connues géométriques*, par Hassan ben Haithem, mort au Caire l'an 430 de l'hégire (1038 ap. J. C.) [2]. Sur les cinq autres qui restent à examiner, trois sont du géomètre Al-Singiari [3], Ahmed ben Mohammed ben Abd-al-Gélil, que Montucla cite [4] sous le nom

[1] *Nouveau Journal asiatique*, mai 1834.

[2] Notice du *Traité des connues géométriques* de Hassan-ben Haithem (*Nouveau Journal asiatique*, mai 1834). — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 28 mars 1836. — M. de Hammer-Purgstall a bien voulu nous apprendre qu'il avait découvert dans l'*Histoire des médecins* d'Ebn (Abou) Ossaïbah la biographie d'Hassan ben Haïthem, avec la liste de quatre-vingt-huit de ses ouvrages. La Bibliothèque du Roi ne possède qu'un exemplaire très-incomplet du traité d'Ossaïbah, qui vivait en 1319; nous saisissons avec empressement cette occasion de remercier M. de Hammer de la notice qu'il a eu la bonté de nous adresser sur Aboul Wéfa; cette notice, dont nous parlerons ailleurs, est extraite de l'*Histoire des philosophes* d'Ebn-al-Kofti, ouvrage que nous ne connaissons pas à Paris.

[3] D'Herbelot parle sans doute de cet auteur, lorsqu'il rapporte que *Sangiari* est le surnom d'Abou-Said Ahmed ben Abd-al-Gélil *Mohammed*, auteur du livre intitulé : *Ahkam alaschar men ketab alnogioum*, et d'un autre qui porte le titre d'*Ekhtiarat*; ce sont, dit-il, deux manuscrits astrologiques. *Biblioth. orient.*, p. 757.

[4] Montucla, *Histoire des mathématiques*, tome I[er], p. 374.

d'*Assingiari* ou *Al-Singiar,* comme l'auteur d'un *Traité sur les sections coniques* [1] et d'un manuscrit intitulé : *Responsa mathematica.*

OPUSCULES mathématiques.

Dans l'un de ces trois opuscules, *Règles géométriques* تحصيل القوانين الهندسية, Al-Singiari renvoie à deux ouvrages de sa composition, le premier intitulé : *Notes géométriques* تعليقات هندسية [2], le second, *Des propriétés de l'ellipse* كتاب فى خواصّ القطع الناقص; les deux derniers sont : 1° un *Traité des lignes menées d'un ou de plusieurs points donnés à des cercles donnés,* 2° une *Réponse à des questions qui lui sont proposées sur le livre des Lemmes d'Archimède* [3].

Le manuscrit 1104 se trouve complété, par un *Fragment de l'Epitome de l'imam Muzhaffer-al-Isferledi* sur les éléments d'Euclide, et par un Fragment qu'on peut supposer d'Averroës (Aboul-Walid Mohammed) sur la trigonométrie sphérique,

[1] La bibliothèque de Leyde possède le traité de Ahmed ben Gélil sur les *Sections coniques;* il est intitulé : رسالة لاحمد بن خليل الجزرى فى رسم المقاطع المخروطية, Ahmed ben Ghalil Sugiureus *De conicarum sectionum descriptione,* n° 1098 du catalogue de 1716.

[2] Le sens du mot تعليقات ou تعاليق est expliqué dans les notes sur Abd-Allatif; il signifie proprement *des notes mises par écrit à la hâte;* voyez Silvestre de Sacy, *Relation de l'Égypte,* page 485. D'Herbelot dit (*Bibliothèque orientale,* page 848) qu'il y a plusieurs *Tâlikat,* qui sont comme des suites et dépendances des matières déjà traitées par d'autres auteurs. Al-Singiari renvoie souvent à ses تعليقات هندسية pour les démonstrations, et nous avions cru d'abord devoir traduire ces deux mots par : *Corollaires géométriques.*

[3] On ne peut guère douter aujourd'hui que le livre des *Lemmes* ne soit d'Archimède; MM. Greaves et Foster le firent connaître les premiers en 1659 sous le titre de *Lemmata Archimedis,* en le traduisant de l'arabe; et Alphonse Borelli le publia de nouveau en 1661, également d'après l'arabe et avec les notes de deux de ses commentateurs, l'un nommé Al-Mochtasso Aboul-Hassan, et l'autre Abou Sahal-al-Cuhi. Voyez Montucla, tom. Ier, pag. 237. L'article suivant de la Bibliothèque orientale de D'Herbelot confirme cette dernière indication : « *Ketab maakhoudhat fi ossoul* « *al-hendassah li Arschemides :* titre d'un livre « de géométrie d'Archimède, traduit du « grec en arabe par Thabeth ben Corrah, « avec un commentaire d'Aboul-Hassan Ali « ben Ahmed-al-Nessoui avec quinze figures « qui ont été dressées par Nassir-eddin-al-« Thoussi. Il y a aussi un discours sur le « même ouvrage, de Sohaïl-al-Caouni, in-« titulé : *Teziin ketab Arschemides fil-maa-* « *khoudhat.* » D'Herbelot, p. 977.

Thabit ben Corrah vivait au III^e^ siècle de l'hégire (221-288 de l'hégire, 835-900 ap. J. C.), et Nassir-eddin Thoussi au VII^e^ (597-672 de l'hégire, 1200-1273 après J. C.).

OPUSCULES mathématiques.

assez important en ce qu'il peut donner l'époque de l'introduction des propositions qui y sont présentées. Averroës vivait en 1180 ap. J. C. (576 de l'hégire).

I. FRAGMENT D'UN TRAITÉ D'ALGÈBRE OU L'ON TRAITE DES ÉQUATIONS CUBIQUES.

L'auteur de cet ouvrage ne se nomme point; mais comme il le dédie à un grand juge, قاضى القضاة الامام السيّد ابى طاهر, il ne serait pas tout à fait impossible, d'après cette circonstance, d'avoir la date approchée de sa composition.

L'auteur y définit l'algèbre الجبر والمقابلة un art savant qui traite des nombres absolus et des grandeurs d'une manière telle, que les quantités inconnues, étant jointes à une chose connue, peuvent être déterminées, la chose connue étant une quantité ou un rapport.

Il remarque ensuite que, dans leur art, les algébristes ont coutume de nommer *chose* شى (la *cosa* des Italiens) l'inconnue à déterminer; *produit* ou *carré* مال (*censo*), la *cosa* multipliée par elle-même; *cube* كعب (*cubo*), le produit du *censo* par la *cosa;* le *carré-carré* مال مال (*il censo di censo*), le produit du *censo* par lui-même; le *carré-cube* مال كعب (*il censo di cubo*), le produit du *censo* par le *cubo;* le *cube-cube* كعب كعب (*il cubo di cubo*), le produit du *cubo* par lui-même, etc., ou en d'autres termes :

1re puissance — chose.
2e . . . . — carré.
3e . . . . — cube.
4e . . . . — carré-carré.
5e . . . . — carré-cube.
6e . . . . — cube-cube.

OPUSCULES mathématiques.

Ceci, comme on le voit, est en tous points contraire à l'opinion de Wallis, qui prétend que les Arabes ont adopté, dans la dénomination des puissances مراتب, un système différent de celui de Diophante [1].

L'auteur prévient ensuite qu'on ne peut entendre son ouvrage رسالة qu'autant qu'on connaît les *Éléments* d'Euclide et son traité des *Data* الكتاب اقليديس فى الاصول وكتابه فى المعطيات et les deux (premiers) livres des Coniques d'Apollonius ومقالتين من كتاب ابلونيوس فى المخروطات, parce que tout ce qu'il dira est fondé sur les principes énoncés dans ces trois ouvrages; et après avoir fait observer qu'il ne considère que quatre ordres de quantités : les nombres absolus عدد, les côtés ou racines جذر, les carrés et les cubes, et qu'on ne peut concevoir en dimensions de carré-carré, il dit qu'on ne trouve dans les livres des algébristes qui l'ont précédé que la solution des équations المعادلات des trois premiers ordres, savoir en nombres absolus, en côtés et en carrés; mais que, quant à lui, il donnera des règles pour déduire l'inconnue dans chacun des quatre ordres, et qu'il se servira des propriétés du cercle بخواصّ الدائرة exposées dans les *Éléments* et les *Data*, et, à leur défaut, des propriétés des sections coniques بخواصّ القطوع المخروطية exposées dans les deux premiers livres d'Apollonius.

Il divise en deux espèces les équations entre les quantités des quatre ordres, les équations simples معادلات مفردات et les équations composées مقترنات, et passe à leur énumération.

Selon lui, les équations simples ou binaires sont au nombre de six (nous les donnerons avec nos signes pour simplifier):

$$
\begin{array}{ll}
1^{re} & x - n = o \\
2^{e} & x^2 - n = o \\
3^{e} & x^3 - n = o
\end{array}
$$

[1] Voyez Montucla, *Histoire des mathématiques*, t. I^{er}, p. 382.

OPUSCULES mathématiques.

4[e] $x^2 - mx = o$
5[e] $x^3 - mx^2 = o$
6[e] $x^3 - mx = o$

La quatrième et la cinquième se réduisant, comme il le fait observer, à la première; la sixième à la seconde; et la troisième ne pouvant être résolue en nombres que par l'*istikra* بالاستقرا من حيث العدد [1], et par la géométrie, qu'au moyen des sections coniques ومن حيث الهندسية بالقطوع المخروطية.

Il continue : les équations composées sont de deux sortes, les *ternaires* et les *quaternaires* (ou si l'on veut *trinomes* et *quadrinomes*) واما المقترنات فمنها ثلاثية ومنها رباعية.

Il y a douze espèces de *ternaires :*

1[re] $x^2 + mx - n = o$ [2]
2[e] $x^2 - mx + n = o$
3[e] $x^2 - mx - n = o$

Celles-ci sont traitées dans les livres d'algèbre et expliquées par des constructions géométriques, mais non pas arithmétiquement. Les trois suivantes qui sont regardées comme leurs homogènes sont :

4[e] $x^3 + mx^2 - nx = o$
5[e] $x^3 - mx^2 + nx = o$
6[e] $x^3 - mx^2 - nx = o$

Les six autres sont :

7[e] $x^3 + mx - n = o$
8[e] $x^3 - mx + n = o$

[1] *Istikra* signifie le cas où l'on ne peut prouver la vérité d'une proposition générale qu'en parcourant tous les cas particuliers auxquels elle est applicable; l'auteur se sert de cette expression dans le sens de *déduction* ou *extraction.* — La définition du mot الاستقرا se trouve dans l'Extrait que M. le baron Silvestre de Sacy a donné du كتاب التعريفات ou *Livre des Définitions.* Voyez *Notices et Extraits des Manuscrits*, tome X, page 42.

[2] Carré et racine égalent nombre, etc.

OPUSCULES mathématiques.

$$
\begin{array}{ll}
9^{e} & x^3 - mx - n = o \\
10^{e} & x^3 + mx^2 - n = o \\
11^{e} & x^3 + mx^2 + n = o \\
12^{e} & x^3 - mx^2 - n = o
\end{array}
$$

La forme seule de ces six dernières équations est exposée dans les livres des algébristes; mais nous les démontrerons par des constructions géométriques, ne le faisant pas arithmétiquement.

Les quaternaires qui sont au nombre de sept se divisent en deux classes : la première comprend les (quatre) cas où il y a trois ordres de quantités égaux à un seul [1], savoir :

$$
\begin{array}{ll}
1^{re} & x^3 + mx^2 + nx - a = o \text{ [2]} \\
2^{e} & x^3 + mx^2 - nx + a = o \\
3^{e} & x^3 - mx^2 + nx + a = o \\
4^{e} & x^3 - mx^2 - nx - a = o
\end{array}
$$

La seconde classe comprend les (trois) cas où deux ordres sont égaux à deux autres :

$$
\begin{array}{ll}
5^{e} & x^3 + mx^2 - nx - a = o \text{ [3]} \\
6^{e} & x^3 - mx^2 + nx - a = o \\
7^{e} & x^3 - mx^2 - nx + a = o
\end{array}
$$

Telles sont les sept quaternaires pour lesquelles nous n'avons pu trouver la chose شى , *la cosa*, que par des moyens géométriques.

L'auteur passe ensuite à la solution de chacune des vingt-cinq équations rapportées ci-dessus.

[1] On lit dans le manuscrit : وهو الاول ما يكون فيه ثلث مرّات معادلة الواحدة Il faut lire, comme nous le faisons, مراتب.

[2] Cube, carré et racine égalent nombre.

[3] Cube et carré égalent racine et nombre, etc.

ÉQUATIONS BINAIRES. — Ire ÉQUATION.

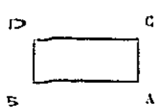
$x - n = o$ racine égale nombre.

الصنف الاول من المفردات جذر يعدل عدد

Dans ce cas, la racine est nécessairement connue et la règle est la même pour le nombre et pour l'étendue المساحات.

IIe ÉQUATION.

$x^2 - n = o$ carré égale nombre ;



arithmétiquement من جهة العدد, par extraction بالاستقرا ; géométriquement من جهة الهندسية , prenez une ligne AB supposée égale au nombre donné, et que AC soit l'unité et perpendiculaire à AB, terminez le rectangle AD, il est évident معلوم que l'étendue de sa surface sera exprimée par le nombre donné; faites un carré E égal en surface au rectangle AD, comme l'a expliqué Euclide dans la 14e proposition du second livre de son Traité des éléments, le carré E sera égal au nombre donné, et comme il est connu, son côté le sera aussi d'après la démonstration d'Euclide, ce qui est la chose demandée.

IIIe ÉQUATION.

$x^3 - n = o$

arithmétiquement, par extraction; géométriquement, prenez un carré AD, etc. La fin de la solution est renvoyée à l'un des articles suivants, à cause de l'emploi des sections coniques.

IVe, Ve ET VIe ÉQUATIONS.

$x^2 - mx = o \quad x^3 - mx^2 = o \quad x^3 - mx = o$

arithmétiquement et géométriquement.

OPUSCULES mathématiques.

ÉQUATIONS TERNAIRES ET QUATERNAIRES.

Les six premières sont résolues arithmétiquement et géométriquement; après quoi, l'auteur fait observer que les solutions géométriques des six autres exigent l'emploi des sections coniques, comme la troisième des binaires, et qu'il en est de même des sept quaternaires. Mais avant de passer à la solution de ces quatorze équations, il donne celle des trois questions suivantes :

1° Insérer deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données نريد ان نجد خطين بين خطين ليتوالى الاربعة متناسبة.

2° Construire sur un rectangle donné un parallélipipède rectangle égal à un solide donné نريد ان نعمل على قاعدة ا ح مجسما متوازى السطوح قائم الزوايا مساويا لجسم ا ب ح ى ه etc.

3° Construire un solide dont la base soit un carré et la hauteur égale à une ligne donnée, et qui soit en même temps égal à un solide donné نريد ان نعمل مجسما قاعدته مربع وارتفاعه مثل د ط المفروض يكون مساويا لجسم ا ح ى etc.

Il reprend alors la troisième des binaires à laquelle il applique la solution des deux moyennes proportionnelles par deux paraboles, et passe aux treize autres équations, lesquelles, ainsi que la précédente, sont du troisième degré, et qu'il ne se propose de résoudre que géométriquement.

La première, qui est la septième des ternaires, est de la forme $x^3 + mx - n = o$.

L'auteur la résout par une construction où il emploie le cercle et la parabole.

C'est à la fin de cette solution que la copie se trouve interrompue, n'ayant pas été achevée par le copiste qui a même omis les figures des trois dernières constructions.

OPUSCULES mathématiques.

Quoi qu'il en soit, ce petit traité montre d'une manière incontestable que les Arabes ont connu les équations cubiques, ce dont Montucla doutait encore. Voyez tome Ier de son *Histoire des mathématiques*, page 383.

Peut-être en retrouvera-t-on une copie entière et complète dans quelqu'un de nos manuscrits ou dans un de ceux de quelque autre bibliothèque; celle de Leyde en possède un intitulé : *Algèbre des équations cubiques* par Omar ben Ibrahim, qui pourrait avoir quelque rapport avec celui-ci; mais jusqu'à présent nous n'avons pu en acquérir la certitude.

II. RÉPONSE DE AL-SINGIARI AUX DEMANDES QUI LUI ONT ÉTÉ FAITES SUR LA SOLUTION DE PROPOSITIONS TIRÉES DU LIVRE DES LEMMES D'ARCHIMÈDE.

رسالة احمد بن محمد بن الجليل في الجواب عن المسايل التي سيل في حل الاشكال
المأخوذة من كتاب المأخوذات لارشميدس

Cet opuscule commence ainsi :

« J'ai reçu votre lettre qui contient des questions sur des propositions dont vous me demandez la solution; j'aurais beaucoup de plaisir à vous les expliquer; mais j'ai reconnu qu'elles sont tirées du livre d'Archimède intitulé : *Des Lemmes,* et que leurs démonstrations sont dans ce livre telles que les a données son auteur. Je puis cependant vous être à ce sujet de quelque utilité ; car je me suis spécialement occupé de plusieurs propositions qu'Archimède n'a pas traitées complétement; mais pour toutes celles qu'il a développées, je vous renvoie à son livre, n'ayant rien de mieux à dire, etc. »

Voici l'énoncé des propositions :

OPUSCULES mathématiques.

Prop. 1[re]. Étant donnés deux arcs de cercle tangents et deux lignes parallèles menées des deux centres à l'une des extrémités de chaque arc, les deux lignes menées du point de tangence à ces extrémités auront la même direction. Fig. 1.

Prop. 2. Étant donné un cercle ABD, si on mène le diamètre AB, la tangente BC, la ligne ADC et la tangente DE, je dis que EB = EC. Fig. 2.

Prop. 3. Étant donné l'arc S′SG, sur la corde S′G, je prends S′KS, que je divise en deux parties égales en K; je mène S′K, KS, SG; je prends KA = KS′ et je dis, comme l'auteur, AG = SG. Fig. 3.

Prop. 4. Si dans un demi-cercle on construit deux demi-cercles tangents, on a la figure nommée *salianous* سالينوس, laquelle est égale au cercle qui a pour diamètre قطر la perpendiculaire menée du point de tangence (des deux demi-cercles inscrits) à la circonférence extérieure. Fig. 4.

Prop. 5. Étant donné un demi-cercle GS′, je marque sur le diamètre un point quelconque K et je trace sur le diamètre les deux demi-cercles GK, KS′; cela étant, si l'on mène KK′ perpendiculaire au diamètre, et que l'on construise de chaque côté de cette ligne un cercle qui soit tangent à elle et au demi-cercle correspondant, les deux cercles ainsi décrits seront égaux. Fig. 5.

Prop. 6. Soit un demi-cercle GS′ et soit marqué sur son Fig. 6.

OPUSCULES mathématiques.

diamètre un point K, tel que $KS' = \frac{3KG}{2}$ وكان زى مرة ونصف مثل ى ص; sur les deux lignes GK et KS′ décrivez deux demi-cercles, et dans l'espace compris entre les trois circonférences faites un cercle tangent à toutes trois, et menez le diamètre K′A parallèle à GS′ : on demande le rapport de K′A à GS′.

Fig. 7. *Prop.* 7. Si dans un cercle donné on inscrit un carré et dans ce carré un autre cercle, le premier sera double du second.

Fig. 8. *Prop.* 8. Sur la trisection de l'angle.

Fig 9. *Prop.* 9. Étant données deux cordes qui se coupent à angle droit dans un cercle, les sommes des arcs opposés sont égales.

Fig. 10. *Prop.* 10. Étant donné un cercle GAK′, je mène les tangentes S′G, S′K′ et la sécante S′K, je mène K′A parallèle à S′K, je joins AG et je mène SH perpendiculaire sur AK′, et je dis que AH = HK′.

Fig. 11. *Prop.* 11. Lorsque deux cordes se coupent en un cercle dans un point autre que le centre, la somme des carrés des quatre segments est égale au carré du diamètre.

Fig. 12 et 13. *Prop.* 12. Étant donné un demi-cercle, sur son diamètre GK je mène du point S′ deux tangentes au cercle S′K′, S′A; je joins K′K et AG qui se coupent au point B, et je mène S′BS, laquelle est perpendiculaire à KG.

Fig. 14. *Prop.* 13. Si dans un cercle on mène le diamètre AB et la corde EG, et qu'on abaisse sur la corde les deux perpendiculaires AH et BT, les deux lignes EH et TG seront égales.

Prop. 14. Étant donné un cercle ABC, menez les deux diamètres AC, BD qui se coupent à angle droit, décrivez autour du centre E le demi-cercle GHT; sur BG le demi-cercle BKG, et sur DT le demi-cercle DLT. Je dis que le cercle décrit sur CH (comme diamètre) sera égal à la surface ABKGHTLDA, qu'on nomme *salinoune* السلينون. OPUSCULES mathématiques. Fig. 15.

Prop. 15. Cette proposition est la dernière du Traité; Al-Singiari nous apprend qu'il l'a résolue sur la demande de quelques géomètres du Khorasan بعض مهندسى خراسان. Fig. 16.

Étant donné un cercle DKS', je mène KG côté du pentagone inscrit وتر الخمس, et KV côté du décagone inscrit وتر العشر; je prolonge KV et S'G jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en A, et je mène VS' et SH perpendiculaire sur AS'; je dis que AH est égale au rayon نصف القطر.

III. QUELQUES RÈGLES GÉOMÉTRIQUES PAR AL-SINGIARI.

تحصيل القوانين الهندسيّة المحدودة لاحمد بن محمد بن عبد الجليل السخرى (السنجرى)

Ce petit traité comprend onze propositions :

Prop. 1re. Étant donnée une ligne AB et décrits sur cette ligne un demi-cercle et deux arcs opposés (à deux angles dont l'un soit obtus et l'autre aigu), savoir ACB, ADB et AEB; les deux arcs étant tels que les deux angles opposés soient ensemble égaux à deux droits; Fig. 17.

Prolongez le diamètre des deux côtés, de manière que AG =BH, et prenez aussi AT=BK; puis menez par les points

OPUSCULES mathématiques.

GATKBH, à la demi-circonférence ACB, les lignes GC, AC, TC, KC, BC, HC; prolongez HC vers E et menez AE, AD; je dis que la somme des deux carrés مجموع مربعي dè AC et de BC sera égale au carré de AB, et que la somme des deux carrés de TC et KC sera égale à la somme de deux lignes quelconques menées des deux points T et K à la demi-circonférence ACB, et que la somme des deux carrés de GC et HC sera égale à la somme des carrés de deux autres lignes quelconques menées des points G et H à la demi-circonférence ACB; que la somme des carrés de AD et DB sera égale au carré de AB, moins le produit de BD par DE; et que la somme des carrés de AE et BE sera égale au carré de AB, plus le produit de BE par DE. *Démonstration :* Quant à l'égalité du carré de AB aux deux carrés de AC et BC, cela provient de ce que l'angle ACB est droit; quant à l'égalité des carrés des deux lignes TC et CK et de GC et CH aux carrés de deux autres lignes menées des points T et K, et G et H à la demi-circonférence, nous l'avons démontrée dans nos *Notes géométriques* في كتابنا في تعليقات هندسية [1]; nous y avons aussi démontré que le carré de AB surpasse les deux carrés de AD, DB du produit de BD par DE, et que ce même carré de AB est moindre que la somme des carrés de AE et BE du produit de BE par ED.

Fig. 18. *Prop.* 2. Proportions remarquables qui résultent de la construction suivante :

Du point F, comme centre, décrivez les trois cercles ATB, EOG, CND, et le diamètre du plus grand cercle, AB; je dis que si les lignes menées de A et B à la circonférence du cercle

[1] Voyez plus bas, page 129, note 2. — On reconnaît par là, et par les autres démonstrations que l'auteur renvoie à plusieurs de ses ouvrages, que ce traité est vraiment, comme celui qui précède, une lettre adressée à quelques personnes qui lui demandaient la solution de ces diverses questions.

ATB coupent la circonférence EOG, et si les lignes menées de D et C coupent la circonférence CND, comme par exemple si l'on mène BT, BH et DK, DL, on aura $BO \times OT = BS \times SH$ et $DL \times LN = DK \times KM$? بع في عط يعدل بس في سح ودل في لن يعدل دك في كم.

OPUSCULES mathématiques.

Prop. 3. Étant donnés sur la circonférence d'un cercle deux points A et B, joignez ces deux points par une droite; par le point A menez AC tangente au cercle et AD, de manière que l'angle BAD égale l'angle BAC; toute ligne menée de B sur AD sera coupée par l'arc AB, et le produit de la ligne entière par sa partie intérieure donnera toujours le même résultat et sera égal au carré de AB. Fig. 19.

Prop. 4. Le point A étant 1° hors du cercle, 2° dans le cercle: Fig. 20 et 21.

1° Les deux sécantes seront réciproquement proportionnelles à leur partie extérieure;

2° Les deux cordes se couperont en parties réciproquement proportionnelles.

Prop. 5. Si deux cercles sont tangents en un point A et que par ce point on mène deux lignes dans les deux cercles, les parties de chaque ligne comprises dans ces deux cercles seront directement proportionnelles. Fig. 22 et 23.

Prop. 6. Si par un point donné hors d'un cercle on mène deux tangentes à ce cercle et qu'on joigne les deux points de tangence par une droite, toute ligne AD menée du point A donnera la proportion AD : AG : : DE : EG. Fig. 24.

Prop. 7. Si l'on divise le grand axe de l'ellipse قطر اطول Fig. 25.

OPUSCULES mathématiques.

القطع الناقص en trois parties telles que le produit de deux de ces parties contiguës par la troisième placée à l'extrémité du diamètre soit égal au carré du demi petit axe مربع نصف قطره الاصغر, la somme des deux lignes menées de chaque point de division à un point quelconque de l'ellipse sera égale au grand axe.

Fig. 26 et 27. *Prop.* 8. Soit ACB une ellipse et un cercle dont le grand axe est AB et le petit axe CD; si l'on prend AB : CD : : CD : BE, qu'on mène BE perpendiculaire à AB et qu'on joigne AE, toute perpendiculaire comme HT menée d'un point de la circonférence de l'ellipse ou du cercle sur le diamètre et prolongée jusqu'à la ligne AE en G donnera TG×TB, et on aura TH : CL : : TG×TB : LM×LB. Ceci se fonde sur les propriétés élémentaires de l'ellipse, et l'auteur ajoute qu'il en a donné la démonstration dans la 72e proposition de son traité des propriétés de l'ellipse وقد بيّنا ذلك في الشكل الثاني والسبعين من كتابنا في خواصّ القطع الناقص.

Fig. 28. *Prop.* 9. Trouver la circonférence d'un cercle lorsqu'on a deux droites menées de deux points donnés à un point quelconque de cette circonférence, et que le rapport de ces deux droites est connu.

Fig. 29. *Prop.* 10. Étant donné le cercle ACBD et les deux points A et B sur sa circonférence; si l'on divise l'arc ADB en deux parties au point D, qu'on joigne AB et qu'on mène AC, BC, DC, le rapport de AC à BC sera égal au rapport de AE à BE. Cette proposition est incomplétement traitée dans Euclide.

Fig. 30. *Prop.* 11. Étant menées à un cercle donné deux tangentes parallèles et deux autres lignes des points de tangence à la

circonférence du cercle, prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent les deux tangentes, le diamètre sera moyen proportionnel entre les deux parties interceptées des tangentes; et si par un point quelconque d'une des tangentes on mène une autre tangente au cercle prolongée jusqu'à la seconde tangente parallèle, le rayon sera moyen proportionnel entre les deux parties interceptées des tangentes parallèles et le diamètre.

OPUSCULES mathématiques.

L'auteur fait observer qu'il a démontré ces propositions dans ses تعليقات هندسيّة [1].

IV. OPUSCULE D'AL-SINGIARI SUR LES LIGNES MENÉES DANS DES CERCLES DONNÉS PAR DES POINTS DONNÉS.

رسالة لاحمد بن محمد بن عبد الجليل فى اخراج خطوط فى الدوائر الموضوعة
من النقط المعطاة

Ce petit traité contient treize questions :

Prop. 1. Étant donné un cercle dont le centre est connu et dans ce cercle un point, mener par ce point une droite terminée par les deux extrémités à la circonférence, et divisée au point donné en deux parties qui soient entre elles comme deux lignes données. Fig. 31.

Prop. 2. Par un point donné dans un cercle, faire passer une corde divisée en ce point, de manière que la somme des carrés de ses deux parties soit égale à une surface rectangulaire donnée. Fig. 32.

[1] Voyez plus bas, page 129, note 2.

OPUSCULES mathématiques. Fig. 33. *Prop.* 3. Par un point donné dans un cercle, mener une corde égale à une ligne donnée plus petite que le diamètre.

Fig. 34. *Prop.* 4. Par un point donné dans un cercle, faire passer une droite telle que le rapport du carré de l'une de ses parties au carré de l'autre partie soit égal au rapport de deux lignes données.

Fig. 35. *Prop.* 5. Par un point donné hors d'un cercle, mener une droite divisée par la circonférence, de manière que le rapport de la partie extérieure à la partie intérieure soit égal à celui de deux lignes données.

Fig. 36. *Prop.* 6. Par un point donné hors d'un cercle, mener à ce cercle une droite telle que le carré de la ligne entière et le carré de la partie extérieure égalent une surface donnée.

Fig. 37. *Prop.* 7. Par un point donné hors d'un cercle, mener à ce cercle une droite qui soit divisée par la circonférence en deux parties telles que l'une de ces parties soit égale à une ligne donnée.

Fig. 38. *Prop.* 8. Par un point donné hors d'un cercle, mener une droite divisée par la circonférence en deux parties telles que leur produit ضرب soit égal à une surface donnée.

Fig. 39. *Prop.* 9. Par les deux extrémités du diamètre d'un cercle donné, mener deux cordes qui se coupent respectivement selon deux rapports donnés.

Fig. 40 et 41. *Prop.* 10. Étant donnés deux points sur la circonférence d'un cercle et deux rapports, mener par les deux points donnés deux lignes qui se rencontrent et soient coupées par la circonférence de ce cercle, suivant les deux rapports donnés. OPUSCULES mathématiques.

Soit le cercle ABC, les deux points A et C sur la circonférence, les deux rapports DH : HZ et H'T' : T'K, etc.

Prop. 11. Mener de deux points donnés A et B sur la circonférence d'un cercle deux lignes qui se rencontrent en un point, et dont le rapport soit égal à un rapport donné ; puis diviser la droite qui joint ces deux points en deux parties qui soient entre elles dans le même rapport. Fig. 42.

Prop. 12. Mener de deux points donnés sur la circonférence d'un cercle deux lignes qui se rencontrent en un point de cette circonférence, et qui soient telles que leur produit soit égal à une surface donnée. Fig. 43.

Prop. 13. Mener par deux points donnés sur la circonférence d'un cercle deux lignes qui se rencontrent en un point de cette circonférence, et qui soient telles que la somme de leurs carrés soit égale à une surface donnée [1]. Fig. 44 et 45.

[1] Le manuscrit porte que ces opuscules d'Al-Singiari ont été achevés au mois de schawal de l'année 539 de l'hégire (1144 de J. C.). C'est, sans doute, la date de la copie.

OPUSCULES mathématiques.

V. QUATORZIÈME LIVRE DE L'ÉPITOME DE L'IMAM MUZHAFFER-AL-ISFERLEDI SUR LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

المقالة الرابعة عشر من اختصار الامام المظفر الاسفرلدى لاصول اقليدس

Ce *Mekalat* comprend onze propositions et répond au 14e livre des Éléments d'Euclide, qui n'en contient que sept.

Fig. 46. *Prop.* 1. Étant donné un cercle ABC, dont le centre est en D, ADG le diamètre, GB la corde du 10e, BC la corde du 5e; je dis que la perpendiculaire DE est la moitié de la somme de DG + GB.

Fig. 47. *Prop.* 2. Les mêmes choses étant données, et de plus AB la corde d'un angle intérieur du pentagone مخمس; je dis que la somme des carrés de AB et BC égale cinq fois le carré de DG (du rayon).

Fig. 48 et 49. *Prop.* 3. Soit AB le diamètre d'une sphère قطر كرة; la base du dodécaèdre inscrit قاعدة ذى اثنى عشر قاعدة, le pentagone CDEGH; et la base de l'icosaèdre inscrit قاعدة ذى العشرين قاعدة, le triangle TKL; si l'on inscrit ces deux bases en deux cercles dont l'un ait pour demi-diamètre IC et l'autre pour demi-diamètre OL, je dis que les deux cercles sont égaux.

Fig. 50. *Prop.* 4. Le pentagone ABCDE, l'une des bases (*faces*) du dodécaèdre étant inscrit en un cercle dont le centre مركز est en G, et GT étant perpendiculaire sur CD; je dis que GT, multiplié par 30 fois CD زط في حد ثلثين مرة, est égal à la surface du dodécaèdre.

Fig. 51. *Prop.* 5. Le triangle ABC, l'une des faces de l'icosaèdre étant

inscrit à un cercle dont le centre est en D, et DE étant perpendiculaire sur BC; je dis que DE multiplié par 30 fois BC est égal à la surface de l'icosaèdre. OPUSCULES mathématiques.

Prop. 6. Le rapport de la surface du dodécaèdre à celle de l'icosaèdre est égal au rapport du côté cube ضلع المكعب au côté de l'icosaèdre, lorsqu'ils sont tous inscrits à la même sphère اذا كانت كلها في كرة واحدة. Fig. 52.

Prop. 7. Le pentagone régulier ABCDE étant inscrit à un cercle dont le centre est en L et dont le diamètre est ATG, je mène EB corde d'un angle intérieur du pentagone et EL (rayon). Soit de plus LH moitié de AL et TK égale à deux fois KB; je dis que AH, qui est égale aux 3/4 du diamètre, multipliée par EK qui est égale aux 5/6 de EB, corde de l'angle du pentagone, est égale à la surface du pentagone. Fig. 53.

Prop. 8. Le pentagone ABCDE et le triangle ATG étant inscrits à un même cercle dont le diamètre est ALK, et étant les deux faces des deux solides inscrits à la même sphère; je dis que le rapport du pentagone ABCDE, pris douze fois, au triangle ATG pris vingt fois, est égal au rapport de la ligne BE, qui est le côté du cube à la ligne TG, qui est le côté de l'icosaèdre. Fig. 54.

Prop. 9. AB étant divisée en C en moyenne et extrême raison, G et T comprenant virtuellement يقوى على AB, AC, je dis que le rapport de G à T est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre inscrit à la même sphère. Fig. 55.

Prop. 10. Le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre est comme

OPUSCULES mathématiques.

le rapport de la surface du dodécaèdre à celle de l'icosaèdre, lorsqu'ils sont inscrits à une même sphère.

Fig. 56 et 57. *Prop.* 11. AB étant divisé en C en moyenne et extrême raison, et KL en F, et la plus grande des deux parties étant AC et KF; soit CE qui comprend virtuellement AE, AC; CH qui comprend BH, BC; FN qui comprend KN, KF; et FS qui comprend LS, LF, je dis que CE : CH : : FN : FS.

VI. OPUSCULE RELATIF A LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE ATTRIBUÉ A ABOU'L-WALID.

Nous sommes porté à croire que cet Abou'l-Walid الشيخ ابو الوليد est le même qu'Averroës, qui se nommait Abou'l-Walid Mohammed Ben Roschd et qui a composé un commentaire sur l'Almageste.

L'auteur commence ainsi :

Ces propositions sont celles que j'ai ajoutées aux sphériques الاكر لل pour l'intelligence parfaite de l'Almageste; elles ont pour objet des triangles formés par des arcs dont chacun est plus petit que le demi-cercle, et qui appartiennent à de grands cercles qui se coupent sur la surface de la sphère; en quoi nous différons de Ptolémée بطلميوس, qui a considéré ces triangles comme s'ils étaient formés par des lignes droites, ainsi qu'il lui a plu de le faire.

Énoncé des propositions :

Fig. 58. *Prop.* 1re. Lorsque des cercles se coupent sur la sphère et

qu'il en résulte trois arcs, chacun plus petit qu'un demi grand cercle, si deux de ces arcs sont égaux, les deux angles adjacents à la base (le 3[e] côté) sont égaux. OPUSCULES mathématiques.

Prop. 2. Étant donnés deux triangles sphériques formés par des arcs de grand cercle, من قسى من دواير عظام, dont chacun est plus petit que le demi grand cercle, si deux côtés de l'un de ces triangles sont égaux aux deux côtés correspondants de l'autre, chacun à chacun, et que l'angle compris entre les côtés égaux soit le même dans chaque triangle, les bases sont égales et les triangles égaux; de plus, les deux autres angles sont aussi égaux, chacun à chacun, dans les deux triangles. Fig. 59.

Prop. 3. Étant donné un triangle مثلث dont deux côtés sont égaux, les deux angles adjacents à la base فوق القاعدة seront égaux; et si l'on prolonge les deux côtés égaux au-dessous de la base, les angles formés au-dessous seront aussi égaux. Fig. 60.

Prop. 4. Lorsqu'un triangle a deux angles égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux entre eux. Fig. 61.

Prop. 5. Lorsque des extrémités d'un arc plus petit qu'un demi grand cercle on a mené deux arcs, chacun plus petit qu'un demi grand cercle et qui se rencontrent en un point, je dis qu'on ne peut des mêmes points de départ mener du même côté deux arcs égaux aux deux premiers, chacun à chacun. Fig. 62.

Prop. 6. Lorsque deux triangles sphériques ont les trois côtés égaux chacun à chacun, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux entre eux. Fig. 63.

OPUSCULES mathématiques.

Fig. 64. *Prop.* 7. Étant donné un arc plus petit que le demi grand cercle, et sur cet arc un point quelconque, mener par ce point un arc perpendiculaire à l'arc donné.

Fig. 65. *Prop.* 8. Tout arc élevé sur un autre arc كل قوس يقوم على قوس forme ou deux angles droits ou deux angles égaux à deux droits.

Fig. 66. *Prop.* 9. Lorsque deux arcs se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.

Telles sont les propositions contenues dans cet opuscule; elles complètent avec le *Traité des connues géométriques* de Hassan ben Haithem, l'indication des matières comprises dans le manuscrit arabe 1104 de la Bibliothèque du Roi.

L. AM. SÉDILLOT.

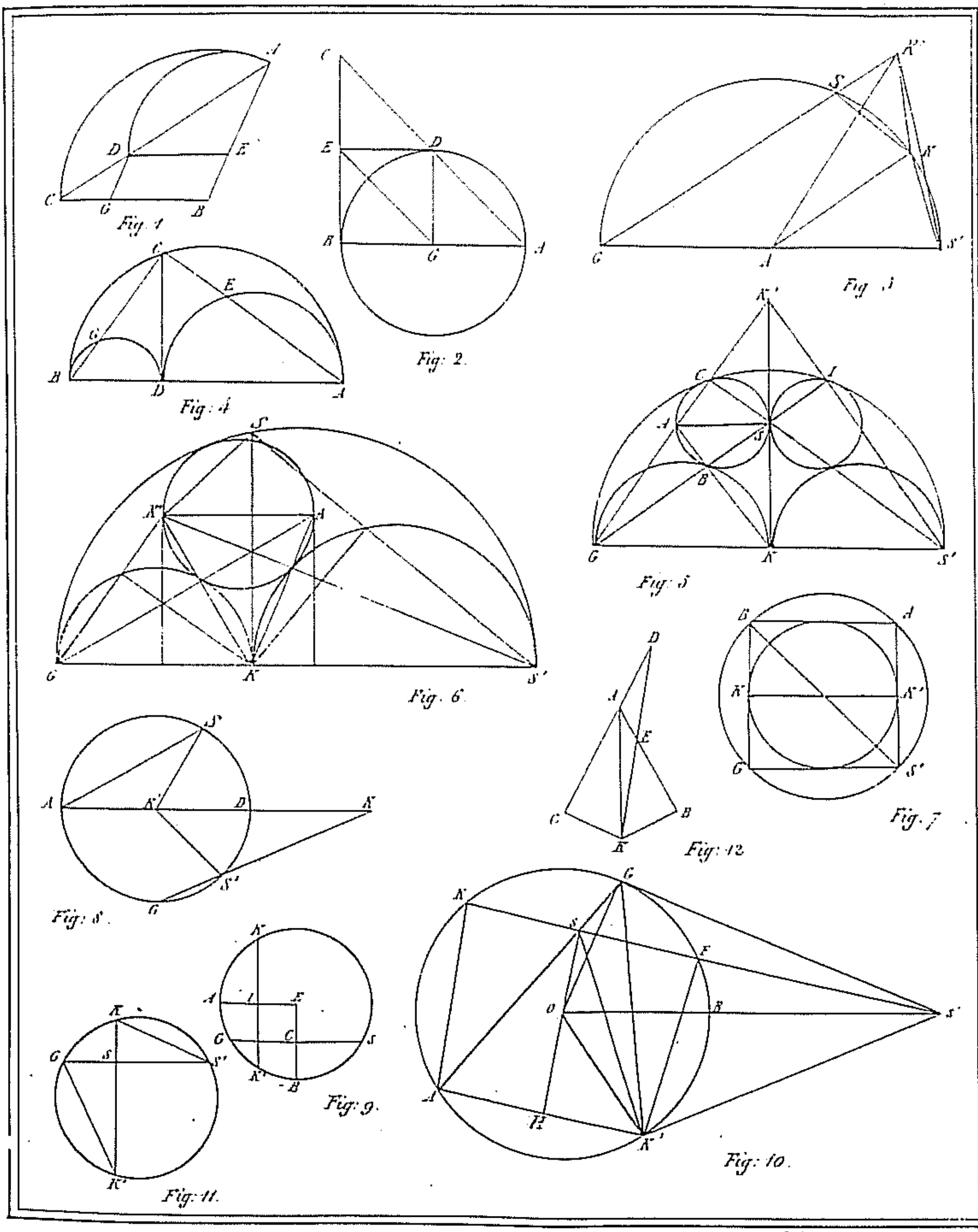
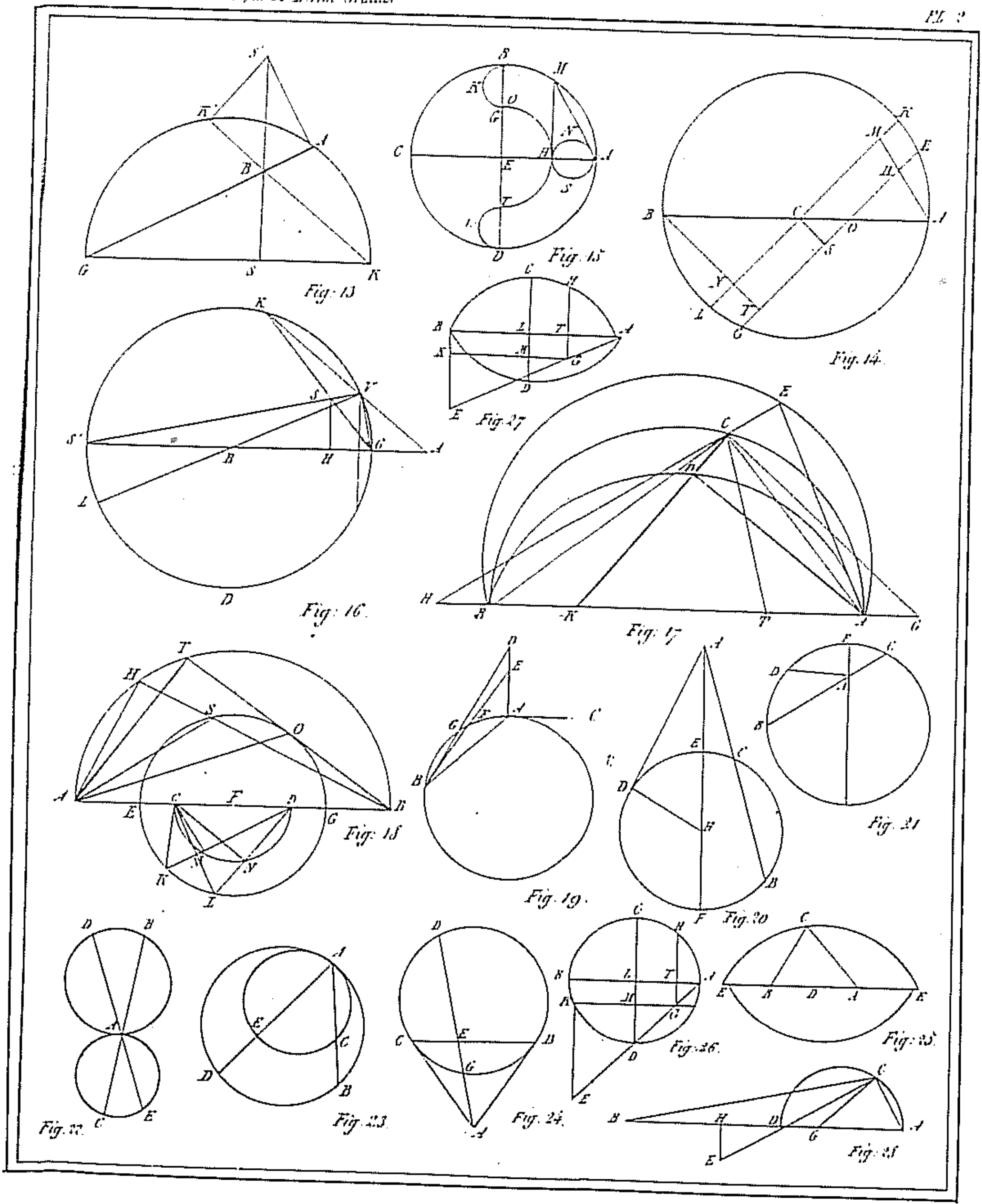
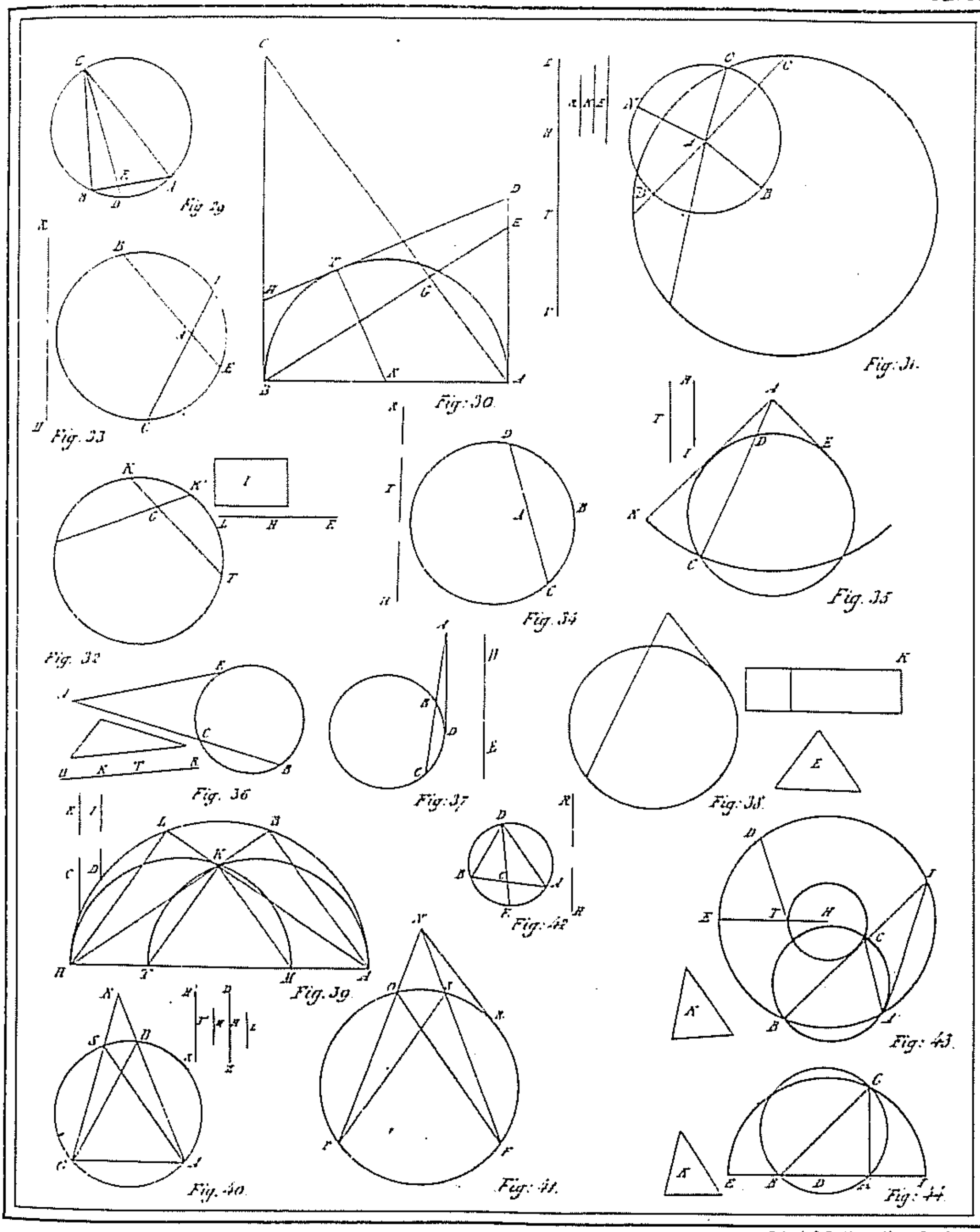


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12.

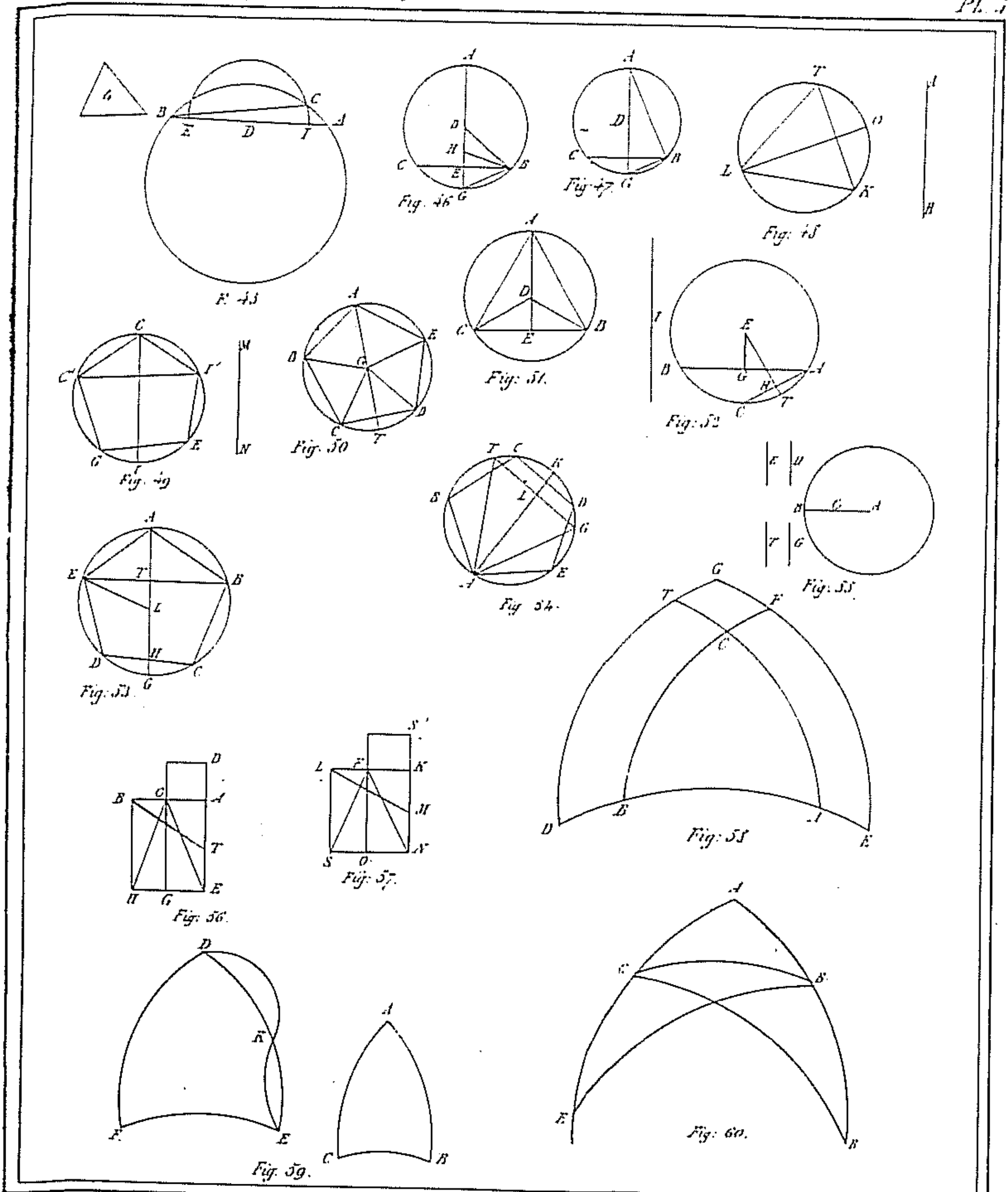
Lith. de L. Houbloup, 24 rue Dauphine



Lith: de L. Boulleux 24 rue Dauphine



Lith. de L. Fonrouge, 24, rue Dauphine.



Lith. de L. Houlloup, r. Dauphine.

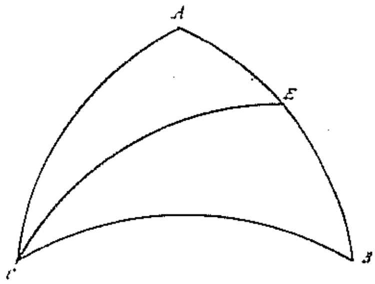


Fig: 61.

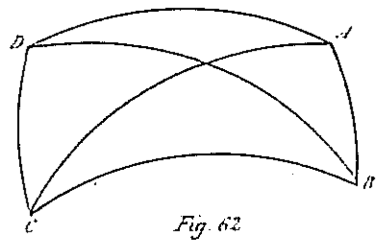


Fig. 62

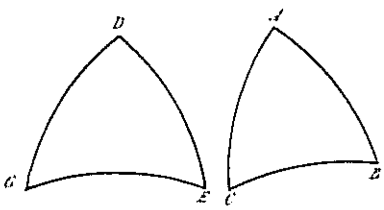


Fig: 63

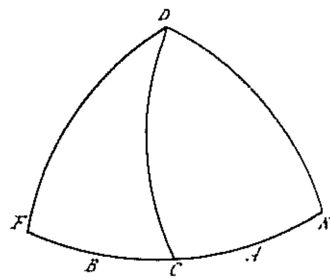


Fig: 64.

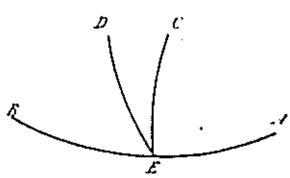


Fig. 65.

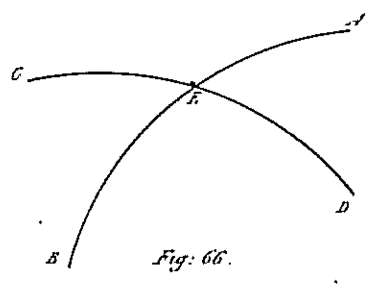


Fig: 66.

Lith: de L. Hautkamp, 24 rue Dauphine

NOTICES ET EXTRAITS

DES

MANUSCRITS

DE LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE

ET AUTRES BIBLIOTHÈQUES,

PUBLIÉS PAR L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE,

FAISANT SUITE

AUX NOTICES ET EXTRAITS LUS AU COMITÉ ÉTABLI DANS L'ACADÉMIE
DES INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES.

TOME VINGT-DEUXIÈME.

PARIS.

IMPRIMERIE NATIONALE.

M DCCC LXXIV.

NOTICES ET EXTRAITS

DES

MANUSCRITS

DE LA BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE

ET AUTRES BIBLIOTHÈQUES.

TROIS TRAITÉS ARABES

SUR

LE COMPAS PARFAIT[1]

PUBLIÉS ET TRADUITS

PAR M. FRANÇOIS WOEPCKE.

AVANT-PROPOS.

A la mort de M. François Wœpcke[2], sa famille mit entre mes mains ses papiers, parmi lesquels s'est trouvé, tout préparé et copié pour l'impression, le travail sur le *Compas parfait.* Je savais que l'auteur l'avait entrepris pour le soumettre à l'Académie des inscriptions et belles-lettres, et je le remis à la Commission des travaux lit-

[1] Le *compas parfait* est un instrument à l'aide duquel on peut tracer toutes les sections coniques.

[2] On trouvera, dans le *Journal asiatique*, année 1864, cahier de juillet, une courte notice biographique sur M. Wœpcke et la liste de ses travaux concernant les sciences mathématiques en Orient.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

-téraires, qui en sanctionna l'insertion dans les *Notices et Extraits*. La Commission pria M. de Slane de se charger de la publication, et ce savant s'en est acquitté avec tout le soin possible. Il a trouvé le texte arabe correctement établi et la traduction de toute la partie mathématique irréprochable; il n'y avait que la traduction des préfaces des deux premiers traités qui eût besoin d'une retouche pour la rendre plus précise.

M. de Slane m'a remis, sur les auteurs des trois traités, quelques notes que j'insère ici intégralement.

« Le manuscrit arabe dont nous avons ici le texte et la traduction « appartient à la bibliothèque de Leyde et porte le numéro 1076. Il « se compose de vingt-deux feuillets, et renferme trois traités sur la « théorie et sur l'emploi du compas parfait. Le premier traité fut « composé par un mathématicien nommé Mohammed Ibn el-Hoceïn, « et destiné par lui à être déposé dans la bibliothèque du célèbre « sultan Saladin (*Salâh ed-Dîn*). L'auteur le rédigea subséquemment « aux victoires remportées par ce prince sur les croisés (il s'agit de « la bataille de Tibériade ou Heuttîn, qui se livra en l'an 583 de « l'hégire, 1187 de J. C.). Saladin mourut en 589 (1193 de J. C.). « Ce fut dans l'intervalle qu'Ibn el-Hoceïn rédigea son ouvrage, car, à « la manière dont il parle de Saladin, on voit que ce prince vivait « encore. Il dit plus loin, page 18 de la traduction, qu'ayant ren- « contré, dans un ouvrage du célèbre Abou'r Reihân el-Birouni, « un passage où cet auteur mentionne le *cheïkh* Abou Sehl Ouidjen « Ibn Ouestem el-Kouhi, et un traité que ce dernier avait composé « sur le compas parfait, il ne put découvrir cet ouvrage, et, voulant « composer une notice sur le même sujet, il s'adressa au savant doc- « teur Mouça Ibn Younos Ibn Ma'na (page 19, note), et, avec le se- « cours de ce professeur, il rédigea le présent traité. Nous ne connais- « sons presque rien au sujet d'Ibn Hoceïn; mais nous voyons par son « ouvrage qu'il était géomètre habile et qu'il florissait dans la der- « nière moitié du XIIe siècle.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

« Le second traité est précisément celui dont Ibn el-Hoceïn n'avait « pas pu prendre connaissance. Il a pour auteur Abou Sehl Ouïdjen « Ibn Ouestem el-Kouhi, natif (selon l'auteur du Fihrest) des mon- « tagnes de Kouh dans le Kermân. Ouïdjen, à qui l'auteur du *Mo'-* « *djem el-Hokemâ* a consacré une notice et dont Abou'l-Faradj dit « quelques mots dans ses *Dynasties* (page 217), était un mathéma- « ticien très-distingué et tenait une haute position à la cour d'Adod « ed-Daula, le Bouide. En l'an 378 de l'hégire, subséquemment à la « conquête de l'Irak et de Baghdad, par Cheref ed-Daula, fils d'Adod « ed-Daula, il observa dans cette ville les équinoxes d'hiver et d'été; « il laissa plusieurs ouvrages dont M. Wœpcke a donné les titres « dans son *Algèbre d'Omar el-Khaïyami* (pages 54, 55, note). Son « traité sur le compas parfait me paraît mieux valoir que celui d'Ibn « el-Hoceïn. Le troisième traité a pour auteur Ahmed Ibn Moham- « med Ibn Abd el-Djelil es-Sidjzi (*natif du Sedjistân*). M. Wœpcke « nous apprend, dans l'*Algèbre d'El-Khaïyami* (page 116, note), qu'il « vivait dans la dernière moitié du xᵉ siècle. La bibliothèque natio- « nale, dit-il, possède un manuscrit écrit presque entièrement de la « main de ce géomètre, à Chiraz, pendant le cours de l'année 358 « de l'hégire (968-9 de J. C.). »

M. Wœpcke voulait faire précéder ces textes d'une introduction très-importante et d'une grande étendue, dans laquelle il se propo- sait de résumer ses longs travaux sur l'histoire des mathématiques chez les Arabes. L'objet principal de ses études, pendant de longues années, avait été de déterminer exactement le rôle que les Arabes avaient joué dans les sciences mathématiques, de préciser les théo- ries dont ils avaient hérité des Grecs et des Indiens, et des décou- vertes qu'ils y avaient ajoutées eux-mêmes; de démontrer, enfin, les emprunts que les Italiens leur ont faits dans le xiiiᵉ siècle. Il m'a entretenu très-souvent de ces sujets, et j'ai toujours admiré la passion de travail qui le dévorait, la conscience timorée qui ne lui per- mettait pas de formuler une opinion sur un point dont il ne croyait

1.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

pas encore être parfaitement sûr, et la singulière sagacité avec laquelle il suivait l'histoire d'une donnée mathématique. Il distinguait, à des signes qui paraissaient insaisissables, l'origine indienne, grecque ou arabe, d'une démonstration.

Il avait beaucoup travaillé à cette introduction et avait réuni une grande masse de matériaux; il en parlait comme d'une chose faite, selon l'habitude des auteurs quand ils ont achevé un travail dans leur tête et n'ont plus qu'à l'écrire. La Commission des travaux littéraires m'avait chargé de mettre cette introduction en état de paraître, autant que le permettraient les manuscrits laissés par l'auteur; mais je n'ai malheureusement trouvé que quelques pages mises au net et un brouillon, je crois, incomplet, écrit, en tout cas, dans une sorte de sténographie pleine d'abréviations, et auquel je ne pouvais prendre sur moi de donner une forme définitive: mon ignorance de la matière m'aurait certainement fait mal interpréter cette écriture cursive que l'auteur seul aurait pu déchiffrer avec sûreté; j'ai donc été, à mon grand regret, obligé de renoncer à cette tâche.

Je ne suis pas même en état d'indiquer quel usage M. Wœpcke voulait faire, pour son introduction, des trois traités sur le compas parfait, quelles déductions historiques il voulait en tirer; il les regardait certainement comme des pièces justificatives, qui devaient contribuer, dans une mesure quelconque, à appuyer les conclusions auxquelles il était arrivé. Il est possible que certaines indications, données par lui dans les notes, suffisent à des lecteurs versés dans l'histoire des mathématiques, pour leur permettre de compléter la pensée du traducteur, enlevé trop tôt à la science.

JULES MOHL.

VÉRIFICATION ANALYTIQUE

DES

CONSTRUCTIONS DES DEUX GÉOMÈTRES ARABES.

Le problème traité par les deux géomètres arabes consiste à déterminer l'angle générateur α d'un cône de révolution et l'inclinaison β de son axe sur le plan coupant, par le grand axe $2a$ de la section produite, par son paramètre $2p$ et par le segment k de l'axe du cône compris entre le sommet du cône et le plan coupant.

Le moyen le plus simple et le plus facile pour arriver aux relations qui expriment α et β par a, p, k, paraît être de considérer les deux sphères inscrites au cône et touchant le plan coupant, qui jouissent de la belle propriété, découverte par M. Dandelin, d'avoir pour points de contact avec le plan coupant les foyers de la section produite.

En effet, prenons une arête quelconque SDED' (fig. 1). On a $ED = EF$, $ED' = EF'$; donc $EF + EF' = DD'$, c'est-à-dire égal à la partie de l'arête comprise entre les deux cercles de contact, ce qui est une quantité constante et égale à JJ' ou $2a$, comme on le voit en faisant coïncider E avec J et J'.

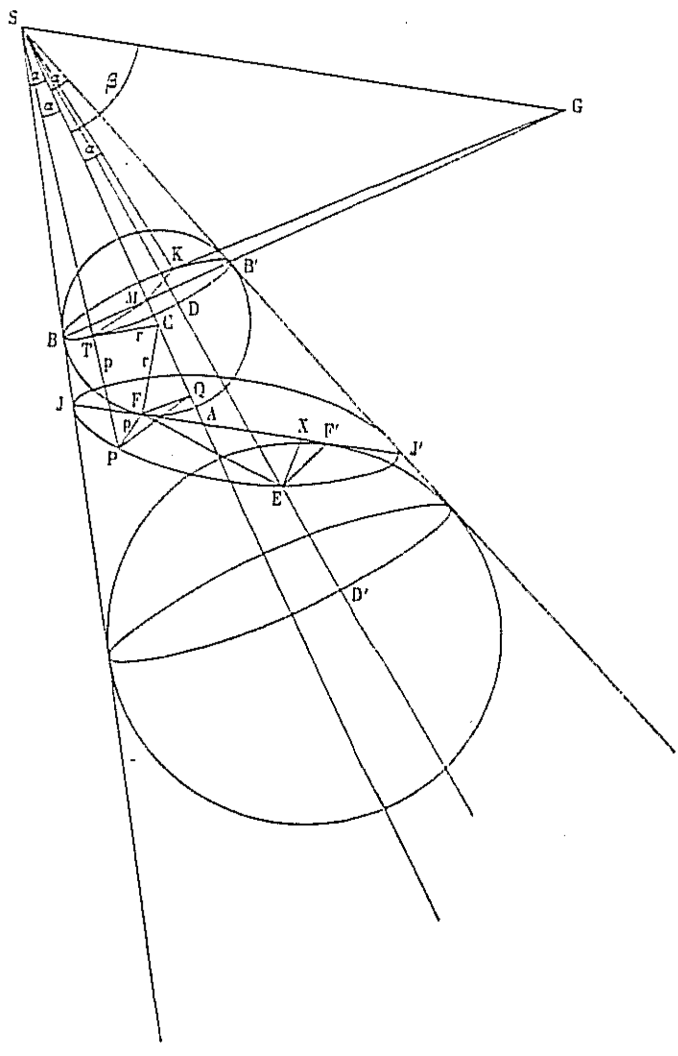
Il suit de là que la section produite par le plan coupant a pour équation $\rho + \rho' = 2a$, en prenant pour variables les deux rayons vecteurs. C'est donc une ellipse qui a pour foyers les points où le plan coupant touche les deux sphères inscrites au cône.

Élevant ensuite sur l'axe de l'ellipse, au foyer F, dans le plan de la section, une perpendiculaire, PF sera le demi-paramètre p. Menant PS qui touche la sphère inscrite en T, de sorte que $PT = PF = p$; abaissant de F

MÉMOIRE sur le compas parfait.

sur l'axe du cône la perpendiculaire FQ, et considérant que le plan de l'angle d'inclinaison FAS de l'axe du cône sur le plan coupant est perpendi-

Fig. 1.



culaire au plan coupant, on voit que PQ est perpendiculaire à QS parce que

$$\overline{PS}^2 - \overline{SQ}^2 = \left(\overline{PF}^2 + \overline{SF}^2\right) - \left(\overline{SF}^2 - \overline{FQ}^2\right) = \overline{PF}^2 + \overline{FQ}^2 = \overline{PQ}^2.$$

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Par conséquent on aura

$$CM = \frac{\overline{TC}^2}{CS}, \qquad CQ = \frac{\overline{CF}^2}{CA}, \qquad MQ = r^2 \frac{k}{CS \cdot CA},$$

ou

$$p \cos \alpha = k \frac{r}{CS} \frac{r}{CA} = k \sin \alpha \sin \beta,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{p}{k} = \operatorname{tang} \alpha \sin \beta.$$

Ensuite

$$\frac{AJ}{k} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \qquad \frac{AJ'}{k} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

donc

$$\frac{2a}{k} = \sin \alpha \frac{\sin(\beta - \alpha) + \sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)\sin(\beta - \alpha)} = \frac{2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha}{\sin^2 \beta \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha},$$

ou

$$(2) \qquad \frac{a}{k} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha \sin \beta}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

Divisant (1) et (2) membre à membre, on obtient

$$\frac{p}{a} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} = 1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha},$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{a - p}{a} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}.$$

De (1) on tire

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = 1 - \frac{p^2}{k^2} \cot^2 \alpha,$$

donc

$$\frac{a - p}{a} = \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha} - \frac{p^2}{k^2 \sin^2 \alpha}$$

ou

$$\sin^4 \alpha + \frac{p(k^2 + ap)}{(a - p)k^2} \sin^2 \alpha - \frac{ap^2}{(a - p)k^2} = 0,$$

d'où

$$\sin^2 \alpha = -\frac{p(k^2 + ap)}{2(a - p)k^2} + \sqrt{\frac{p^2(k^2 + ap)^2}{4(a - p)^2 k^4} + \frac{p^2 4a(a - p)k^2}{4(a - p)^2 k^4}}$$

ou

$$\sin^2 \alpha = \frac{p}{2(a - p)k^2} \left[\sqrt{(k^2 - ap)^2 + 4a^2 k^2} - k^2 - ap \right].$$

De (1) on tire en outre

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tang}^2\alpha = 1 + \frac{p^2}{k^2\sin^2\beta};$$

donc, en vertu de (3),

$$1 - \frac{p}{a} = 1 - \sin^2\beta + \frac{p^2}{k^2\sin^2\beta} - \frac{p^2}{k^2}$$

ou

$$\sin^4\beta - \frac{p(k^2-ap)}{ak^2}\sin^2\beta - \frac{p^2}{k^2} = 0,$$

d'où

$$\sin^2\beta = \frac{p(k^2-ap)}{2ak^2} + \sqrt{\frac{p^2(k^2-ap)^2}{4a^2k^4} + \frac{p^2\cdot 4a^2k^2}{4a^2k^4}}$$

ou

$$\sin^2\beta = \frac{p}{2ak^2}\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2} + k^2 - ap\right].$$

Les expressions ainsi obtenues pour $\sin^2\alpha$ et $\sin^2\beta$ sont précisément celles auxquelles aboutissent aussi les constructions des deux géomètres arabes, ainsi qu'il est démontré ci-après, p. 64, 102, note 1.

Pour la parabole on a $\alpha = \beta$; donc

$$p = k\,\mathrm{tang}\,\alpha\sin\alpha$$

ou

$$\frac{p}{k} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha},$$

d'où

$$\cos^2\alpha + \frac{p}{k}\cos\alpha - 1 = 0,$$

donc

$$\cos\alpha = -\frac{p}{2k} + \sqrt{\frac{p^2}{4k^2} + 1},$$

formule par laquelle s'expriment aussi les constructions des deux géomètres arabes, ainsi qu'il est démontré ci-après, p. 35, 85, note 1.

Comme les deux géomètres arabes n'ont pas considéré l'ellipse au point de vue qui sert de base aux développements qui précèdent, mais sous la forme définie par Apollonius, il sera utile de se rendre compte de l'identité de cette dernière avec la section conique que nous venons de considérer. MÉMOIRE sur le compas parfait.

Posant

$$JJ' = 2a, \quad PF = p, \quad XJ = x, \quad EX = y,$$

nous avons

$$\overline{FF'}^2 = (2a-p)^2 - p^2, \quad FF' = 2\sqrt{a(a-p)}, \quad \overline{EF}^2 - \overline{EF'}^2 = \overline{XF}^2 - \overline{XF'}^2,$$
$$2a(EF - EF') = 2\sqrt{a(a-p)}(XF - XF') = 2\sqrt{a(a-p)}(XJ - XJ'),$$

on a

$$a(EF - a) = \sqrt{a(a-p)}(x - a),$$

ou

(1) $$EF = a + \sqrt{\frac{a-p}{a}}(x-a);$$

en même temps

$$x - FX = a - \frac{FF'}{2},$$

ou

(2) $$FX = x - a + \sqrt{a(a-p)}.$$

Substituant les valeurs que donnent (1) et (2) dans

$$\overline{EX}^2 = \overline{EF}^2 - \overline{FX}^2,$$

on obtient

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2,$$

ce qui est l'équation établie par Apollonius (voyez ci-après, p. 63, note 2); car notre $2a$ est JJ', donc identique au « côté transverse » (*latus transversum*, πλαγία) d'Apollonius; et l'identité de notre $2p$ avec le « côté droit » (*latus rectum*, ὀρθία) d'Apollonius résulte des considérations suivantes :

Apollonius définit le « côté droit » par la relation :

$$\frac{\text{côté droit}}{JJ'} = \frac{BG \cdot B'G}{\overline{SG}^2},$$

où SG est menée parallèlement à JJ'. Maintenant, menant de G au cercle de

MÉMOIRE sur le compas parfait.

contact la tangente GK, les angles SMG, SMK, MKG sont des angles droits; donc

$$\frac{BG \cdot B'G}{\overline{SG}^2} = \frac{\overline{KG}^2}{\overline{SG}^2} = \frac{\overline{MG}^2 - \overline{MK}^2}{\overline{SG}^2} = \frac{(\overline{MG}^2 + \overline{SM}^2) - (\overline{MK}^2 + \overline{SM}^2)}{\overline{SG}^2}$$

$$= \frac{\overline{SG}^2 - \overline{SK}^2}{\overline{SG}^2} = 1 - \left(\frac{SK}{SG}\right)^2 = 1 - \left(\frac{SM:SG}{SM:SK}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\cos^2\alpha},$$

expression que nous avons trouvée être égale à

$$\frac{p}{a} = \frac{2p}{2a} = \frac{2p}{JJ'};$$

donc le « côté droit » d'Apollonius $= 2p$.

Apollonius suppose que le plan coupant rencontre la base du cône suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle par l'axe. On voit aisément que cette condition est remplie dans la section que nous avons considérée dans ce qui précède.

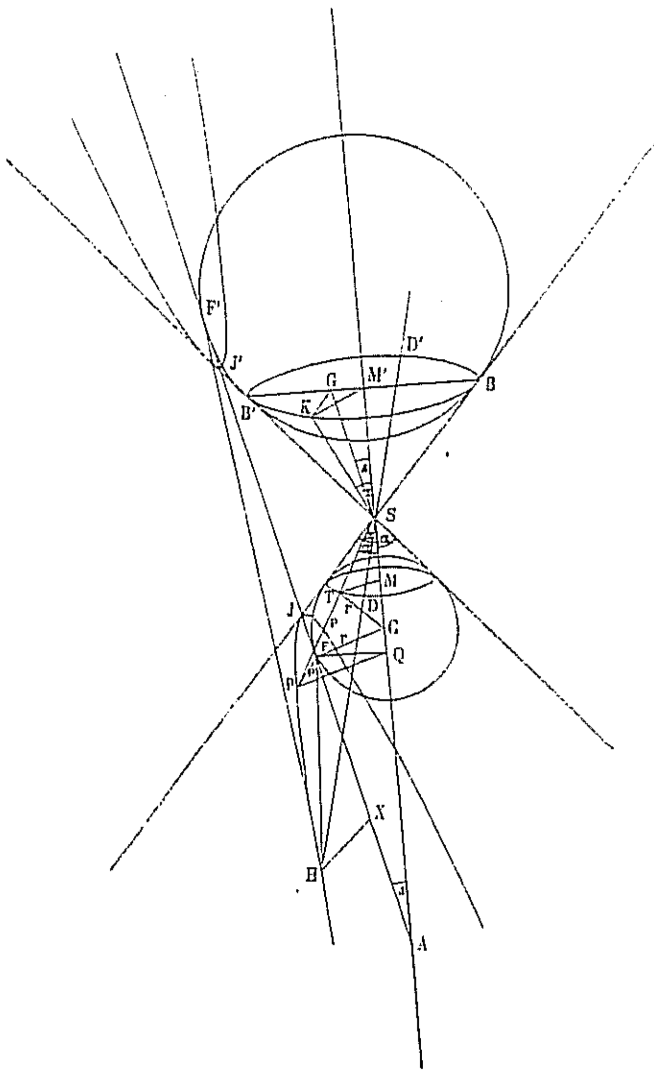
En effet, prenant le cercle de contact BKB'D pour base du cône, et le triangle BSB' pour le triangle par l'axe : puisque l'angle β ou FAM est l'inclinaison de l'axe du cône sur le plan coupant, le plan de cet angle, qui est celui dans lequel nous avons pris le triangle par l'axe, est perpendiculaire au plan coupant. Mais le plan du triangle par l'axe est perpendiculaire aussi au plan du cercle de contact. Par conséquent l'intersection du plan coupant et du plan du cercle de contact, ou de la base du cône, est perpendiculaire au plan du triangle par l'axe, donc à la base BB' de ce triangle, ce qu'il fallait vérifier.

Passons maintenant à l'hyperbole et considérons une arête quelconque HDSD' (fig. 2). Nous aurons HD' = HF', HD = HF; donc HF' − HF = DD', c'est-à-dire égal à la partie de l'arête comprise entre les deux cercles de contact, ce qui est une quantité constante et égale à $2a$, comme on le voit en faisant coïncider H avec J et J'.

La courbe produite par le plan coupant est donc identique à la courbe plane dont l'équation est $\rho' - \rho = 2a$, en prenant pour variables les deux rayons vecteurs, et les deux sphères inscrites au cône touchent le plan coupant aux foyers de l'hyperbole.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Fig. 2.



Menant dans le plan de la section, au foyer F, une perpendiculaire à l'axe de l'hyperbole, PF est le demi-paramètre p. Joignant PS qui touche la sphère inscrite en T, de sorte que $PT = PF = p$, et abaissant de F sur

2.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

l'axe du cône la perpendiculaire FQ, TM et FQ seront des perpendiculaires abaissées dans les triangles rectangles STC, CFA, des sommets des angles droits sur les hypoténuses, et PQ sera perpendiculaire à QS comme ci-dessus; donc

$$CM = \frac{\overline{TC}^2}{CS}, \qquad CQ = \frac{\overline{CF}^2}{CA}, \qquad MQ = r^2 \frac{k}{CS \cdot CA},$$

ou

$$p \cos\alpha = k \frac{r}{CS} \frac{r}{CA} = k \sin\alpha \sin\beta;$$

d'où

(1) $$\frac{p}{k} = \operatorname{tang}\alpha \sin\beta.$$

Ensuite

$$\frac{AJ}{k} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad \frac{AJ'}{k} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)},$$

donc

$$\frac{2a}{k} = \sin\alpha \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta}$$

ou

(2) $$\frac{(-a)}{k} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

Il suit de là que l'on déduit immédiatement les relations relatives à l'hyperbole de celles que nous avons obtenues pour l'ellipse, en changeant a en $-a$. Donc

$$\frac{p}{a} = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

ou

(3) $$\frac{a+p}{a} = \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha};$$

$$\sin^4\alpha - \frac{p(k^2 - ap)}{(a+p)k^2}\sin^2\alpha - \frac{ap^2}{(a+p)k^2} = 0,$$

d'où

$$\sin^2\alpha = \frac{p(k^2 - ap)}{2(a+p)k^2} + \sqrt{\frac{p^2(k^2-ap)^2}{4(a+p)^2k^4} + \frac{p^2 4a(a+p)k^2}{4(a+p)^2k^4}},$$

ou

$$\sin^2\alpha = \frac{p}{2(a+p)k^2}\left[\sqrt{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2} + k^2 - ap\right].$$

$$\sin^4\beta + \frac{p(k^2+ap)}{ak^2}\sin^2\beta - \frac{p^2}{k^2} = 0,$$

MÉMOIRE
sur le compas
parfait.

d'où

$$\sin^2\beta = -\frac{p(k^2+ap)}{2ak^2} + \sqrt{\frac{p^2(k^2+ap)^2}{4a^2k^4} + \frac{p^2\,4a^2k^2}{4a^2k^4}},$$

ou

$$\sin^2\beta = \frac{p}{2ak^2}\left[\sqrt{(k^2+ap)^2+4a^2k^2} - k^2 - ap\right].$$

Ces formules pour $\sin^2\alpha$ et $\sin^2\beta$ sont de nouveau identiques à celles par lesquelles s'expriment les résultats des constructions des deux géomètres arabes, ainsi qu'il est démontré ci-après, p. 49, 92, note 1.

On se rend aisément compte de l'identité de la section que nous venons de considérer avec celle qu'a définie Apollonius.

En effet, posant

$$JJ' = 2a, \quad PF = p, \quad XJ = x, \quad HX = y,$$

on a

$$\overline{FF'}^2 = (2a+p)^2 - p^2, \quad FF' = 2\sqrt{a(a+p)},$$

$$\overline{HF'}^2 - \overline{HF}^2 = \overline{XF'}^2 - \overline{XF}^2,$$

$$2a(HF'+HF) = 2\sqrt{a(a+p)}\,(XF'+XF) = 2\sqrt{a(a+p)}\,(XJ'+XJ),$$

ou

$$a(a+HF) = \sqrt{a(a+p)}\,(a+x),$$

ou

(1) $$HF = -a + \sqrt{\frac{a+p}{a}}\,(a+x);$$

en même temps

$$x - FX = \frac{FF'}{2} - a,$$

ou

(2) $$FX = x + a - \sqrt{a(a+p)}.$$

Substituant les valeurs que donnent (1) et (2) dans

$$\overline{HX}^2 = \overline{HF}^2 - \overline{FX}^2,$$

on obtient

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2,$$

ce qui est l'équation établie par Apollonius (voyez ci-après, p. 49); car notre $2a$ est JJ', donc identique au « côté transverse » d'Apollonius; et l'identité de notre $2p$ avec le « côté droit » d'Apollonius se démontre comme il suit.

Apollonius définit le « côté droit » par la relation suivante :

$$\frac{\text{côté droit}}{\mathrm{JJ'}} = \frac{\mathrm{BG}\cdot\mathrm{B'G}}{\overline{\mathrm{SG}}^2},$$

où SG est menée parallèlement à JJ'. Mais, élevant sur le diamètre BB', au point G et dans le plan du cercle de contact, la perpendiculaire GK, on a

$$\frac{\mathrm{BG}\cdot\mathrm{B'G}}{\overline{\mathrm{SG}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{KG}}^2}{\overline{\mathrm{SG}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{M'K}}^2 - \overline{\mathrm{M'G}}^2}{\overline{\mathrm{SG}}^2} = \frac{(\overline{\mathrm{M'K}}^2 + \overline{\mathrm{M'S}}^2) - (\overline{\mathrm{M'G}}^2 + \overline{\mathrm{M'S}}^2)}{\overline{\mathrm{SG}}^2}$$

$$= \frac{\overline{\mathrm{SK}}^2 - \overline{\mathrm{SG}}^2}{\overline{\mathrm{SG}}^2} = \left(\frac{\mathrm{SK}}{\mathrm{SG}}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\mathrm{SM'}:\mathrm{SG}}{\mathrm{SM'}:\mathrm{SK}}\right)^2 - 1$$

$$= \left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 - 1 = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{p}{a} = \frac{2p}{2a} = \frac{2p}{\mathrm{JJ'}};$$

donc le « côté droit » $= 2p$.

Enfin on voit, absolument comme ci-dessus, que le plan coupant rencontre la base du cône suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle par l'axe.

TRADUCTION.

Au nom de Dieu, le Miséricordieux, le Clément!

Louange à Dieu, Seigneur des mondes; que sa bénédiction repose sur la meilleure de ses créatures, Mohammed le prophète, et sur sa famille noble entre toutes!

Après que l'auteur [1] eut composé l'ouvrage intitulé : *El Ichâret en-Naceriya* [2] et qu'il eut formé le projet de le déposer dans la bibliothèque royale et seigneuriale, que Dieu très-haut rende florissante! il conçut le désir d'y joindre un pendant qui pût montrer la bonté des fruits (*de cet écrit*) et la certitude de ses résultats.

L'auteur avait promis, dans son ouvrage, de faire connaître le compas parfait et de soumettre à une révision son mémoire sur cet instrument. Une partie des éléments de ce mémoire avait été mise en ordre, et les principes de ses propositions avaient été établis avant que l'auteur eût quitté le lieu où il demeurait pour se rendre à la résidence impériale.

Il s'empressa donc de satisfaire à cette promesse, après avoir achevé son *Kitab el-Ichâra* et donné, au moyen d'une figure

[1] Le texte arabe porte العبد (*l'esclave*). Ce mot, employé par un individu en parlant de lui-même, signifie *votre humble serviteur*. — (De S.)

[2] Ce titre signifie *l'indication nacérienne*. L'ouvrage qui le portait renfermait peut-être l'horoscope de Saladin, prince dont le titre était *El Malec en-Nacer* (*le prince secourable*). Haddji-Khalifa ne fait pas mention de ce traité dans son dictionnaire bibliographique. — (De S.)

MÉMOIRE sur le compas parfait.

exacte, une bonne représentation de la forme du compas parfait. Il expose dans ce mémoire l'utilité de cet instrument, les services qu'il peut rendre, la manière de le construire et de l'employer (*enfin toutes ses propriétés*), en grand[1] et en détail. Dans tout cela il a eu pour but[2] d'offrir un hommage à notre Maître, le Seigneur glorieux, El-Malec en-Nacer, celui qui a rétabli l'unanimité parmi les musulmans et qui a dompté les adorateurs des croix, celui qui est le salut (*saláh*) du monde et de la religion (*ed-dín*), le sultan de l'islamisme et des musulmans, Abou'l-Modaffer Youçof Ebn Ayoub, qui a donné une nouvelle vie à l'empire du Commandeur des croyants (*le khalife de Baghdad*). Puisse Dieu couvrir de gloire ceux qui l'ont aidé, multiplier ses victoires et rendre son empire le séjour de toutes les vertus, de même qu'il a fait de ses mains royales la fontaine des bienfaits! Puisse-t-il ranimer la loi de la justice en accordant à ce prince un long règne, de même que, par ce règne, il a étouffé les hérésies de l'ignorance et tué la tyrannie! Puisse-t-il attacher fermement la victoire à ses étendards, associer constamment l'appui divin à ses conseils, accorder à ses escadrons un puissant secours, et entourer ses armées de succès et d'autorité! Puisse-t-il accorder une durée éternelle à son empire et lui maintenir le haut commandement, par (*les mérites de*) Mohammed et de la famille du prophète!

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES SUR LE COMPAS PARFAIT.

La construction des trois sections coniques est un des problèmes les plus importants de la géométrie, une des matières qui donnent lieu, pour la pratique, aux procédés les plus élé-

[1] Dans le texte arabe, il faut remplacer وجمله par وجُمَله. (de S.)
[2] Il faut sans doute lire وغرض à la place de وعرض dans le texte arabe. (de S.)

MÉMOIRE sur le compas parfait.

gants, et, pour la théorie, aux considérations les plus ingénieuses et les plus utiles. Apollonius, le grand géomètre, a développé, dans son ouvrage intitulé *le Traité des Coniques*, la plupart des caractères merveilleux et des admirables propriétés de ces trois courbes. En pénétrant dans leur nature la plus intime par les spéculations les plus diverses, il remplit d'admiration les intelligences, en même temps qu'il étonne les esprits par des inventions et des artifices particuliers fondés sur la théorie des coniques, et qui servent à la description des cercles parallèles à l'horizon dans l'astrolabe à projection conique, ainsi qu'au tracé des lignes horaires[1] dans les cadrans solaires construits sur des plaques (horizontales ou inclinées), ou sur des murailles perpendiculaires au plan de l'horizon. Car les cercles parallèles de la hauteur et les extrémités des ombres se projettent toujours sur ces surfaces, suivant des hyperboles, des ellipses ou des paraboles, selon les latitudes et les horizons dans l'astrolabe, et dans les cadrans solaires horizontaux, inclinés ou verticaux, suivant les positions de ceux-ci.

Dans les méthodes employées pour produire la figure des trois sections coniques dans le plan, on s'est borné à la construction de points rapprochés entre eux et situés sur la circonférence de la courbe, en abandonnant au dessinateur de relier ces points entre eux avec plus ou moins d'habileté, de manière à donner aux traits de liaison une position homogène et conforme à la symétrie de l'ensemble. Il s'agit d'obtenir ainsi des circonférences de sections qui ne présentent pas des inégalités ni des écarts sensibles. Certes, s'il se trouvait des artistes d'un

[1] Les courbes qui deviennent des sections coniques dans le plan du cadran solaire sont les courbes diurnes, attendu que ce sont les intersections de ce plan avec un cône ayant pour sommet l'extrémité du style et pour base le cercle parallèle à l'équateur parcouru par le soleil pendant un jour déterminé. C'est de ces courbes que l'on part pour tracer ensuite les courbes des heures inégales.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

assez grand talent pour satisfaire à tout ce qu'exige cette tâche, le sens matériel de la vue ne saurait répondre de l'absence réelle de tout écart, et même le plus grand soin ne saurait ni s'en apercevoir, ni prévenir des erreurs dans l'exécution du dessin.

En effet, les choses qui sont virtuellement[1] du domaine de l'intelligible ne s'exécutent effectivement[2] qu'avec difficulté; cela se voit lorsqu'on compare le résultat avec la notion de ces choses telle qu'elle existe dans la pensée; mais le procédé réel est toujours d'autant plus digne d'être suivi qu'il se rapproche davantage de la conception virtuelle. Cela est particulièrement vrai pour les matières qui concernent les sciences exactes, de sorte qu'un cercle tracé avec le compas approche de plus près d'un véritable cercle qu'un cercle tracé d'une autre manière[3].

Les anciens[4] avaient inventé, pour la description des sections coniques, un instrument qu'ils avaient appelé le compas parfait, parce qu'on pouvait tracer, au moyen de cet instrument, toutes les espèces des lignes courbes et droites. Mais il n'est pas arrivé entre nos mains un écrit quelconque, soit de l'inventeur de l'instrument, soit d'un autre auteur parmi les anciens, qui eût éclairci la manière de construire cet instrument et de s'en servir.

Nous avons cependant rencontré, dans l'ouvrage d'Abou'r-Reïhân el-Bîrouni intitulé : *Exposé complet des manières possibles de construire l'astrolabe*[5], un passage où cet auteur mentionne le

(1) بالفعل κατ' ἐνέργειαν.

(2) بالقوّة κατὰ δύναμιν.

(3) Pour من بغيره lisez منه بغيره. — (De S.)

(4) Les auteurs arabes désignent par cette expression souvent les Grecs, mais souvent aussi des auteurs arabes d'une époque antérieure à la leur.

(5) Cet ouvrage d'El-Bîrouni est mentionné dans le catalogue de la bibliothèque bod-

cheïkh Abou Sehl Ouïdjen Ben Ouestem el-Kouhi et un traité que ce dernier avait composé sur la manière de construire l'instrument dont il s'agit et de s'en servir. Abou'r-Reïhân raconte aussi qu'El-Kouhi avait fondé ses méthodes pour décrire les sections coniques au moyen de cet instrument sur des théorèmes qu'il avait exposés dans un ouvrage intitulé : *Division des lignes suivant des rapports dont les termes sont des surfaces.* Nous n'avons pas pu prendre connaissance de cet ouvrage.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

C'est ce qui m'avait inspiré un vif désir de découvrir les démonstrations des méthodes qu'Abou'r-Reïhân avait mentionnées comme contenues dans le traité d'Abou-Sehl, bien que je fusse privé de la connaissance de cet ouvrage. J'espérais retrouver identiquement les démonstrations d'El-Kouhi, ou bien d'autres conduisant à celles-là au moyen des raisonnements propres à déduire les unes des autres.

Je me suis donc adressé, à ce sujet, à notre seigneur le cheïkh, l'imâm, le savant Abou'l-Ma'ali Mouça Ben Younos[1],

léienne sous le numéro 1037[2], et dans le catalogue de la bibliothèque de Leyde (de 1716) sous le numéro 1138.

[1] Ibn Khallikân a consacré à Ben Younos Ben Ma'na une de ses biographies des hommes illustres de l'Islam. (Voir la traduction de M. le baron de Slane, t. III, p. 466 à 474.) Il est vrai qu'Ibn Khallikân donne à ce savant le *konya* ou surnom d'Abou'l-Fath, tandis que notre auteur l'appelle Abou'l-Ma'ali. Il est néanmoins vraisemblable que l'un et l'autre ont en vue le même personnage. D'après Ibn Khallikân, Mouça Ben Younos naquit à Mosul en 1156 de notre ère, et devint plus tard professeur dans cette ville en remplacement de son père. D'un autre côté, les expressions dont notre auteur se sert au commencement de sa préface paraissent indiquer qu'il était récemment arrivé au Caire et qu'il y avait apporté son ouvrage presque achevé; en même temps il appelle Salâh ed-dîn « le dompteur des adorateurs de la croix, » ce qui rend assez probable que la rédaction de cette préface fut postérieure à la bataille de Heuttîn, qui eut lieu en 1187. A cette époque, Mouça Ben Younos était âgé de trente et un ans et pouvait, par conséquent, être revêtu de fonctions importantes et donner à notre auteur des conseils touchant la résolution du problème que celui-ci se proposait de traiter.

3.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

puisse Dieu lui conserver longtemps son rang élevé. Je l'ai prié de faire de cette recherche l'objet de ses méditations, et de s'associer à moi dans l'examen du problème, afin de parvenir à rendre traitables les difficultés qu'il présente, et à en éclaircir les points obscurs. Je savais cependant combien il est accablé d'affaires souvent imprévues, qui absorbent tout son temps et l'empêchent de se livrer à des occupations sérieuses; c'est à ce point qu'il peut à peine remplir ses devoirs comme professeur de jurisprudence et des fondamentaux (de la théologie dogmatique), et qu'il n'a guère de loisir pour s'occuper de ce qui se rattache à ces sujets; outre qu'il est chargé de surveiller la gestion d'affaires importantes confiées à son administration et à sa direction. Malgré cela, il a accueilli favorablement ma prière, se montrant disposé à m'aider dans ma recherche et se conformant aux habitudes de complaisance, de bonté et d'obligeance par lesquelles il s'est toujours distingué[1]. Je supplie Dieu que, par sa générosité et sa puissance, il lui prête une longue vie, et me permette de satisfaire au désir que j'éprouve de lui témoigner la reconnaissance à laquelle m'obligent les bontés et les faveurs dont il m'a comblé. Tout ce que je vais maintenant exposer est le fruit de l'assistance qu'il (*c'est-à-dire* Ben Younos) m'a prêtée dans l'exploration des parties obscures du problème; ce sont les résultats des notes que j'avais prises pendant que je m'occupais à travailler avec lui et à examiner les principes généraux et les théories spéciales, les détails et l'ensemble de la question.

Je commencerai à présent à décrire le compas parfait, sa forme et la manière de le construire. Je donnerai ensuite des propositions servant à démontrer que les lignes tracées au moyen de cet instrument sont des sections coniques, et

[1] Dans le texte arabe, il faut remplacer حزنا par جريا et بطوله par تطوّله.—(DeS.)

MÉMOIRE sur le compas parfait.

j'offrirai au lecteur un travail ordonné de telle façon qu'il réponde à la fois au désir du savant et de l'artiste, et réunissant dans une discussion complète toutes les démonstrations utiles au problème. Quelques autres propositions seront peut-être insérées vers la fin (*de l'ouvrage*)[1], pour la raison qu'elles se laissent tirer de ces figures, quoiqu'elles ne s'y présentent qu'accidentellement, étant étrangères au but propre de l'ouvrage[2].

J'exposerai la manière de décrire les sections coniques l'une après l'autre, avec les propositions dont chaque section dépend et avec tout ce qui s'y rattache; et je terminerai cet exposé par une méthode expéditive à l'usage de l'artiste, dégagée de l'enchaînement théorique sur lequel est fondée la démonstration, exprimée dans les termes les plus brefs et les plus concis, et conduisant au but de la manière la plus directe et la plus facile. La parabole sera traitée la première, puis l'hyperbole, puis l'ellipse, suivant l'ordre consacré qui seul doit être observé dans le tracé de ces courbes.

Le lecteur qui examine ces figures s'apercevra sans doute de la grande différence qui existe entre la rapidité avec laquelle les méthodes développées dans ces propositions conduisent à la construction des sections coniques, et entre ce qu'ont offert à cet égard d'autres auteurs. Dieu est celui dont nous implorons le secours, c'est en Lui que nous nous confions.

DESCRIPTION DU COMPAS PARFAIT ET DE LA MANIÈRE DE LE CONSTRUIRE.

Description du compas parfait. — Lorsqu'on élève sur une surface plane, dans un point donné de cette surface, une ligne

[1] Le texte arabe de ce passage est altéré : pour obtenir le sens que le traducteur lui a donné, il faut remplacer عقب par عقبه . — (De S.)

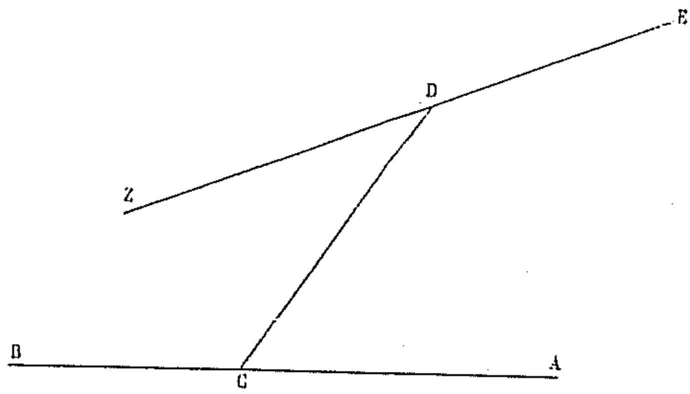
[2] Telle paraît être la proposition III du chapitre de la parabole.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

droite dont une des extrémités est fixée à ce point, et qui peut se mouvoir au-dessus de cette surface vers deux côtés opposés l'un à l'autre; et que, par un point de cette ligne, dont une des deux extrémités est fixe, il passe une autre ligne qui a trois mouvements : premièrement un mouvement correspondant à celui de la ligne dont l'extrémité est fixe, secondement un mouvement rotatoire autour de cette ligne, troisièmement un mouvement longitudinal de la seconde ligne elle-même suivant son prolongement de part et d'autre; lorsque donc un instrument réunit ces trois mouvements, il s'appelle un compas parfait.

Par exemple, la droite AB[1] (fig. 3) sera la base du compas,

Fig. 3.



et placée dans le plan dans lequel se trouve le centre du com-

[1] Voici les lettres de renvoi employées dans le texte arabe et les équivalents que feu M. Woepcke leur a assignés dans sa traduction :

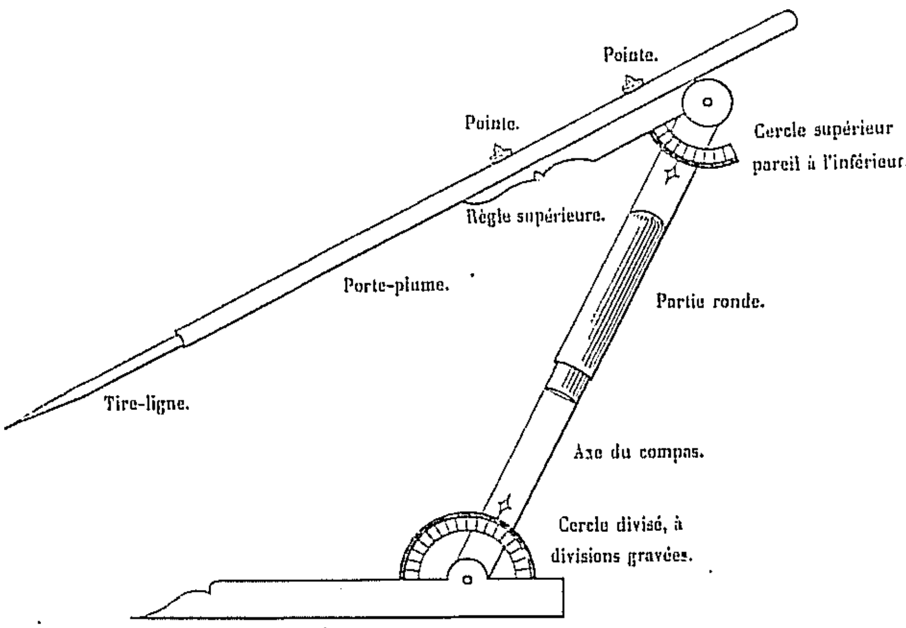
ا = A	ز = Z	م = M	ق = Q
ب = B	ح = H	ن = N	ر = R
ج = C	ط = T	س = S	ش = S'
د = D	ى = I	ع = O	ت = T''
ه = E	ك = K	ف = F	ظ = T'
و = W	ل = L	ص = X	

pas [1]. Du point C de la droite AB sera menée la droite CD qui se meut dans le plan qui passe par les points A, C, D, B, vers les deux côtés de A et de B. Par le point D de la droite CD passera la droite EDZ qui a trois mouvements : un mouvement correspondant à celui de la ligne CD, un autre autour de C, et un troisième en vertu duquel le droite EDZ se meut elle-même suivant son prolongement vers les deux côtés de E et de Z.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Exécution de l'instrument par l'artiste (fig. 4). — On prend une règle faite d'une substance malléable et fusible, ou d'un bois

Fig. 4.



dur, facile à travailler et peu susceptible de s'altérer sous l'influence de la chaleur de l'été et du froid de l'hiver. (On le

[1] C'est le point C.

choisit ainsi) afin d'éviter le ballottement et les secousses dans les parties (de l'instrument), et afin de donner à celles-ci le plus haut degré possible d'égalité et de justesse. La longueur de la règle [1] doit être d'un empan et demi. On prend ensuite l'extrémité de cette règle, et, en enlevant à la lime le métal ou le bois, on y forme la femelle d'une articulation [2] faisant corps avec la règle; il n'est pas nécessaire, d'ailleurs, que la femelle se trouve précisément à l'extrémité de la règle.

On construit un mâle correspondant à cette femelle, à l'extrémité d'une autre règle dont une moitié, à savoir la partie supérieure, est ronde, tandis que la moitié où se trouve le mâle est plate. On introduit après cela le mâle de l'articulation dans la femelle, de manière qu'il s'y applique exactement, tout en se laissant remuer facilement; de sorte que, dans son mouvement de rotation, il reste constamment en contact avec les parois de la femelle. Cette articulation ne doit offrir ni mouvements saccadés, ni défauts d'ajustement; afin que les angles droits et autres (formés par les deux règles) demeurent constants. On veillera à l'exacte justesse de la jointure.

On prend ensuite un tube de la même substance, pouvant se placer en manière de gaîne au-dessus de la moitié ronde de la règle à l'extrémité de laquelle se trouve le mâle. Le mouvement de ce tube sur la partie ronde de la règle doit être aisé et sans ballottement. L'extrémité supérieure du tube doit avoir la forme d'une règle, afin que l'on puisse, en enlevant (le métal ou le bois), y construire de nouveau la femelle d'une articulation dont le mâle se trouve à l'extrémité d'une troisième règle pareille à celle qui forme la base du compas.

On fixera sur le dos de cette règle deux ou trois pointes qui

[1] Pour مقدار lisez مقدارها. — (De S.)
[2] La vraie leçon du mot برمادجه est sans aucun doute نرماده.

passeront à travers un porte-plume fait d'une substance qui permette d'en rendre la longueur égale à une fois et demie celle de la règle qui forme la base du compas. Ce porte-plume doit être fendu au milieu, suivant toute sa longueur, à l'exception de l'extrémité supérieure et jusqu'à l'extrémité inférieure, de façon qu'il puisse glisser, le long des pointes fixées sur le dos de la règle supérieure, d'un mouvement qui doit être aussi aisé et aussi exempt de ballottement que l'habileté de l'artiste est capable de le rendre. A la place des pointes et du porte-plume fendu, on prend aussi quelquefois un tube qui est attaché sur la règle et on y fait passer le porte-plume.

A l'extrémité du porte-plume doit se trouver un tire-ligne, au moyen duquel on peut tracer dans le plan, avec de l'encre ou autrement, (une courbe) à deux branches. Le mouvement du porte-plume, en glissant le long des pointes fixées sur le dos de la règle, doit être beaucoup plus doux que les autres mouvements précédemment mentionnés, de sorte que, lorsqu'on le laisse glisser, il descende le long des pointes ou dans le tube d'un mouvement uniforme, et que, lorsqu'il est arrêté par quelque obstacle, il remonte de nouveau d'un mouvement pareil à celui qu'il avait en descendant.

Dans les deux angles que l'axe du compas fait avec la base et avec la règle transversale, on construit deux quarts de cercle de laiton dont les circonférences sont divisées en autant de parties que possible. Ces quarts de cercle doivent être fixés de manière à marquer la grandeur des angles sans gêner le mouvement de l'axe du compas, ainsi qu'on le voit dans la figure.

L'emboîtement des deux jointures, de celle qui se trouve près de la base du compas et de celle qui se trouve près du porte-plume, doit être très-exact, et l'on doit mettre un soin

MÉMOIRE sur le compas parfait.

extrême à exécuter tout le travail de l'instrument avec la plus grande habileté et avec toute l'exactitude possible. La figure de l'instrument se trouve ci-dessus.

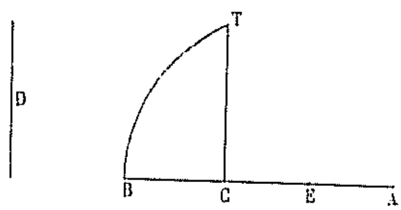
PROPOSITIONS RELATIVES À LA DESCRIPTION DE LA PARABOLE AU MOYEN DU COMPAS PARFAIT.

Proposition I.

Problème. — Nous désirons appliquer à la droite donnée AC (fig. 5) un rectangle égal au carré de la droite donnée D et dépassant la droite AC d'un carré.

Solution. — Nous divisons AC en deux parties égales au point E; nous élevons au point C, perpendiculairement à AC, une droite CT égale à la droite D; et, prenant le point E pour centre, nous décrivons, avec un rayon égal à la distance ET, un cercle qui coupe le prolongement de AC au point B.

Fig. 5.



Démonstration. — AB fois BC plus le carré de EC est égal au carré de EB, c'est-à-dire à la somme des deux carrés de EC et de CT. Rejetant le carré de EC commun aux deux sommes, il reste le rectangle AB fois BC égal au carré de CT, c'est-à-dire au carré de D. C'est ce qu'il fallait démontrer[1].

[1] L'objet de cette proposition est la construction de l'équation

$$(AC+x)\,x=\overline{D}^2;$$

la valeur de l'inconnue x est représentée par la ligne BC, de sorte que l'on a

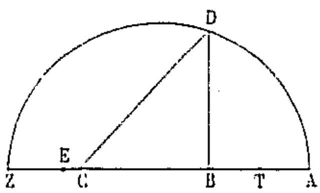
$$BC=\sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2+D^2}-\frac{AC}{2}.$$

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Proposition II.

Problème. — Étant données les deux droites AB, BC (fig. 6) placées bout à bout suivant le prolongement l'une de l'autre, et une droite indéfiniment prolongée étant élevée au point B perpendiculairement à AC, nous désirons prolonger AC d'une quantité telle, qu'un demi-cercle décrit sur la droite AC augmentée du prolongement, comme diamètre, coupe la perpendiculaire en un point tel que la droite qui joint ce point au point C soit égale à la droite BC augmentée du prolongement.

Fig. 6.



Solution. — Nous appliquons au double de BC un rectangle égal au carré de la moitié de AB et dépassant la droite double de BC d'un carré[1]. Que le côté de ce carré soit CE. Nous prolongeons BE jusqu'à Z en faisant ZE égal à la moitié de AB, et nous décrivons sur AZ le demi-cercle ADZ.

Je dis que la droite DC est égale à la droite BZ.

Démonstration. — Le carré de DC est égal à la somme des deux carrés de DB et de BC, c'est-à-dire au rectangle ZB fois BA plus le carré de BC, ou au rectangle AC fois CB plus le rectangle ZC fois BA. Le carré de ET[2] est égal à la somme des deux carrés de EC et de CT plus le double rectangle EC fois CT. Mais le carré de CT est égal au rectangle AC fois CB plus le carré de TB, et le rectangle AB fois CZ est égal au rec-

[1] La manière d'exécuter cette construction vient d'être enseignée dans la proposition I.

[2] Il résulte du contexte que l'auteur désigne par T le point milieu de AB.

4.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

tangle AB fois EZ, c'est-à-dire au double du carré de TB, plus le rectangle AB fois CE, c'est-à-dire le double du rectangle TB fois CE. Rejetons le carré de TB et le rectangle AC fois CB, communs aux deux sommes[1], il restera le carré de TB plus le double du rectangle TB fois CE, égal à ce qui reste du carré de TE, à savoir au carré de CE plus le double du rectangle CE fois CT. Mais, puisque le carré de CE plus le double du rectangle CE fois CB est égal au carré de TB[2], attendu que c'est la surface appliquée (au double de BC), il reste de part et d'autre le double du rectangle TB fois CE[3]. Par conséquent les deux carrés de CD et de TE sont égaux; donc les lignes elles-mêmes sont égales. Mais TE est égal à BZ, d'où il suit que les lignes CD et BZ sont égales. C'est ce qu'il fallait démontrer[4].

[1] D'après ce qui précède, on a

$$\overline{DC}^2 = ZC\cdot BA + CB\cdot AC, \tag{1}$$
$$\overline{ET}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CT}^2 + 2EC\cdot CT, \tag{2}$$
$$\overline{CT}^2 = AC\cdot CB + \overline{TB}^2, \tag{3}$$
$$AB\cdot CZ = 2\overline{TB}^2 + 2TB\cdot CE; \tag{4}$$

substituant (4) dans (1) et (3) dans (2), on aura

$$\overline{DC}^2 = 2\overline{TB}^2 + 2TB\cdot CE + CB\cdot AC = (\overline{TB}^2 + AC\cdot CB) + \overline{TB}^2 + 2TB\cdot CE, \tag{5}$$
$$\overline{ET}^2 = \overline{EC}^2 + AC\cdot CB + \overline{TB}^2 + 2EC.CT = (\overline{TB}^2 + AC\cdot CB) + \overline{CE}^2 + 2CE\cdot CT. \tag{6}$$

[2] Voir ci-dessus, p. 27, l. 13 à 18.

[3] En remplaçant les équations (5) et (6) par

$$\overline{DC}^2 = (\overline{TB}^2 + AC\cdot CB) + \overline{TB}^2 + 2CE\cdot TB, \tag{7}$$
$$\overline{ET}^2 = (\overline{TB}^2 + AC\cdot CB) + \overline{CE}^2 + 2CE\cdot CB + 2CE\cdot TB, \tag{8}$$

et rejetant, dans les seconds membres, d'abord la partie commune $\overline{TB}^2 + AC\cdot CB$, puis les parties $\overline{TB}^2$ et $\overline{CE}^2 + 2CE.CB$ qui sont égales en vertu de la construction préliminaire.

[4] Les deux lignes égales CD et BZ, construites dans cette proposition, s'expriment

Proposition III.

Problème. — De la proposition précédente il suit que, étant données deux droites, telles que les droites AB, BC (fig. 7) placées bout à bout suivant le prolongement l'une de l'autre, nous pouvons diviser l'une d'elles AB en un point tel, que le segment compris entre ce point et le point C soit à CB comme le segment compris entre ce point et B est au segment compris entre le même point et le point A.

Fig. 7.

Solution. — Nous prolongeons BC du côté de C de la même quantité que précédemment[1]. Soit CD ce prolongement. Nous retranchons ensuite CD de BA, de manière à obtenir BE[2].

Je dis que la proportion cherchée est trouvée, attendu que EC est à CB comme EB est à EA.

Démonstration. — Nous avons démontré précédemment[3] au moyen des données de la manière suivante : On a d'abord construit (d'après prop. I) l'équation

$$(2BC+y)y=\left(\frac{AB}{2}\right)^2;$$

la valeur de l'inconnue y est représentée par la ligne CE, de sorte que l'on a

$$CE=\sqrt{\overline{BC}^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}-BC;$$

mais

$$CD=BZ=CE+BC+EZ=CE+BC+\frac{AB}{2},$$

donc

$$CD=BZ=\frac{AB}{2}+\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\overline{BC}^2}.$$

[1] C'est-à-dire : on construit le point D de la figure 7, de manière qu'il satisfasse aux mêmes conditions que le point Z dans la figure 6.

[2] C'est-à-dire, nous faisons BE = CD.

[3] Voir ci-dessus, p. 27; on doit se rappeler en même temps que, dans la figure 6, on a DC = BZ.

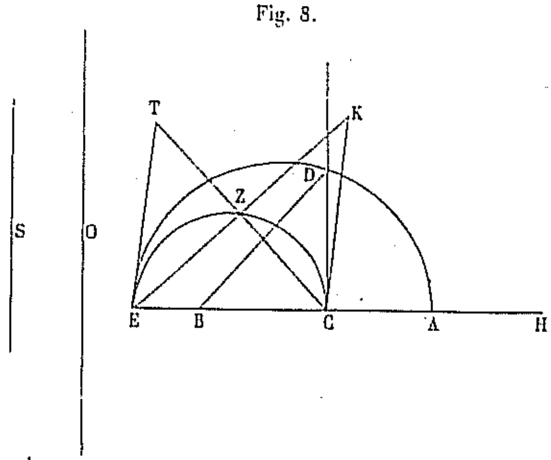
MÉMOIRE sur le compas parfait.

que le rectangle AB fois CD, c'est-à-dire AB fois BE, plus le rectangle AC fois CB, est égal au carré de BD, c'est-à-dire de EC. Mais le carré de EC est égal au rectangle EC fois CB plus le rectangle EC fois EB. Rejetons de AC fois CB le rectangle EC fois CB qui est commun aux deux sommes; il reste AE fois BC plus AB fois BE, c'est-à-dire le carré de EB plus le rectangle AE fois EC. D'autre part il reste du carré de EC le rectangle CE fois EB, c'est-à-dire le carré de EB plus le rectangle EB fois BC. Rejetons le carré de EB qui est commun aux deux sommes; il reste le rectangle EB fois EC, égal au rectangle AE fois BC plus le rectangle AE fois EB, c'est-à-dire égal au rectangle AE fois la ligne entière EC. Par conséquent EC est à CB comme EB est à EA. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Proposition IV.

Problème. — Décrire une parabole, étant donnés le paramètre de la parabole, égal à la droite O (fig. 8), et l'axe du compas parfait au moyen duquel on doit tracer la courbe, égal à la droite S; l'axe de la parabole devant être placé suivant la direction d'une droite donnée AB.

Fig. 8.



Solution. — Nous faisons le segment AC égal à un quart du paramètre O, et le segment CB égal à la moitié de l'axe S. Nous élevons au point C une perpendiculaire indéfiniment prolongée, et nous prolongeons AB de la quantité précédemment mentionnée[1]. Que ce prolongement soit BE, et que le demi-cercle ADE soit celui qui fait DB égal à CE. Nous décrivons sur CE comme diamètre un demi-cercle CZE, et, prenant C pour centre, nous marquons avec une ouverture du compas égale à la distance CB le point Z. Nous joignons CZ et ZE; nous prolongeons CZ jusqu'au point T, en faisant ZT égal à CZ, et nous joignons TE. Alors les deux angles formés aux points C et T seront égaux et CT sera égal à la longueur de l'axe du compas parfait.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Je dis que, si on applique la droite TE sur la droite donnée[2], que l'on conserve les deux angles, et que l'on fasse tourner la droite CT autour d'elle-même, le tire-ligne du compas parfait trace sur le plan une parabole dont le sommet est au point E, et dont le paramètre est O.

Démonstration. — Le carré de la droite CE est égal au carré de DB, c'est-à-dire à la somme des deux carrés de CB et de CD, ou des deux carrés de CZ et de CD. Mais le carré de CE, c'est-à-dire de BD, est égal à la somme des deux carrés de CZ et de ZE. Rejetant de part et d'autre le carré de CZ, il reste le carré de ZE égal au carré de CD, c'est-à-dire égal au rectangle CE fois CA. Par conséquent AC est à ZE comme ZE à CE; donc le double de AC, c'est-à-dire HC, ou la moitié du para-

[1] C'est-à-dire on fait BE de la figure 8 égal à CZ de la figure 6, les droites AC et CB de la figure 8 correspondant aux droites AB et BC de la figure 6. On aura de cette manière dans la figure 8,

$$EC = \frac{AC}{2} + \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \overline{BC}^2} = \frac{\frac{1}{4}O}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}O}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}S\right)^2},$$

ou, en désignant le paramètre de la parabole par $2p$ et l'axe du compas par k,

$$EC = \frac{p}{4} + \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}.$$

[2] Comme direction de l'axe de la parabole.

mètre, est à ZE comme le double de ZE, qui soit KE, à CE. Donc le paramètre entier est à KE comme KE à CE; donc le carré de KE est au carré de CE, c'est-à-dire au rectangle CE fois CK, comme le paramètre à CE. Ainsi donc l'axe CT, en tournant autour de lui-même, fait engendrer au triangle CZE un cône dont ECK est le triangle par l'axe, et qui est coupé par un plan perpendiculaire au plan du triangle par l'axe, l'intersection commune [1] du plan du triangle et du plan coupant étant parallèle à un des côtés [2] du triangle par l'axe, tandis que le carré de la base du triangle, à savoir de KE, est au rectangle formé du produit de l'un des deux côtés du triangle, à savoir CE, par l'autre côté, à savoir CK, comme une certaine droite, à savoir O, est à une certaine autre droite, à savoir CE [3]. Par conséquent la droite O est le paramètre d'une parabole dont le sommet est au point E, et dont l'axe est ET, en vertu de ce qui a été démontré dans la onzième proposition du premier livre du *Traité des coniques d'Apollonius* [4]. C'est ce qu'il fallait démontrer.

[1] ET.

[2] KC.

[3] Cette proportion

$$\overline{KE}^2 : CE \cdot CK = O : C$$

joue un rôle important dans la définition de la parabole par Apollonius, ainsi qu'on le voit dans la note suivante.

[4] En effet, la onzième proposition du premier livre des Coniques (éd. d'Oxford, 1710, in-folio, p. 31 et 32) porte ce qui suit :

« Si conus plano per axem secetur (ce plan est dans notre figure le plan du triangle ECK), secetur autem et altero plano (cet autre plan est celui dont la trace est ET) secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem est perpendicularis (cette droite est une perpendiculaire au plan de la figure élevée au point E), et sit diameter sectionis (c'est la droite ET) uni laterum trianguli per axem (c'est le côté CK) parallela : recta linea, quæ a sectione coni ducitur parallela communi sectioni plani secantis et basis coni (à la perpendiculaire au plan de la figure au point E), usque ad sectionis diametrum (c'est-à-dire une ordonnée quelconque de la parabole), poterit spatium æquale contento sub ea, quæ ex diametro abscissa inter ipsam et verticem sectionis (ici E)

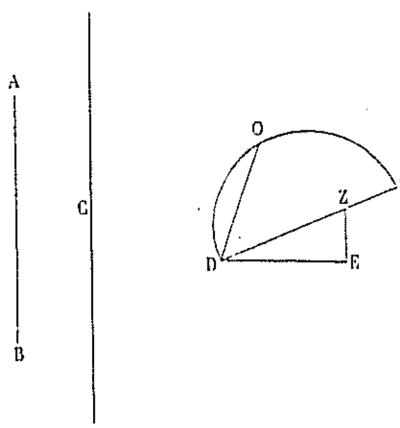
MÉMOIRE sur le compas parfait.

Proposition V.

Problème. — Étant données la droite AB (fig. 9) égale à l'axe du compas, et la droite C égale au paramètre, décrire, au moyen d'un compas parfait, dont l'axe est AB, une parabole dont le paramètre est C.

Solution. — Nous faisons la droite DE égale à la moitié de l'axe AB, et nous élevons au point E une droite EZ perpendiculaire à DE et égale au huitième du paramètre C. Nous prolongeons DZ jusqu'à T en faisant ZT égal à ZE, et nous décrivons sur la droite DT comme diamètre le demi-cercle DOT. Du point D comme centre, avec un rayon égal à la distance DE, nous décrivons un cercle qui coupe le cercle DOT au point O, et nous joignons OD.

Fig. 9.



Nous prenons ensuite le compas parfait dont la base sera appliquée sur une ligne droite dans une surface plane, et nous faisons chacun de ses deux angles égal à l'angle ODZ. Alors le crayon du compas trace dans le plan une parabole dont C est le paramètre.

interjicitur, et alia quadam (cette autre droite est le paramètre O de la parabole), quæ ad rectam (ici CE), inter coni angulum (ici C) et verticem sectionis interjectam, habet eam rationem, quam quadratum basis trianguli per axem (ici $\overline{KE}^2$) ad id quod sub reliquis duobus trianguli lateribus continetur (ici CE fois CK); dicatur autem hujusmodi sectio *parabola*... et recta (ici O)... juxta quam possunt quæ ad... diametrum ordinatim applicantur... *latus rectum* appelletur ». (Cet énoncé d'Apollonius revient, comme on voit, à poser l'équation $y^2 = 2px$ de la parabole.)

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Démonstration. — La droite ZD est égale à la somme de la moitié de l'axe du compas et du côté du carré dont le rectangle appliqué au double de DE et égal au carré de ZE dépasse le double de DE[1]. En effet, le carré de ZD est égal à la somme des deux carrés de ZE et de ED, c'est-à-dire au rectangle appliqué au double de DE et dépassant le double de DE d'un carré, plus le carré de DE[2]. Mais la somme de ces deux surfaces est égale au carré d'une droite composée de DE et du côté du carré dont le rectangle appliqué au double de DE dépasse le double de DE. Par conséquent la droite DT est égale au huitième du paramètre[3], plus la moitié de l'axe du compas, plus le côté du carré dont le rectangle appliqué au double de DE et égal au carré de ZE dépasse le double de DE[4]. Or

[1] C'est-à-dire

$$ZD = \frac{1}{2} AB + y,$$

où y est déterminé par l'équation

$$(2DE + y)y = \overline{ZE}^2;$$

donc

$$y = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{ZE}^2} - DE$$

et

$$ZD = \frac{1}{2} AB + y = DE + y = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{ZE}^2},$$

ce qui est effectué aussi par la construction de la figure.

[2] $\overline{ZD}^2 = \overline{ZE}^2 + \overline{DE}^2 = 2DE.\,y + y^2 + \overline{DE}^2 = (y + DE)^2$; donc $ZD = y + DE$.

[3] $ZT = ZE = \frac{1}{8} C$.

[4] On a donc

$$DT = ZE + DE + y = \frac{1}{8} C + \frac{1}{2} AB + y;$$

mais telle est aussi la composition de la droite CE dans la figure 8, qui correspond à la droite BZ dans la figure 6, où

$$BZ = EZ + BC + CE,$$

la droite CE dépendant, dans la proposition II, de BC, et $\frac{AB}{2}$ ou EZ, par la même relation (voir p. 29, l. 20) par laquelle y dépend, dans la présente proposition, de DE et ZE. Par conséquent les conclusions tirées dans la proposition IV, relativement à la droite CE, de la figure 8, s'appliqueront actuellement à la droite DT de la figure 9.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

nous avons démontré, en commençant ce traité[1], que, si l'on décrit, sur une droite composée comme nous venons de le dire, un demi-cercle, et si l'on y place, à partir de l'extrémité d'un diamètre, une corde telle que la corde DO[2], égale à la moitié de l'axe du compas; si l'on fait chacun des deux angles au sommet et à la base du compas égal à l'angle compris entre le diamètre et la droite DO, à savoir à l'angle TDO[3]; si nous faisons coïncider la base du compas avec l'axe de la parabole, l'extrémité du tire-ligne se trouvant du côté de l'angle aigu[4]; et si nous faisons tourner l'axe du compas autour de lui-même tandis que les deux angles restent invariablement fixés, le tire-ligne trace sur le plan donné une parabole dont le paramètre est égal à huit fois ZE, c'est-à-dire égal à C. C'est ce qu'il fallait démontrer.

OBSERVATION.

Désignant l'angle au sommet du compas parfait par α, l'axe du compas par k, le paramètre de la parabole qu'il s'agit de décrire par $2p$, on voit aisément que la construction de l'auteur arabe revient à faire

$$(1) \qquad \cos\alpha = -\frac{p}{2k} + \sqrt{\frac{p^2}{4k^2} + 1}.$$

En effet, on a dans la figure 9

$$ED = \frac{k}{2}, \qquad EZ = \frac{p}{4},$$

donc

$$DZ = \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}$$

[1] Dans la proposition IV (fig. 8).

[2] Dans la proposition IV, cette corde était $CZ = CB = \frac{S}{2}$.

[3] Dans la proposition IV, cet angle était ECZ.

[4] Pour éclaircir cette expression, je fais observer que, dans le dessin du compas parfait placé ci-dessus, page 23, l'extrémité du tire-ligne se trouve du côté de l'angle obtus.

et

$$DT = ZE + ZD = \frac{p}{4} + \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2};$$

en même temps

$$DO = DE = \frac{k}{2};$$

par conséquent

$$\cos\alpha = \cos TDO = \frac{DO}{DT} = \frac{\frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{p^2}{16} + \frac{k^2}{4}} + \frac{p}{4}};$$

multipliant cette dernière expression au numérateur et au diviseur par

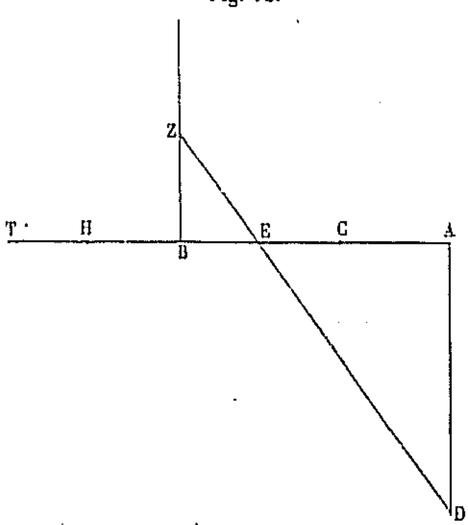
$$\sqrt{\frac{p^2}{16} + \frac{k^2}{4}} - \frac{p}{4},$$

on obtient immédiatement le second membre de l'équation (1).

DESCRIPTION DE L'HYPERBOLE ET PROPOSITIONS NÉCESSAIRES À CETTE CONSTRUCTION.

Proposition I.

Fig. 10.



Problème. — Étant donnés la droite AB (fig. 10), le point C situé sur cette droite, et la droite AD perpendiculaire à AB, et une droite, élevée au point B perpendiculairement à AB, étant indéfiniment prolongée du côté opposé à AD, nous désirons mener du point D une droite qui coupe la droite AB en un certain point, et qui rencontre la perpendiculaire élevée au point B, en déterminant sur elle un segment tel, que ce segment soit à BC comme BC est à la somme de BC et du segment déterminé par la transversale sur la droite AB du côté de B.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Solution. — Nous déterminons une droite troisième proportionnelle à AD et BC. Que cette droite soit BH, et qu'elle soit placée sur le prolongement de AB. Nous appliquons à la droite CH un rectangle égal au rectangle AB fois BH et dépassant CH d'un carré, ainsi qu'il a été montré précédemment dans la première proposition de la parabole. Soit HT le côté du carré excédant. Nous prenons sur la ligne CB le segment BE égal à HT [1], nous joignons DE, et nous prolongeons DE jusqu'à ce qu'il rencontre la perpendiculaire au point Z.

Je dis que BZ est à BC comme BC est à la somme des deux droites BC et BE.

Démonstration. — Le rectangle CT fois HT est égal à AB fois BH; donc CT est à BH comme à AB à HT, c'est-à-dire à EB. Par conséquent, en retranchant (le second terme du premier et le quatrième du troisième), CB plus HT, ou CB plus BE, est à BH comme AE à EB. Mais AE est à EB comme AD à BZ; donc CB plus BE est à BH comme AD à BZ. Par conséquent le rectangle AD fois BH, c'est-à-dire le carré de CB, est égal au rectangle CB plus BE fois BZ. D'où il suit que BZ est à BC comme BC à la somme de BC et BE. C'est ce qu'il fallait démontrer.

[1] D'après cela, BE représente la valeur de l'inconnue x déterminée par l'équation

$$(CH+x)x=AB.BH;$$

donc

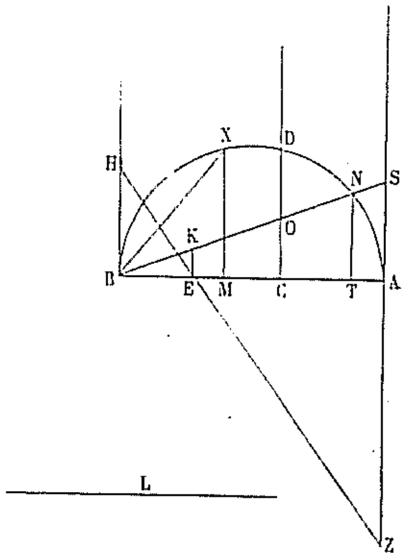
$$BE=-\frac{CH}{2}+\sqrt{\left(\frac{CH}{2}\right)^2+AB.BH}.$$

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Proposition II.

Problème. — Un point C (fig. 11) étant donné sur le diamètre AB d'un demi-cercle ADB, une droite CD étant élevée au point C perpendiculairement à AB et indéfiniment prolongée, et deux autres droites perpendiculaires à AB et indéfiniment prolongées étant élevées aux points B et A, nous désirons mener du point B une droite qui coupe CD à l'intérieur du cercle et qui, prolongée au delà de cette intersection, rencontre la perpendiculaire élevée au point A, de telle façon que, si l'on retranche le segment de la transversale compris entre CD et la circonférence du cercle (de la transversale entière comprise entre B et la perpendiculaire en A) en le plaçant, à partir du point B, la partie retranchée soit à la partie restante comme le carré de la partie transversale comprise entre le point B et la perpendiculaire CD est au carré d'une droite donnée telle que la droite L.

Fig. 11.



Solution. — Nous menons du point A une droite perpendiculaire à AB de l'autre côté, et nous prenons sur cette perpendiculaire la longueur AZ, de telle façon que le carré de AB soit au carré de L comme AB est à AZ [1]. Menons du point Z une droite qui coupe AB suivant la proportion déterminée dans la

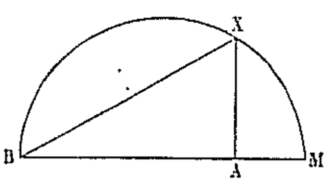
[1] Cela revient à faire $AZ = \frac{L^2}{AB}$.

proposition précédente. Que cette droite soit menée, et qu'elle rencontre la perpendiculaire élevée en B au point H, en faisant HB à BC comme BC à la somme de BC et BE. Nous prenons sur AC un segment CT égal à EB, et nous élevons au point T une perpendiculaire TN. Nous joignons BN, et nous prolongeons la droite BN jusqu'à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire élevée en A au point S, en coupant CD au point O. Enfin nous prenons sur OB un segment BK égal à ON, ce qui se fait en élevant au point E une perpendiculaire qui rencontre BN au point K.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Je dis que BK est à KS comme le carré de OB est au carré de L.

Démonstration. — Nous prenons sur CB un segment égal à BH. Que ce soit BM. Le point M tombera ou dans l'intérieur du cercle ou en dehors du cercle. S'il tombe en dehors du du cercle, nous faisons le rectangle AB fois AM égal au carré de AX, en prenant AX sur AS. Mais, s'il tombe dans l'intérieur du cercle, une perpendiculaire élevée au point M passera effectivement par le point X (tel qu'il se trouve dans la figure). Que le point X soit déterminé de l'une ou de l'autre manière, le carré de XB sera au carré de BN comme BM à BT [1], c'est-à-dire comme le carré de BC est au carré de BT [2], ou comme le



[1] Lorsque le point X tombe comme dans la figure 11, la justesse de la proportion est évidente. Lorsque X est pris sur la perpendiculaire en A, le point M tombant en dehors du cercle, on aura, en vertu de la construction du point X,

$$\overline{AX}^2 = AB \cdot AM,$$

donc $\overline{AX}^2 + \overline{AB}^2 = AB \cdot (AM + AB)$, ou $\overline{BX}^2 = AB \cdot BM$; mais $\overline{BN}^2 = AB \cdot BT$, donc

$$\overline{BX}^2 : \overline{BN}^2 = BM : BT.$$

[2] On a, par construction, $HB : BC = BC : (BC + BE)$ et $BE = CT$, donc $\overline{BC}^2 = HB \cdot BT$; par conséquent $\overline{BC}^2 : \overline{BT}^2 = HB : BT = BM : BT$.

carré de OB est au carré de BN. Par conséquent les carrés de XB et de BO seront égaux; d'où il suit que les lignes XB et BO sont égales. Et le carré de XB, c'est-à-dire de OB, sera au carré de AB comme MB est à AB, c'est-à-dire comme HB est à AB. Mais le carré de AB est au carré de L comme AB est à AZ. Donc, par égalité [1], le carré de OB est au carré de L comme HB est à AZ, c'est-à-dire comme EB est à EA, ou comme BK est à KS. Par conséquent BK est à KS comme le carré de OB est au carré de L [2]. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Proposition III.

Problème. — Étant donnée une droite AB (fig. 12) divisée au point C en deux parties égales, et une perpendiculaire à AB étant élevée au point C et indéfiniment prolongée, nous désirons trouver sur cette perpendiculaire un point tel que, si l'on mène de ce point une droite qui coupe CB en un certain point, et si cette droite est prolongée jusqu'à une limite déterminée, elle est divisée par le point d'intersection suivant un rapport donné, à savoir le rapport de E à Z, que le rectangle formé par le produit des deux parties en lesquelles la droite AB est divisée par la droite menée est égal au rectangle formé par le produit des deux parties en lesquelles est divisée la droite menée elle-même, et qu'une perpendiculaire élevée à l'extrémité de cette droite sécante, et prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre le prolongement de AB, est limitée par AB de telle façon qu'elle soit égale à la droite L.

[1] Voir Euclide, *Éléments*, liv. V, déf. 18.

[2] C'est la construction de cette proportion

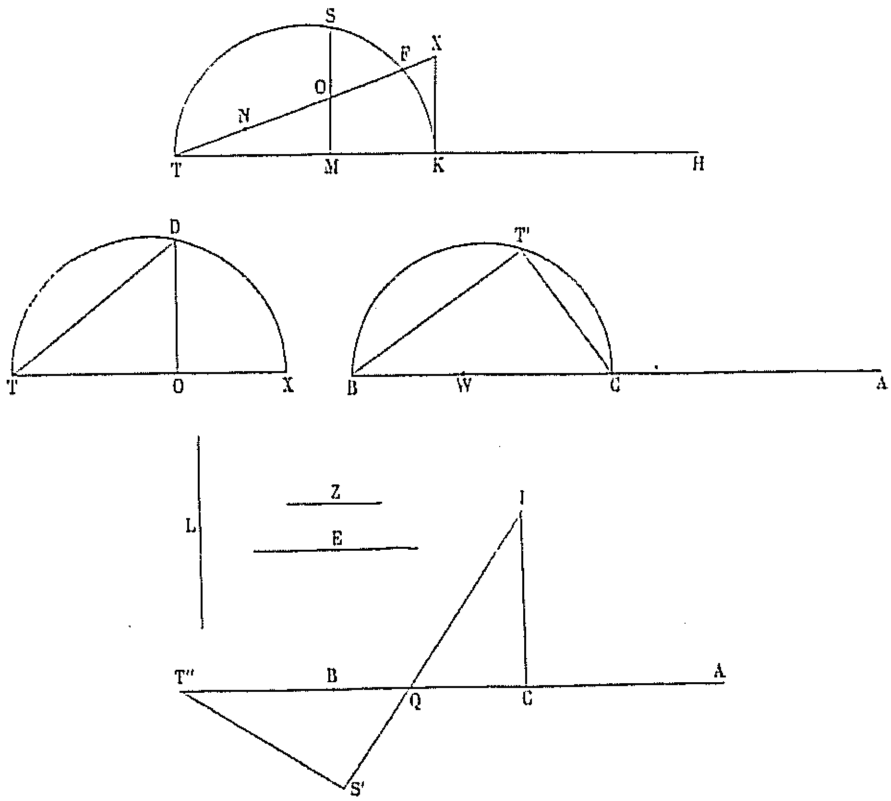
$$BK : KS = \overline{OB}^2 : L^2$$

qui forme l'objet de cette proposition.

Solution. — Nous faisons la droite HT égale à la droite AB, nous la partageons en deux parties égales au point K, et nous

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Fig. 12.



élevons en ce point une perpendiculaire indéfiniment prolongée. Nous décrivons sur KT comme diamètre un demi-cercle KST, et nous faisons KT à TM comme E à Z [1]. Nous menons du point T une droite qui coupe SM au point O, et qui rencontre la perpendiculaire élevée en K au point X, de telle façon que, si l'on prend sur la droite OT un segment

[1] C'est-à-dire, on détermine le point M par la proportion

$$KT : TM = E : Z.$$

L'auteur omet d'ajouter ensuite qu'il élève en M une perpendiculaire MS.

TN égal à la droite OF, TN est à NX comme le carré de OT est au carré de L. Nous pouvons effectuer cela en vertu de la proposition précédente. Nous appliquons ensuite à la droite AB un rectangle égal au rectangle XT fois TO et déficient, à l'égard de la ligne entière AB, d'un carré; ce qui est possible, parce que le rectangle (XT fois TO) est plus petit que le carré de la moitié de la ligne AB[1]. Nous effectuons cette construction en détachant XT de la figure, en décrivant sur cette droite comme diamètre un demi-cercle, en élevant au point O une perpendiculaire qui rencontre le cercle au point D, et en joignant DT; alors DT sera la droite qui peut le rectangle appliqué[2]. Nous détachons pareillement AB, et nous décrivons sur une moitié de cette droite, soit sur CB comme diamètre, un demi-cercle CT'B. Nous y plaçons, à partir du point B, la droite BT' égale à la droite DT, nous joignons T'C, et nous prenons sur CB, à partir du point C, une droite CW égale à la droite CT'. Alors le rectangle AW fois BW sera égal au rectangle XT fois TO, appliqué à la droite AB, et déficient à l'égard de la droite entière AB d'un carré dont le côté est BW[3]. En effet, le carré de CB est égal à la somme des deux carrés de CT' et de T'B. Par conséquent le carré de CB dépasse le carré de T'C, c'est-à-dire le carré de CW, du carré de T'B. Mais le carré de

(1) Comparer Euclide, *Éléments*, liv. VI, prop. 28. En d'autres termes, il s'agit de construire l'équation $(AB-y)y = XT \cdot TO$, d'où

$$y = \frac{AB}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - XT \cdot TO},$$

de sorte que y sera imaginaire si $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 < XT.TO$. Mais on a

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \overline{KT}^2 = \overline{XT}^2 - \overline{XK}^2 = \overline{XT}^2 - XT.XF = XT.TF > XT.TO.$$

(2) C'est-à-dire $TD = \sqrt{XT.TO}$.

(3) La valeur de y sera donc représentée par la droite BW; cette valeur correspond au signe —, l'autre valeur étant AW.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

CB dépasse le carré de CW du carré de WB et du double du rectangle WB fois WC, et le rectangle WB fois WC plus le carré de WB est égal au rectangle AC fois WB, tandis qu'il reste du double du rectangle WB fois WC une fois le rectangle WB fois WC. Donc le rectangle, produit de la ligne entière AW par WB, est égal au carré de WB plus le double du rectangle WB fois WC. D'où il suit que le rectangle AW fois WB est égal au carré de BT', c'est-à-dire au carré de DT, ou au rectangle XT fois TO[1]. Nous prenons ensuite sur la droite proposée au commencement, à partir du point C, un segment égal à la droite CW. Que ce soit CQ. Prenant Q pour centre, nous décrivons, avec un rayon égal à la distance TX, un cercle qui coupe au point I la perpendiculaire élevée en C. Nous joignons IQ et nous prolongeons IQ jusqu'au point S', en faisant QS' égal à OT. Enfin, nous élevons au point S' une perpendiculaire S'T'' qui rencontre AB au point T''.

Je dis que IQ est à QS' comme E est à Z, que le rectangle AQ fois QB est égal au rectangle IQ fois QS', et que S'T'' est égal à L[2].

Démonstration. — Le rectangle XT fois TF est égal au carré de KT, le rectangle AQ fois QB plus le carré de CQ est égal au carré de CB lequel est égal au carré de KT; et le rectangle

[1] Cette démonstration est un peu embarrassée; on a immédiatement

$$\overline{TB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CW}^2 = (BC + CW)(BC - CW) = AW.BW.$$

[2] Cette thèse pose les trois égalités

$$IQ : QS' = E : Z,$$
$$AQ.QB = IQ.QS',$$
$$S'T'' = L.$$

La démonstration qui suit ne s'occupe que de la troisième, sans doute parce que l'auteur considère les deux autres comme découlant immédiatement des constructions qu'il vient d'effectuer. On a en effet $IQ : QS' = TX : OT = TK : TM = E : Z$ (voir page 41), et $IQ.QS' = TX.OT = AW.WB = AQ.QB$, parce qu'on a fait $CQ = CW$.

6.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

TX fois TO est égal au rectangle AQ fois QB. Il reste[1] le carré de CQ égal au rectangle XT fois OF, c'est-à-dire XT fois TN. Or le rectangle XT fois TN plus le rectangle XT fois XN est égal au carré de XT[2], le carré de XT est égal au carré de IQ, et le carré de CQ est égal au rectangle de XT fois TN. Il reste[3] le rectangle XT fois XN égal au carré de IC, et l'on a le rectangle XT fois TN au rectangle XT fois XN comme TN à XN; donc le carré de CQ est au carré de CI comme TN à NX. Mais TN est à NX comme le carré de TO est au carré de L[4]; donc le carré de TO au carré de L est comme le carré de QS′ au carré de S′T″. Or le carré de TO est égal au carré de QS′, donc le carré de QS′ au carré de S′T″ comme le carré de QS′ au carré de L. Il suit de là que les deux carrés de L et de S′T″ sont égaux. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Proposition IV.

Problème. — Étant donnée une droite BAD (fig. 13) nous désirons décrire une hyperbole dont le sommet soit au point A, dont la flèche[5] soit la droite AD, l'axe transverse AB, et le paramètre H, tandis que l'axe du compas parfait (que nous avons pour tracer les courbes) est égal à la droite T.

Solution. — Nous divisons AB en deux parties égales au point C, nous élevons au point C une droite perpendiculaire à AB et indéfiniment prolongée, et nous plaçons entre la perpendiculaire et la droite CA une droite qui coupe CA, telle

[1] C'est-à-dire il suit $\overline{CQ}^2 = XT.TF - XT.TO = XT.OF$.

[2] Le texte arabe ajoute ici encore : « C'est-à-dire à la somme des deux carrés de XK et de KT. » Cette addition est inutile pour la démonstration dont il s'agit.

[3] En retranchant le carré de CQ du carré de IQ.

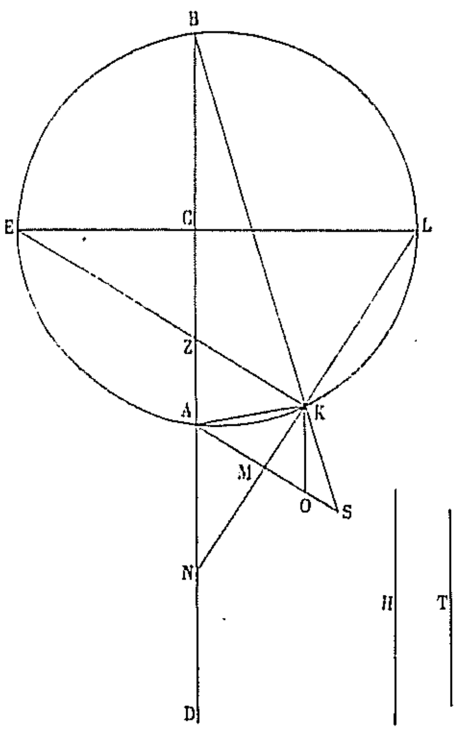
[4] Voir page 42, l. 1.

[5] Le grand axe comme axe de figure.

que la droite EZ, et qui est prolongée jusqu'à K de telle sorte que le rapport de EZ à ZK soit égal au rapport de AB à H qui est donné, que le rectangle BZ fois ZA soit égal au rectangle EZ fois ZK[1], et qu'une perpendiculaire élevée au point K et suffisamment prolongée rencontre AB en un point N tel, que la partie de la perpendiculaire séparée entre K et N soit égale à T. Nous pouvons effectuer cela en vertu de la proposition

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Fig. 13.



précédente. Nous la suivons donc exactement. Nous faisons ensuite passer par les points A, B, E un cercle qui passera aussi par le point K, attendu que le rectangle EZ fois ZK est égal au rectangle BZ fois ZA. Que ce soit le cercle EAKLB. Nous prolongeons EC jusqu'à L, et nous prolongeons aussi NK qui rencontrera EC au point L parce que l'angle ZKN est droit. Nous joignons BK, nous prolongeons la droite BK jusqu'à S, et nous menons du point A une droite parallèle à KE qui rencontre BS au point S et KN au point M. Enfin nous menons du point K une droite parallèle à la droite AD qui rencontre SA au point O.

[1] J'aurai à faire usage de ces deux égalités

$$EZ : ZK = AB : H,$$
$$EZ . ZK = BZ . ZA,$$

dans l'observation que je placerai à la suite de cette proposition.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Je dis que le plan qui contient le cercle[1] détermine, sur la surface du cône qu'engendre le triangle SAK en tournant autour de la droite fixe KN, une hyperbole qui a pour sommet le point A, pour axe transverse AB, et pour paramètre la droite H.

Démonstration. — L'angle AKZ est égal à l'angle ZKB par suite de l'égalité des deux arcs AE et EB, l'angle ZKB est égal à l'angle ASK, et les angles ZKA et KAS sont égaux comme alternes-internes. Par conséquent les deux angles KSA et SAK sont égaux, donc les deux droites KA et KS sont égales; comme en même temps les deux angles en S et A sont égaux, et que les deux angles en M sont droits, donc égaux, il s'ensuit que les deux angles SKM et MKA sont égaux; et si la droite KN, égale à l'axe du compas, reste fixe tandis que le triangle KAS tourne, celui-ci engendre par son mouvement un cône dont KAS est le triangle par l'axe. En même temps KO est mené parallèlement à l'intersection commune du plan du triangle et du plan coupant, et cette intersection commune est rencontrée par le côté SK du triangle au point B situé du côté du sommet du cône. Par conséquent la section produite sur la surface du cône est une hyperbole dont le sommet est A et dont l'axe transverse est AB.

Et de même, si l'on fait l'angle au sommet du compas égal à l'angle NKA et l'angle à sa base égal à l'angle ANK, et si l'axe NK reste fixe pendant que l'on fait tourner le compas, celui-ci trace, au moyen de son tire-ligne, dans la surface du cône engendré par le mouvement du compas, et pareillement dans le plan coupant, une hyperbole dont A est le sommet et AB l'axe transverse.

[1] L'auteur fait ici une confusion; le plan coupant n'est pas le plan du cercle, mais un plan perpendiculaire au plan de la figure et ayant pour trace la droite BD.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Je dis que le paramètre de cette hyperbole est égal à la droite H.

En effet, on a EZ à ZK comme le rectangle EZ fois ZK au carré de ZK, c'est-à-dire comme le rectangle BZ fois ZA au carré de ZK. Mais le rapport du rectangle BZ fois ZA au carré de ZK est composé du rapport de BZ à ZK, c'est-à-dire du rapport de BA à AS, ou de KO à OS, et du rapport de AZ à ZK, c'est-à-dire de KO à OA; il est donc égal au rapport du carré de KO au rectangle SO fois OA. Par conséquent le carré de KO est au rectangle SO fois OA comme AB est à H[1]. Le triangle KSA passe donc par l'axe du cône, et l'on a mené du sommet du cône une droite[2] parallèle à une autre droite[3] qui est située dans le plan du triangle par l'axe et qui est l'intersection commune du plan du triangle et d'un plan qui coupe la surface du cône et qui est perpendiculaire au plan du triangle. En même temps l'intersection du plan coupant et de la base du cône[4] est perpendiculaire à l'intersection commune de la base du cône et du triangle par l'axe[5]; car la base du cône est perpendiculaire au triangle par l'axe, parce que le cône est droit, et le plan coupant est pareillement perpendiculaire au triangle par l'axe, d'où il suit que leur intersection commune est également perpendiculaire au triangle par l'axe et à toute droite menée[6] dans ce triangle, donc aussi à la base

[1] Attendu que EZ est à ZK comme AB à H.

[2] La droite KO.

[3] La droite BD.

[4] Cette intersection est une droite perpendiculaire au plan de la figure et ayant son pied au point A. J'ai restitué par conjecture les mots الفصل المشترك بينه وبين قاعدة المخروط que j'ai placés dans le texte arabe entre crochets, et qui manquent dans les deux manuscrits.

[5] L'intersection de la base du cône et du plan du triangle par l'axe est la droite AS.

[6] Par le pied A de l'intersection du plan coupant et de la base du cône.

de ce triangle. C'est pourquoi [1] nous devons placer le triangle passant par l'axe du compas perpendiculairement au plan dans lequel l'hyperbole doit être tracée. En outre, l'intersection commune [2] rencontre le côté du triangle du côté du sommet du cône [3], et le carré de la parallèle menée, à savoir de KO, est au rectangle compris entre les deux parties de la base du triangle, à savoir au rectangle SO fois OA, comme l'axe transverse, à savoir AB, est à H [4]. La droite H est donc le paramètre de l'hyperbole en vertu de ce qu'a démontré Apollonius dans la douzième proposition du premier livre de son *Traité des coniques* [5]. C'est ce qu'il fallait démontrer.

[1] C'est-à-dire la circonstance que le plan coupant est perpendiculaire au triangle par l'axe est la raison pourquoi, etc.

[2] A savoir, l'intersection du plan coupant et du plan du triangle par l'axe, ou la droite DB.

[3] C'est-à-dire le côté KS du triangle par l'axe doit être prolongé pour rencontrer DB, du côté du sommet du cône K, et non du côté de l'autre extrémité S.

[4] Le texte arabe porte : « Comme l'axe transverse, à savoir AB, est au paramètre, à savoir à H. » Apollonius définit le paramètre $2p$ de l'hyperbole par la proportion

$$\frac{AB}{2p}=\frac{\overline{KO}^2}{AO.OS},$$

ainsi qu'on le verra dans la note suivante.

[5] En effet, la douzième proposition du premier livre des *Coniques* (éd. d'Oxford, p. 33 à 35) porte ce qui suit :

« Si conus plano per axem secetur (ce plan est dans notre figure le plan du triangle AKS), secetur autem et altero plano (cet autre plan est celui dont la trace est AD) secante basim coni (la trace de cette base du cône est AS) secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis (cette droite est une perpendiculaire au plan de la figure élevée au point A), et sectionis diameter (c'est la droite DA) producta cum uno latere (c'est le côté SK) trianguli per axem extra verticem coni conveniat (cette rencontre a lieu au point B) : recta linea, quæ a sectione ducitur (la droite dont il s'agit ici est une ordonnée quelconque de l'hyperbole) parallela communi sectioni (cette intersection commune des deux plans est la droite perpendiculaire en A au plan de notre figure) plani secantis et basis coni usque ad sectionis diametrum, poterit spatium adjacens rectæ (cette droite est le paramètre de l'hyperbole), ad quam ea, quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditurque angulo extra triangulum (la droite AB), eamdem ratio-

MÉMOIRE sur le compas parfait.

OBSERVATION.

Si nous désignons par $2a$ le grand axe de l'hyperbole qu'il s'agit de décrire, par $2p$ son paramètre, par k la longueur de l'axe du compas, par α l'angle au sommet du compas et par β l'angle à la base du compas, les constructions de notre auteur reviennent à exprimer $\sin\alpha$ et $\sin\beta$ au moyen de a, p et k par les deux formules suivantes :

$$(1)\qquad \sin^2\alpha = \frac{p}{2(a+p)k^2}\left[\sqrt{(k^2+ap)^2+4a^2k^2}+k^2-ap\right];$$

$$(2)\qquad \sin^2\beta = \frac{p}{2ak^2}\left[\sqrt{(k^2+ap)^2+4a^2k^2}-k^2-ap\right].$$

En effet, d'après la proposition IV de l'hyperbole, on a, dans la figure 13, $\alpha = \text{angle NKA} = 90° - \text{angle AKE} = 90° - \text{angle CBE}$; donc

$$\sin^2\alpha = \cos^2\text{CBE} = \frac{\overline{\text{BC}}^2}{\overline{\text{BC}}^2+\overline{\text{CE}}^2};$$

d'après la même proposition, on a $\text{BC}=\text{CA}=a$, $\text{KN}=k$, et $\text{CE}:\text{KN}=\text{CZ}:\text{ZK}$; donc

$$\text{CE} = k\cdot\frac{\text{CZ}}{\text{ZK}} = k\cdot\frac{a-\text{AZ}}{\text{ZK}};$$

nem habet quam quadratum rectæ (le carré de la droite KO), quæ diametro parallela a vertice coni [*] usque ad basim trianguli ducitur, ad rectangulum sub basis partibus quæ ab ea fiunt contentum (le rectangle AO·OS), latitudinem habens rectam, quæ ex diametro abscinditur inter ipsam et verticem sectionis (le point A) interjectam (l'abscisse comprise entre le pied de l'ordonnée et le sommet de l'hyperbole); excedensque figura simili et similiter posita ei, quæ continetur sub recta angulo extra triangulum subtensa (la droite AB), et ea juxta quam possunt quæ ad diametrum applicantur (le paramètre $2p$ de l'hyperbole, paramètre que l'énoncé d'Apollonius vient de déterminer par la relation $\frac{\text{AB}}{2p}=\frac{\overline{\text{KO}}^2}{\text{AO}\cdot\text{OS}}$). Vocetur autem hujusmodi sectio *hyperbola* (en désignant l'ordonnée de l'hyperbole par y, l'abscisse par x, le grand axe AB par $2a$, le paramètre par $2p$: l'énoncé d'Apollonius établit l'équation suivante de l'hyperbole $y^2=2px+lx$, où l est déterminé par la proportion $l:x=2p:2a$, donc $y^2=2px+\frac{p}{a}x^2$) ..... et recta..... juxta quam possunt quæ ad (diametrum) ZH ordinatim applicantur..... *latus rectum* appelletur ΘZ (subtensa angulo extra triangulum) vero *transversum*.

[*] Le texte latin de cet énoncé porte, dans l'édition d'Oxford, « a vertice sectionis ; » ce n'est qu'une inadvertance, car dans le texte grec on lit : ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, comme cela doit être.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

en outre, d'après la même proposition, $BZ \cdot AZ$ ou $(2a - AZ)AZ = EZ \cdot ZK$, d'où

$$AZ = a - \sqrt{a^2 - EZ \cdot ZK},$$

et

$$\frac{EZ}{ZK} = \frac{AB}{H} = \frac{2a}{2p},$$

d'où

$$EZ \cdot ZK = \frac{a}{p} \cdot \overline{ZK}^2;$$

donc

$$CE = k \cdot \frac{\sqrt{a^2 - \frac{a}{p} \cdot \overline{ZK}^2}}{ZK},$$

et

$$\sin^2 \alpha = \frac{a^2}{a^2 + \frac{a^2 k^2}{\overline{ZK}^2} - \frac{ak^2}{p}} = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{\overline{ZK}^2} - \frac{k^2}{ap}}.$$

Mais la droite ZK de la figure 13 est identique aux droites QS′ et OT de la figure 12, qui sont identiques, à leur tour, à la droite BO de la figure 11. Dans celle-ci on a, d'après la proposition II,

$$\overline{OB}^2 = \frac{BK}{KS} \cdot \overline{L}^2 \text{ (1)} = \frac{BE}{EA} \cdot \overline{L}^2 = \frac{BE}{AB - BE} \cdot \overline{L}^2,$$

où AB est identique à TK et BC de la figure 12, et à AC de la figure 13, donc à a, tandis que L est identique à L ou S′T″ de la figure 12, et à T ou KN de la figure 13, donc à k; de sorte que le $\overline{ZK}^2$ de la figure 13 devient

$$\frac{k^2}{\frac{a}{BE} - 1},$$

où BE est la droite prise dans la figure 11, identique à la droite BE de la figure 10, de sorte qu'en introduisant cette dernière droite on a

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \frac{a}{BE} - 1 - \frac{k^2}{ap}} = \frac{1}{\frac{a}{BE} - \frac{k^2}{ap}}.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer en a, p, k la droite BE de la figure 10. Pour cela observons que AB de cette figure est identique à AB de la figure 11,

(1) Voir p. 40, note (2).

donc à a, comme nous venons de le voir. Ensuite BC de la figure 10 est identique à BC de la figure 11, donc $\frac{a}{BC}$ ou $\frac{AB}{BC}$ de la figure 10 $= \frac{AB}{BC}$ de la figure 11 $= \frac{KT}{TM}$ de la figure 12 $= \frac{XT}{TO} = \frac{IQ}{QS}$ de la figure 12 $= \frac{EZ}{ZK}$ de la figure 13 $= \frac{AB}{H}$ de la figure 13, ou encore, d'après la proposition IV. $= \frac{a}{p}$; mais, si $\frac{a}{BC}$ de la figure 10 $= \frac{a}{p}$, il s'ensuit que BC de la figure 10 $= p$. Enfin AD de la figure 10 est identique à AZ de la figure 11, droite qui s'exprime, d'après la proposition II, par $\frac{\overline{L}^2}{AB}$; mais nous venons de voir que L de la figure 11 $= k$, et que AB de la figure 12 $= a$, donc AD de la figure 1 $= \frac{k^2}{a}$. Cela posé, nous avons dans la figure 10, d'après la proposition I,

$$BH = \frac{\overline{BC}^2}{AD} = \frac{ap^2}{k^2}, \qquad BE = -\frac{CH}{2} + \sqrt{\left(\frac{CH}{2}\right)^2 + AB \cdot BH}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(p + \frac{ap^2}{k^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(p + \frac{ap^2}{k^2}\right)^2 + a \cdot \frac{ap^2}{k^2}}$$

$$= \frac{p}{2k^2}\left[\sqrt{(k^2 + ap)^2 + 4a^2 k^2} - k^2 - ap\right];$$

donc

$$\sin^2 \alpha = \cfrac{1}{\cfrac{a}{\frac{p}{2k^2}\left[\sqrt{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2} - k^2 - ap\right]} - \cfrac{k^2}{ap}}$$

$$= \cfrac{ap}{\cfrac{2a^2k^2\left[\sqrt{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2} + k^2 + ap\right]}{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2 - (k^2+ap)^2} - k^2}$$

$$= \frac{2ap}{\sqrt{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2} - k^2 + ap}$$

$$= \frac{2ap\left[\sqrt{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2} + k^2 - ap\right]}{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2 - (k^2-ap)^2}$$

$$= \frac{p}{2(a+p)k^2}\left[\sqrt{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2} + k^2 - ap\right].$$

Passant maintenant à l'angle β, on a dans la figure 13, d'après la proposition IV, $\beta =$ angle ZNK; donc

$$\sin^2 \beta = \frac{\overline{ZK}^2}{\overline{ZK}^2 + \overline{KN}^2},$$

où $KN = k$; par conséquent

$$\sin^2\beta = \frac{1}{1+\frac{k^2}{ZK^2}}.$$

Mais nous venons de voir que

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\frac{k^2}{ZK^2}-\frac{k^2}{ap}},$$

donc

$$\frac{1}{\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{k^2}{ap}\text{(1)},$$

d'où

$$\sin^2\beta = \frac{1}{\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{k^2}{ap}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{(k^2+ap)^2+4a^2k^2}-k^2+ap}{2ap}+\frac{2k^2}{2ap}}$$

$$= \frac{2ap}{\sqrt{(k^2+ap)^2+4a^2k^2}+k^2+ap}$$

$$= \frac{2ap\left[\sqrt{(k^2+ap)^2+4a^2k^2}-k^2-ap\right]}{(k^2+ap)^2+4a^2k^2-(k^2+ap)^2}$$

$$= \frac{p}{2ak^2}\left[\sqrt{(k^2+ap)^2+4a^2k^2}-k^2-ap\right].$$

DESCRIPTION DE L'ELLIPSE ET PROPOSITIONS NÉCESSAIRES À CETTE CONSTRUCTION.

Proposition I.

Problème. — Étant donnée une droite AB (fig. 14) sur laquelle on marque un point C situé d'une façon quelconque, une perpendiculaire à AB étant élevée au point B et indéfiniment prolongée, et une droite donnée AZ étant menée du point A, à l'autre extrémité de AB, perpendiculairement à AB, mais de l'autre côté : nous désirons mener du point Z une droite qui coupe AC en un certain point, et qui rencontre la

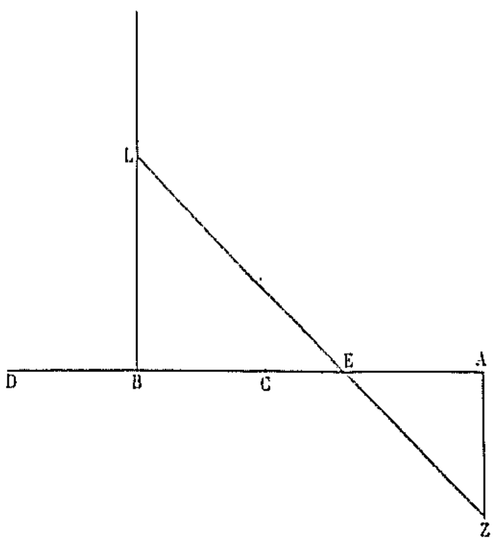
(1) Je fais observer que cette relation est féconde en conséquences pour la théorie du cône de révolution.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

perpendiculaire élevée au point B en déterminant sur elle un segment qui est à BC comme BC est à la partie de la droite AC comprise entre le point C et le point par lequel passe la droite menée du point Z.

Solution. — Nous déterminons une droite troisième proportionnelle aux deux droites AZ et CB, et nous la plaçons suivant le prolongement de AB. Que ce soit BD. Nous appliquons ensuite à la droite CD un rectangle égal au rectangle AC fois BD et dépassant la droite CD d'un carré, en vertu de ce que nous avons démontré précédemment[1]. Que le côté du carré excédant soit égal à la droite EC[2]. Enfin nous joignons EZ, et nous prolongeons ZE jusqu'à ce qu'il rencontre la perpendiculaire élevée en B au point L.

Fig. 14.



Je dis que LB est à BC comme BC est à CE.

[1] Voir la première proposition de la parabole, p. 26.

[2] D'après cela CE représente la valeur de l'inconnue x déterminée par l'équation

$$(\mathrm{CD}+x)x = \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD},$$

donc

$$\mathrm{CE} = -\frac{\mathrm{CD}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{CD}}{2}\right)^2 + \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}}$$

et

$$\mathrm{BE} = \frac{1}{2}(\mathrm{BC}-\mathrm{BD}) + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{CD}}{2}\right)^2 + \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}}.$$

Démonstration. — Le rectangle AC fois BD est égal au rectangle EC fois DE, donc AC est à CE comme ED à DB. Par conséquent, en retranchant (le second terme du premier et le quatrième du troisième), AE est à EC comme EB à BD; et, si nous transposons[1] (les deux termes moyens), le rapport de AE à EB, qui est égal au rapport de AZ à LB, à cause de la similitude des deux triangles AEZ et LEB, sera égal au rapport de EC à BD; donc le rectangle AZ fois BD, c'est-à-dire le carré de BC, est égal au rectangle LB fois EC; d'où il suit que LB est à BC comme BC à EC. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Proposition II.

Problème. — Un point D (fig. 15) étant donné sur le diamètre AC d'un demi-cercle ABC, une perpendiculaire DB étant élevée au point D et indéfiniment prolongée, deux autres perpendiculaires étant élevées aux points C et A, toutes les deux du même côté que la perpendiculaire DB, et indéfiniment prolongées, et étant donnée la droite H : nous désirons mener du point C une droite qui coupe un certain segment de la circonférence du cercle, qui rencontre la perpendiculaire DB en dehors du cercle, et qui rencontre la perpendiculaire élevée au point A de telle façon que, si l'on prend sur la partie de la droite menée du point C comprise entre la perpendiculaire BD et la perpendiculaire élevée au point A, à partir de son point d'intersection avec la perpendiculaire BD, un segment égal à la corde du segment du cercle, la droite composée de la partie comprise entre C et la perpendiculaire BD et du segment égal à la corde du segment du cercle pris sur la droite comprise entre la perpendiculaire BD et la perpendiculaire élevée en A, soit à la partie restante de cette droite

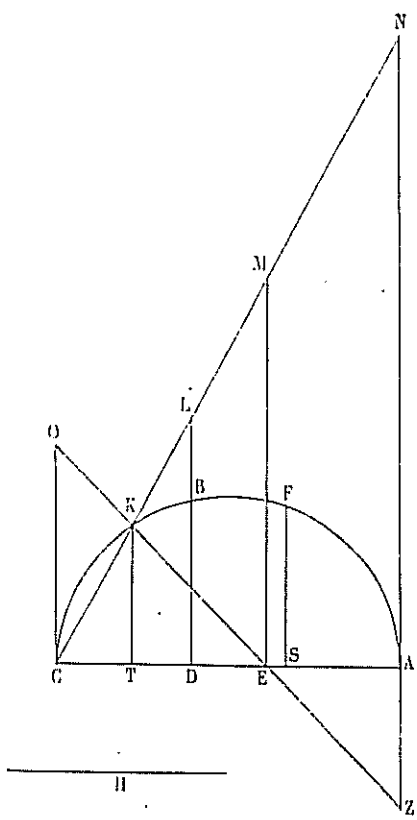
[1] Voir Euclide, *Éléments*, liv. V, déf. 14.

comme le carré de la droite comprise entre C et la perpendiculaire BD est au carré de la droite H.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Solution. — Nous menons du point A une droite perpendiculaire à AC, mais de l'autre côté, sur laquelle nous prenons une longueur AZ en faisant le diamètre AC à AZ comme le carré du diamètre au carré de H [1]. Nous menons du point Z une droite qui coupe AC, et qui rencontre la perpendiculaire élevée au point C en déterminant sur elle un segment qui est à CD comme CD est à la droite comprise entre D et le point en lequel AC coupe la droite menée de Z. Nous pouvons effectuer cela en vertu de ce que nous avons démontré dans la proposition précédente. Que cette droite soit menée, que ce soit la droite ZEO, qu'elle coupe AC en E, qu'elle rencontre la perpendiculaire au point O, et qu'elle fasse OC à CD comme CD à DE. Nous prenons

Fig. 15.



sur CD un segment CT égal à la droite DE, nous élevons au point T une perpendiculaire TK qui rencontre le cercle au point K, nous joignons CK, et nous prolongeons CK jusqu'à ce qu'il rencontre la perpendiculaire BD au point L et la per-

[1] Cela revient à faire $AZ = \frac{\overline{H}^2}{AC}$.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

pendiculaire élevée en A au point N. Menons enfin du point E une droite parallèle à la perpendiculaire BD et qui coupe NC au point M et qui fait ML égal à KC.

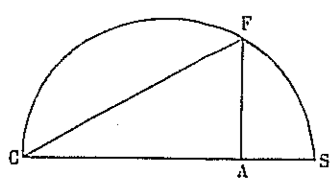
Je dis que CM est à MN comme le carré de CL est au carré de H.

Démonstration. — Nous prenons sur AC un segment égal à CO. Que ce soit CS. Si le point S tombe dans l'intérieur du cercle, nous élevons au point S une perpendiculaire SF. Si S tombe en dehors du cercle, nous faisons le rectangle SA fois AC égal au carré de AF[1]. Dans l'un et dans l'autre cas, la démonstration procède comme il suit. Le rectangle AC fois CT est égal au carré de CK, et le rectangle AC fois CS est égal au carré de CF; le carré de CF est donc au carré de CK comme le rectangle AC fois CS est au rectangle AC fois CT. Mais le rectangle AC fois CS est au rectangle AC fois CT comme CS à CT, c'est-à-dire comme le carré de DC au carré de CT[2], ou comme le carré de LC au carré de CK. Par conséquent le carré de CF est au carré de CK comme le carré de CL est au carré de CK, d'où il suit que les deux carrés de CF et de CL

[1] C'est-à-dire : si le point S tombe en dehors du cercle, on prend sur la perpendiculaire AN un segment AF tel que $\overline{AF}^2 = AS \cdot AC$. En ce cas on aura

$$AC \cdot CS = AC\,(AC + AS) = \overline{AC}^2 + \overline{AF}^2 = \overline{CF}^2,$$

relation nécessaire à la suite de la démonstration.



[2] En effet CS : CT = CS · CT : $\overline{CT}^2$; mais on a par construction CS = CO, CT = DE et CO · DE = $\overline{CD}^2$; donc CS : CT = $\overline{CD}^2$: $\overline{CT}^2$.

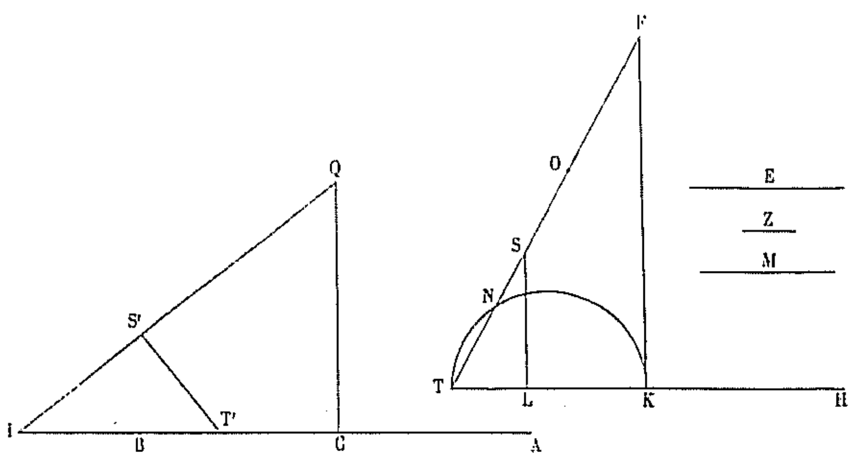
sont égaux, donc les droites CF et CL sont égales. Mais on a CM à MN comme CE à EA, c'est-à-dire comme CO à AZ ou comme CS à AZ; en même temps le carré de CF est au carré de AC comme CS est à CA[1], et le carré de AC est au carré de H comme AC à AZ, en vertu de notre construction; donc, par égalité, le carré de CF, c'est-à-dire de CL, est au carré de H comme CS à AZ, c'est-à-dire comme CM à MN. C'est ce qu'il fallait démontrer.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Proposition III.

Problème. — Étant donnée une droite AB (fig. 16) divisée au point C en deux parties égales, et une droite perpendiculaire

Fig. 16.



à AB étant élevée au point C et indéfiniment prolongée, nous désirons placer entre la perpendiculaire et le prolongement de la droite CB une droite telle que cette droite soit à une certaine partie prise sur cette droite comme E est à Z; que le rectangle qui est le produit de cette droite par sa partie soit

[1] Parce que $\overline{CF}^2 = AC \cdot CS$.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

égal au rectangle qui est le produit de la droite composée de AB et du segment que la droite menée détermine sur le prolongement de CB, au delà du point B; et que, si l'on élève au point de division de la droite menée une perpendiculaire qui rencontre CB, le segment déterminé par CB sur la perpendiculaire soit égal à la droite donnée M.

Solution. — Nous faisons la droite HT égale à AB et nous la divisons en deux parties égales au point K [1]. Nous décrivons sur la partie KT comme diamètre un demi-cercle KNT, et nous faisons KT à TL comme E à Z. Nous élevons au point K une perpendiculaire KF, et au point L une perpendiculaire LS, et nous menons du point T une droite qui rencontre les deux perpendiculaires KF, LS, soit la droite TNSOF, de telle sorte que, si nous prenons sur SF un segment SO égal à NT, TO soit à OF comme le carré de TS est au carré de M, ainsi que nous l'avons montré dans la proposition précédente. Nous appliquons à la droite AB un rectangle égal au rectangle FT fois TS et dépassant la droite d'un carré. Que ce carré soit égal au rectangle compris sous les droites AI et IB [2]. Prenant le point I pour centre, nous décrivons avec un rayon égal à la distance TF un cercle qui coupe la perpendiculaire élevée en C au point Q, nous joignons QI, nous faisons S'I égal à TS, et nous élevons au point S' une perpendiculaire qui rencontre CB en T'.

[1] Le texte arabe ajoute ici : « Et nous élevons au point K une perpendiculaire à HT; » mais cette construction revient encore une fois immédiatement après.

[2] D'après cela, IB représente la valeur de l'inconnue déterminée par l'équation

$$(AB+y)\,y = FT.TS,$$

donc

$$IB = -\frac{AB}{2} + \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + FT.TS}.$$

Je dis que cette construction satisfait à ce que nous avions demandé[1].

Démonstration. — QI fois IS′ est égal à AI fois IB; et QI est à IS′ comme E à Z, parce que QI est égal à FT, et parce que le point S′ correspond au point S. Je dis que S′T′ est égal à M. En effet, puisque le rectangle AI fois IB plus le carré de CB est égal au carré de CI, tandis que le rectangle AI fois IB est égal au rectangle FT fois TS, et que le rectangle FT fois TN est égal au carré de KT[2], il s'ensuit que le rectangle FT fois TO est égal au carré de CI. En même temps le carré de FT est égal au carré de QI[3], lequel est égal à la somme des deux carrés de QC et de CI; donc le rectangle FT fois TO étant égal au carré de CI, il reste[4] le rectangle TF fois FO égal au carré de CQ. Cela posé, le rectangle FT fois TO, c'est-à-dire le carré de CI, est au rectangle TF fois FO, c'est-à-dire au carré de CQ, comme TO est à OF, c'est-à-dire comme le carré de TS, ou le carré de IS′, est au carré de M[5]; donc le carré de CI est au carré de CQ comme le carré de IS′ au carré de M. Mais le carré de CI est au carré de CQ comme le carré de IS′ est au carré de S′T′. Par conséquent les deux carrés de S′T′ et de M sont égaux, donc les deux droites S′T′ et M sont égales. C'est ce qu'il fallait démontrer.

[1] C'est-à-dire que l'on a

$$IQ : IS' = E : Z,$$
$$IQ \cdot IS' = AI \cdot IB,$$
$$S'T' = M.$$

[2] Ou le rectangle FT fois SO égal au carré de CB.

[3] Le texte arabe ajoute ici encore : « Et le carré de FT est égal à la somme des deux carrés de FK et de KT, donc le carré de QI est égal à la somme des deux carrés de FK et de KT, » ce qui est tout à fait inutile.

[4] Si l'on retranche $\overline{CI}^2 = FT.TO$ de $\overline{CI}^2 + \overline{QC}^2 = \overline{QI}^2 = \overline{FT}^2 = FT.FO + FT.TO$.

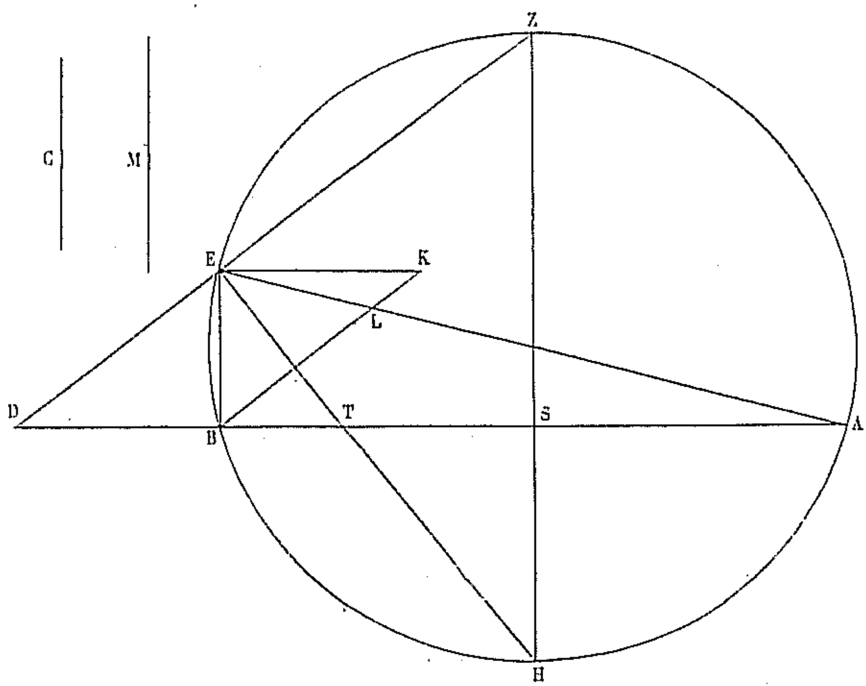
[5] Puisque, par construction, $IS' = TS$ et $TO : OF = \overline{TS}^2 : M^2$.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Proposition IV.

Problème. — Étant données les droites AB, C et M (fig. 17), nous désirons décrire une ellipse dont le grand axe soit la

Fig. 17.



droite AB et dont le paramètre soit M, au moyen d'un compas parfait dont l'axe est égal à la droite C.

Solution. — Nous élevons au point milieu de AB, à savoir au point S, une perpendiculaire SZ, nous prolongeons AB jusqu'à D, nous joignons ZD, et nous marquons sur ZD un point E tel que ZD soit à DE comme AB est à M, que le rectangle ZD fois DE soit égal au rectangle AD fois DB, et que, si nous élevons au point E une perpendiculaire qui rencontre SB au point T, ET soit égal à C. Nous pouvons effectuer cela en vertu de la proposition précédente. Nous la suivons donc exactement. Nous faisons ensuite passer par les points A, B, Z un cercle qui passera aussi par le point E[1]. Nous joignons BE, nous prolongeons ET jusqu'à ce qu'il rencontre ZS au point H, et nous joignons AE. Enfin nous menons du point B une droite BK parallèle à ZE, et du point E une droite EK parallèle à AD, et soit L le point d'intersection de BK avec la droite AE.

Je dis que le plan du cercle AHBEZ[2] détermine sur la surface du cône qu'engendre le triangle LEB, en tournant autour de l'axe fixe TE, une ellipse dont AB est le grand axe et M le paramètre.

Démonstration. — Les deux angles LET, TEB sont égaux à cause de l'égalité des deux arcs correspondants. Par conséquent le triangle LEB, en tournant pendant que ET reste fixe, engendre un cône droit, parce que les deux angles sont égaux, et parce que l'un d'eux peut s'appliquer sur l'autre lorsqu'on fait tourner le triangle. Le plan qui est perpendiculaire au plan du cercle et qui passe par la droite AB coupe les deux côtés du triangle par l'axe, et le plan du cercle[3] coupe la surface du cône et coupe les deux côtés du triangle par l'axe à savoir du triangle LEB; enfin l'intersection commune de ce plan avec la base du cône est perpendiculaire à la droite AB. Puisque

[1] Le texte arabe porte : « Nous décrivons le cercle BHAZE qui passe par les points « A, B, E, Z. »

[2] Nous trouvons ici la même confusion que dans la proposition IV de l'hyperbole (voir p. 46). Le plan coupant n'est pas le plan du cercle, mais un plan perpendiculaire au plan de la figure et ayant pour trace la droite AD.

[3] Voir la note précédente.

le cône est droit et que le plan coupant rencontre la base du cône, la section produite sur la surface du cône est une ellipse dont le grand axe est AB [1].

Par conséquent, si l'on fait l'angle au sommet du compas égal à l'angle TEB, et l'angle à la base du compas égal à l'angle BTE, si on applique la base du compas à la droite AB, et si l'on fait tourner le compas pendant que la droite ET reste fixe, il décrit une ellipse dans la surface du cône engendré par le mouvement du compas et dans le plan coupant.

Je dis que la droite M est égale au paramètre de cette ellipse.

En effet, on a AB à M comme ZD à DE. Mais le rapport de ZD à DE est composé du rapport de BD à DE, c'est-à-dire de KE à KB, et du rapport de AD à DE [2], c'est-à-dire de AB à BL, ou de EK à KL. Le rapport de ZD à DE est donc égal au rapport du carré de EK au rectangle BK fois KL, d'où il suit que AB est à M comme le carré de EK est au rectangle BK fois KL. Nous avons donc un cône droit dont la surface est coupée par un plan perpendiculaire au triangle par l'axe, et rencontrant la base du cône dans une droite qui est perpendiculaire à l'intersection commune de la base du cône et du triangle par l'axe. Car la base du cône est perpendiculaire au triangle par l'axe, parce que le cône est droit, et le plan coupant est pareillement perpendiculaire au triangle par l'axe; par conséquent leur intersection commune est aussi perpendiculaire au triangle par l'axe et à toute droite menée dans ce triangle, donc aussi à sa base. C'est pourquoi il faut placer le triangle passant par

[1] Toute cette démonstration manque de précision. Je ne la rectifie pas ici, parce que je donne ci-après la définition de l'ellipse par Apollonius, en y intercalant les explications nécessaires pour en faire l'application au cas de notre figure.

[2] Parce que $ZD : BD = AD : DE$, attendu que $ZD \cdot DE = AD \cdot DB$ par construction.

l'axe du compas perpendiculairement au plan dans lequel on veut tracer la courbe. Enfin il a été mené du sommet du cône dans le plan du triangle par l'axe une droite parallèle à l'intersection commune du plan coupant et du plan du triangle par l'axe, et le carré de cette droite est au rectangle compris sous la droite composée de la base du triangle et du segment déterminé sur le prolongement de cette base par la parallèle menée et sous ce prolongement, comme l'intersection commune est à une droite donnée[1]. Il suit de là que la droite donnée est le paramètre de la courbe produite dont le grand axe est l'intersection commune. Par conséquent la droite M est le paramètre de l'ellipse dont AB est le grand axe[2]. C'est ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU MÉMOIRE SUR LE COMPAS PARFAIT ET SUR LA MANIÈRE DE DÉCRIRE, AU MOYEN DE CET INSTRUMENT, LES SECTIONS CONIQUES.

(1) C'est-à-dire $\overline{EK}^2 : BK \cdot KL = AB : M$. Apollonius se sert de cette proportion pour définir le paramètre de l'ellipse, ainsi qu'on le verra dans la note suivante.

(2) Quoique l'auteur ne cite pas ici Apollonius, comme il l'a fait ci-dessus pour la parabole et l'hyperbole, la présente démonstration est pareillement fondée sur la définition de l'ellipse donnée par Apollonius. En effet, la XIIIe proposition du premier livre des *Coniques* (éd. d'Oxford, p. 35 à 37) porte ce qui suit :

« Si conus plano per axem secetur (ce plan est dans notre figure le plan du triangle BEL), et secetur altero plano (cet autre plan est celui dont la trace est AD) conveniente (aux points A, B) cum utroque latere (les côtés EA, EB) trianguli per axem, quod neque basi coni æquidistet, neque subcontrarie ponatur; planum autem in quo est basis coni (la trace de cette base du cône est BL), et secans planum conveniant secundum rectam lineam (cette droite est une perpendiculaire au plan de la figure, élevée au point B) quæ sit perpendicularis vel ad basim (la droite BL) trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur : recta linea (une ordonnée quelconque de l'ellipse), quæ a sectione coni ducitur parallela communi sectioni (à la droite perpendiculaire en B au plan de la figure) planorum usque ad diametrum sectionis, poterit spatium adjacens rectæ (cette droite est le paramètre de l'ellipse), ad quam sectionis diameter (la droite AB) eam rationem habeat quam quadratum rectæ (le carré de la droite EK) diametro parallelæ, a vertice coni usque ad trianguli basim ductæ, habet ad rectangulum (le rectangle BK.KL) contentum sub basis partibus quæ inter ipsam et rectas trianguli lineas

MÉMOIRE sur le compas parfait.

OBSERVATION.

Si nous désignons par $2a$ le grand axe de l'ellipse qu'il s'agit de décrire, par $2p$ son paramètre, par k la longueur de l'axe du compas, par α l'angle au sommet du compas et par β l'angle à la base du compas, les constructions de l'auteur arabe reviennent à exprimer $\sin\alpha$ et $\sin\beta$ au moyen de a, p et k par les deux formules suivantes :

$$(1)\qquad \sin^2\alpha = \frac{p}{2(a-p)k^2}\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}-k^2-ap\right],$$

$$(2)\qquad \sin^2\beta = \frac{p}{2ak^2}\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}+k^2-ap\right].$$

En effet d'après la proposition IV de l'ellipse, on a dans la figure 17

$$\alpha = \text{angle HEA} = \text{angle SZA},$$

donc

$$\sin^2\alpha = \frac{\overline{AS}^2}{\overline{AS}^2+\overline{ZS}^2};$$

d'après la même proposition, on a $AS=BS=a$, $ET=k$, et $ZS:DS=TE:DE$; donc $ZS=k\cdot\frac{DS}{DE}=k\cdot\frac{a+DB}{DE}$; en outre, d'après la même proposition, $AD\cdot DB$ ou $(2a+DB)\,DB=ZD.DE$, d'où $DB=-a+\sqrt{a^2+ZD.DE}$, et

$$\frac{ZD}{DE}=\frac{AB}{M}=\frac{2a}{2p},$$

d'où

$$ZD.DE=\frac{a}{p}\cdot\overline{DE}^2,$$

interjiciuntur, latitudinem habens rectam (cette droite est l'abscisse comprise entre le pied de l'ordonnée et le sommet de l'ellipse) quæ ex diametro ab ipsa abscinditur ad verticem sectionis, deficiensque figura simili et similiter posita ei, quæ sub diametro (la droite AB), et recta (le paramètre $2p$ de l'ellipse, paramètre que l'énoncé d'Apollonius vient de déterminer par la relation $\frac{AB}{2p}=\frac{\overline{EK}^2}{BK.KL}$) juxta quam possunt, continetur. Dicatur autem hujusmodi sectio *ellipsis* (en désignant l'ordonnée de l'ellipse par y, l'abscisse par x, le grand axe AB par $2a$, le paramètre par $2p$: l'énoncé d'Apollonius établit l'équation suivante de l'ellipse, $y^2=2px-lx$, où l est déterminé par la proportion $l:x=2p:2a$, donc $y^2=2px-\frac{p}{a}x^2$)... et recta... juxta quam possunt quæ ad diametrum ΔE ordinatim applicantur... *latus rectum* vocetur; EΔ vero *transversum*. »

MÉMOIRE sur le compas parfait.

donc

$$ZS = k\,\frac{\sqrt{a^2 + \frac{a}{p}\overline{DE}^2}}{DE},$$

et

$$\sin^2\alpha = \frac{a^2}{a^2 + \frac{a^2k^2}{\overline{DE}^2} + \frac{ak^2}{p}} = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{\overline{DE}^2} + \frac{k^2}{ap}}.$$

Mais la droite DE de la figure 17 est identique aux droites IS′ et TS de la figure 16, qui sont, à leur tour, identiques à la droite CL de la figure 15. Dans celle-ci on a, d'après la proposition II,

$$\overline{CL}^2 = \frac{CM}{MN}\cdot\overline{H}^2 = \frac{CE}{EA}\cdot\overline{H}^2 = \frac{CE}{AC-CE}\cdot\overline{H}^2,$$

où AC est identique à TK et BC de la figure 16 et à BS de la figure 17, donc à a, tandis que H est identique à M ou S′T′ de la figure 16 et à C ou ET de la figure 17, donc à k; de sorte que le $\overline{DE}^2$ de la figure 17 devient $\frac{k^2}{\frac{a}{CE}-1}$, où CE est la droite prise dans la figure 15, identique à la droite BE de la figure 14, de sorte qu'en introduisant cette dernière droite on a

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{ap} + \frac{a}{BE} - 1} = \frac{1}{\frac{k^2}{ap} + \frac{a}{BE}}.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer en a, p, k, la droite BE de la figure 14. Pour cela, observons que AB de la figure 14 est identique à AC de la figure 15, donc à a, comme nous venons de le voir. Ensuite BC de la figure 14 est identique à CD de la figure 15, donc $\frac{a}{BC}$ ou $\frac{AB}{BC}$ de la figure $14 = \frac{AC}{CD}$ de la figure 15, $= \frac{KT}{TL}$ de la figure 16, $= \frac{FT}{TS} = \frac{QI}{IS'}$ de la figure 16, $= \frac{ZD}{DE}$ de la figure 17, $= \frac{AB}{M}$ de la figure 17, ou encore, d'après prop. IV, $= \frac{a}{p}$; mais, si $\frac{a}{BC}$ de la figure $14 = \frac{a}{p}$, il s'ensuit que BC de la figure $14 = p$. Enfin AZ de la figure 14 est identique à AZ de la figure 15, droite qui est égale, d'après prop. II, à

Mémoire sur le compas parfait.

$\frac{\overline{H}^2}{AC}$; mais nous venons de voir que H de la figure 15 $=k$, et que AC de la figure 15 $=a$, donc AZ de la figure 14 $=\frac{k^2}{a}$. Cela posé, nous avons dans la figure 14, d'après prop. I,

$$BD=\frac{\overline{BC}^2}{AZ}=\frac{ap^2}{k^2},\ BE=\frac{1}{2}(BC-BD)+\sqrt{\left(\frac{CD}{2}\right)^2+AC.BD}$$
$$=\frac{1}{2}\left(p-\frac{ap^2}{k^2}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(p+\frac{ap^2}{k^2}\right)^2+(a-p)\frac{ap^2}{k^2}}$$
$$=\frac{p}{2k^2}\left[\sqrt{(k^2+ap)^2+4a(a-p)k^2}+k^2-ap\right]$$
$$=\frac{p}{2k^2}\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}+k^2-ap\right];$$

donc

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{\frac{k^2}{ap}+\frac{a}{\frac{p}{2k^2}\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}+k^2-ap\right]}}$$
$$=\frac{ap}{k^2+\frac{2a^2k^2\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}-k^2+ap\right]}{(k^2-ap)^2+4a^2k^2-(k^2-ap)^2}}$$
$$=\frac{2ap}{\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}+k^2+ap}$$
$$=\frac{2ap\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}-k^2-ap\right]}{(k^2-ap)^2+4a^2k^2-(k^2+ap)^2}$$
$$=\frac{p}{2(a-p)k^2}\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}-k^2-ap\right].$$

Passant maintenant à l'angle β, on a dans la figure 17, d'après prop. IV, $\beta=$ angle BTE; donc

$$\sin^2\beta=\frac{\overline{DE}^2}{\overline{DE}^2+\overline{ET}^2},$$

où ET $=k$; par conséquent

$$\sin^2\beta=\frac{1}{1+\frac{k^2}{\overline{DE}^2}}.$$

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Mais nous venons de voir que

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{\frac{k^2}{ap} + 1 + \frac{k^2}{\overline{DE}^2}},$$

donc

$$\frac{1}{\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{k^2}{ap},$$

d'où

$$\sin^2\beta = \frac{1}{\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{k^2}{ap}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}+k^2+ap}{2ap} - \frac{2k^2}{2ap}}$$

$$= \frac{2ap}{\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}-k^2+ap}$$

$$= \frac{2ap\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}+k^2-ap\right]}{(k^2-ap)^2+4a^2k^2-(k^2-ap)^2}$$

$$= \frac{p}{2ak^2}\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}+k^2-ap\right].$$

MÉMOIRE sur le compas parfait.

TRAITÉ DU COMPAS PARFAIT

PAR

ABOU SEHL OUIDJEN BEN OUESTEM EL-KOUHI.

Au nom de Dieu, le Miséricordieux, le Clément!

Abou Sehl El-Kouhi a dit : Nous avons composé ce traité sur l'instrument connu sous le nom du compas parfait. Il comprend deux livres.

Le premier livre a pour objet de démontrer qu'il est possible de décrire, au moyen de ce compas, les lignes régulières, c'est-à-dire les lignes droites, les circonférences de cercle et les circonférences des sections coniques, à savoir des paraboles, des hyperboles, des ellipses, et des branches opposées des hyperboles.

Le second livre traite de la théorie de la description des courbes que nous venons de mentionner, en les considérant comme données de position.

Si cet instrument a existé avant nous chez les anciens, s'il en a été question et si son nom a été connu chez eux, si enfin le nom de cet instrument et les noms des choses qui s'y rattachent ont été différents de ceux que nous emploierons, nous devons être excusé à cet égard, attendu que ni l'instrument même, ni une mention de l'instrument ne sont parvenus à nous, quoiqu'il soit possible que cet instrument, avec la démonstration qu'il sert à décrire les lignes que nous venons de mentionner, ait existé, et que cependant son emploi ait été différent de celui que nous en ferons dans le second livre du présent traité.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

LIVRE PREMIER.

DÉMONSTRATION DE LA POSSIBILITÉ DE TRACER DES LIGNES RÉGULIÈRES AU MOYEN DU COMPAS PARFAIT.

Concevons qu'en un point d'un plan soit élevée une droite qui peut se mouvoir dans un des plans perpendiculaires au premier plan, et qu'il passe par un autre point situé sur cette droite une autre droite qui a trois mouvements : premièrement un mouvement autour de l'autre droite élevée sur le premier plan, secondement un mouvement dans le plan de cette droite, et troisièmement un mouvement suivant son propre prolongement de part et d'autre.

Lorsque cette combinaison est effectuée dans un instrument, celui-ci s'appelle *compas parfait.* Le point pris sur le premier plan s'appelle *le centre du compas.* Ce plan même s'appelle *le plan du centre du compas.* La ligne droite élevée au centre s'appelle *l'axe du compas.* L'autre point situé sur l'axe s'appelle *le sommet du compas.* La ligne droite qui passe par le sommet s'appelle *la ligne de sommet du compas*, et seulement lorsqu'on emploie le compas elle s'appelle *le tire-ligne du compas*, et son extrémité *l'extrémité du tire-ligne du compas.* L'angle compris entre le tire-ligne et l'axe du compas s'appelle *l'angle au sommet du compas.* L'angle compris entre l'axe du compas et l'intersection commune du plan du centre du compas et du plan dans lequel se meut l'axe s'appelle *l'angle au centre du compas.* Cette

MÉMOIRE sur le compas parfait.

intersection commune s'appelle *la ligne du centre du compas.* Le plan sur lequel est appliqué le centre du compas s'appelle *le plan donné pour le compas.* Enfin le mouvement de la ligne du sommet du compas autour de l'axe combiné avec le mouvement de l'extrémité du tire-ligne sur le plan donné s'appelle *le mouvement du compas.*

Ce compas s'appelle le compas parfait, parce que l'on peut, au moyen de cet instrument, décrire toutes les lignes régulières complétement. En effet, les lignes régulières sont ou des lignes droites, ou des circonférences de cercle, ou des circonférences de paraboles, d'hyperboles et d'ellipses, et toutes ces lignes peuvent être décrites au moyen de ce compas, selon la position de l'axe relativement à la ligne du sommet du compas et à la ligne du centre. Car l'axe sera ou perpendiculaire à la ligne du sommet et à la ligne du centre simultanément, ou perpendiculaire à la ligne du sommet seulement, ou perpendiculaire à la ligne du centre seulement, ou elle ne sera perpendiculaire à aucune des deux lignes. En ce dernier cas, ou les deux angles au sommet et au centre seront égaux, ou l'angle aigu au sommet sera plus grand que l'angle aigu au centre, ou l'angle obtus au sommet sera plus petit que l'angle obtus au centre; ou inversement l'angle aigu au centre sera plus grand que l'angle aigu au sommet, ou l'angle obtus au centre sera plus petit que l'angle obtus au sommet[1].

Proposition I.

Théorème. — Si l'axe du compas est simultanément perpendiculaire à la ligne du sommet et à la ligne du centre, l'extré-

[1] Les six cas énumérés ici correspondent suivant l'ordre aux six propositions du premier livre de ce traité.

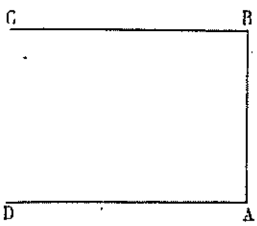
mité du tire-ligne ne trace, par suite du mouvement du compas aucune ligne sur le plan donné.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Par exemple, soient l'axe AB (fig. 18), la ligne du sommet BC, et la ligne du centre AD, et soit la droite AB perpendiculaire à la fois à la droite BC et à la droite AD. Je dis que l'extrémité du tire-ligne ne trace, par suite du mouvement du compas, aucune ligne sur le plan donné.

Démonstration. — Si nous faisons mouvoir le compas, tous les angles compris entre l'axe et la ligne du sommet sont droits. La ligne du sommet, à savoir BC, se trouve donc constamment dans un plan perpendiculaire à l'axe AB, et le tire-ligne se trouve dans le même plan parce que son mouvement se fait suivant le prolongement de la droite BC. En même temps l'axe est également perpendiculaire au plan donné, parce qu'il est perpendiculaire à la ligne du centre qui est appliqué sur le plan donné. Par conséquent le plan donné et le plan dans lequel se trouve le tire-ligne du compas sont parallèles, ils ne peuvent donc pas se rencontrer. Mais, si l'extrémité du tire-ligne ne rencontre pas le plan donné, il ne trace aucune ligne sur le plan donné, par suite du mouvement du compas dont l'axe est perpendiculaire à la ligne du sommet et à la ligne du centre simultanément. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Fig. 18.



Il est évident aussi que, si l'axe est perpendiculaire à la ligne du centre, il est perpendiculaire aussi au plan donné, et que, s'il n'est pas perpendiculaire à la ligne du centre, il n'est pas perpendiculaire non plus au plan donné.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

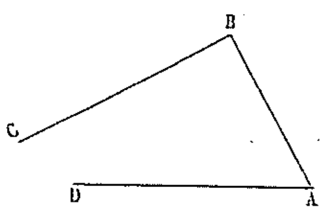
Proposition II.

Théorème. — Si l'axe est perpendiculaire à la ligne du sommet seulement, l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas, des lignes droites.

Par exemple, soient l'axe la droite AB (fig. 19), la ligne du sommet BC, et la ligne du centre AD, et soit la droite AB perpendiculaire à la droite BC et non perpendiculaire à la droite AD. Je dis que l'extrémité du tire-ligne trace, par suite du mouvement du compas sur le plan donné, une ligne droite.

Démonstration. — Si nous faisons mouvoir le compas, tous les angles compris entre l'axe et la ligne du sommet sont droits. La ligne du sommet, à savoir BC, est donc constamment dans un plan perpendiculaire à la droite AB, et le tire-ligne est dans le même plan, parce que son mouvement se fait suivant le prolongement de la droite BC. Mais la droite AB n'est pas perpendiculaire au plan donné, parce qu'elle n'est pas perpendiculaire à la ligne du centre. Par conséquent, le plan donné et le plan dans lequel se trouve le tire-ligne du compas ne sont pas parallèles. Ils se rencontreront donc; leur intersection commune sera une ligne droite, l'extrémité du tire-ligne parcourra cette intersection commune, et tracera, par suite du mouvement du compas dont l'axe est perpendiculaire à la ligne du sommet seulement, des lignes droites sur le plan donné. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Fig. 19.



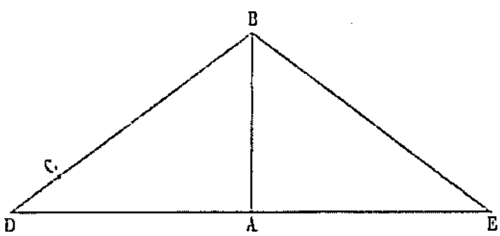
MÉMOIRE sur le compas parfait.

Proposition III.

Théorème. — Si l'axe est perpendiculaire à la ligne du centre seulement, l'extrémité du tire-ligne trace, par suite du mouvement du compas, des circonférences de cercle sur le plan donné.

Par exemple, soient l'axe la droite AB (fig. 20), la ligne du sommet BC et la ligne du centre AD, et soit la droite AB perpendiculaire à la droite AD et non perpendiculaire à la droite BC. Je dis que l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas, une circonférence de cercle.

Fig. 20.



Démonstration. — L'angle DAB est droit, et l'angle ABC n'est pas droit. L'extrémité du tire-ligne rencontre donc, pendant le mouvement du compas, le plan donné. Elle le rencontrera sur la droite AD au point D; et, si nous faisons mouvoir le compas, l'extrémité du tire-ligne tourne autour du point A et rencontre la droite AE de l'autre côté; elle la rencontrera au point E. Or, puisque l'angle compris entre le tire-ligne BD et l'axe AB est constamment égal à l'angle compris entre l'axe AB et une droite menée du point B à la ligne que le tire-ligne trace sur le plan donné, nous avons des triangles dans lesquels deux angles[1] sont égaux et un côté commun. Par con-

[1] J'ai restitué par conjecture les mots على السطح المفروض فلنا مثلثات فيها زاويتان que j'ai placés dans le texte entre crochets. Ces mots, ou des mots d'une valeur identique, ont été évidemment omis par le copiste.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

séquent, les droites menées du point A à cette ligne sont égales. La ligne tracée par l'extrémité du tire-ligne est donc un cercle dont ED est le diamètre. Il suit de là que l'extrémité du tire-ligne trace, en vertu du mouvement du compas dont l'axe est perpendiculaire à la ligne du centre seulement, sur le plan donné, des circonférences de cercle. C'est ce qu'il fallait démontrer.

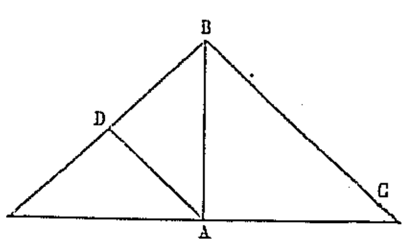
Il est évident aussi, d'après cela, que, si l'axe n'est pas perpendiculaire à la ligne du sommet, le tire-ligne du compas engendre, par son mouvement, deux cônes droits qui se rencontrent au sommet, que ce sommet est le sommet du compas, que la droite qui se trouve du côté de l'angle aigu engendre le cône qui est situé près de l'axe du compas, et que la droite qui est adjacente à l'angle obtus engendre le côté opposé.

Proposition IV.

Théorème. — Si l'axe n'est perpendiculaire à aucune des deux lignes du sommet et du centre, mais que les deux angles au sommet et au centre soient égaux, l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas, des circonférences de paraboles.

Par exemple, soient l'axe la droite AB (fig. 21), la ligne du sommet BC, et la ligne du centre AD, et que la droite AB ne soit perpendiculaire à aucune des deux lignes, mais que les deux angles au sommet et au centre, à savoir BAD et ABC, soient égaux : je dis que l'extrémité du tire-ligne tracera sur le plan donné, par suite du mouvement du compas, la circonférence d'une parabole.

Fig. 21.



MÉMOIRE sur le compas parfait.

Démonstration. — L'angle aigu au sommet et l'angle aigu au centre se trouvent, par suite du mouvement du compas, une fois du même côté, comme dans la position ABD, et une autre fois des deux côtés opposés, comme dans la position ABC. Lorsqu'ils se trouvent du même côté, l'extrémité du tire-ligne rencontre la droite AD. Elle la rencontrera au point D. Le plan donné déterminera donc, dans le cône engendré par le mouvement du compas, une section dont l'axe est la droite AD, parce que ce cône est droit. Lorsque les deux angles sont alternes-internes, la droite BC est parallèle à la droite AD, parce que les deux angles alternes-internes, à savoir ABC et BAD, sont égaux. En même temps l'intersection commune de la base du cône et du plan donné est perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent les droites BD, BC, BA, parce que tant la base du cône que le plan donné sont perpendiculaires au plan dans lequel se trouvent les points D, B, C. Par conséquent cette intersection commune est aussi perpendiculaire à l'intersection commune de la base du cône et du triangle déterminé dans le cône par le plan DBC qui passe par le sommet du cône et par son axe. La droite BC est un des côtés du triangle et parallèle à la droite AD, qui est l'axe de la section déterminée dans le cône par le plan donné. La droite BD est un autre côté du même triangle et est rencontrée par l'axe AD au point D. Il suit de là que le plan donné détermine dans le cône une parabole dont le sommet est le point D et l'axe la droite AD, et dont la circonférence est parcourue par l'extrémité du tire-ligne, car le tire-ligne[1] se meut sur le plan donné. L'extrémité du tire-ligne décrit donc sur ce plan donné, par suite du mouvement du compas dont l'axe n'est perpendiculaire à aucune des deux lignes du sommet et du centre, tandis

[1] C'est-à-dire l'extrémité du tire-ligne.

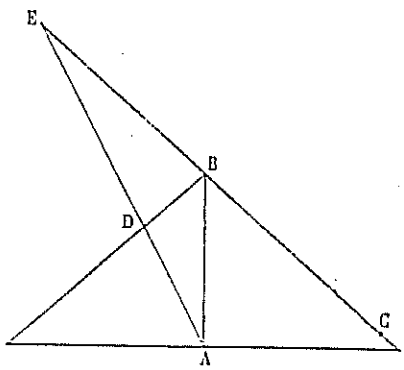
que l'angle au sommet est égal à l'angle au centre, des circonférences de paraboles. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Proposition V.

Théorème. — Si l'axe n'est perpendiculaire à aucune des deux lignes du sommet et du centre, mais que l'angle aigu au sommet soit plus grand que l'angle aigu au centre, l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas, des circonférences d'hyperboles à deux branches opposées.

Par exemple, soient l'axe la droite AB (fig. 22), la ligne du sommet BC, et la ligne du centre AD, et que la droite AB ne soit perpendiculaire à aucune des deux lignes, mais que l'angle aigu au sommet, à savoir ABC, soit plus grand que l'angle aigu au centre, à savoir BAD. Je dis que l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas, la circonférence d'une hyperbole et de sa branche opposée.

Fig. 22.



Démonstration. — L'angle aigu au sommet et l'angle aigu au centre se trouvent, par suite du mouvement du compas, une fois du même côté, comme dans la position ABD, et une autre fois des deux côtés opposés, comme dans la position ABC. S'ils se trouvent du même côté, l'extrémité du tire-ligne rencontre la droite AD. Qu'elle la rencontre au point D. Le plan donné détermine donc, dans le cône engendré par le mouvement du compas, une section dont l'axe est AD, parce que ce cône est droit. Lorsque les deux angles sont alternes-internes, la droite AD qui est l'axe de la section déterminée dans le cône par le plan donné, rencontre la droite CB du côté de B, parce que l'angle ABC est plus grand que l'angle BAD. Qu'elle la rencontre au point E. En même temps le tire-ligne BE, étant situé du côté de l'angle obtus ABE, se trouve sur la surface du cône opposé et sur le prolongement du côté du triangle déterminé dans le cône par le plan qui passe par l'axe et par le sommet du cône. L'intersection commune de la base du cône et de ce triangle se comporte comme nous l'avons mentionné précédemment[1]. Le plan donné[2] détermine donc dans l'un des deux cônes opposés une hyperbole, et dans les deux cônes les deux branches opposées d'une hyperbole dont le diamètre est DE, et dont la circonférence est parcourue par les deux extrémités du tire-ligne. Car le tire-ligne se meut sur les deux plans donnés opposés l'un à l'autre[3]. Par conséquent, les deux extrémités du tire-ligne tracent sur le plan donné, par suite du mouvement du compas dont l'axe n'est perpendiculaire à aucune des deux lignes du sommet et du centre, tandis que l'angle aigu au sommet est plus grand que l'angle aigu au centre, des circonférences d'hyperboles (à deux branches) opposées. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Proposition VI.

Théorème. — Si l'axe n'est perpendiculaire à aucune des deux lignes du sommet et du centre, mais que l'angle aigu

[1] C'est-à-dire qu'elle est perpendiculaire à l'intersection commune de la base du cône et du plan donné. Comparer page 75, ligne 12 à 20.

[2] Dans le texte arabe, j'ai restitué par conjecture مفروض, que le copiste avait omis.

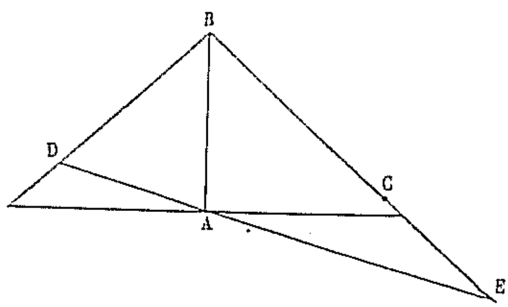
[3] C'est-à-dire sur les deux parties du plan donné où celui-ci est rencontré par les deux cônes opposés l'un à l'autre.

Mémoire sur le compas parfait.

au centre soit plus grand que l'angle aigu au sommet, l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas, des circonférences d'ellipses.

Par exemple, soient l'axe la droite AB (fig. 23), la ligne du sommet BC, et la ligne du centre AD, et que la droite AB ne soit perpendiculaire à aucune des deux lignes, mais que l'angle aigu au centre, à savoir BAD, soit plus grand que l'angle aigu au sommet, à savoir ABC.

Fig. 23.



Je dis que l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas, la circonférence d'une ellipse.

Démonstration. — L'angle aigu au sommet et l'angle aigu au centre se trouvent, par suite du mouvement du compas, une fois du même côté, comme dans la position ABD, et une autre fois des deux côtés opposés, comme dans la position ABC. Lorsqu'ils se trouvent du même côté, l'extrémité du tire-ligne rencontre la droite AD. Qu'elle la rencontre au point D. Le plan donné détermine donc, dans le cône engendré par le mouvement du compas, une section dont AD est l'axe, parce que le cône est droit. Lorsque les deux angles sont alternes-internes, la droite AD, qui est l'axe de la section déterminée dans le cône par le plan donné, rencontre la droite BE, qui est un des[1] côtés du triangle déterminé dans le cône par le plan qui passe par le sommet du cône et par son axe. En même temps,

[1] Dans le texte arabe les mots احد من ont été omis par le copiste.

l'intersection commune de la base du cône et du plan donné est perpendiculaire à la droite qui est[1] l'intersection commune de la base du cône et du triangle. Enfin, la droite BD est un autre côté du triangle, et est rencontrée par l'axe AD au point D. Par conséquent, le plan donné détermine dans le cône une ellipse dont DE est le diamètre, et dont la circonférence est parcourue par l'extrémité du tire-ligne qui se meut[2] sur la surface du cône. Il suit de là que l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas dont l'axe n'est perpendiculaire à aucune des deux lignes du sommet et du centre, tandis que l'angle aigu au centre est plus grand que l'angle aigu au sommet[3], des circonférences d'ellipses[4]. C'est ce qu'il fallait démontrer.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Nous avons donc clairement reconnu qu'il est possible de décrire, au moyen de ce compas, les intersections communes de la surface conique et d'une quelconque des différentes espèces de surfaces[5].

LIVRE SECOND.

THÉORIE DE LA DESCRIPTION DES LIGNES RÉGULIÈRES DANS UNE POSITION DONNÉE.

Il faut maintenant convenir de la manière d'appliquer le centre du compas sur un plan donné, et de faire coïncider la

[1] Je restitue par conjecture, dans le texte arabe, les mots والفصل المشترك لقاعدة المخروط وللسطح المفروض عمود على الخط et هو. Ces mots, ou des mots d'une valeur identique, ont été omis par le copiste.

[2] Le copiste a peut-être omis ici, dans le texte arabe, les mots المارّ avant على.

[3] Je restitue par conjecture les mots للمركز اعظم من الزاوية الحادّة oubliés par le copiste.

[4] Le copiste a oublié les mots القطوع الناقصة.

[5] Cette réflexion finale étend considérablement la portée de tout ce qui précède. Comparer ci-après, p. 111.

ligne du sommet ou la ligne du centre et l'axe avec une ligne droite donnée de position, et un point donné sur une de ces droites avec un point donné.

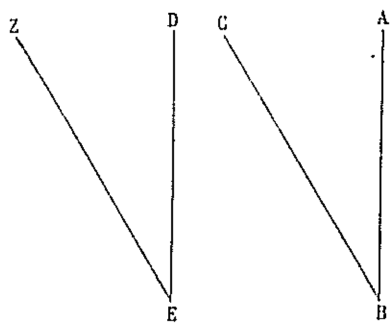
Proposition I.

Problème. — Si nous nous proposons ce que nous venons de dire, nous désirons rendre l'angle au sommet ou l'angle au centre du compas égal à un angle donné compris entre deux lignes droites.

Soit donc l'axe du compas la droite AB (fig. 24), et la ligne du sommet ou la ligne du centre BC, et soit l'angle donné l'angle DEZ. Nous désirons rendre l'angle compris entre l'axe AB et la droite BC égal à l'angle DEZ.

Solution. — Nous appliquons le point B, qui est le sommet ou le centre du compas, sur le point E, et l'axe AB sur une des deux droites DE ou EZ, soit sur DE; enfin la droite BC sur la droite EZ. De cette manière, l'angle compris entre l'axe AB et la droite BC est appliqué sur l'angle DEZ; il est donc[1] égal à l'angle DEZ qui est donné. Nous savons alors que l'angle au sommet ou au centre du compas est égal à un angle donné. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Fig. 24.



Proposition II.

Problème. — Nous désirons décrire, au moyen d'un compas

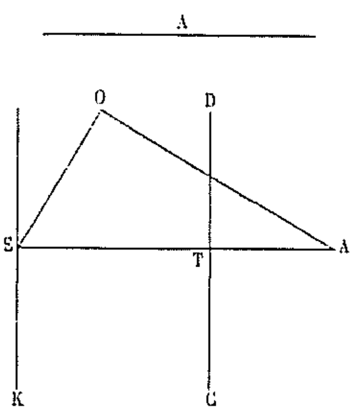
[1] Dans le texte arabe j'ai restitué par conjecture les mots زاوية دهز فهى.

dont l'axe est A (fig. 25), une ligne droite parallèle à la ligne droite CD qui est donnée de position, et passant par le point E qui est donné.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Solution. — Nous menons du point E une perpendiculaire à la droite CD, à savoir ET. Nous rendons l'axe du compas, à savoir A, perpendiculaire à la ligne du sommet, et non perpendiculaire à la ligne du centre, et nous faisons mouvoir le compas jusqu'à ce que l'extrémité du tire-ligne rencontre la ligne du centre du côté de l'angle aigu. Elle la rencontrera donc dans un certain point. Nous appliquons ce point sur le point E, la ligne du centre sur la droite ET, de quelque côté que ce soit, et le plan du centre sur le plan donné, de sorte que le compas soit AOE, son sommet O, son centre A, son axe AO, la ligne du centre AE, et la ligne du sommet OE.

Fig. 25.



Je dis que l'extrémité du tire-ligne trace, par suite du mouvement du compas, une droite parallèle à la droite CD et qui passe par le point E.

Démonstration. — La ligne que trace l'extrémité du tire-ligne, à savoir EK, est droite, ainsi que nous l'avons démontré dans le premier livre[1], et elle passe par le point E. En outre, puisque le plan AOE est perpendiculaire au plan donné et au plan dans lequel tourne le tire-ligne EO, tant le plan dans lequel tourne le tire-ligne OE que le plan donné seront per-

[1] Proposition II, voir p. 72.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

pendiculaires, à leur tour, au plan AOE. Par conséquent, leur intersection commune, à savoir la droite EK, sera perpendiculaire au plan AOE, et c'est la droite qui est parcourue et tracée par l'extrémité du tire-ligne. Or, puisque la droite EK est perpendiculaire au plan AOE, elle est perpendiculaire aussi à la droite AE. Donc l'angle AEK est droit. Mais l'angle ETC est droit. Par conséquent, la droite EK est parallèle à la droite CD qui est la droite donnée de position, attendu que ces droites sont toutes les deux dans un même plan. Nous avons donc tracé, au moyen du compas dont l'axe est la droite A, une droite parallèle à une ligne droite donnée de position, et passant par un point donné. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Proposition III.

Problème. — Nous désirons décrire, au moyen d'un compas dont l'axe est la droite A (fig. 26), sur un plan donné, une circonférence de cercle dont un des diamètres est la droite CD, qui est donnée de position.

Solution. — Nous faisons la droite EZ à la droite ZT comme la moitié de la droite CD à l'axe A; nous faisons l'angle EZT droit, et nous joignons ET. Nous faisons l'angle au centre du compas droit, et l'angle au sommet égal à l'angle ETZ, et nous faisons mouvoir le compas jusqu'à ce que l'extrémité du tire-ligne rencontre la ligne du centre[1]. Qu'elle la rencontre donc dans un certain point. Nous appliquons ce point sur un des deux points C et D, que ce soit sur le point D, la ligne du centre sur la droite CD, et le plan du centre sur le plan donné,

[1] Le texte arabe ajoute encore : « du côté de l'angle aigu. » Mais, dans le cas actuel, l'angle au centre et son angle supplémentaire sont tous deux droits. Aussi est-il indifférent de quel côté l'extrémité du tire-ligne rencontre la ligne du centre.

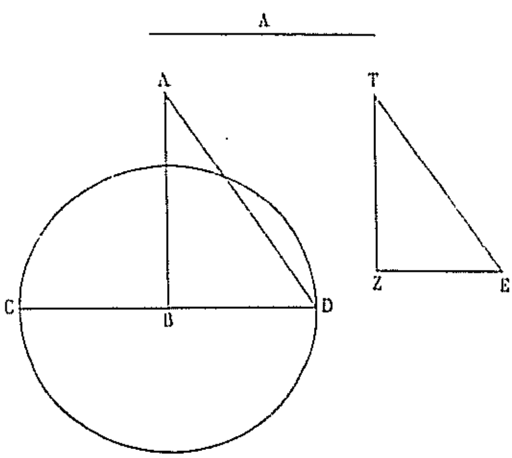
de sorte que le compas soit DAB, son sommet le point A, son axe AB, son centre le point B, et la ligne du sommet la droite AD.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Je dis que l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas, la circonférence d'un cercle dont un des diamètres est la droite CD.

Démonstration. — La ligne que trace l'extrémité du tire-ligne sur le plan donné est une circonférence de cercle, ainsi

Fig. 26.



que nous l'avons démontré dans le premier livre[1], et le point B est le centre de ce cercle. En même temps, puisque DB est à BA comme EZ à ZT, à cause de la similitude des deux triangles, et que EZ est à ZT comme la moitié de la droite CD à la droite BA, il s'ensuit que le rapport tant de la moitié de la droite CD que de la droite DB à la droite AB est le même. La droite DB est donc la moitié de la droite CD, et par conséquent la droite BD égale à la droite BC. La circonférence du cercle passera donc par le point C, et la droite CD sera un diamètre du cercle, parce qu'elle passe par le centre B; enfin l'extrémité du tire-ligne trace la circonférence de ce cercle. Nous avons donc tracé, au moyen du compas dont l'axe est la droite A, sur le plan donné, la circonférence d'un cercle

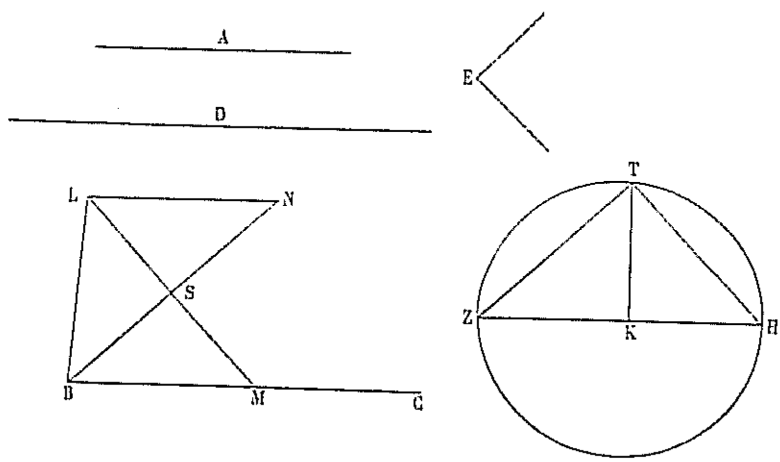
[1] Proposition III, voir p. 73.

dont un des diamètres est la droite CD qui est donnée de position. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Proposition IV.

Problème. — Nous désirons décrire, au moyen d'un compas dont l'axe est la droite A (fig. 27), sur un plan donné, la circonférence d'une parabole dont un des diamètres est la droite

Fig. 27.



BC qui est donnée de position, tandis que le point B est le sommet du diamètre, que le paramètre correspondant à ce diamètre est la droite D qui est donnée de grandeur, et que l'angle compris entre le diamètre et son ordonnée est égal à l'angle E qui est donné.

Solution. — Si l'angle E est droit, nous décrivons sur une certaine ligne droite, soit ZH, comme diamètre, un cercle ZTH et nous déterminons sur la droite ZH un point, soit K, tel que le carré de ZK soit au rectangle ZH fois HK comme le carré de la moitié du paramètre, qui est D, est au carré de l'axe qui

MÉMOIRE sur le compas parfait.

est A, ainsi que nous l'avons montré dans notre traité sur la détermination de points sur des lignes suivant des rapports dont les termes sont des surfaces[1]. Nous faisons KT perpendiculaire à ZH, et nous joignons TH. Nous faisons chacun des deux angles au sommet et au centre du compas égal à l'angle KHT[2] qui est plus petit qu'un angle droit, et nous faisons mouvoir le compas jusqu'à ce que l'extrémité du tire-ligne rencontre la ligne du centre du côté de l'angle aigu en un certain point. Nous appliquons ce point sur le point B, la ligne du centre sur la droite BC, et le plan du centre sur le plan donné, de sorte que le compas soit BLM, son sommet le point L, son axe LM, son centre le point M; la ligne du sommet, lorsque l'angle aigu au sommet est alterne-interne de l'angle aigu au centre, LN, et, lorsque les deux angles sont situés du même côté, LB, enfin la ligne du centre BM.

[1] Voir ci-dessus, page 19. — Nous pouvons aisément nous rendre compte de la signification de la construction demandée ici. Désignons le paramètre par $2p$, l'axe du compas par k, la droite arbitraire ZH par l, et la droite cherchée ZK par x; x devra satisfaire à l'équation

$$x^2 : l(l-x) = p^2 : k^2$$

ou

$$x^2 + \frac{lp^2}{k^2}x = \frac{l^2p^2}{k^2},$$

donc

$$\mathrm{ZK} = \frac{lp}{k}\left(-\frac{p}{2k} + \sqrt{\frac{p^2}{4k^2}+1}\right).$$

[2] D'après cela, en désignant l'angle au sommet du compas par α, nous aurons

$$\cos^2\alpha = \cos^2 \mathrm{KHT} = \frac{\overline{\mathrm{HT}}^2}{\overline{\mathrm{ZH}}^2} = \frac{\mathrm{ZH.HK}}{\overline{\mathrm{ZH}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{ZK}}^2}{\overline{\mathrm{ZH}}^2}\cdot\frac{\mathrm{ZH.HK}}{\overline{\mathrm{ZK}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{ZK}}^2}{l^2}\cdot\frac{k^2}{p^2},$$

donc

$$\cos\alpha = \frac{k}{lp}\cdot \mathrm{ZK},$$

et, en substituant la valeur de ZK que nous venons de trouver,

$$\cos\alpha = -\frac{p}{2k} + \sqrt{\frac{p^2}{4k^2}+1}.$$

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Alors l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas, une parabole, ainsi que nous l'avons démontré dans le premier livre[1].

Je dis que le paramètre de cette parabole est la droite D, et l'angle compris entre le diamètre BC et son ordonnée est égal à l'angle E que nous avons supposé droit.

Démonstration. — Nous menons du point B une droite perpendiculaire à l'axe LM, soit BS, et nous joignons ZT; et, puisque le carré de la moitié de la droite D est au carré de l'axe LM comme le carré de ZK est au rectangle ZH fois HK, et que le rectangle ZH fois HK est égal au carré de TH, le carré de la moitié de la droite D sera au carré de LM comme le carré de ZK au carré de TH; donc la moitié de la droite D est à la droite LM comme la droite ZK à HT. Mais la droite ZK est à la droite HT comme le rectangle HZ fois ZK, c'est-à-dire le carré de ZT, au rectangle HZ fois HT, parce que ZH est la hauteur commune des deux rectangles. Par conséquent, le carré de ZT est au rectangle ZH fois HT comme la moitié de la droite D à la droite LM; et, puisque le triangle LBM est isocèle, et BS perpendiculaire à la base LM, le carré de ZT est au rectangle ZH fois HT comme un quart de la droite D est à la droite LS. En même temps, puisque l'angle SLB est égal à l'angle ZHT, et l'angle LSB égal à l'angle ZTH, chacun de ces deux derniers angles étant un angle droit, le triangle LSB est semblable au triangle HTZ, donc SB est à BL[2] comme TZ à ZH, et BS à SL comme ZT à TH. Il suit de là que le rapport composé du rapport de SB à BL et du rapport de BS à SL, c'est-à-dire le rapport du carré de BS au rectangle SL fois

[1] Proposition IV, voir p. 74.

[2] Dans le texte arabe le copiste a oublié الى بل.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

LB, est égal au rapport composé du rapport de TZ à ZH et du rapport de ZT à TH, c'est-à-dire égal au rapport du carré de ZT au rectangle ZH fois HT; le carré de BS est donc au rectangle SL fois LB comme le carré de ZT est au rectangle ZH fois HT. Mais le carré de ZT est au rectangle ZH fois HT comme le quart de la droite D est à la droite LS; donc le carré de SB est au rectangle SL fois LB comme le quart de la droite D à la droite LS. Par conséquent, quatre fois le carré de BS, ce qui est le carré de BN parce que la droite BS est égale à SN, sera au rectangle SL fois LB comme quatre fois le quart de la droite D, c'est-à-dire comme la droite D, est à LS. Mais la droite D est à la droite LS comme le rectangle D fois LB est au rectangle SL fois LB, parce que LB est la hauteur commune des deux rectangles. Le carré de la droite BN et le rectangle D fois LB ont donc tous les deux le même rapport au rectangle SL fois LB. Il suit de là que le carré de la droite BN est égal au rectangle D fois LB, donc que la droite D est à BN comme la droite BN est à BL, donc que la droite D est à la droite BL comme le carré de BN est au carré de BL. Mais le carré de BL est égal au rectangle BL fois LN parce que le triangle BLN est isocèle. Par conséquent la droite D est à la droite BL comme le carré de BN est au rectangle BL fois LN. Or le point L est le sommet du cône, la droite BC est parallèle à la droite LN, et la droite D est à un côté du triangle qui passe par le sommet du cône, d'après ce que nous avons exposé ci-dessus, comme le carré[1] de la base du triangle est au rectangle formé par le produit de l'un des deux côtés du triangle par l'autre. Il suit de là que la droite D est le paramètre de la parabole, ainsi que l'a dit Apollonius[2]. L'axe de

[1] Dans le texte arabe le copiste a oublié مربع.

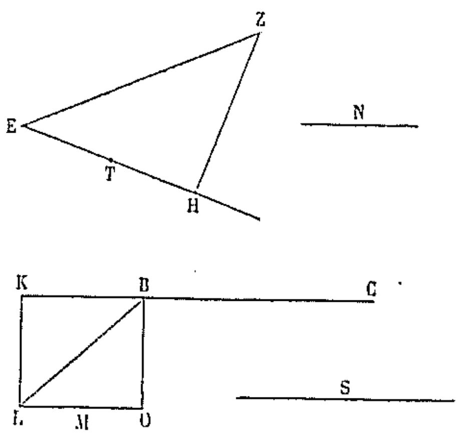
[2] Voir ci-dessus, p. 32, note (4).

MÉMOIRE sur le compas parfait.

cette parabole est BC, parce que le cône est droit; l'angle compris entre la droite BC et son ordonnée est droit, et l'extrémité du tire-ligne parcourt la circonférence de la section. Nous avons donc tracé, au moyen du compas dont l'axe est la droite A, sur un plan donné, une parabole dont un des diamètres est BC, tandis que son paramètre est la droite D, et que l'angle compris entre le diamètre et son ordonnée est égal à l'angle droit E.

Si l'angle E n'est pas droit (fig. 28), nous menons la droite ZH perpendiculaire à l'une des deux droites EZ et ET, du côté de l'angle aigu. Qu'elle soit perpendiculaire à la droite EH. Nous divisons la droite EH en deux parties égales au point T, et nous faisons la droite D à une autre droite, qui soit N, comme le carré de la droite EZ au rectangle ZH fois HT. Nous faisons l'angle KBL égal à l'angle ZEH, la droite KL égale à la droite N et perpendiculaire à la droite BK, la droite LO parallèle à la droite KBC, et la droite BO parallèle à la droite LK. Nous divisons LO en deux parties égales au point M, nous faisons la droite OB à une autre droite, qui soit S, comme MO à OB, et nous traçons, au moyen du compas dont l'axe est A, sur le plan donné, la parabole dont un des diamètres est la droite MO qui est donnée de position, dont le sommet est au point M, dont le paramètre est la droite S qui est donnée de grandeur, et dans laquelle l'angle compris entre le diamètre MO et son ordon-

Fig. 28.



née est droit, ainsi que nous l'avons tracé précédemment. Cette parabole sera celle dont la circonférence passe par le point B, dont un des diamètres est la droite BC, dont le paramètre correspondant au diamètre BC est la droite D, et dans laquelle l'angle compris entre le diamètre BC et son ordonnée est égal à l'angle E qui est donné, ainsi que l'a démontré Apollonius dans le premier livre du *Traité des Coniques*[1]. Nous avons donc tracé, au moyen du compas dont l'axe est A, la circonférence d'une parabole dont un des diamètres est la droite BC qui est donnée de position, le sommet de ce diamètre étant au point B, et son paramètre égal à la droite D qui

MÉMOIRE sur le compas parfait.

[1] Proposition LII de l'édition d'Oxford. — Voici une vérification immédiate de la justesse de l'assertion de notre auteur:

Nous avons

$$\begin{aligned} S = \frac{\overline{OB}^2}{MO} = \frac{\overline{KL}^2}{\frac{1}{2}LO} = \frac{N \cdot KL}{\frac{1}{2}KB} &= 2N \operatorname{tang} KBL \\ &= 2N \operatorname{tang} ZEH = 2\, \frac{D.(ZH.HT)}{\overline{EZ}^2} \operatorname{tang} ZEH \\ &= 2D \cdot \frac{ZH.HT}{\overline{EZ}^2} \cdot \frac{ZH}{HE} = D.\left(\frac{ZH}{EZ}\right)^2 = D.\sin^2 ZEH. \\ &= D.\sin^2 KBL; \end{aligned}$$

donc

$$\frac{S}{\sin^2 KBL} = D.$$

Or on sait que la parabole dont l'équation, rapportée à l'axe et à la tangente au sommet comme axes de coordonnées rectangulaires, est

$$y^2 = Sx$$

sera représentée, si nous prenons pour axes obliques un autre diamètre et la tangente au sommet de ce diamètre, et si KBL est l'angle que ce diamètre fait avec la tangente menée par son sommet, par l'équation

$$y'^2 = \frac{S}{\sin^2 KBL}\, x' = Dx'.$$

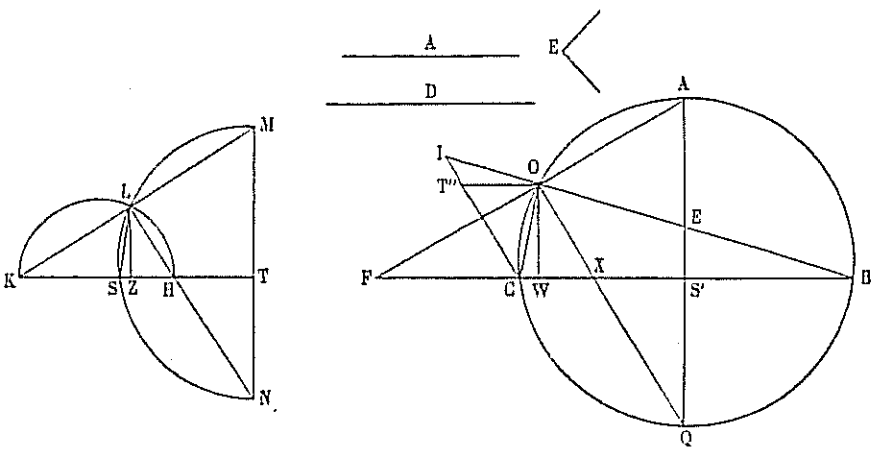
Il s'agit donc seulement de voir que B est un point de la parabole et que BL est tangente à la parabole, ce qui est évident parce que $MO = x$ et $BO = y$ vérifient l'équation $y^2 = Sx$, et parce que $\operatorname{tang} BLO = \frac{BO}{LO} = \frac{BO}{2MO} = \frac{y}{2x} = \frac{dy}{dx}$.

est donnée de grandeur, tandis que l'angle compris entre le diamètre et son ordonnée est égal à l'angle E qui est donné. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Proposition V.

Problème. — Nous désirons décrire, au moyen d'un compas dont l'axe est la droite A (fig. 29), sur un plan donné, les

Fig. 29.



deux branches opposées d'une hyperbole dont un des diamètres est la droite BC, qui est donnée de grandeur et de position, tandis que son paramètre est la droite D, qui est donnée de grandeur, et que l'angle compris entre le diamètre et son ordonnée est égal à l'angle E qui est donné.

Solution. — Si l'angle E est droit, nous faisons ZH à HT comme le paramètre D au diamètre BC, et nous déterminons sur le prolongement de la droite TZ, du côté de Z, un point, soit K, tel que le rectangle KH fois KZ soit au rectangle KT fois TH comme le carré de l'axe du compas, qui est A, au carré

MÉMOIRE sur le compas parfait.

de la moitié du diamètre BC, ainsi que nous l'avons montré dans notre traité sur la détermination de points sur des lignes suivant des rapports dont les termes sont des surfaces[1]. Nous décrivons sur la droite KH comme diamètre un demi-cercle KLH, nous menons la droite LZ perpendiculairement à la droite KH, nous joignons KL, LH, et nous prolongeons ces deux droites. Nous faisons la droite NTM perpendiculaire à la droite KT, et nous décrivons sur la droite NTM comme diamètre un demi-cercle, du côté de K. Sa circonférence passera par le point L, parce que l'angle NLM est droit, et par un point de la droite KH, lequel soit S. Nous joignons SL, et nous faisons l'angle au sommet du compas égal à l'angle KLS, et l'angle au centre du compas égal à l'angle LKS. Nous faisons mouvoir le compas jusqu'à ce que l'extrémité du tire-ligne rencontre la ligne du centre du côté de l'angle aigu en un certain point; puis nous appliquons ce point sur le point C, la ligne du centre sur le prolongement de la droite BC, et le plan

[1] Voy. ci-dessus, pages 19 et 85. — Voici la signification de la construction demandée ici : désignons le diamètre donné par $2a$, le paramètre par $2p$, l'axe du compas par k, la droite arbitraire ZH par l, et la droite cherchée KZ par x. Nous aurons

$$\mathrm{HT} = \frac{al}{p},$$

puisque

$$\mathrm{ZH} : \mathrm{HT} = 2p : 2a;$$

et

$$\mathrm{KH}.\mathrm{KZ} : \mathrm{KT}.\mathrm{TH} = k^2 : a^2,$$

ou

$$\frac{(x+l)\,x}{\left(x+l+\frac{al}{p}\right)\frac{al}{p}} = \frac{k^2}{a^2},$$

donc

$$x^2 - \frac{l}{ap}(k^2 - ap)\,x = \frac{k^2 l^2}{ap^2}(a+p),$$

d'où

$$\mathrm{KZ} = \frac{l}{2ap}\left[k^2 - ap + \sqrt{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2}\right].$$

MÉMOIRE sur le compas parfait.

du centre sur le plan donné, de sorte que le compas soit COF, son sommet le point O, son axe OF, son centre le point F, la ligne du sommet, lorsque l'angle aigu au sommet est situé du même côté que l'angle aigu au centre, OC, et lorsque les deux angles sont alternes-internes, OI, enfin la ligne du centre CF[1].

[1] D'après cela, en désignant l'angle au sommet du compas par α et l'angle au centre du compas par β, nous aurons

$$\sin^2\beta = \sin^2 ZKL = \frac{\overline{ZL}^2}{\overline{KL}^2} = \frac{KZ \cdot ZH}{KZ \cdot KH} = \frac{l}{l + KZ}.$$

Substituant ici la valeur de KZ trouvée dans la note précédente, on obtient

$$\sin^2\beta = \frac{l}{l + \dfrac{l}{2ap}\left[k^2 - ap + \sqrt{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2}\right]} = \frac{2ap}{\sqrt{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2} + k^2 + ap}$$

$$= \frac{2ap\left[\sqrt{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2} - k^2 - ap\right]}{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2 - (k^2+ap)^2},$$

ou

$$\sin^2\beta = \frac{p}{2ak^2}\left[\sqrt{(k^2+ap)^2 + 4a^2k^2} - k^2 - ap\right].$$

Puis

$$\sin^2\alpha = \sin^2 SLK = \cos^2 NLS = \cos^2 TMS = \frac{\overline{TM}^2}{\overline{MS}^2} = \frac{\overline{TM}^2}{TM \cdot MN} = \frac{TM}{TM + TN};$$

mais on a

$$TM = \frac{ZL \cdot TK}{ZK},$$

et

$$TN = \frac{ZK \cdot TH}{ZL};$$

donc

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{TN}{TM} = 1 + \frac{\overline{ZK}^2 \cdot TH}{\overline{ZL}^2 \cdot TK} = 1 + \frac{\overline{ZK}^2 \cdot TH}{ZK \cdot ZH \cdot TK}$$

$$= 1 + \frac{ZK \cdot \dfrac{al}{p}}{l\left(ZK + l + \dfrac{al}{p}\right)} = 1 + \frac{x \cdot \dfrac{a}{p}}{x + l + \dfrac{al}{p}};$$

en même temps on a

$$\frac{1}{\sin^2\beta} = 1 + \frac{ZK}{l} = 1 + \frac{x}{l},$$

Je dis que l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas dont l'axe est la droite A, une hyperbole, et que les deux extrémités du tire-ligne tracent les deux branches opposées d'une hyperbole, dont le diamètre est BC, le paramètre égal à la droite D, et l'angle compris entre le diamètre et son ordonnée égal à l'angle E qui, en premier lieu, est droit.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Démonstration. — Nous faisons la droite OXQ perpendiculaire à la droite FO, et nous faisons OF à XS′ comme LK à HT. Nous élevons au point S′ une droite perpendiculaire à la droite BC, en la prolongeant jusqu'à ce qu'elle rencontre les deux droites FO, OX aux deux points A, Q, et nous abaissons la perpendiculaire OW sur la droite FX. Enfin nous abaissons du point C sur l'axe OF une perpendiculaire, à savoir CT″I,

donc

$$\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{x}{l}-\frac{x\cdot\frac{a}{p}}{x+l+\frac{al}{p}}=\frac{(x+l)x}{\left(x+l+\frac{al}{p}\right)l};$$

mais on avait (p. 91, note),

$$\frac{(x+l)x}{\left(x+l+\frac{al}{p}\right)\frac{al}{p}}=\frac{k^2}{a^2},$$

par conséquent

$$\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{k^2}{ap},$$

d'où

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{k^2}{ap}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{(k^2+ap)^2+4a^2k^2}+k^2+ap}{2ap}-\frac{2k^2}{2ap}}$$

$$=\frac{2ap}{\sqrt{(k^2+ap)^2+4a^2k^2}-k^2+ap}=\frac{2ap\left[\sqrt{(k^2+ap)^2+4a^2k^2}+k^2-ap\right]}{(k^2+ap)^2+4a^2k^2-(k^2-ap)^2}$$

ou

$$\sin^2\alpha=\frac{p}{2(a+p)k^2}\left[\sqrt{(k^2+ap)^2+4a^2k^2}+k^2-ap\right].$$

et nous menons OT″ parallèle à la droite BC. Alors, puisque le carré de l'axe du compas, à savoir de OF, est au carré de la moitié du diamètre, lequel est BC, comme le rectangle HK fois KZ, qui est égal au carré de la droite KL, est au rectangle KT fois TH, il s'ensuit que le carré de KL est au rectangle KT fois TH comme le carré de OF au carré de la moitié de la droite BC. En même temps OF est à la droite FX comme la droite LK est à KH, par suite de la similitude des deux triangles, et OF est à XS′ comme LK à HT. Par conséquent la droite OF est à FS′ comme la droite LK est à KT. Il suit de là que le rapport composé du rapport de OF à FS′ et du rapport de OF à XS′, c'est-à-dire le rapport du carré de OF au rectangle FS′ fois XS′, est égal au rapport composé du rapport de LK à KT et du rapport de LK à HT, c'est-à-dire au rapport du carré de LK au rectangle KT fois TH. Le carré de OF est donc au rectangle FS′ fois S′X comme le carré de LK au rectangle KT fois TH. Il résulte de là que le carré de OF est, tant au rectangle FS′ fois S′X qu'au carré de la moitié de BC[1], comme le carré de LK est au rectangle KT fois TH. Le rapport du carré de OF tant au rectangle FS′ fois S′X qu'au carré de la moitié de la droite BC est donc le même, parce que ces deux rapports sont égaux l'un et l'autre au rapport du carré de LK au rectangle KT fois TH. Par conséquent le rectangle FS′ fois S′X est égal au carré de la moitié de la droite BC. En même temps, puisque QS′ est à S′X comme FS′ à S′A, à cause de la similitude des deux triangles, le rectangle QS′ fois S′A est égal au rectangle FS′ fois S′X, lequel est égal au carré de la moitié de la droite BC. Le rectangle QS′ fois S′A est donc égal au carré de la moitié de la droite BC. D'autre part, puis-

[1] Dans le texte arabe le copiste a oublié les mots ومربّع نصف خط بج.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

que CX est à FO comme HS est à LK, à cause de la similitude des deux triangles, et que FO est à S'X comme LK à HT, il suit que CX est à S'X comme HS à HT, et CS' à S'X comme ST à TH. On a aussi XS' à S'Q comme HT à TN; donc CS' à S'Q comme ST à TN. Par un raisonnement semblable on trouve que CS' est à S'A comme ST est à TM. Il suit de là que le rapport composé du rapport de CS' à S'Q et du rapport de CS' à S'A, c'est-à-dire le rapport du carré de CS' au rectangle QS' fois S'A, est égal au rapport composé du rapport de ST à TN et du rapport de ST à TM, c'est-à-dire au rapport du carré de ST au rectangle TN fois TM. Mais le carré de ST est égal au rectangle NT fois TM. Par conséquent le carré de CS' est égal au rectangle QS' fois S'A. Or le rectangle QS' fois S'A est égal au carré de la moitié de la droite BC; donc la droite CS' est égale à la moitié de la droite CB; donc la droite CS' est égale à la droite S'B. Conséquemment il passe par les points A, B, Q, C, la circonférence d'un cercle dont AS'Q est un diamètre, attendu que le rectangle QS' fois S'A est égal au carré de la moitié de la droite BC et que l'angle S' est droit. La circonférence passe, en outre, par le point O, parce que l'angle AOQ est droit. Si maintenant nous faisons mouvoir le compas jusqu'à ce que l'angle aigu au sommet, à savoir FOI, soit placé de manière à être alterne-interne avec l'angle aigu au centre, alors, puisque l'angle FOX est droit, l'angle FOI ensemble avec l'angle XOB est égal à un angle droit, attendu que la ligne IOE est droite. Mais l'angle IOF est égal à l'angle COF, donc l'angle COQ est égal à l'angle XOB. Il suit de là que l'arc compris entre les points C et Q du cercle dont nous venons de parler est égal à l'arc compris entre le point Q et le point où l'extrémité du tire-ligne rencontre la circonférence du cercle. Ce point est B. Par conséquent la ligne BC est le

MÉMOIRE sur le compas parfait.

diamètre de l'hyperbole, car le tire-ligne OEB est situé du côté de l'angle obtus et se trouve sur la surface du cône opposé. Ensuite, puisque WX est à OF comme ZH à LK à cause de la similitude des deux triangles, et que OF est à XS′ comme LK est à HT, WX est à XS′ comme ZH est à HT. Or ZH est à HT comme la droite D, qui est le paramètre, est au diamètre BC. Il suit de là que la droite D est à la droite BC comme WX à XS′. Mais XW est à XS′ comme la droite OX à XQ, à cause de la similitude des deux triangles. La droite D est donc à la droite BC comme OX à XQ; et, puisque OX est à XQ comme le carré de OX au rectangle OX fois XQ, et que le rectangle OX fois XQ[1] est égal au rectangle BX fois XC, la droite D est à BC comme le carré de OX est au rectangle BX fois XC, et ce dernier rapport est égal au rapport composé du rapport de OX à XB et du rapport d'OX à XC; donc le rapport de la droite D à BC est égal au rapport composé du rapport de OX à XB et du rapport de OX à XC. Mais OX est à XB comme IT″ est à T″O, à cause de la similitude des deux triangles, et OX est à XC comme CT″ à T″O, parce que la figure CT″OX est un parallélogramme. Il s'ensuit que le rapport de la droite D à la droite BC est égal au rapport composé du rapport de IT″ à T″O et du rapport de CT″ à T″O, c'est-à-dire égal au rapport du rectangle CT″ fois T″I au carré de T″O. Par conséquent la droite D est à BC comme le rectangle CT″ fois T″I est au carré de T″O. En même temps le point O est le sommet du cône et la droite T″O est parallèle au diamètre de l'hyperbole. Il suit de là que la droite D est le paramètre correspondant au diamètre BC, ainsi que l'illustre Apollonius l'a dé-

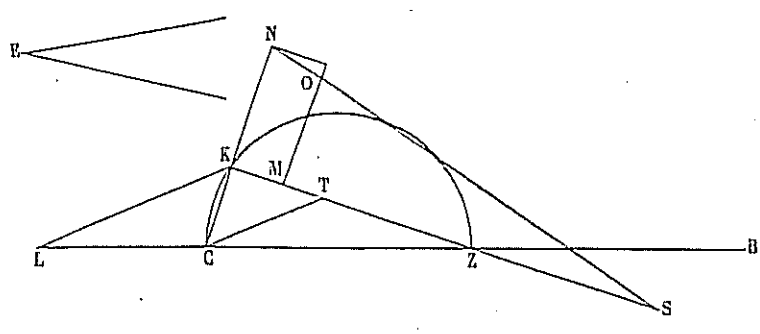
[1] Dans le texte arabe j'ai corrigé une erreur du copiste; il a écrit ونسبة عص الى صق au lieu de وسطح عص فى صق.

montré dans les *Coniques*[1]. L'angle compris entre ce diamètre et son ordonnée est droit, attendu que l'intersection commune entre le plan donné et la base du cône est perpendiculaire au triangle IOC, parce que le cône est droit. L'extrémité du tire-ligne parcourt, par suite du mouvement du compas, la circonférence de l'hyperbole, et les deux extrémités du tire-ligne parcourent les deux branches opposées et les décrivent. Nous avons donc tracé, au moyen du compas dont l'axe est la droite A, sur un plan donné, les deux branches opposées d'une hyperbole dont un des diamètres est la droite BC, qui est donnée de grandeur et de position, et dont le paramètre est la droite D, qui est donnée de grandeur, tandis que l'angle compris entre le diamètre BC et son ordonnée est égal à l'angle E qui est droit.

Mémoire sur le compas parfait.

Si l'angle E n'est pas droit (fig. 30), nous faisons l'angle ZCT, situé sur le plan donné, égal à l'angle E, et nous décrivons

Fig. 30.



sur la moitié de la droite BC comme diamètre un demi-cercle, à savoir CKZ. Nous faisons ensuite le carré de KL au rectangle ZL fois LC comme la droite D à la droite BC, faisant en même temps KL parallèle à la droite CT qui est connue de posi-

[1] Voir ci-dessus, p. 48, note (5).

MÉMOIRE sur le compas parfait.

tion (1). Nous joignons ZK, et nous faisons la droite ZM moyenne proportionnelle entre les deux droites ZK et ZT. Nous faisons le rectangle MN égal au carré de la droite CK, nous faisons ZS égal à la droite ZM, et nous menons la droite SON. Cette construction est celle que l'illustre Apollonius a donnée dans les *Coniques* (2). Ensuite nous traçons, au moyen du compas, dont l'axe est la droite A, sur le plan donné, les deux branches opposées d'une hyperbole dont un des diamètres est la droite SM, qui est donnée de grandeur et de position, son paramètre étant MO, qui est donné de grandeur, et l'angle compris entre le diamètre SM et son ordonnée étant droit, ainsi que nous venons de le faire dans ce qui précède. La section ainsi décrite sera une hyperbole à deux branches opposées qui passera par les deux points C et B; un de ses diamètres sera la droite BC, son paramètre sera la droite D, et l'angle compris entre le diamètre BC et son ordonnée sera égal à l'angle donné E, ainsi qu'Apollonius l'a démontré dans les *Coniques* (3). Nous avons donc tracé, au moyen du compas dont l'axe est la droite A, sur un plan donné, les deux branches

(1) Cette construction est donnée par Eutocius, *Apollon. Conica*, éd. d'Oxford, p. 93.

(2) Édition d'Oxford, p. 91 et 92.

(3) *Loc. cit.* — Cette transformation des coordonnées étant entièrement calquée sur celle qui est l'objet de la seconde partie de la LIIIe proposition du premier livre des *Coniques* d'Apollonius, il suffirait de suivre la démonstration du grand géomètre pour s'assurer de son exactitude. Comme cependant les procédés de géométrie pure sont tombés quelque peu en désuétude, je crois utile de donner ci-après une vérification analytique pour ceux des lecteurs qui seraient plus habitués à ce dernier mode de raisonnement.

SM étant un diamètre de l'hyperbole (et ici en particulier le grand axe), OM le paramètre correspondant à ce diamètre, Apollonius donne à l'équation de l'hyperbole la forme suivante (voir ci-dessus p. 49, note) :

$$y^2 = \mathrm{OM}.x + \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}x^2. \qquad (1)$$

On voit que l'origine des coordonnées est une des extrémités du diamètre SM; pour la opposées d'une hyperbole dont un des diamètres est la droite BC, qui est donnée de grandeur et de position, son paramètre étant la droite D, qui est donnée de grandeur, et l'angle compris entre le diamètre BC et son ordonnée étant égal à l'angle donné E. C'est ce qu'il fallait démontrer.

transporter au centre de l'hyperbole, remplaçons x par $x - \frac{1}{2}\,\mathrm{SM}$; nous aurons

$$(2)\qquad y^2 - \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}x^2 = -\frac{1}{4}\,\mathrm{OM}.\mathrm{SM}.$$

Pour passer maintenant à un système d'axes obliques parallèles à BC et CT, l'origine restant encore au centre, désignons l'angle ZCT par ε, l'angle CZT par ϑ, et faisons

$$x = x'\cos\vartheta + y'\cos(\varepsilon+\vartheta), \qquad y = x'\sin\vartheta + y'\sin(\varepsilon+\vartheta);$$

nous aurons

$$(3)\qquad \left[\sin^2(\varepsilon+\vartheta) - \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}\cos^2(\varepsilon+\vartheta)\right]y'^2 - \left[\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\right]x'^2$$
$$+ 2\left[\sin\vartheta\sin(\varepsilon+\vartheta) - \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}\cos\vartheta\cos(\varepsilon+\vartheta)\right]x'y' = -\frac{\mathrm{OM}.\mathrm{SM}}{4}.$$

Mais

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}} = \frac{\mathrm{NK}}{\mathrm{KS}} = \frac{\overline{\mathrm{CK}}^2}{\mathrm{KM}.\mathrm{KS}}$$

et

$$\mathrm{KM}.\mathrm{KS} = \overline{\mathrm{KZ}}^2 - \overline{\mathrm{ZM}}^2 = \overline{\mathrm{KZ}}^2 - \mathrm{KZ}.\mathrm{ZT} = \mathrm{KZ}.\mathrm{KT},$$

donc

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}} = \frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{KZ}}\cdot\frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{KT}} = \mathrm{tang}\,\vartheta.\mathrm{tang}(\varepsilon+\vartheta);$$

par conséquent le coefficient de $x'y'$ s'annule, et nous avons l'équation

$$(4)\qquad y'^2 - \frac{\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta) - \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}\cos^2(\varepsilon+\vartheta)}x'^2 = -\frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{OM}\cdot\mathrm{SM}}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta) - \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}\cos^2(\varepsilon+\vartheta)}.$$

Or

$$\frac{\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta) - \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}\cos^2(\varepsilon+\vartheta)} = \frac{\mathrm{tang}\,\vartheta\,\mathrm{tang}(\varepsilon+\vartheta)\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta) - \mathrm{tang}\,\vartheta\,\mathrm{tang}(\varepsilon+\vartheta)\cos^2(\varepsilon+\vartheta)}$$
$$= \frac{\sin\vartheta}{\sin(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\frac{\cos\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)} = \frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{ZL}}\cdot\frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{LC}} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{BC}},$$

13.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Proposition VI.

Problème. — Nous désirons décrire, au moyen d'un compas dont l'axe est la droite A (fig. 31), sur un plan donné, une ellipse dont un des diamètres est la droite BC qui est donnée de grandeur et de position, tandis que son paramètre est la droite D, qui est donnée de grandeur, et que l'angle compris entre le diamètre et son ordonnée est égal à l'angle E qui est donné.

et

$$\frac{OM.SM}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta)-\frac{OM}{SM}\cos^2(\varepsilon+\vartheta)}=\frac{\operatorname{tang}\vartheta\operatorname{tang}(\varepsilon+\vartheta).\overline{SM}^2}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta)-\operatorname{tang}\vartheta\operatorname{tang}(\varepsilon+\vartheta)\cos^2(\varepsilon+\vartheta)}$$

$$=\frac{\sin\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\frac{\overline{SM}^2}{\sin\varepsilon}=\frac{\sin\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\frac{4\overline{ZM}^2}{\sin\varepsilon}=\frac{\sin\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\frac{4KZ.ZT}{\sin\varepsilon}$$

$$=\frac{\sin\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)}\cdot 4\cdot CZ\cos\vartheta\cdot\frac{CZ}{\sin(\varepsilon+\vartheta)}=\frac{\sin\vartheta}{\sin(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\frac{\cos\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\overline{BC}^2$$

$$=\frac{D}{BC}\cdot\overline{BC}^2=D.BC;.$$

substituant ces valeurs dans (4), il vient

$$y'^2-\frac{D}{BC}x'^2=-\frac{D.BC}{4}. \tag{5}$$

Remplaçant enfin x' par $x'+\frac{1}{2}BC$ pour mettre l'équation sous la forme habituelle à Apollonius, nous avons

$$y'^2=Dx'+\frac{D}{BC}x'^2, \tag{6}$$

ce qu'il fallait obtenir. J'ajoute encore que les quantités BC et D sont liées aux quantités SM et OM par les relations suivantes :

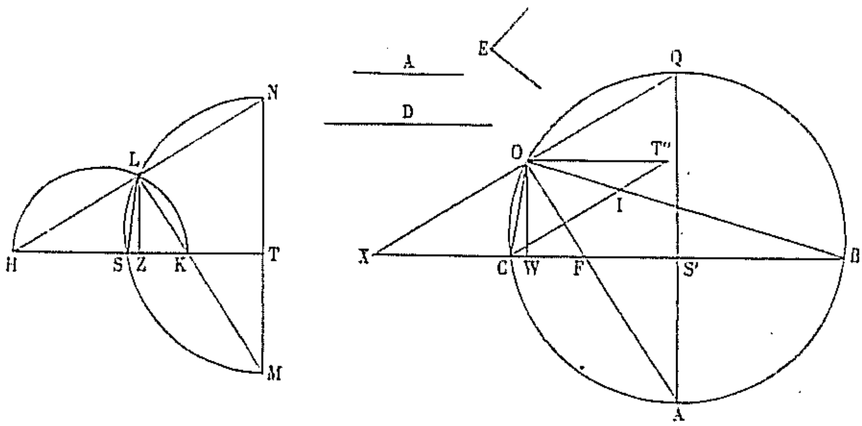
$$\frac{\overline{SM}^2}{\overline{BC}^2}=\frac{\sin\varepsilon\cos\vartheta}{\sin(\varepsilon+\vartheta)},$$

$$\frac{\overline{OM}^2}{\overline{D}^2}=\frac{\sin\varepsilon.\sin^2(\varepsilon+\vartheta)}{\cos^3\vartheta}.$$

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Solution. — Si l'angle E est droit, nous faisons ZH à HT comme le paramètre D au grand axe BC. Le point T tombera du côté de Z, en dehors de la ligne ZH, parce que, dans

Fig. 31.



l'ellipse, le paramètre est plus petit que le grand axe. Nous déterminons, sur la droite TZ, un point, soit K, tel que le rectangle HK fois KZ soit au rectangle KT fois TH comme le carré de l'axe du compas, qui est A, est au carré de la moitié de la droite BC, ainsi que nous l'avons fait dans le traité sur la détermination de points sur des lignes suivant des rapports dont les termes sont des surfaces[1]. Nous décrivons sur la droite KH comme diamètre un demi-cercle KLH, nous menons

[1] Comparez pp. 19, 85, 91. — Voici la signification de la construction demandée ici. Désignons le diamètre donné par $2a$, le paramètre par $2p$, l'axe du compas par k, la droite arbitraire ZH par l, et la droite cherchée KZ par x; nous aurons

$$\mathrm{HT} = \frac{al}{p},$$

puisque

$$\mathrm{ZH} : \mathrm{HT} = 2p : 2a;$$

et

$$\mathrm{KH}.\mathrm{KZ} : \mathrm{KT}.\mathrm{TH} = k^2 : a^2,$$

MÉMOIRE sur le compas parfait.

la droite LZ perpendiculairement à la droite KH, nous joignons KL, LH, et nous prolongeons ces deux droites. Nous faisons la droite NTM perpendiculaire à la droite KT, et nous décrivons sur la droite NTM comme diamètre un demi-cercle, du côté de K. Sa circonférence passera par le point L, parce que l'angle NLM est droit, et par un point de la droite KH, lequel soit S. Nous joignons SL, et nous faisons l'angle au sommet du compas égal à l'angle KLS, et l'angle au centre égal à l'angle LKS[1]. Nous faisons mouvoir le compas jusqu'à ce que l'extrémité du tire-ligne rencontre la ligne du

ou

$$\frac{(x+l)x}{\left(\frac{al}{p}-x-l\right)\frac{al}{p}}=\frac{k^2}{a^2},$$

donc

$$x^2+\frac{l}{ap}(k^2+ap)\,x=\frac{k^2l^2}{ap^2}(a-p),$$

d'où

$$\mathrm{KZ}=\frac{l}{2ap}\left[-k^2-ap+\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}\right].$$

[1] D'après cela, en désignant l'angle au sommet du compas par α et l'angle au centre du compas par β, nous aurons

$$\sin^2\beta=\sin^2\mathrm{ZKL}=\frac{\overline{\mathrm{ZL}}^2}{\overline{\mathrm{KL}}^2}=\frac{\mathrm{KZ}.\mathrm{ZH}}{\mathrm{KZ}.\mathrm{KH}}=\frac{l}{l+\mathrm{KZ}}.$$

Substituant ici la valeur de KZ trouvée dans la note précédente, on obtient

$$\sin^2\beta=\frac{l}{l+\frac{l}{2ap}\left[-k^2-ap+\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}\right]}=\frac{2ap}{\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}-k^2+ap}$$

$$=\frac{2ap\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}+k^2-ap\right]}{(k^2-ap)^2+4a^2k^2-(k^2-ap)^2},$$

ou

$$\sin^2\beta=\frac{p}{2ak^2}\left[\sqrt{(k^2-ap)^2+4a^2k^2}+k^2-ap\right].$$

Puis

$$\sin^2\alpha=\sin^2\mathrm{SLM}=\sin^2\mathrm{SNM}=\frac{\overline{\mathrm{ST}}^2}{\overline{\mathrm{SN}}^2}=\frac{\mathrm{NT}.\mathrm{TM}}{\mathrm{NT}.\mathrm{NM}}=\frac{\mathrm{TM}}{\mathrm{TM}+\mathrm{TN}};$$

centre du côté de l'angle aigu en un certain point; puis nous appliquons ce point sur le point C, la ligne du centre sur la droite BC, et le plan du centre sur le plan donné, de sorte que le compas soit COF, son sommet le point O, son axe OF,

MÉMOIRE sur le compas parfait.

mais on a

$$\mathrm{TN} = \frac{\mathrm{ZK}.\mathrm{TH}}{\mathrm{ZL}},$$

et

$$\mathrm{TM} = \frac{\mathrm{ZL}.\mathrm{TK}}{\mathrm{ZK}},$$

donc

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{\mathrm{TN}}{\mathrm{TM}} = 1 + \frac{\overline{\mathrm{ZK}}^2.\mathrm{TH}}{\overline{\mathrm{ZL}}^2.\mathrm{TK}} = 1 + \frac{\overline{\mathrm{ZK}}^2.\mathrm{TH}}{\mathrm{ZK}.\mathrm{ZH}.\mathrm{TK}}$$

$$= 1 + \frac{\mathrm{ZK}.\frac{al}{p}}{l\left(\frac{al}{p} - \mathrm{ZK} - l\right)} = 1 + \frac{x\frac{al}{p}}{l\left(\frac{al}{p} - x - l\right)};$$

en même temps on a

$$\frac{1}{\sin^2\beta} = 1 + \frac{\mathrm{ZK}}{l} = 1 + \frac{x}{l},$$

donc

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\beta} = \frac{x\frac{a}{p}}{\frac{al}{p} - x - l} - \frac{x}{l} = \frac{(x+l)\,x}{l\left(\frac{al}{p} - x - l\right)};$$

mais on avait (p. 102, note),

$$\frac{(x+l)\,x}{\left(\frac{al}{p} - x - l\right)\frac{al}{p}} = \frac{k^2}{a^2},$$

par conséquent

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\beta} = \frac{k^2}{ap},$$

d'où

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{k^2}{ap}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{(k^2-ap)^2 + 4a^2k^2} - k^2 + ap}{2ap} + \frac{2k^2}{2ap}}$$

$$= \frac{2ap}{\sqrt{(k^2-ap)^2 + 4a^2k^2} + k^2 + ap} = \frac{2ap\left[\sqrt{(k^2-ap)^2 + 4a^2k^2} - k^2 - ap\right]}{(k^2-ap)^2 + 4a^2k^2 - (k^2+ap)^2},$$

ou

$$\sin^2\alpha = \frac{p}{2(a-p)k^2}\left[\sqrt{(k^2-ap)^2 + 4a^2k^2} - k^2 - ap\right].$$

son centre le point F, la ligne du sommet, lorsque l'angle aigu au sommet est situé du même côté que l'angle aigu au centre, OC, et la ligne du centre CF.

Je dis que l'extrémité du tire-ligne trace sur le plan donné, par suite du mouvement du compas, une ellipse dont un des diamètres est BC, son paramètre étant égal à la droite D, et l'angle compris entre le diamètre et son ordonnée étant égal à l'angle E qui, en premier lieu, est droit.

Démonstration. — Nous faisons la droite XOQ perpendiculaire à la droite FO, et nous faisons OF à XS′ comme LK à HT. Nous élevons au point S′ une droite perpendiculaire à BC, en la prolongeant jusqu'à ce qu'elle rencontre les deux droites OF, XO aux deux points A, Q, et nous abaissons la perpendiculaire OW sur la droite FX[1]. Enfin nous abaissons du point C sur l'axe OF une perpendiculaire, à savoir CIT″, et nous menons la droite OT″ parallèle à la droite BC. Alors, puisque le carré de l'axe du compas, à savoir de OF, est au carré de la moitié du diamètre, lequel est BC, comme le rectangle HK fois KZ, qui est égal au carré de KL, est au rectangle KT fois TH, il s'ensuit que le carré de KL est au rectangle KT fois TH comme le carré de OF au carré de la moitié de la droite BC. En même temps OF est à FX comme LK à KH, par suite de la similitude des deux triangles, et OF est à XS′ comme KL à TH. Par conséquent OF est à FS′ comme LK à KT. Il suit de là que le rapport composé du rapport de OF à FS′ et du rapport de la même droite à XS′, c'est-à-dire le rapport du carré de OF au rectangle FS′ fois XS′, est égal au rapport composé du rapport de LK à KT et du rapport de la même

[1] Le copiste arabe paraît avoir oublié ici les mots ونجعل عو عمودا على خط فص.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

droite à HT, c'est-à-dire au rapport du carré de LK au rectangle KT fois TH. Le carré de OF est donc au rectangle FS' fois XS' comme le carré de LK au rectangle KT fois TH. Il résulte de là que le rapport du carré de OF tant au rectangle FS' fois XS' qu'au carré de la moitié de la droite BC est le même, parce que ces deux rapports sont égaux l'un et l'autre au rapport du carré de LK au rectangle KT fois TH. Par conséquent le rectangle FS' fois XS' est égal au carré de la moitié de la droite BC. En même temps, puisque QS' est à XS' comme FS' est à S'A, à cause de la similitude des deux triangles, le rectangle QS' fois S'A est égal au rectangle FS' fois XS', lequel est égal au carré de la moitié de la droite BC. Le rectangle QS' fois S'A est donc égal au carré de la moitié de la droite BC. D'autre part, puisque CX est à FO comme HS est à LK, à cause de la similitude des deux triangles, et que FO est à S'X comme LK à TH, il suit que CX à XS' comme SH à HT, et que CS' à XS' comme ST à HT. On a aussi XS' à S'Q comme HT à TN; donc CS' à S'Q comme ST à TN. Par un raisonnement semblable on trouve que CS' est à S'A comme ST à TM. Il suit de là que le rapport composé du rapport de CS' à S'Q et du rapport de la même droite à S'A, c'est-à-dire le rapport du carré de CS' au rectangle QS' fois S'A, est égal au rapport composé du rapport de ST à TN et du rapport de la même droite à TM, c'est-à-dire au rapport du carré de ST au rectangle NT fois TM. Mais le carré de ST est égal au rectangle NT fois TM. Par conséquent le carré de CS' est égal au rectangle QS' fois S'A. Or le rectangle QS' fois S'A est égal au carré de la moitié de la droite BC; donc la droite CS' est égale à la moitié de la droite CB; donc la droite CS' est égale à la droite S'B. Conséquemment il passe par les points A, B, Q, C, la circonférence d'un cercle ayant pour diamètre la droite AS'Q,

MÉMOIRE sur le compas parfait.

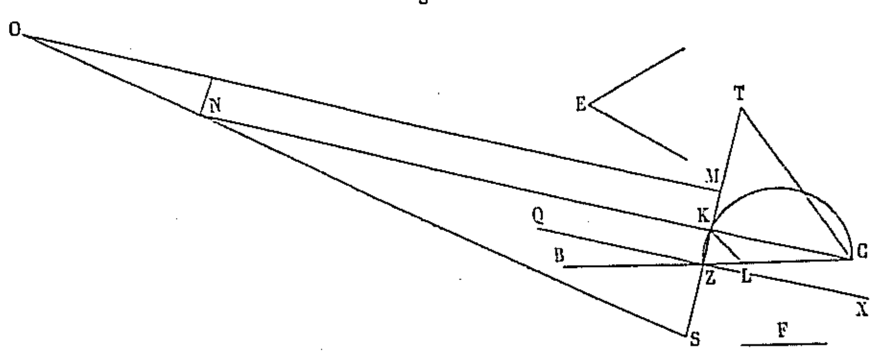
attendu que le rectangle QS′ fois S′A est égal au carré de S′B. La circonférence passe, en outre, par le point O, parce que l'angle QOA est droit. Si maintenant nous faisons mouvoir le compas jusqu'à ce que l'angle aigu au sommet, à savoir FOI, soit placé de manière à être alterne-interne avec l'angle aigu au centre, l'angle FOC sera égal à l'angle FOI. Il suit de là que l'arc compris entre les points C et A du cercle dont nous venons de parler est égal à l'arc compris entre le point A et le point auquel aboutit la droite OI, lequel point est B. Par conséquent la ligne BC est diamètre de l'ellipse, car la droite OIB est située du côté de l'angle aigu, et se trouve sur la surface du cône décrit autour de l'axe. Ensuite, puisque WX est à OF comme ZH à LK, à cause de la similitude des deux triangles, et que OF est à XS′ comme KL à HT, WX est à XS′ comme ZH à HT. Or ZH est à HT comme la droite D, qui est le paramètre, est au diamètre BC. Par conséquent la droite D est à la droite BC comme WX à XS′. Mais WX est à XS′ comme OX à XQ, parce que la droite QS′ est parallèle à la droite OW. La droite D est donc à la droite BC comme OX à XQ, et, par suite, comme le carré de OX au rectangle OX fois XQ; et, puisque le rectangle OX fois XQ est égal au rectangle CX fois XB, la droite D est à la droite BC comme le carré de la droite OX est au rectangle CX fois XB; et ce dernier rapport est égal au rapport composé du rapport de OX à XB et du rapport de la même droite à XC; donc le rapport de la droite D à la droite BC est égal au rapport composé du rapport de OX à XB et du rapport de la même droite à XC. Mais OX est à XB comme T″I à T″O, à cause de la similitude des deux triangles, et OX est à XC comme CT″ à T″O, parce que la figure XCT″O est un parallélogramme. Il suit de là que le rapport de la droite D à la droite BC est composé du rapport de IT″ à T″O

MÉMOIRE sur le compas parfait.

et du rapport de CT″ à T″O, c'est-à-dire qu'il est égal au rapport du rectangle CT″ fois T″I au carré de T″O. Par conséquent la droite D est au diamètre BC comme le rectangle CT″ fois T″I au carré de T″O. En même temps le point O est le sommet du cône et la droite T″O parallèle au diamètre de l'ellipse. Il s'ensuit que la droite D est le paramètre correspondant à ce diamètre, à savoir à BC, ainsi que l'illustre Apollonius l'a démontré dans le *Traité des Coniques*[1]. L'angle compris entre le diamètre BC et son ordonnée est droit, attendu que l'intersection commune entre le plan donné et la base du cône est perpendiculaire au triangle IOC, parce que le cône est droit. L'extrémité du tire-ligne parcourt la circonférence de la section. Nous avons donc tracé, au moyen du compas dont l'axe est la droite A, sur le plan donné, une ellipse dont un des diamètres est la droite BC qui est donnée de grandeur et de position, et dont le paramètre est la droite D qui est donnée de grandeur, tandis que l'angle compris entre le diamètre BC et son ordonnée est égal à l'angle E que nous avons supposé droit.

Si l'angle E n'est pas droit (fig. 32), nous faisons l'angle

Fig. 32.



ZCT, situé sur le plan donné, égal à l'angle E, et nous décri-

[1] Voir ci-dessus, p. 63, note (2).

MÉMOIRE sur le compas parfait.

vons sur la moitié de la droite BC comme diamètre, dans le plan donné, le demi-cercle CKZ. Nous faisons ensuite le carré de KL au rectangle ZL fois LC comme la droite D à la droite BC, faisant en même temps LK parallèle à la droite CT qui est donnée de position[1]. Nous joignons ZK, et nous faisons la droite ZM moyenne proportionnelle entre les deux droites KZ, ZT. Nous faisons le rectangle MN égal au carré de la droite CK, nous faisons ZS égal à la droite ZM, et nous menons la droite SNO. Cette construction est celle qu'Apollonius a donnée pour l'ellipse[2]. La droite OM sera le paramètre correspondant au diamètre SM, pour un angle des ordonnées droit, dans la section dont un des diamètres est la droite BC, tandis que le paramètre correspondant à ce diamètre, pour un angle des ordonnées égal à l'angle ZCT, est égal à la droite D, ainsi que l'illustre Apollonius l'a démontré dans les *Coniques*[3]. La droite MS est ou bien le diamètre transverse, ou

[1] Cette construction est donnée par Eutocius, *Apollon. Conica*, édition d'Oxford, p. 97.

[2] Édition d'Oxford, p. 96 et 97.

[3] *Loc. cit.* — Je donnerai ici (comme ci-dessus, p. 98, note(3), une vérification analytique de cette transformation des coordonnées.

SM étant un diamètre de l'ellipse (et ici en particulier le grand ou le petit axe), OM le paramètre correspondant à ce diamètre, Apollonius donne à l'équation de l'ellipse la forme suivante (voir ci-dessus, p. 49, note) :

$$y^2 = \mathrm{OM}.x - \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}x^2. \tag{1}$$

On voit que l'origine des coordonnées est une des extrémités du diamètre SM; pour la transporter au centre de l'ellipse, remplaçons x par $x + \frac{1}{2}\mathrm{SM}$: nous aurons

$$y^2 + \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{SM}}x^2 = \frac{1}{4}\mathrm{OM}.\mathrm{SM}. \tag{2}$$

Pour passer maintenant à un système d'axes obliques parallèles à BC et CT, l'origine restant encore au centre, désignons l'angle ZCT par ε, l'angle CZT par ϑ, et faisons

$$x = x'\cos\vartheta - y'\cos(\varepsilon + \vartheta) \qquad y = -x'\sin\vartheta + y'\sin(\varepsilon + \vartheta);$$

bien le diamètre perpendiculaire. Si c'est le diamètre transverse, nous traçons au moyen du compas dont l'axe est la droite A une ellipse dont le paramètre est la droite OM et nous aurons

MÉMOIRE sur le compas parfait.

$$(3)\quad \left[\sin^2(\varepsilon+\vartheta)+\frac{OM}{SM}\cos^2(\varepsilon+\vartheta)\right]y'^2+\left[\sin^2\vartheta+\frac{OM}{SM}\cos^2\vartheta\right]x'^2$$
$$-2\left[\sin\vartheta\sin(\varepsilon+\vartheta)+\frac{OM}{SM}\cos\vartheta\cos(\varepsilon+\vartheta)\right]x'y'=\frac{1}{4}\,OM.SM.$$

Mais

$$\frac{OM}{SM}=\frac{NK}{KS}=\frac{\overline{CK}^2}{KM.KS}$$

et

$$KM.KS=\overline{ZM}^2-\overline{ZK}^2=KZ.ZT-\overline{KZ}^2=KZ.TK,$$

donc

$$\frac{OM}{SM}=\frac{CK}{KZ}\cdot\frac{CK}{TK}=\operatorname{tang}\vartheta.\operatorname{tang}[180^\circ-(\varepsilon+\vartheta)]=-\operatorname{tang}\vartheta.\operatorname{tang}(\varepsilon+\vartheta);$$

par conséquent le coefficient de $x'y'$ s'annule, et nous avons l'équation

$$(4)\quad y'^2+\frac{\sin^2\vartheta+\frac{OM}{SM}\cos^2\vartheta}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta)+\frac{OM}{SM}\cos^2(\varepsilon+\vartheta)}x'^2=\frac{1}{4}\,\frac{OM.SM}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta)+\frac{OM}{SM}\cos^2(\varepsilon+\vartheta)}.$$

Or

$$\frac{\sin^2\vartheta+\frac{OM}{SM}\cos^2\vartheta}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta)+\frac{OM}{SM}\cos^2(\varepsilon+\vartheta)}=\frac{\sin^2\vartheta-\operatorname{tang}\vartheta\operatorname{tang}(\varepsilon+\vartheta)\cos^2\vartheta}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta)-\operatorname{tang}\vartheta\operatorname{tang}(\varepsilon+\vartheta)\cos^2(\varepsilon+\vartheta)}$$
$$=-\frac{\sin\vartheta}{\sin(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\frac{\cos\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)}=\frac{KL}{ZL}\cdot\frac{KL}{LC}=\frac{D}{BC},$$

et

$$\frac{OM.SM}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta)+\frac{OM}{SM}\cos^2(\varepsilon+\vartheta)}=\frac{-\operatorname{tang}\vartheta\operatorname{tang}(\varepsilon+\vartheta).\overline{SM}^2}{\sin^2(\varepsilon+\vartheta)-\operatorname{tang}\vartheta\operatorname{tang}(\varepsilon+\vartheta)\cos^2(\varepsilon+\vartheta)}$$
$$=-\frac{\sin\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\frac{\overline{SM}^2}{\sin\varepsilon}=-\frac{\sin\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\frac{4\overline{ZM}^2}{\sin\varepsilon}=-\frac{\sin\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\frac{4KZ\cdot ZT}{\sin\varepsilon}$$
$$=-\frac{\sin\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)}\cdot 4ZC\cos\vartheta\cdot\frac{ZC}{\sin(\varepsilon+\vartheta)}=-\frac{\sin\vartheta}{\sin(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\frac{\cos\vartheta}{\cos(\varepsilon+\vartheta)}\cdot\overline{BC}^2$$
$$=\frac{D}{BC}\cdot\overline{BC}^2=D.BC;$$

MÉMOIRE sur le compas parfait.

l'axe MS, ainsi que nous venons de le faire dans ce qui précède. Mais, si la droite SM est le diamètre perpendiculaire, nous faisons la droite QX [1] moyenne proportionnelle entre les deux droites OM, MS, et perpendiculaire à la droite MS de manière à la partager en deux parties égales au point Z. Nous faisons ensuite QX à une certaine autre droite, laquelle soit F, comme OM à MS; et nous traçons, au moyen du compas dont l'axe est A, sur le plan donné, une ellipse dont le diamètre transverse est QX et le paramètre égal à la droite F. Cette ellipse est celle dont la circonférence passe par les deux points C, B, dont un des diamètres est la droite CB, et le paramètre égal à la droite D, l'angle compris entre le diamètre BC et son ordonnée étant égal à l'angle ZCT, lequel est égal à l'angle donné E, ainsi que l'illustre Apollonius l'a démontré dans les *Coniques* [2]. Nous avons donc tracé, au moyen du

substituant ces valeurs dans (4), il vient

$$y'^2 + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{BC}} x'^2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{D}\cdot\mathrm{BC}. \tag{5}$$

Remplaçant enfin x' par $x' - \frac{1}{2}$ BC pour mettre l'équation sous la forme habituelle à Apollonius, nous avons

$$y'^2 = \mathrm{D}x' - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{BC}} x'^2, \tag{6}$$

ce qu'il fallait obtenir. J'ajoute que les quantités BC et D sont liées aux quantités SM et OM par les relations suivantes :

$$\frac{\overline{\mathrm{SM}}^2}{\overline{\mathrm{BC}}^2} = \frac{\sin\varepsilon \,.\, \cos\vartheta}{\sin(\varepsilon+\vartheta)}, \qquad \frac{\overline{\mathrm{OM}}^2}{\overline{\mathrm{D}}^2} = \frac{\sin\varepsilon \sin^3(\varepsilon+\vartheta)}{\cos^3\vartheta}.$$

[1] Dans le texte arabe le copiste a écrit تجعل خط فرض وسطا فى النبسبة au lieu de تجعل خط قص وسطا فى النسبة

[2] Édition d'Oxford, p. 95 et 96. — La construction de l'auteur consiste à faire

$$\mathrm{QX} = \sqrt{\mathrm{SM}.\mathrm{MO}}, \quad \mathrm{F} = \frac{\overline{\mathrm{SM}}^2}{\sqrt{\mathrm{SM}\cdot\mathrm{MO}}}.$$

En effet, désignant le grand axe d'une ellipse par $2a$, son paramètre par $2p$, le petit axe compas dont l'axe est la droite A, sur le plan donné, une ellipse dont un des diamètres est la droite BC, qui est donnée de grandeur et de position, son paramètre étant la droite D, qui est donnée de grandeur, et l'angle compris entre le diamètre BC et son ordonnée étant égal à l'angle donné E. C'est ce qu'il fallait démontrer.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Le tracé des intersections communes de la surface conique avec une quelconque des différentes espèces de surfaces, suivant une position donnée, au moyen de ce compas, est maintenant une chose évidente pour nous [1]. Par suite de cela il nous sera facile de construire des astrolabes sur des surfaces planes ou conchoïdales, et de construire des cadrans solaires sur des surfaces quelconques, et pareillement tous les instruments sur lesquels se trouvent des lignes qui sont les intersections communes de la surface conique avec une surface quelconque. Dieu, le Très-Haut, connaît seul la vérité.

FIN DU SECOND LIVRE DU COMPAS PARFAIT
ET FIN DE CE TRAITÉ.

par $2b$, et le paramètre correspondant au petit axe par $2p_1$, on a

$$p=\frac{b^2}{a}, \qquad p_1=\frac{a^2}{b},$$

donc

$$2a=\sqrt{2b\cdot 2p_1}, \qquad 2p=\frac{(2b)^2}{\sqrt{2b\cdot 2p_1}}.$$

[1] Pour donner aux constructions qui précèdent cette extension, il suffira de déterminer la position et les deux ouvertures du compas relativement au plan tangent à la surface proposée, au point où l'axe du compas s'appuie sur la surface.

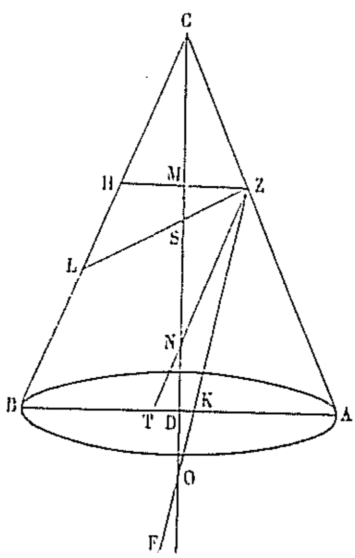
MÉMOIRE sur le compas parfait.

ADDITION

TRADUCTION D'UN PASSAGE EXTRAIT DU MÉMOIRE D'AHMED BEN MOHAMMED BEN ABD EL-DJELIL ES-SIDJZI SUR LA DESCRIPTION DES SECTIONS CONIQUES.

Si nous considérons CD (fig. 33) comme un axe, et si nous faisons tourner le côté CB autour de l'axe CD, en imaginant

Fig. 33.



que la droite CB s'allonge et se raccourcisse de manière à rester constamment appliquée sur la surface du plan donné, que l'angle au sommet du compas, c'est-à-dire l'angle DCB, reste invariable, que l'axe CD tourne autour de lui-même et que le plan soit infini; [alors, si le tracé se fait sur le plan qui passe par la droite ZH] et qui est perpendiculaire au plan du triangle[1], le tracé résultant de ce mouvement produira la circonférence d'un cercle. Si le tracé se fait sur le plan qui passe par la droite ZL et qui est perpendiculaire au plan du triangle, on décrira une ellipse. Si le tracé se fait sur le plan qui

[1] C'est-à-dire du triangle par l'axe.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

passe par la droite ZT et qui est perpendiculaire au plan du triangle, on décrira une parabole. Si le tracé se fait sur le plan qui passe par la droite OKZ et qui est perpendiculaire au plan du triangle, on décrira une hyperbole. Enfin, si on prend les deux côtés du triangle formé dans le cône, de manière à engendrer, en les prolongeant du côté du sommet du cône, un autre cône, et si on prolonge le plan du côté de Z indéfin ment en dehors du cône jusqu'à ce qu'il coupe l'autre cône, on décrira les deux branches opposées d'une hyperbole.

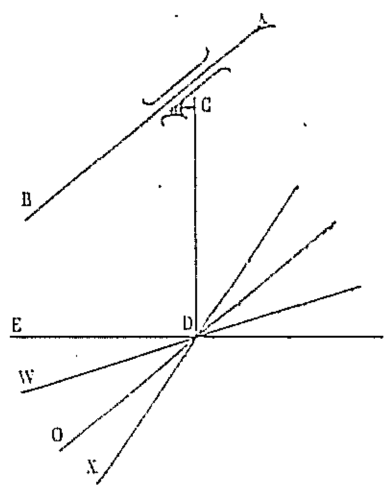
Il est donc évident que, si l'angle CMH est droit, le tracé résultant du mouvement du côté CB produit sur le plan qui passe par la droite ZH un cercle. Si les deux angles BCS et CSL sont plus petits que deux angles droits, le tracé résultant du mouvement de la droite CL sur le plan qui passe par la droite ZL produit l'ellipse. Si les deux angles BCN et CNT sont égaux à deux angles droits, la rotation de la droite CB engendre, sur le plan qui passe par la droite ZNT, la parabole. Et si les deux angles BCO et COF sont plus grands que deux angles droits, le tracé résultant de la rotation de la droite CB produit, sur le plan qui passe par la droite ZKO, l'hyperbole.

Maintenant, posons que la droite CD soit l'axe du compas, en imaginant que la droite CB se meuve dans le tube, en sorte et y rentre, de manière qu'un tire-ligne, remplaçant l'autre pied du compas, s'allonge et se raccourcisse, ainsi que nous l'avons décrit dans notre *Traité sur la construction du compas conique*. Alors, si la position de l'axe CD relativement au plan est une de ces positions à l'égard desquelles nous venons de mentionner la manière dont elles déterminent tant l'angle formé au bout du pied du compas que l'angle formé à l'extrémité C et compris entre le pied CD et l'autre pied CB du

MÉMOIRE sur le compas parfait.

compas, le tracé des sections ci-dessus mentionnées est produit au moyen de ce compas. Voici la figure du compas conique (fig. 34).

Fig. 34.



Ces deux figures sont accompagnées, dans le manuscrit arabe, des légendes suivantes :

FIGURE 1.

Entre H et Z : diamètre du cercle.
Entre L et Z : diamètre de l'ellipse.
Entre T et Z : diamètre de la parabole.
Entre K et Z : diamètre de l'hyperbole.

FIGURE 2.

Près de C à gauche : le tube dans lequel se meut le pied du compas.

Près de C à droite : endroit d'une articulation semblable à celle du compas (ordinaire).

Entre C et B : le pied du compas qui sert à construire les sections et qui entre dans le tube et s'y meut, à savoir le tire-ligne.

Entre C et D : l'autre pied du compas, à savoir l'axe qui fait tourner le compas.

MÉMOIRE sur le compas parfait.

Entre CB et CD : l'angle du compas.

Près de B : l'extrémité du tire-ligne qui trace les sections sur le plan.

Entre D et E : le plan du cercle.

Entre D et W : le plan de l'ellipse.

Entre D et Q : le plan de la parabole.

Entre D et X : le plan de l'hyperbole.

Au-dessous de D : l'extrémité de l'axe.

Autour des points E, W, Q, X : ceci est la figure des lignes des bases sur lesquelles les sections sont tracées.

رسالة

البركار التام وكيفية التخطيط به تأليف
الفاضل محمد بن الحسين بن محمد بن الحسين رحمه الله
للسلطان الملك الناصر صلاح الدين
ابى المظفر يوسف بن ايوب بن شاذى
تغمده الله برحمته

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين وصلوته على خير خلقه محمد النبى وآله الاكرمين لمّا حرّر العبد الاشارة الناصرية وعزم على حمله الى الخزانة المولوية الملكيّة عمرها الله تعالى احبّ ان يشفعه بما يكون دالّا على زكاء ثمرته ومنبتها على صدق نتيجته وقد كان العبد وعد فى تضاعيف ذلك الكتاب اخراج البركار التامّ واصلاح رسالته التى كانت تمهدت بعض اصولها وتحررت مبادى مقدّماتها قبل مهاجرة العبد الى المقرّ العالى اعلاه الله فبادر الى ذلك عقب فراغه من كتاب الاشارة واخراج صورة البركار

MÉMOIRE sur le compas parfait.

التامّ على اكمل مثال واحسن تمثال واورد فى هذه الرسالة شرح فوائده وذكر منافعه وكيفيّة عمله والعمل به والابانة عن تفاصيل ذلك وجمله وعرض جميع ذلك للعرض بين يدى مولانا السيّد الاجلّ الملك الناصر جامع كلمة الايمان قامع عبدة الصلبان صلاح الدنيا والدين سلطان الاسلام والمسلمين ابى المظفر يوسف بن ايّوب محيى دولة امير المؤمنين اعزّ الله انصاره وضاعف انتصاره وعمر بدولته ربوع الفضائل كما اجرى على يده ينبوع الفواضل واحيى بامتداد ايّامه سنّة العدل كما امات بها بدعة الجهل والظلم وجعل النصر لاعلامه راتبا والتأييد لآرائه مواكبا وكتب النصر العزيز لكتائبه وجعل السعد والتمكين محفوفين بمواكبه وخلد دولته واعلى كلمته بمحمد وآله

وهذا مبدأ القول على البركار التامّ

اقول انّه لمّا كان اتّخاذ قطوع المخروطات الثلاثة من انفس المطالب الهندسيّة والطف المقاصد الصناعيّة واظرف الفوائد العلميّة وكانت هذه الخطوط الثلاثة على ما فيها من اللوازم الغريبة والخواص العجيبة التى أتى على اكثرها الفاضل ابلونيوس فى كتابه الموسوم بكتاب المخروطات مما جافها بكلّ معنى يملك

MÉMOIRE sur le compas parfait.

الاذهان إعجابًا ويستخفّ النفوسَ إبداعًا وإغرابًا مضطرًّا اليهـا فى تخطيط مقنطرات الاسطرلاب المسطّح تسطيحًا مخروطيًا ورسم خطوط الساعات على الرخائم والحيطان المنتصبة على سطح الافق اذ كانت مقنطرات الارتفاع ورؤس الاظلال تقع فى هذه السطوح كلّها قطوعا زائدة وناقصة ومكافية بحسب العروض والآفاق فى الاسطرلاب ومقتضى الاوضاع فى الرخائم والحيطان وكانت الطرق الموضوعة لتحصيل هذه القطوع الثلاثة فى البسيط لا تخرج عن اتّخاذِ نقطٍ متقاربةٍ على محيطاتها يوصَل فيما بينها بالحذق الذى يجعل الوصولات على وضع واحد متشابه يَسْلَمُ معه محيطات هذه القطوع عن التضريس والتفاوت المحسوسين ولعمرى وان وُجِدَ لصانعٍ ما من الملكة ما يقوم بهذا المطلوب فانّ التفاوت الواقع فيه لا يكاد يَضْمنُه الحسّ ولا يدركه الحذق ولا يعصم فى اثباته عن الزلل على ان هذه الامور التى فى حيّز المعقولات بالقوّة يبعُد تحصيلها بالفعل على ما هى به فى الذهن لكن كلّما قرب ما بالفعل ممّا بالقوّة كان اولى بالسلوك لا سيّما فى هذه الامور اليقينية فان رسم دائرة بالبركار اقرب الى الدائرة الحقيقية من بغيره وكان القدماء استخرجوا لتخطيط هذه القطوع الة وسمّوها بركارا تامّا اذ به يخطّ جميعُ انواع الخطوط المحنية والمستقيمة ولم يقع الينا فيه

MÉMOIRE sur le compas parfait.

رسالة لمستنبط ولا لغيره من القدماء فيتّضح بها كيفية عمله والعمل به ومرّ بنا ما حكاه ابو الريحان البيرونى فى كتابه الموسوم باستيعاب الوجود الممكنة فى صنعة الاسطرلاب عن الشيخ ابى سهل ويجن بن وستم القوهى وما حرّره فى كيفيّة عمله والعمل به وذكر ابو الريحان هذا فى طرق التخطيط به انه بناها على مقدّمات حرّرها فى كتابه وسمه بقسمة الخطوط على نسب السطوح ولم يقع الينا هذا الكتاب وكانت الرغبة مصروفة الى تحصيل البراهين على تلك الطرق التى حكاها ابو الريحان عن ابى سهل مع عدم الكتاب امّا تلك البراهين باعيانها او ما يؤدّى الاستنباط اليها ففاوضتّ سيّدنا الشيخ الامام العالم ابا المعالى موسى بن يونس ادام الله علوّه فى ذلك ورغبت اليه فى تأمّل هذا المطلوب والمشاركة فى البحث عنه والتوصّل الى اصحاب ما استعسر منه وفتح ما استغلق فيه مع علمى بما لديه من الشواغل المانعة والصوادف الدافعة عن كلّ مهمّ لا يجد من الزمان سعةً له لما هو بصدده من اقامة وظائف دروس الفقه والاصول واكبابه على مراعاة اسباب ذلك مضافًا الى ما يتحمّله من النظر فى اصلاح امور ضروريّة معذوقة به موكولة الى نظره فلبا دعوتى مجيبًا الى اسعافى بطلبتى حزنًا على سالف بطوله وسابق انعامه وتفضله والى الله ارغب فى ابقاء

MÉMOIRE sur le compas parfait.

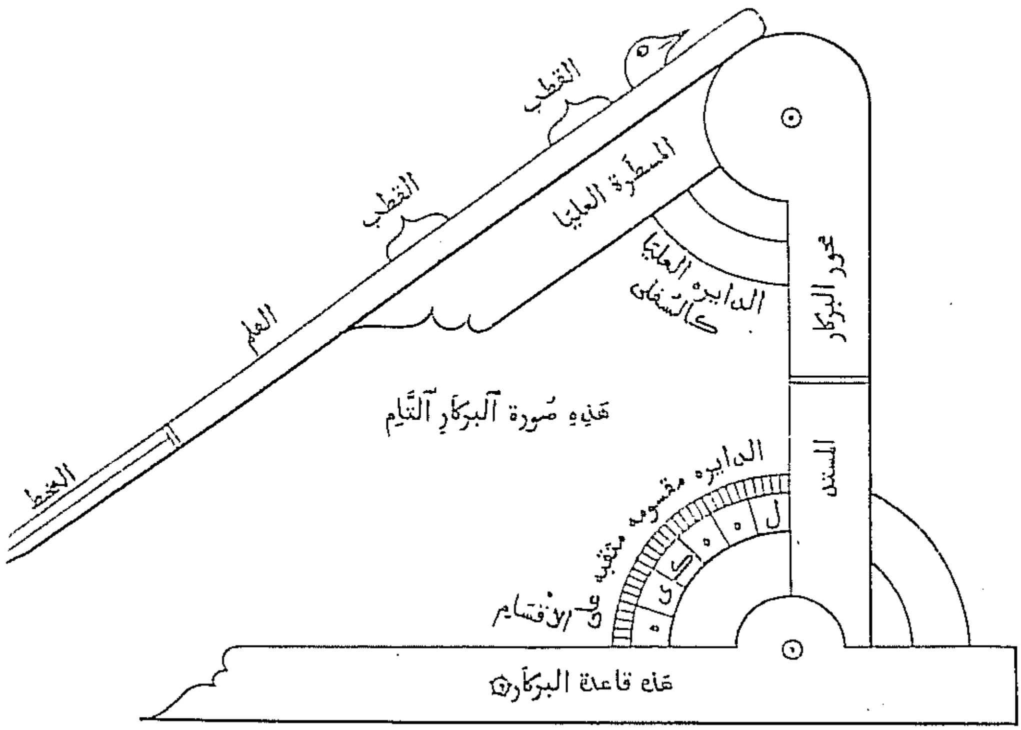
مهجته وانزاعى شكر اياديه ومنته بمنّه وطوله وما اورده الآن فمن ثمرة معونته على استنباط غامضه ممّا قررته فى خدمته وبحثتُ معه فى اصوله وفروعه ومحلوله ومجموعه وانا الآن آخذ فى حكاية البركار التامّ وهيئته وكيفية عمله واتلوه بمقدّمات تفيد البرهان على تخطيط القطوع به واورد ايرادا ينتظم غرض العالم والصانع ويحوز فوائد البرهان بالقول الجامع ولعلّه يعنى فى عقب بعض المقدّمات بسبب لزمتْ عن تلك الاشكال ووقعتْ فى معرضها لا بالقصد واورد تخطيط قطع قطع بمقدّماته ولوازمه ثمّ اختم ذلك بالطريق المقرّب للصانع مجرّدا من توصّلات حكم بها البرهانُ فى اخصر لفظ واوجزه واقرب سعى واسهله وابدأ بالقطع المكافى ثمّ الزائد ثمّ الناقص على الترتيب الموضوع اتباعا للرسم لا غير وسيقف الناظر فى هذه الاشكال على فرق كثير بينها فى اختصار الطرق الى اتخاذ هذه القطوع وبين ما اورده غيرنا وبالله نستعين وعليه نعتمد

صفة البركار التامّ وكيفية عمله

امّا صفته فمتى قام على سطح مستوٍ من نقطة منه مفروضة خطّ مستقيم ثبّت طرفه على النقطة ويتحرّك على ذلك السطح فى جهتين

MÉMOIRE sur le compas parfait.

متقابلتين ومرّ بنقطة من هذا الخطّ المثبت الطرف خطّ آخر له
ثلاث حركات حركة نظيرة لحركة الخطّ المثبت الطرف وحركة



اخرى مستديرة حول الخطّ وحركة للخطّ نفسه على استقامة منه
فى الجهتين جميعا فمتى جُمِعَتْ هذه الحركاتَ الثلاثَ آلةٌ سُمِّيَتْ
بركارا تامّا وليكن المثال فى ذلك خطّ اب قاعدة البركار وليكن فى
السطح الذى فيه مركز البركار وليخرج من ج من اب خط جد يكون
حركته فى السطح المارّ بنقط ا ج د ب الى جهتى ا ب وليمر بنقطة
د من خطّ جد خطّ هدز ذو ثلاث حركات حركة نظيرة لحركة

MÉMOIRE sur le compas parfait.

خط جد واخرى حول ج واخرى يتحرك بها هدز نفسه على استقامة منه فى جهتى د ز

والمثال الصناعى ان نتخذ مسطرة من بعض الجواهر المنطرقة الذائبة او الخشب الصلب القابل للتشكل القليل التأثر بحر الصيف وبرد الشتاء ليعدم القلق والاصطكاك فى اجزائه وليبالغ فى تسويتها وتصحيحها وليكن مقدار شبر ونصف وليعمد الى طرف هذه المسطرة فيخلع فيه بالمبرد انثى برمادجه محكمة او دون الطرف ويتخذ لها ذكر فى طرف مسطرة اخرى قد جعل نصفها مستديرا وهو الاعلى والذى فيه الذكر سطريا ثم نركب ذكر البرمادجه فى الانثى تركيبا محكما سلسا متماسكا فى دورانه يسلم معه الزوايا القائمة وغيرها من الشغزبة وعدم الانطباق ونبالغ فى ايقان هذا المفصل ثم نتخذ انبوبا من ذلك الجوهر يكون غلافا للنصف المستدير من المسطرة التى فيها الذكر ولتكون حركة هذا الانبوب على المستدير من المسطرة حركة سهلة يعدم معه القلق يكون طرف هذا الانبوب الاعلى سطرى الشكل ايضا ليخلع فيها انثى برمادجه يكون ذكرها فى طرف مسطرة نظيرة للمسطرة التى فيها قاعدة البركار وليثبت على ظهر هذه المسطرة قطبان او ثلاثة تنتظم قلما متخذا من جوهر يقبل مقدار طوله

MÉMOIRE sur le compas parfait.

بالمسطرة التى هى قاعدة البركار مرّة ونصف وليكن هذا القلم مشقوق الوسط من دون طرفه الاعلى والى الطرف الاسفل بحيث يجرى فى الاقطاب المثبتة على ظهر المسطرة العليا جريانا سهلا عادما للقلق بما يتوصّل له حذاق الصناعة وربّما اتّخذ عوض الاقطاب والقلم المشقوق انبوب يلصق على المسطرة ويجاز فيه على خلقته قلم وليكن فى طرف هذا القلم مخطّ نؤثّر به فى السطح بالمداد وغيره ذا شعبتين ولتكن حركة هذا القلم وجريانه على الاقطاب المثبّتة ابلغ فى السلاسة من سائر الحركات المذكورة بحيث اذا صوب سال فى الاقطاب او الانبوب سيلانًا متشابها واذا دافعه شىء عاد صاعدا بالحركة التى نزل بها وليتّخذ فى الزاويتين اللتين احدثهما محور البركار مع القاعدة والعارضة ربعا دائرتين من شبه مقسوم محيطهما اىّ اقسام امكنت ولتكونا ثابتتين ليحفظ بهما مقدار الزوايا ولا تعوّقا المحور كما فى الصورة وليتقن تركيب المفصلين الذى يلى قاعدة البركار والذى يلى القلم ونبالغ فى جميع ذلك غاية الحذق والايقان وقد تقدّمت صورته

MÉMOIRE sur le compas parfait.

مقدمات على تخطيط القطع المكافى بالبركار التام

وطريق ذلك نريد ان نضيف الى خط آج المفروض سطحا مساويا
لمربع خط د المفروض يزيد على تمام الخط مربعا فننصف آج على
نقطة د ونقيم من نقطة ج على آج عمودا عليه جط مساويا لخط د
ونجعل نقطة د مركزا ونديز ببعد هط دائرة تقطع آج اذا اخرج
على نقطة ب فلان آب فى بج مع مربع هج مثل مربع هب اعنى
مربعى هج جط فنلقى مربع هج المشترك يبقى سطح آب فى بج مثل
مربع جط اعنى د وذلك ما اردنا بيانه

خطا آب بج مفروضان متصلان على استقامة وقد اخرج من
نقطة ب عمود على آج بغير نهاية ونريد ان نزيد فى آج زيادة بحيث
اذا ادير عليه مع الزيادة نصف دائرة قطعت العمود على نقطة
يكون الخط الواصل بينها وبين ج مثل خط بج مع الزيادة فنضيف
الى ضعف بج سطحا مساويا لمربع نصف آب يزيد على تمامه مربعا
وليكن ضلع ذلك المربع جه ونخرج به الى ز ونجعل زه مثل نصف
آب ونديز على آز نصف دائرة آدز اقول ان خط دج مساو لخط بز
برهان ذلك ان مربع دج مثل مربعى دب بج اعنى سطح زب فى با
مع مربع بج اعنى سطح آج فى جب وسطح زج فى با ومربع هط مثل

مربّعى هج جط وضعف هج فى جط لكن مربع طج مثل سطح اج فى
جب مع مربّع طب وسطح اب فى جز مثل سطح اب فى هز اعنى
ضعف مربّع طب ومثل سطح اب فى جه اعنى ضعف طب فى جه
فنسقط مربّع طب وسطح اج فى جب المشتركين يبقى مربع طب
وضعف سطح طب فى جه وهو مساو لما بقى من مربّع طه وهو
مربّع جه وضعف سطح جه فى جط من قبل ان مربّع جه وضعف
سطح جه فى جب مثل مربّع طب اذ كان هو المضاف يبقى من
الجانبين ضعف سطح طب فى جه فمربّعا جد طه متساويان فهما
متساويان وطه مثل بز فخطّا جد بز متساويان وذلك ما اردنا
بيانه

ويلزم من هذا الشكل انّه متى كان خطّان مفروضان كخطّى اب
بج واتّصلا على استقامة امكنّا ان نقسم اب منهما على نقطة
بحيث تصير نسبة ما بين تلك النقطة وبين ج الى جب كنسبة
ما بين ب وبين النقطة الى ما بين النقطة ونقطة آ بان نزيد
فى بج من جهة ج الزيادة التى زدناها فيه قبل ولتكن تلك الزيادة
جد وننقص جد من با وليكن به اقول انّ النسبة المطلوبة وجدت
فى نسبة هج الى جب كنسبة هب الى ها برهان ذلك انّه قد تبيّن
انّ سطح اب فى جد اعنى اب فى به وسطح اج فى جب مثل مربّع

MÉMOIRE sur le compas parfait.

بد اعنى هج لكن مربّع هج مثل سطح هج فى جب وسطح هج فى هب
فنسقط هج فى جب المشترك من اج فى جب يبقى اد فى بج واب فى
به اعنى مربّع هب وسطح ها فى هج وبقى من مربّع هج سطح جه فى
هب اعنى مربّع هب وسطح هب فى بج فنسقط مربّع هب المشترك
يبقى سطح هب فى بج مثل سطح اه فى بج وسطح اد فى هب اعنى اه
فى جميع هج فنسبة هج الى جب كنسبة هب الى ها وذلك ما
اردنا بيانه

فاذا اردنا ان نخطّ قطعا مكافيا قد فرض ضلعه القائم خط ع
ومحور البركار التامّ الذى يخطّ به خطّ س وليكن سهمه وهواب على
استقامة خطّ مفروض فنفصل اج مثل ربع قائم ع وجب مثل
نصف محور س ونقيم من ج عمودا بغير نهاية ونزيد فى اب الزيادة
التى قدمنا ذكرها ولتكن به ولتكن نصف دائرة اده هى التى
تجعل دب مثل جه ونديرعلى جه نصف دائرة جزه ونجعل ج
مركزا ونتعلّم ببعد جب علامة ز ونصل جز وزه ونخرج جز على
استقامته الى نقطة ط ونجعل زط مثل جز ونصل طه فيكون
زاويتا ج ط متساويتين وجط هو مقدار المحور للبركار التامّ اقول
انه متى اطبق خطّ طه على الخطّ المفروض وحفظت الزاويتان وادير
جط على نفسه خطّ مخطّ البركار فى السطح قطعا مكافيا رأسه عند

MÉMOIRE sur le compas parfait.

نقطة د وضلعه القائم خط ع برهان ذلك انّ مربع خط جه مساو
لمربع دب. اعنى مربعى جب جد اعنى مربعى جز جد لكن مربع
جه اعنى بد مثل مربعى جز زد[1] يبقى مربع زد مثل مربع جد
اعنى مثل جه فى جا فنسبة اج الى زد كنسبة زد الى جه فنسبة
ضعف اج اعنى جح وهو نصف الضلع القائم الى زد كنسبة ضعف
زد وليكن كه الى جه ونسبة جميع الضلع القائم الى كه كنسبة
كه الى جه فنسبة مربع كه الى مربع جه اعنى الى سطح جه فى
جك كنسبة الضلع القائم الى جه ولانّ محور جط بحركته على
نفسه يرسم مثلث جزد مخروطا يمرّ بمحوره مثلث مجك ويقطعه
سطح يقوم على سطح المثلث المارّ بالمحور على زوايا قائمة والفصل
المشترك لسطح المثلث والسطح القاطع مواز لاحد اضلاع المثلث
المارّ بمحور المخروط وقد جُعِلتّ نسبة مربع قاعدة المثلث وهى
كه الى سطح احد ضلعى المثلث وهى جه فى الضلع الآخر وهو
جك كنسبة خط ما وهو ع الى خط ما وهو جه فخط ع ضلع قائم
للقطع المكافى الذى رأسه نقطة د وسهمه هط بما تبيّن فى الشكل
الحادى عشر من المقالة الاولى من كتاب ابلونيوس فى المخروطات
وذلك ما اردنا بيانه

[1] On voit par la traduction qu'il faut insérer ici les mots نسقطا منهما جز. (De S.)

MÉMOIRE sur le compas parfait.

فاذا فرض خط اب محور البركار وجـ قائم مفروض واردنا ان نخط ببركار محوره اب قطعا مكافيا قائمه جـ جعلنا نصف محور اب خط ده واخرجنا من نقطة ه عمودا عليه هز مساويا لثمن قائم جـ وخرجنا زد على استقامته الى ط وجعلنا زط مثل زه وادرنا على خط دط نصف دائرة دعط وجعلنا نقطة د مركزا وادرنا ببعد ده دائرة تقطع دائرة دعط على نقطة ع ونصل عد ونجيء بالبركار التامّ فتنطبق قاعدته على خط مستقيم فى بسيط مستو ونجعل كل واحدة من زاويتيه مثل زاوية عدز خطّ قلم البركار فى البسيط قطعا مكافيا ضلعه القائم جـ برهان ذلك انّ زد مساو لنصف المحور ولضلع المربّع الذى يزيد به السطح المضاف الى ضعف ده المساوى لمربّع زه على تمام ضعف ده من قبل انّ مربّع زد مساو لمربّعى زه هد اعنى السطح المضاف الى ضعف ده الذى يزيد على تمامه مربّعا ومربّع ده وهذان يساويان مربّع ده مع ضلع المربّع الذى يزيد به المضاف الى ضعف ده على تمامه مربّعا فخطّ دط مساو لثمن الضلع القائم ونصف المحور وضلع المربّع الذى يزيد به السطح المضاف الى ضعف ده المساوى لمربّع زه على تمام ضعف ده مربّعا وقد بيّنّا انفا انّه اذا عمل على الخطّ المركّب ممّا ذكرناه نصف دائرة واوقع فيها من لدن القطر وتر كوتر دع مساويا

MÉMOIRE sur le compas parfait.

لنصف المحور وجعلت كل واحدة من زاويتى رأس البركار وقاعدته مساوية للزاوية التى يحيط بها القطر وخط دع اعنى زاوية طدع واطبقنا بقاعدة البركار سهم القطع وراس المخط من جهة الزاوية الحادّة وادرنا المحور مع اثبات هاتين الزاويتين على حالهما رسم المخط على السطح المفروض قطعا مكافيا قائمه ثمانية امثال زد اعنى ج وذلك ما اردنا بيانه

تخطيط القطع الزائد وما يحتاج اليه من المقدمات

ليكن خط اب مفروضا وعليه نقطة ج مفروضة وخط اد قائم على اب مفروض واخرج من نقطة ب خط قائم على اب فى الجهة المخالفة لاد بغير نهاية ونريد ان نخرج من نقطة د خطا يقطع خط اب على نقطة ما ويلقى العمود المخرج من نقطة ب فيفصل منه خطا تكون نسبته الى بج كنسبة بج الى بج والى ما فصله المخرج من خط اب فى جهة ب مجموعين فنستخرج خطا ثالثا فى النسبة لخطى اد جب وليكن بح وليكن على استقامة اب ونضيف الى خط بح سطحا مساويا لسطح اب فى بح ويزيد على تمامه سطحا مربّعا بما تقدّم فى المقدّمة الاولى من القطع المكافى وليكن ضلع المربّع الزائد خط حط ونفصل من جب خط به مساويا لحط ونصل

ده ونخرجه وليلق العمود على نقطة ز اقول ان نسبة بز الى بج كنسبة بج الى مجموع خطى بج به برهان ذلك ان سطح جط فى حط مثل اب فى بح فنسبة جط الى بح كنسبة اب الى حط اعنى هب فاذا فصلنا كانت نسبة جب حط بل جب به الى بح كنسبة اه الى هب لكن نسبة اه الى هب كنسبة اد الى بز فنسبة جب به الى بح كنسبة اد الى بز فسطح اد فى بح بل مربع جب مساو لسطح جب به فى بز فنسبة بز الى جب كنسبة جب الى جب به جميعا وذلك ما اردنا بيانه

نصف دائرة ابد قطرها اب عليه نقطة ج مفروضة واخرج من نقطة ج عمود جد بغير نهاية واخرج من نقطة ب ايضا عمود بغير نهاية ومن نقطة آ كذلك ونريد ان نخرج من نقطة ب خطا يقطع جد داخل الدائرة ويخرج فيلقى العمود المخرج من نقطة آ ويكون ما ينفصل منه بين دج ومحيط الدائرة متى نقص من لدن نقطة ب كانت نسبة المنقوص الى الباقى كنسبة مربع الخط الذى بين نقطة ب منه وبين عمود جد الى مربع خط مفروض كخط ل فنخرج من نقطة آ عمودا فى الجهة الاخرى عليه از ونجعل نسبة مربع اب الى مربع ل كنسبة اب الى از ونخرج من نقطة ز خطا يفصل اب على النسبة المتقدمة فى الشكل الذى قبل

MÉMOIRE sur le compas parfait.

هذا فليخرج وليلق العمود المخرج من ب على نقطة ح وليجعل
نسبة حب الى بج كنسبة جب الى بج به جميعا ونفصل من آج
جط مساويا لهب ونخرج من نقطة ط عمود طن ونصل بن وننفذه
على استقامة حتى يلقى العمود المخرج من نقطة آ على نقطة س
وليقطع جد على نقطة ع ولنفصل من عب خط بك مساويا
لعن وذلك يكون باخراج عمود من نقطة د يلقى بن على نقطة ك
اقول انّ نسبة بك الى كس كنسبة مربع عب الى مربع ل برهان
ذلك انّا نفصل من جب مثل بج وليكن بم فنقطة م امّا ان تقع
داخل الدائرة او خارجها فان وقعت خارج الدائرة جعلنا سطح
اب فى ام مثل مربع اص من اس وليكن اذا اخرج من نقطة م
عمود داخل الدائرة يقع تقديرا على نقطة ص فتكون نسبة مربع
صب كيف تصرّفت الحال الى مربع بن كنسبة بم الى بط اعنى
كنسبة مربع بج الى مربع بط اعنى نسبة مربع عب الى مربع
بن فمربعا صب بع متساويان فخطّا صب بع متساويان ونسبة
مربع صب اعنى مربع عب الى مربع اب كنسبة مب الى با اعنى
حب الى اب ونسبة مربع اب الى مربع ل كنسبة اب الى از
فبالمساواة نسبة مربع عب الى مربع ل كنسبة حب الى از اعنى
نسبة هب الى ها اعنى نسبة بك الى كس فنسبة

MÉMOIRE sur le compas parfait.

بك الى كس كنسبة مربع عب الى مربع ل وذلك ما اردنا
بيانه

خط اب مفروض وقسم على نقطة ج بنصفين واخرج منها عمود
بغير نهاية ونريد ان نجد على العمود نقطة ما اذا اخرج منها
خط يقطع جب على نقطة ويخرج على استقامة الى حد مفروض
ينقسم بالتقاطع على نسبة مفروضة وهى ه الى ز ويكون سطح احد
القسمين من خط اب الذى قسمه الخط المخرج فى الآخر مثل سطح
احد القسمين من الخط المخرج فى الآخر ويكون العمود المخرج من
طرف الخط المقاطع لاب اذا لقى خط اب فرزه اب مساويا لخط ل
فنفرض خط حط مساويا لخط اب وننصفه على ك ونخرج منه
عمودا بغير نهاية وندير على كط نصف دائرة كسط ونجعل نسبة
كط الى طم كنسبة ه الى ز ونخرج من نقطة ط خطا يقطع سم
على ع ويلقى العمود المخرج من ك على نقطة ص ويكون متى
فصل من خط عط خط طن مساويا لخط عق كانت نسبة طن
الى نص كنسبة مربع عط الى مربع ل ويمكننا ذلك بالشكل الذى
قبله ثم نضيف الى خط اب سطحا مساويا لسطح صط فى طع ينقص
عن تمام اب مربعا وذلك ممكن لان السطح اقل من مربع نصف
الخط وذاك بان نفرد خط صط عن الشكل ونحمل عليه نصف

MÉMOIRE sur le compas parfait.

دائرة ونخرج من نقطة ع منه عمودا يلقى الدائرة على د ونصل
دط فيكون القوى على السطح المضاف ونفرد اب ايضا. وندير على
نصفه وهو جب نصف دائرة جظب ونوقع فيها من لدن نقطة
ب خط بظ مساويا لخطّ دط ونصل ظج ونفصل من لدن نقطة ج
خطّ جو مساويا لخطّ جظ فيكون سطح او فى بو مساويا لسطح صط
فى طع مضافا الى اب ينقص عن تمام اب مربّعا ضلعه بو وبرهان
ذلك انّ مربّع جب مساو لمربّعى جظ ظب فهو اذًا يزيد على مربّع
ظج اعنى جو بمربّع ظب لكنّه يزيد على مربّع جو بمربّع وب
وضعف وب فى وج و وب فى وج ومربّع وب مثل اج فى وب يبقى
من ضعف وب فى وج سطح وب فى وج لجميع او فى وب مثل
مربّع وب وضعفه فى وج فسطح او فى وب مساو لمربّع بظ اعنى
دط اعنى سطح صط فى طع ثمّ نفصل من الخطّ الموضوع اوّلا من
نقطة ج مثل خطّ جو وليكن جق ثمّ نجعل ق مركزا ونديرببعد
طص دائرة تقطع العمود المخرج من ج على نقطة ى ونصل يق
ونخرجه الى ش ونجعل قش مثل عط ونخرج من نقطة ش عمود
شت يلقى اب على ت اقول انّ نسبة بق الى قش كنسبة ه الى
ز وانّ سطح اق فى قب مساو لسطح يق فى قش وانّ شت مثل ل
برهان ذلك انّ سطح صط فى طف مثل مربّع كط وسطح اق فى

قب مع مربع جق مثل مربع جب ومربع جب مثل مربع كط وسطح طص فى طع مثل سطح اق فى قب يبقى مربع جق مثل سطح صط فى عف اعنى صط فى طن وسطح صط فى طن وسطح صط فى صن مثل مربع صط اعنى مربعى صك كط ومربع صط مثل مربع يق ومربع جق مثل سطح صط فى طن يبقى سطح صط فى صن مثل مربع يج ونسبة سطح صط فى طن الى سطح صط فى صن كنسبة طن الى نص فنسبة مربع جق الى مربع جى ـتسبة طن الى نص ونسبة طن الى نص كنسبة مربع طع الى مربع ل فنسبة مربع طع الى مربع ل كنسبة مربع قش الى مربع شت ومربع طع مثل مربع قش فنسبة مربع قش الى مربع شت كنسبة مربع قش الى مربع ل فمربعا ل شت متساويان وذلك ما اردنا بيانه

اذا كان خط باد مفروضا واردنا ان يخط قطعا زائدا رأسه نقطة ا وسهمه خط اد ومجانبه اب وضلعه القائم خط ح وكان لنا بركار تامّ محوره مساو لخط ط فانّا ننصف اب على ج ونخرج من نقطة ج عمودا بغير نهاية على اب ونوقع بين العمود وخط جا خطا يقطعه كخط هز ويخرج الى ك بحيث تكون نسبة هز الى زك كنسبة اب الى ح المفروضة ويكون سطح بز فى زا مثل سطح هز فى زك ويكون

MÉMOIRE sur le compas parfait.

العمود المخرج من ك اذا اخرج ولقى اب على نقطة ن انفرد كن مثل
ط ويمكننا ذلك بما تقدمنا فوطئناه ونديرعلى ابه دائرة وهى
تمرّ بنقطة ك من قبل استواء سطح هز فى زك بز فى زا ولتكن دائرة
هاكلب ونخرج هج الى ل ونخرج نك على استقامته فهو يلقى هج
على ل من قبل انّ زاوية زكن قائمة ونصل خط بك ونخرجه
على استقامته الى س ونخرج من نقطة ا خطا موازيا لكه يلقى بس
على س وكن على م ونخرج من نقطة ك خطا موازيا لخط اد يلقى سا
على ع فاقول انّ المخروط الذى يرسمه مثلث ساك مع اثبات كن
يرسم فى بسيطه السطح الذى فيه الدائرة قطعا زائدا رأسه نقطة
ا ومجانبه اب وقائمه خط ح فلانّ زاوية اكز مثل زاوية زكب
من قبل تساوى قوسى اه هب وزاوية زكب مثل زاوية اسك
وزاوية زكا مثل زاوية كاس للتبادل فزاويتا كسا ساك
متساويتان فخطا كا كس متساويان وزاويتا س ا متساويتان
وزاويتا م القائمتان متساويتان فزاويتا سكم مكا متساويتان
واذا اثبت كن المساوى لمحور البركار وادير مثلث كاس رسم بحركته
مخروطا يمرّ بمحوره مثلث كاس واخرج كع موازيا للفصل المشترك
بين سطح المثلث والسطح القاطع ولقى الفصل المشترك ضلع
المثلث من جهة رأس لمخروط على نقطة ب فالقطع الحادث فى بسيط

المخروط قطع زائد رأسه نقطة آ ومجانبه اب وكذلك متى جُعلت
زاوية رأس البركار مثل زاوية نكا وزاوية قاعدته مساوية
لزاوية انك واثبت محور نك وادير البركار رسم البركار بخطه فى
بسيط المخروط الذى يرسمه بحركته قطعا زائدا رأسه نقطة آ ومجانبه
اب وكذلك فى البسيط القاطع له اقول انّ قائمه خطّ ح برهان
ذلك انّ نسبة هز الى زك كنسبة سطح هز فى زك الى مربّع زك
وهى كنسبة سطح بز فى زا الى مربّع زك لكنّ نسبة سطح بز فى از
الى مربّع زك مؤلّفة من نسبة بز الى زك اعنى با الى اس اعنى
كع الى عس ومن نسبة از الى زك اعنى كع الى عا اعنى كنسبة
مربّع كع الى سطح سع فى عا فنسبة مربّع كع الى سطح سع فى
عا كنسبة اب الى ح فمثلّث كسا مرّ بسهم مخروط واخرج من
رأسه خطّ مواز للفصل المشترك فى سطح المثلّث المارّ بالمحور بين
سطح المثلّث وبين سطح قطع بسيط المخروط وقام على سطح المثلّث
على زوايا قائمة وقام [الفصل المشترك بينه وبين قاعدة المخروط]
على الفصل المشترك بين قاعدة المخروط والمثلّث المارّ بالمحور على
زوايا قائمة وذلك لانّ قاعدة المخروط قائمة على المثلّث المارّ بالمحور
لانّه قائم والسطح القاطع قائم على المثلّث المارّ بالمحور ايضا فالفصل
المشترك ايضا قائم على المثلّث وعلى كلّ خطّ يخرج. فيه فيكون

MÉMOIRE sur le compas parfait.

قائما على قاعدته ولهذا ينبغى ان نجعل المثلث المارّ بمحور البركار قائما على السطح الذى رسم فيه القطع ولتقى الفصل المشترك ضلع المثلث من جهة رأس المخروط وجُعلتْ نسبة مربّعه وهو كع الى سطح احد قسمى قاعدة المثلث فى الآخر وهو سطح سح فى عا كنسبة المجانب وهو اب الى الضلع القائم وهو ح فخط ح ضلع قائم له بما بيّنه ابلونيوس فى الشكل الثانى عشر من المقالة الاولى من كتابه فى المخروطات وذلك ما اردنا ان نبيّن

تخطيط القطع الناقص وما يحتاج اليه من المقدّمات

خطّ اب مفروض وتعلّمت عليه نقطة ج كيف وقعت واخرج عليه من نقطة ب عمود بغير نهاية وعلى طرفه الآخر من نقطة ا عمود از فى الجهة الاخرى مفروضا ونريد ان نخرج من نقطة ز خطّا يقطع اج على نقطة ويلقى العمود المخرج من نقطة ب فيفصل خطّا تكون نسبته الى بج كنسبة بج الى ما بين نقطة ج والنقطة التى جاز عليها الخطّ المخرج من نقطة ز من خطّ اج فنستخرج خطّا ثالثا متناسبا لخطّى از جب ونجعله على استقامة اب وليكن بد ونضيف الى خطّ جد سطحا مساويا لسطح اج فى بد يزيد على تمام جد سطحا مربّعا بما بيّنّا قبل وليكن ضلع المربّع الزائد خطّ

MÉMOIRE sur le compas parfait.

هج ونصل هز ونخرجه على استقامته يلقى العمود المخرج من ب
على نقطة ل اقول انّ نسبة لب الى بج كنسبة بج الى جه برهان
ذلك ان سطح اج فى بد مساو لسطح هج فى ده تكون نسبة اج الى
جه كنسبة هد الى دب فاذا فصّلنا كانت نسبة اه الى هج كنسبة
هب الى بد فاذا بدّلنا كانت نسبة اه الى هب التى هى كنسبة
از الى لب لتشابه مثلثى اهز لهب كنسبة هج الى بد فسطح از
فى بد اعنى مربع بج مساو لسطح لب فى هج فنسبة لب الى بج
كنسبة بج الى هج وذلك ما اردنا ان نبيّن

نصف دائرة ابج قطرها اج واخرج من نقطة د المفروضة عليه
عمود دب بغير نهاية واخرج من نقطتى ج ا عمودان بغير نهاية
وكلاهما فى جهة عمود دب وخطّ ح مفروض ونريد ان نخرج من
نقطة ج خطّا يفرز من محيط الدائرة قطعة ويلقى عمود دب خارج
الدائرة ويلقى العمود المخرج من نقطة ا على وجه يكون متى
فصل مثل وتر تلك القطعة من لدن نقطة التقاطع للخط المخرج
ولعمود بد من الخطّ الحاصل فيما بين عمود بد والعمود المخرج من
نقطة ا كانت نسبة الخطّ المركّب من الخطّ الذى بين ج وعمود
بد والخطّ المفصول كوتر القطعة الى الباقى منه كنسبة مربع الخطّ
الذى بين ج وعمود بد الى مربع خطّ ح فنخرج من نقطة ا عمودا

MÉMOIRE sur le compas parfait.

فى الجهة الاخرى عليه از ونجعل نسبة القطر اليه كنسبة مربع
القطر الى مربع ح ونخرج من نقطة ز خطا يقطع اج ويلقى العمود
المخرج من نقطة ج فيفصل منه خطا تكون نسبته الى جد
كنسبة جد الى الخط الذى بين د والنقطة التى قطع اج عليها
الخط المخرج من ز ويمكننا ذلك بما بيّناه فى الشكل الذى قبله
فليخرج وليكن خط زهع وليقطع اج على ه ويلقى العمود على
نقطة ع وليصير نسبة عج الى جد كنسبة جد الى ده ونفصل
من جد خطا مساويا لخط ده ونخرج من نقطة ط عمود طك يلقى
الدائرة على نقطة ك ونصل جك وننفذه حتى يقطع عمود بد
على نقطة ل ويلقى العمود المخرج من نقطة ا على نقطة ن ولنخرج
من نقطة د خطا موازيا لعمود بد وليقطع نج على نقطة م وهو
يجعل مل مثل كج اقول انّ نسبة جم الى من كنسبة مربع جل
الى مربع ح برهان ذلك انّا نفصل من اج مثل جع وليكن جس
فان وقعت نقطة س داخل الدائرة اخرجنا من نقطة س عمودا
عليه سف وان وقعت خارج الدائرة جعلنا سطح سا فى اج مثل
مربع اف وينساق البرهان هكذا لانّ سطح اج فى جط مثل مربع
جك وسطح اج فى جس مثل مربع جف تكون نسبة مربع جف
الى مربع جك كنسبة سطح اج فى جس الى سطح اج فى جط ونسبة

18.

MÉMOIRE
sur le compas
parfait.

سطح آج فی جس الی سطح آج فی جط كنسبة بج الی جط اعنی كنسبة
مربع دج الی مربع جط اعنی كنسبة مربع لج الی مربع جك
فنسبة مربع جف الی مربع جك كنسبة مربع جل الی مربع
جك فمربعا جف جل متساويان فخطا جف جل متساويان ونسبة
حم الی من كنسبة جه الی ها اعنی نسبة جع الی از اعنی جس
الی از ونسبة مربع جف الی مربع اج كنسبة جس الی جا ونسبة
مربع اج الی مربع ح كنسبة اج الی از كما فرضنا فبالمساواة
نسبة مربع جف اعنی جل الی مربع ح كنسبة جس الی از اعنی
كنسبة جم الی من وذلك ما اردنا ان نبين

خط اب مفروض وقد نصف علی ج واقيم عليه منها عمود بغير
نهاية ونريد ان نوقع فيما بين العمود وخط بج اذا اخرج علی
استقامة خطا تكون نسبته الی قسم منه كنسبة ه الی ز
وسطحه فی ذلك القسم مساو لسطح الخط المركب من اب مع ما
يفرزه الخط المخرج من جهة نقطة ب فی المخط المنفرز من جهة نقطة
ب واذا اخرج من موضع القسمة عمود علی المخرج فيلقی جب
كان ما فرزه جب من العمود مثل خط م المفروض فنضع خط حط
مساويا لاب ونقسمه بنصفين علی نقطة ك ونخرج من نقطة
ك عمودا عليه ونعمل علی كط منه نصف دائرة كنط ونجعل

MÉMOIRE sur le compas parfait.

نسبة كط الى طل كنسبة ة الى ز ونخرج من نقطة ك عمود كفى
ومن نقطة ل عمود لس ومن نقطة ط خطا يلقى عمودى كف لس
كخط طنسعف بحيث اذا فصلنا من سف خط سح مساويا لنط
كانت نسبة طح الى عف كنسبة مربع طس الى مربع م كما
بيّنا قبل هذا ونضيف الى خط اب سطحا مساويا لسطح فط فى
طس يزيد على تمام الخط سطحا مربعا وليكن كسطح خط اى فى يب
ونجعل نقطة ى مركزا ونديربعد طف دائرة تقطع العمود المخرج
من نقطة ج على نقطة ق ونصل قى ونجعل شى مثل طس ونخرج
من نقطة ش عمودا يلقى جب على ظ اقول انه حصل ما اردنا
برهانه ان قى فى شى مساو لاى فى يب ونسبة قى الى يش كنسبة
ة الى ز لانه مساو لفط ونقطة ش نظيرة نقطة س اقول ان شظ
مثل م فلان سطح اى فى يب مع مربع جب مساو لمربع جى لكن
سطح اى فى يب مساو لسطح فط فى طس وسطح فط فى طس مساو
لمربع كط فسطح فط فى طع مساو لمربع جى ومربع فط مساو لمربع
قى ومربع فط مثل مربعى فك كط فمربع قى مثل مربعى فك كط
لكنه مثل مربعى قج جى وسطح فط فى طع مثل مربع جى يبقى
سطح طف فى فع مثل مربع جق ونسبة سطح فط فى طع اعنى
مربع جى الى سطح طف فى فع اعنى مربع جق كنسبة طع فى عف

MÉMOIRE sur le compas parfait.

اعنى مربع طس اعنى مربع يش الى مربع م فنسبة مربع جى
الى مربع جق كنسبة مربع يش الى مربع م وهى كنسبة مربع
يش الى مربع شظ فمربعا شظ م متساويان فخطا شظ م متساويان
وذلك ما اردنا بيانه

اذا كانت خطوط اب جه م مفروضة واردنا ان نخط قطعا ناقصا قطره
الاطول خط اب وضلعه القائم م ببركار تام محوره خط جه فانا نخرج
من منتصف اب وهو س خط سز ونخرج اب الى د ونصل زد
ونتعلم عليه نقطة ه بحيث تكون نسبة زد الى ده كنسبة اب
الى م وسطح زد فى ده مثل سطح اد فى دب وبحيث اذا اخرجنا من
نقطة ه عمودا يلقى سب على نقطة ط يكون هط مساويا لجه وذلك
ممكن بما تقدمنا فوطئناه ايضا ونديز دائرة بحازه وهى تمر بنقط
اب ه ز ونصل به ونخرج هط يلقى زس على ح ونصل اه ونخرج
من نقطة ب خط بك موازيا لزه ومن نقطة ه خط هك موازيا لخط
اه وليقطع بك خط اه على نقطة ل فاقول ان المخروط الذى يرسمه
مثلث لهب اذا اثبت محور طه يحدث سطح دائرة احبهز فى بسيطه
قطعا ناقصا مجانبه اب وقائمه م برهان ذلك ان زاويتى لهط طهب
متساويتان من قبل تساوى قوسيهما فمثلث لهب اذا ادير مع
ثبوت هط رسم مخروطا قائما من قبل تساوى الزاويتين وامكان

MÉMOIRE sur le compas parfait.

انطباق احديهما على الاخرى عند ادارته والسطح القائم على سطح
الدائرة المارّ بخطّ اب يقطع ضلعى المثلّث المارّ بالمحور وسطح الدائرة
يقطع بسيط هذا المخروط ويقطع ضلعى المثلّث المارّ بمحوره الذى
هو مثلّث لهب والفصل المشترك له ولقاعدة المخروط قائم على
خطّ اب على زوايا قائمة فلانّ المخروط قائم والسطح القاطع يلقى
قاعدة المخروط فالقطع الحادث فى بسيطه قطع ناقص قطره الاطول
اب فمتى جعلت زاوية رأس البركار مثل زاوية طهب وزاوية
قاعدته كزاوية بطه وجعلت قاعدة البركار مطابقة لخطّ اب
وادير البركار مع ثبات هط رسم قطعا ناقصا فى بسيط المخروط الذى
يرسمه حركة البركار وفى السطح القاطع له اقول انّ خطّ م ضلع
قائم لهذا القطع برهان ذلك انّ نسبة اب الى م كنسبة زد الى
ده التى هى مؤلّفة من نسبة بد الى ده اعنى كه الى كب ومن
نسبة اد الى ده اعنى اب الى بل اعنى هك الى كل اعنى نسبة
مربّع هك الى سطح بك فى كل فنسبة اب الى م كنسبة مربّع هك
الى سطح بك فى كل فهذا مخروط قائم قد قطع بسيطه بسطح يقوم
على المثلّث المارّ بمحوره ويلقى قاعدته على خطّ هو قائم على الفصل
المشترك بين قاعدة المخروط والمثلّث المارّ بالمحور على زوايا قائمة وذلك
لانّ قاعدة المخروط قائمة على المثلّث المارّ بالمحور لانّه قائم والسطح

MÉMOIRE sur le compas parfait.

القاطع قائم على المثلّث المارّ بالمحور ايضا فالفصل المشترك ايضا قائم على المثلّث المارّ بالمحور وعلى كلّ خطّ يخرج فيه فيكون قائما على قاعدته ولهذا ينبغي ان نجعل المثلّث المارّ بمحور البركار قائما على السطح الذى رسم فيه القطع واخرج من رأس المخروط فى سطح المثلّث المارّ بالمحور خطّ مواز للفصل المشترك وجُعلتْ نسبة مربّعه الى سطح الخطّ المركّب من قاعدة المثلّث مع الخطّ الذى فصله المخرج موازيا فى الذى فُصل من خارج المثلّث كنسبة الفصل المشترك الى خطّ مفروض فالخطّ المفروض قائم للقطع الحادث الذى قطره الاطول الفصل المشترك فخطّ م ضلع قائم للقطع الذى قطره الاطول اب وذلك ما اردنا بيانه

تمت رسالة البركار التامّ وكيفيّة التخطيط به

MÉMOIRE sur le compas parfait.

كتاب البركار التامّ

تأليف

ابى سهل ويجن بن وستم القوهى

بسم الله الرحمن الرحيم

قال ابو سهل القوهى انّا وضعنا هذا الكتاب فى الآلة المعروفة بالبركار التامّ وهو مقالتان المقالة الاولى فى البرهان على انّه يمكن بهذا البركار رسم الخطوط القياسيّة اى المستقيمة او محيطات الدوائر او محيطات قطوع المخروط وهى المكافية والزائدة والناقصة والمتقابلة الوضع والمقالة الثانية فى علم الرسم أخذ الخطوط[1] التى ذكرناها على وضع معلوم فان كان قبلنا هذه الآلة عند الاوائل موجودة معروفة الذكر والاسم وكان اسمها واسامى الاشيآء التى تتبعها بخلاف ما سميناه فانّ لنا فيه عذرا اذ لم يقع الينا هذه الآلة ولا ذكرها مع انه يمكن انّ هذه الآلة مع البرهان على انّها ترسم الخطوط التى ذكرناها كانت ولم يكن استعمالها كما استعملناها فى المقالة الثانية من هذا الكتاب

[1] Il faut probablement lire فى علم الرسم للخطوط. (De S.)

MÉMOIRE sur le compas parfait.

المقالة الاولى

فى البرهان على انه يمكن بهذا البركار رسم الخطوط القياسية التى ذكرناها

اذا قام من نقطة على سطح مستوخطّ مستقيم له حركة على احد السطوح المستوية القائمة على ذلك السطح ومرّ بنقطة اخرى على ذلك الخطّ خطّ آخر مستقيم له ثلاث حركات احديها حول ذلك الخطّ القائم على ذلك السطح والثانية على السطح المستوى الذى عليه ذلك الخطّ والثالثة على استقامته فى الجهتين جميعا فانه اذا كانت آلة بهذه الصفة سمّيت بركارا والنقطة التى على السطح المستوى تسمّى مركز البركار والسطح المستوى يسمّى سطح مركز البركار والخطّ المستقيم القائم من المركز يسمّى محور البركار والنقطة التى على ذلك المحور تسمّى رأس البركار والخطّ المستقيم المارّ بذلك الرأس يسمّى خطّ رأس البركار وفى وقت استعماله فقط يسمّى مخطّ البركار ورأسه رأس مخطّ البركار والزاوية التى بها مخطّ البركار ومحوره تسمّى زاوية رأس البركار والزاوية التى يحيط بها محور البركار والفصل المشترك لسطح مركز البركار والسطح المستوى يتحرّك عليه المحور

MÉMOIRE sur le compas parfait.

تسمّى زاوية مركز البركار وذلك الفصل المشترك يسمّى خطّ مركز البركار والسطح المستوى الذى ينطبق عليه مركز البركار يسمّى السطح المفروض للبركار وحركة خطّ رأس البركار حول المحور فقط مع حركة رأس الخطّ على السطح المفروض فقط تسمّى حركة البركار وذلك البركار يسمى البركار التامّ وانّما يسمّى البركار التامّ لانّه يمكن ان يرسم به الخطوط القياسيّة بالتمام لانّ الخطوط التى يجرى عليها القياس امّا خطوط مستقيمة او محيطات دوائر او محيطات قطوع مكافية او زائدة او ناقصة ويمكن ان يرسم بهذا البركار هذه الخطوط كلّها من جهة وضع المحور على خطّ رأس البركار وعلى خطّ المركز لانّ المحور امّا ان يكون عمودا على خطّ الرأس وخطّ المركز جميعا او يكون عمودا على خط الرأس فقط او يكون عمودا على خطّ المركز فقط او لا يكون عمودا على احدهما فحينئذ امّا ان تكون زاويتا الرأس والمركز متساويتين وامّا ان تكون زاوية الرأس الحادّة اعظم من زاوية المركز الحادّة او المنفرجة اصغر من منفرجته وامّا ان تكون على خلاف ذلك اعنى انّ الزاوية الحادّة للمركز اعظم من الزاوية الحادّة للرأس او منفرجته اصغر من منفرجته

فاذا كان محور البركار عمودا على خطّ الرأس وخطّ المركز جميعا فانّ رأس المخطّ لا يرسم بحركة البركار شيئًا من الخطوط على السطح المفروض مثال

MÉMOIRE sur le compas parfait.

ذلك ان المحور آب وخط الرأس بج وخط المركز آد وخط آب عمود على خط بج وعلى خط آد جميعا فاقول انه لا يرسم رأس المخط شيئًا بحركة البركار من الخطوط على السطح المفروض برهان ذلك انه ان حرّكنا البركار كانت كلّ زاوية يحيط بها المحور وخطّ الرأس قائمة فخطّ الرأس وهو بج على كلّ حال فى السطح المستوى الذى هو محور آب عمود عليه والمخطّ على ذلك السطح لانّ حركته على استقامة خطّ بج وذلك انّ المحور عمود ايضا على السطح المفروض لانه عمود على خطّ المركز ينطبق على السطح المفروض فالسطح المفروض والسطح الذى عليه مخطّ البركار متوازيان فهما لا يلتقيان فاذا رأس المخطّ لا يلقى السطح المفروض فهو لا يرسم شيئًا من الخطوط على السطح المفروض بحركة البركار الذى محوره عمود على خطّ الرأس وخطّ المركز جميعا وذلك ما اردنا ان نبيّن فبيّن انه اذا كان المحور عمودا على خطّ المركز فهو عمود على السطح المفروض واذا لم يكن عمودا على خطّ المركز لم يكن عمودا على السطح المفروض

اذا كان المحور عمودا على خطّ الرأس فقط فانّ رأس المخطّ يرسم على السطح المفروض بحركة البركار خطوطا مستقيمة مثال ذلك انّ المحور خطّ آب وخطّ الرأس بج وخطّ المركز آد وخطّ اب عمود على خطّ بج وليس بعمود على خطّ آد فاقول انّ رأس المخطّ بحركة البركار يرسم

MÉMOIRE sur le compas parfait.

على السطح المفروض خطّا مستقيما برهان ذلك انّا ان حرّكنا البركار كانت كلّ زاوية يحيط بها المحور وخطّ الرأس قائمة لخطّ الرأس وهو بجَ على كلّ حال على السطح المستوى الذى خطّ ابَ عمود عليه والخطّ على ذلك السطح لانّ حركته على استقامة خطّ بجَ وخطّ ابَ فليس بعمود على السطح المفروض لانّه ليس بعمود على خطّ المركز فالسطح المفروض والسطح الذى عليه لخطّ البركار ليسا بمتوازيين فهما يلتقيان فالفصل المشترك لهما خطّ مستقيم لانّهما مستويان ويجوز رأس المخطّ على ذلك الفصل المشترك ورسم رأس المخطّ بحركة البركار الذى محوره عمود على خطّ الرأس فقط خطوطا مستقيمة على السطح المفروض وذلك ما اردنا ان نبيّن

اذا كان المحور عمودا على خطّ المركز فقط فان رأس المخطّ بحركة البركار يرسم محيطات الدوائر على السطح المفروض مثال ذلك انّ المحور خطّ ابَ وخطّ الرأس بجَ وخطّ المركز ادَ وخطّ ابَ عمود على خطّ ادَ وليس بعمود على خطّ بجَ فاقول انّ رأس المخطّ بحركة البركار يرسم على السطح المفروض محيط دائرة برهان ذلك انّ زاوية دابَ قائمة وزاوية ابجَ ليست بقائمة فرأس المخطّ بحركة البركار يلقى السطح المفروض فيلقاه على خطّ ادَ على نقطة دَ فان حرّكنا البركار دار رأس المخطّ حول نقطة اَ ولقى خطّ اهَ من جهة اخرى فيلقاه على نقطة هَ فلانّ

الزاوية التى يحيط بها مخط بـد ومحور اب على كلّ حال مساوية الزاوية التى يحيط بها محور اب وخطّ خارج من نقطة ب الى ذلك الخطّ الذى يرسمه المخطّ [على السطح المفروض فلنا مثلثات فيها زاويتان] متساويتان وضلع مشترك فالخطوط المستقيمة الخارجة من نقطة آ الى ذلك الخطّ متساوية فالخطّ الذى يرسمه رأس المخطّ دائرة وخطّ هد قطر تلك الدائرة فرأس المخطّ يرسم بحركة البركار الذى محوره عمود على خطّ المركز فقط على السطح المفروض محيطات الدوائر وذلك ما اردنا ان نبيّن فبيّن من هذا انّه اذا كان المحور ليس بعمود على خطّ الرأس فانّ مخطّ البركار يرسم بحركته مخروطين قائمين يلتقيان على الرأس وذلك الرأس هو رأس البركار والخطّ الذى من جهة الزاوية الحادّة يرسم مخروطا يلى محور البركار والخطّ الذى يلى الزاوية المنفرجة يرسم المخروط المتقابل

اذا كان المحور ليس بعمود على احد خطّى الرأس والمركز لكن زاويتى الرأس والمركز متساويتان فانّ رأس المخطّ يرسم بحركة البركار على السطح المفروض محيطات القطوع المكافية مثال ذلك انّ المحور خطّ اب وخطّ الرأس بج وخطّ المركز اد وخطّ اب ليس بعمود على احدهما ولكنّ زاويتى الرأس والمركز وهما باد ابج متساويتان فاقول انّ رأس المخطّ يرسم على السطح المفروض بحركة البركار محيط قطع

MÉMOIRE sur le compas parfait.

سكاف برهان ذلك انّ زاوية الرأس الحادّة مع زاوية المركز الحادّة
بحركة البركار تقع مرّة من جهة واحدة مثل ابد ومرّة من الجهتين
المتبادلتين مثل ابج فان كانتا من جهة واحدة فانّ رأس المخطّ
يلقى خطّ اد فيلقاه على نقطة د فيقع فى المخروط الذى يحدث
بحركة البركار من السطح المفروض قطع سهمه خطّ اد لان ذلك
المخروط قائم وان كانتا متبادلتين فانّ خطّ بج يكون موازيا لخطّ اد
لانّ الزاويتين المتبادلتين وهما ابج باد متساويتان والفصل
المشترك لقاعدة المخروط وللسطح المفروض عمود على سطح عليه خطوط
بد بج با لانّ كلّ واحدة من قاعدة المخروط والسطح المفروض قائم على
سطح عليه د ب ج فذلك الفصل المشترك ايضا عمود على الفصل
المشترك لقاعدة المخروط وللمثلّث الذى يقع فى المخروط من سطح دبج
الذى يمرّ برأس المخروط وبمحوره وخطّ بج واحد من اضلاع المثلّث
ومواز لخطّ اد الذى هو سهم القطع الذى يقع فى المخروط من السطح
المفروض وخطّ بد ضلع آخر لذلك المثلّث وقد لقيه سهم اد على
نقطة د فمن السطح المفروض يقع فى المخروط قطع مكافى رأسه
نقطة د وسهمه خطّ اد ويجوز على محيطه رأس المخطّ لان المخطّ على
السطح المفروض ورأس المخطّ بحركة البركار الذى محوره ليس بعمود
على احد خطّى الرأس والمركز لكن زاوية الرأس مثل زاوية المركز

MÉMOIRE sur le compas parfait.

يرسم على السطح المفروض محيطات قطوع مكافية وذلك ما اردنا ان نبيّن

اذا كان المحور ليس بعمود على احد خطّى الرأس والمركز لكن زاوية الرأس الحادّة اعظم من زاوية المركز الحادّة فان رأس المخطّ بحركة البركار يرسم على السطح المفروض محيطات القطوع الزائدة والمتقابلة الوضع مثال ذلك انّ المحور خطّ اب وخطّ الرأس بج وخطّ المركز اد وخطّ اب ليس بعمود على واحد منهما والزاوية الحادّة للرأس وهى ابج اعظم من الزاوية الحادّة للمركز وهى باد فاقول انّ رأس المخطّ بحركة البركار يرسم على السطح المفروض محيط القطع الزائد والمتقابل الوضع برهان ذلك انّ زاوية الرأس الحادّة مع زاوية المركز الحادّة بحركة البركار تقع مرّة من جهة واحدة مثل ابد ومرّة متبادلتين مثل ابج فان كانتا من جهة واحدة فانّ رأس المخطّ يلقى خطّ اد فليلقه على نقطة د فيقع فى المخروط الحادث من حركة البركار من السطح المفروض قطع سهمه اد لانّ ذلك المخروط قائم وان كانتا متبادلتين فخطّ اد الذى هو سهم القطع الذى يقع فى المخروط من السطح المفروض يلقى خطّ جب من جهة ب لان زاوية ابج اعظم من زاوية باد فليلقه على نقطة ه وايضا انّ خطّ به من جهة الزاوية المنفرجة وهى ابه وهى على سطح المخروط المقابل وهو على استقامة ضلع المثلث

MÉMOIRE sur le compas parfait.

الذى يقع فى المخروط من السطح الذى يمرّ بالمحور وبرأس المخروط
والفصل المشترك لقاعدة المخروط ولذلك المثلث كما ذكرنا قبل
[فمن] السطح المفروض يقع فى احد المخروطين المتقابلين قطع
زائد وفى المخروطين قطعان متقابلان فى الوضع وقطرهما ده ويجوز
على محيطهما رأسا الخطّ لانّ الخطّ على السطحين المفروضين المتقابلين
فرأسا الخطّ يرسمان بحركة البركار الذى محوره ليس بعمود على
احد خطّى الرأس والمركز لكن زاوية الراس الحادّة اعظم من زاوية
المركز الحادّة على السطح المفروض محيطات القطوع الزائدة المتقابلة
الوضع وذلك ما اردنا ان نبيّن

اذا كان المحور ليس بعمود على احد خطّى الرأس والمركز لكن زاوية
المركز الحادّة اعظم من زاوية الرأس الحادّة فان رأس الخطّ يرسم بحركة
البركار على السطح المفروض محيطات القطوع الناقصة مثال ذلك
انّ المحور خطّ اب وخطّ الرأس بج وخطّ المركز اد وخطّ اب ليس بعمود
على واحد منهما لكنّ الزاوية الحادّة للمركز وهى باد اعظم من الزاوية
الحادّة للرأس وهى ابج فاقول انّ رأس الخطّ بحركة البركار يرسم على
السطح المفروض محيط القطع الناقص برهان ذلك انّ الزاوية الحادّة
للرأس مع زاوية المركز الحادّة تقع بحركة البركار مرة من جهة
واحدة مثل ابد ومرّة متبادلتين مثل ابج فان كانتا من جهة

واحدة فانّ رأس المخطّ يلقى خطّ آدَ فليلقه على نقطة دَ فيقع فى
المخروط الحادث من حركة البركار من السطح المفروض قطع سهمه آدَ
لانّ المخروط قائم وان كانتا متبادلتين فانّ خطّ آدَ الذى هو سهم
القطع الذى يقع فى المخروط من السطح المفروض يلقى خطّ بَهَ الذى
هو [احد] اضلاع المثلّث الذى يقع فى المخروط من السطح المارّ
برأس المخروط وبمحوره [والفصل المشترك لقاعدة المخروط وللسطح
المفروض عمود على الخطّ] الذى [هو] الفصل المشترك لقاعدة المخروط
وللمثلّث وخطّ بدَ ضلع اخر للمثلّث ويلقاه سهم آدَ على نقطة دَ فمن
السطح المفروض يقع فى المخروط قطع ناقص قطره ددَ ويجوز على محيطه
رأس المخطّ على سطح المخروط فرأس المخطّ يرسم بحركة البركار الذى
محوره ليس بعمود على احد خطّى الرأس والمركز لكن الزاوية الحادّة
[للمركز اعظم من الزاوية الحادّة] للرأس على السطح المفروض محيطات
[القطوع الناقصة] وذلك ما اردنا ان نبيّن فقد تبيّن لنا انّه
يمكن بهذا البركار ان نرسم الفصول المشتركة للسطح المخروطىّ واىّ
سطح كان من السطوح المختلفة الاجناس

MÉMOIRE
sur le compas
parfait.

المقالة الثانية
فى علم رسم الخطوط القياسيّة
على وضع معلوم

فينبغى ان نتفق على انطباق مركز البركار على سطح مستو معلوم وخطّ الرأس او خطّ المركز والمحور على خطّ مستقيم معلوم الوضع ونقطة معلومة على احد هذه الخطوط على نقطة معلومة

اذا اردنا ذلك نريد ان نعمل زاوية رأس البركار او زاوية المركز مساوية لزاوية معلومة مستقيمة الخطّين فليكن محور البركار خطّ اَبَ وخطّ الرأس او خطّ المركز جَزَ والزاوية المعلومة زاوية دَهَزَ ونريد ان نعمل زاوية يحيط بها محور اَبَ وخطّ جَزَ مساوية الزاوية دَهَزَ فنطبق نقطة بَ التى هى رأس البركار ومركزه على نقطة دَ ومحور اَبَ على احد خطّى دَهَ هَزَ وليكن على دَهَ وخطّ جَزَ على خطّ هَزَ فقد انطبقت الزاوية التى يحيط بها محور اَبَ وخطّ جَزَ على [زاوية دَهَزَ فهى] مساوية لزاوية دَهَزَ المعلومة فقد علمنا انّ زاوية رأس البركار او زاوية المركز مساوية لزاوية معلومة وذلك ما اردنا ان نبيّن

MÉMOIRE sur le compas parfait.

نريد ان نرسم بالبركار الذى محوره آ خطّا مستقيما موازيا لخطّ جد
المستقيم المعلوم الوضع ويجوز على نقطة د المعلومة فنخرج من نقطة
د عمودا على خطّ جد وهو هط ونجعل محور البركار وهو آ عمودا على خطّ
الرأس وليس بعمود على خطّ المركز ونحرّك البركار حتى يلقى رأس
المخطّ من جهة الزاوية الحادّة خطّ المركز فيلقاه على نقطة ما وتنطبق
تلك النقطة على نقطة د وخطّ المركز على خطّ هط من اىّ جهة
كانت وسطح المركز على السطح المفروض حتى يكون البركار اعه
ورأسه ع ومركزه آ ومحوره اع وخطّ المركز اه وخطّ الرأس عه فاقول
انّ رأس المخطّ بحركة البركار يرسم خطّا موازيا لخطّ جد ويجوز على
نقطة د برهان ذلك انّ الخطّ الذى يرسمه رأس المخطّ وهو هك
مستقيم كما بيّنا فى المقالة الاولى ويجوز على نقطة د وايضا لانّ سطح
اعه قائم على السطح المفروض وعلى سطح يدور عليه مخطّ هع فكلّ
واحد من السطح الذى يدور عليه مخطّ عه والسطح المفروض قائم على
سطح اعه فالفصل المشترك لهما وهو هك مستقيم وهو عمود على
سطح اعه ويجوز عليه رأس المخطّ ويرسمه ولانّ خطّ هك عمود على
سطح اعه فهو عمود على خطّ اه فزاوية اهك قائمة وزاوية هطج قائمة
فخطّ هك مواز لخطّ جد المستقيم المعلوم الوضع لانّ كلّ واحد منهما
على سطح واحد مستوفقد رسمنا بالبركار الذى محوره خطّ آ مستقيما

MÉMOIRE sur le compas parfait.

موازيا لخط مستقيم معلوم الوضع ويجوز على نقطة معلومة وذلك ما اردنا ان نبيّن

نريد ان نرسم بالبركار الذى محوره خط ا على سطح مستو معلوم محيط دائرة احد اقطارها خط جد المستقيم المعلوم الوضع فنجعل نسبة خط هز الى خط زط كنسبة نصف خط جب [leg. جد] الى محور ا وزاوية هزط قائمة ونصل خط هط ونجعل زاوية مركز البركار قائمة وزاوية الرأس مثل زاوية هطز ونحرك البركار حتى يلقى رأس المخط من جهة الزاوية الحادّة خطّ المركز فليلقه على نقطة ما فنطبق تلك النقطة على احدى نقطتى جد وليكن على د وخط المركز على خط جد وسطح المركز على السطح المفروض حتى يكون البركار داب ورأسه نقطة ا ومحوره اب ومركزه نقطة ب وخط الراس خط اد فاقول انّ رأس المخط بحركة البركار يرسم على السطح المفروض محيط دائرة احد اقطارها خط جد برهان ذلك انّ الخط الذى يرسمه رأس المخط على السطح المفروض محيط دائرة كما بيّنا فى المقالة الاولى ونقطة ب مركز تلك الدائرة وايضا لانّ نسبة دب الى با كنسبة هز الى زط من جهة تشابه المثلّثين ونسبة هز الى زط كنسبة نصف خط جد الى خط با فنسبة كلّ واحد من نصف خط جد وخط دب الى خط اب واحدة فخط دب نصف خط جد فخط بد مساو لخط بج

MÉMOIRE sur le compas parfait.

فمحيط الدائرة يمرّ على نقطة جَ لخطّ جدَ قطر الدائرة لانّه يمرّ بمركز
بَ ورأس المخطّ يرسم محيط تلك الدائرة فقد رسمنا بالبركار الذى
محوره خطّ آ على السطح المستوى المعلوم محيط دائرة احد اقطارها خطّ
جدَ المستقيم المعلوم الوضع وذلك ما اردنا ان نبيّن

نريد ان نرسم بالبركار الذى محوره خطّ آ على سطح مستوٍ معلوم محيط
قطع مكافٍ احد اقطاره خطّ بجَ المعلوم الوضع ورأس القطر نقطة
بَ والضلع القائم لذلك القطر خطّ دَ المعلوم القدر والزاوية التى
يحيط بها القطر وخط ترتيبه مساوية لزاوية دَ المعلومة فان كانت
زاوية دَ قائمة خطّطنا على خطّ ما مستقيم وهو زحَ دائرة زطحَ ونحدث
على خطّ زحَ نقطة فلتكن كَ حتّى تكون نسبة مربّع زكَ الى سطح
زحَ فى حكَ كنسبة مربّع نصف خطّ الضلع القائم وهو دَ الى
مربّع المحور وهو آ كما بيّنّا فى كتابنا فى احداث النقط على الخطوط فى
نسب السطوح ونجعل كطَ عمودا على زحَ ونصل خطّ طحَ ونجعل كلّ
واحدة من زاويتى رأس البركار ومركزه مساوية لزاوية كحطَ التى
هى اصغر من قائمة ونحرّك البركار حتّى يلقى رأس المخطّ خطّ المركز
من جهة الزاوية الحادّة على نقطة ما فنطبق تلك النقطة على
نقطة بَ وخطّ المركز على خطّ بجَ وسطح المركز على السطح المعلوم
فليكن البركار بلمَ ورأسه نقطة لَ ومحوره لمَ ومركزه بنقطة مَ وخطّ

MÉMOIRE sur le compas parfait.

الرأس ان كانت زاوية الرأس الحادّة متبادلة مع زاوية المركز الحادّة
وهو لن وان كانتا من جهة واحدة وهو لب وخطّ المركز وهو بم فانّ
رأس الخطّ بحركة البركار يرسم على السطح المعلوم قطعا مكافيا كما
بيّنّا فى المقالة الاولى فاقول انّ ضلعه القائم خطّ د والزاوية التى
يحيط بها قطر بج وخطّ ترتيبه مساوية لزاوية د التى فرضناها
قائمة برهان ذلك انّا نخرج من نقطة ب خطّا يكون عمودا على محور
لم وهو بس ونصل خطّ زط فلانّ نسبة مربّع نصف خطّ د الى
مربّع المحور وهو لم كنسبة مربّع زك الى سطح زح فى حك وسطح زح
فى حك مساو لمربّع طح فنسبة مربّع نصف خطّ د الى مربّع لم
كنسبة مربّع زك الى مربّع طح فنسبة نصف خطّ د الى خطّ لم
كنسبة خطّ زك الى حط ونسبة خطّ زك الى خطّ حط كنسبة حز
فى زك اعنى مربّع زط الى سطح حز فى حط لانّ زح ارتفاع مشترك
لهما فنسبة مربّع زط الى سطح زح فى حط كنسبة نصف خطّ د
الى خطّ لم ومن جهة انّ مثلث لبم متساوى الساقين وبس عمود على
قاعدة لم فنسبة مربّع زط الى سطح زح فى حط كنسبة ربع خطّ د
الى خطّ لس وايضا لانّ زاوية سلب مساوية لزاوية زحط وزاوية
لسب مساوية لزاوية زطح لانّ كلّ واحدة منهما قائمة فمثلث لسب
تشبه مثلث زطح فنسبة سب [الى بل] كنسبة طز الى زح

MÉMOIRE sur le compas parfait.

ونسبة بس الى سل كنسبة زط الى طح فالنسبة المؤلفة من سب
الى بل ومن نسبة بس الى سل اعنى نسبة مربع بس الى سطح
سل فى لب كالنسبة المؤلفة من نسبة طز الى زح ومن نسبة زط
الى طح اعنى نسبة مربع زط الى سطح زح فى حط فنسبة مربع بس
الى سطح سل فى لب كنسبة مربع زط الى سطح زح فى حط لكن
نسبة مربع زط الى سطح زح فى حط كنسبة ربع خط د الى خط لس
فنسبة مربع سب الى سطح سل فى لب كنسبة ربع خط د الى
خط لس فنسبة اربعة آحاد مربع بس وهو مربع بن لان خط بس
مثل سن الى سطح سل فى لب كنسبة اربعة امثال ربع خط د
اعنى خط د الى لس ونسبة خط د الى خط لس كنسبة سطح خط
د فى لب الى سطح سل فى لب لان لب ارتفاع مشترك لهما فنسبة
كل واحد من مربع خط بن وسطح د فى لب الى سطح سل فى لب
واحدة فمربع خط بن مساو لسطح خط د فى لب فنسبة خط د الى
بن كنسبة خط بن الى بل فنسبة خط د الى خط بل كنسبة
مربع بن الى مربع بل ومربع بل مساو لخط بل فى لن لان مثلث
بلن مساوى الساقين فنسبة خط د الى خط بل كنسبة مربع
بن الى سطح بل فى لن ونقطة ل رأس المخروط وخط بج مواز لخط لن
ونسبة خط د الى ضلع المثلث المار برأس المخروط على ما وصفنا

MÉMOIRE sur le compas parfait.

قبل كنسبة [مربّع] قاعدة المثلّث الى سطح احد الضلعين من المثلّث فى الآخر فخطّ دَ هو الضلع القائم للقطع المكافى كما قال ابلونيوس وسمّ ذلك القطع بجَ لانّ المخروط هو قائم فالزاوية التى يحيط بها خطّ بجَ وخطّ الترتيب قائمة ورأس المخطّ يجوز على محيطه فقد رسمنا بالبركار الذى محوره خطّ آ على سطح مستو مفروض قطعا مكافيا احد اقطاره بجَ وضلعه القائم خطّ دَ والزاوية التى يحيط بها القطر وخطّ ترتيبه مساوية لزاوية دَ القائمة ۞ وان كانت زاوية دَ ليست بقائمة نجعل خطّ زحَ عمودا على احد خطّى هزَ هطَ من جهة الزاوية الحادّة وليكن عمودا على خطّ هحَ ونقسم خطّ هحَ بنصفين على نقطة طَ ونجعل نسبة خطّ دَ الى خطّ آخر وهو نَ كنسبة مربّع خطّ هزَ الى سطح زحَ فى حطَ ونجعل زاوية كبلَ مساوية لزاوية زهحَ وخطّ كلَ مساويا لخطّ نَ وهو عمود على خطّ بكَ ونجعل خطّ لعَ موازيا لخطّ كبجَ وخطّ بعَ موازيا لخطّ لكَ ونقسم لعَ بنصفين على نقطة مَ ونجعل نسبة خطّ عبَ الى آخر وهو سَ كنسبة معَ الى عبَ ونرسم بالبركار الذى محوره خطّ آ على السطح المفروض القطع المكافى الذى احد اقطاره خطّ معَ المعلوم الوضع ورأسه نقطة مَ وضلعه القائم خطّ سَ المعلوم القدر والزاوية التى يحيط بها قطر معَ وخطّ ترتيبه قائمة كما رسمنا قبل فذلك القطع

Mémoire sur le compas parfait.

هو القطع المكافى الذى يجوز محيطه على نقطة ب واحد اقطاره وهو خط بج والضلع القائم لخط بج هو خط د والزاوية التى يحيط بها قطر بج وخط ترتيبه هى مساوية لزاوية ه المعلومة كما بيّن ابلونيوس فى المقالة الاولى من كتاب المخروطات فقد رسمنا بالبركار الذى محوره خط ا محيط قطع مكافى احد اقطاره خط بج المعلوم الوضع ورأسه نقطة ب وضلعه القائم خط د المعلوم القدر والزاوية التى يحيط بها القطر وخط ترتيبه مساوية لزاوية ه المعلومة وذلك ما اردنا ان نبيّن

نريد ان نرسم بالبركار الذى محوره خط ا على سطح مستو مفروض قطعا زائدا ومتقابل الوضع يكون احد اقطارهما خط بج المعلوم القدر والوضع وضلعه القائم د المعلوم القدر والزاوية التى يحيط بها القطر وخط ترتيبه مساوية لزاوية ه المعلومة فان كانت زاوية ه قائمة جعلنا نسبة زح الى حط كنسبة الضلع القائم وهو د الى القطر وهو بج ونحدث على استقامة خط طز من جهة ز نقطة ولتكن ك حتى تكون نسبة سطح كح فى كز الى سطح كط فى طح كنسبة مربع محور البركار وهو ا الى مربع نصف قطر بج كما بيّنا فى كتاب احداث النقط على الخطوط فى نسب السطوح ونخط على خط كح نصف دائرة كلح ونجعل خط لز عمودا على خط كح ونصل خطى كل لح

MÉMOIRE sur le compas parfait.

ونخرجهما على الاستقامة ونجعل خط نطم عمودا على خط كط ونخط على خط نطم نصف دائرة من جهة ك فيجوز محيطها على نقطة ل لان زاوية نلم قائمة وعلى نقطة من خط كح وليكن س ونصل خط سل ونجعل زاوية رأس البركار مساوية لزاوية كلس وزاوية مركز البركار مساوية لزاوية لكس ونحرّك البركار حتى يلقى رأس المخط من جهة الزاوية الحادّة خط المركز على نقطة ما فنطبق تلك النقطة على نقطة ج وخط المركز على استقامة خط بج وسطح المركز على السطح المفروض حتى يكون البركار جعف ورأسه نقطة ع ومحوره عف ومركزه نقطة ف وخط الرأس ان كانت زاوية الرأس الحادّة مع زاوية المركز الحادّة من جهة واحدة عج وان كانتا متبادلتين كان عى وخط المركز جف فاقول ان رأس المخط بحركة البركار الذى محوره خط ا يرسم على السطح المفروض قطعا زائدا ورأسى المخط المتقابل الوضع قطرهما بج وضلعه القائم خط د والزاوية التى يحيط بها القطر وخط ترتيبه مساوية لزاوية د القائمة اوّلا برهان ذلك انّا نجعل خط عصق عمودا على خط فع ونجعل نسبة عف الى صش كنسبة لك الى حط ونخرج من نقطة ش عمودا على خط بج حتى يلقى خطى فع عص على نقطتى اق ونجعل عو عمودا على خط فص ونخرج من نقطة ج عمودا على محور عف وهو جى

MÉMOIRE sur le compas parfait.

ونجعل عت موازيا لخط بج فلانّ نسبة مربع محور البركار وهو عف
الى مربع نصف خط القطر وهو بج كنسبة سطح حك فى كز الذى
هو مساو لمربع خط كل الى سطح كط فى طح فنسبة مربع كل الى سطح
كط فى طح كنسبة مربع عف الى مربع نصف خط بج وايضا نسبة
عف الى خط فص كنسبة خط لك الى كح من جهة تشابه المثلثين
ونسبة عف الى صش كنسبة لك الى حط فنسبة خط عف الى
فش كنسبة خط لك الى كط فالنسبة المؤلفة من نسبة عف الى
فش ومن نسبة عف الى صش اعنى نسبة مربع عف الى سطح
فش فى صش كالنسبة المؤلفة من نسبة لك الى كط ومن نسبة
لك الى حط اعنى نسبة مربع لك الى سطح كط فى طح فنسبة مربع
عف الى سطح فش فى شص كنسبة مربع لك الى سطح كط فى طح
فنسبة مربع عف الى كلّ واحد من سطح فش فى شص [ومربع
نصف خط بج] كنسبة مربع لك الى سطح كط فى طح فنسبة مربع
عف الى كلّ واحد من سطح فش فى شص والى مربع نصف خط بج
واحدة لانّها كنسبة مربع لك الى سطح كط فى طح فسطح فش فى
شص مساو لمربع نصف خط بج وايضا لانّ نسبة قش الى شص
كنسبة فش الى شا من جهة تشابه المثلثين فسطح قش فى شا
مساو لسطح فش فى شص الذى هو مساو لمربع [نصف] خط بج

MÉMOIRE sur le compas parfait.

فسطح قش فى شا مساو لمربع نصف خط بج وايضا لان نسبة جص
الى فع كنسبة حس الى لك من جهة تشابه المثلثين ونسبة فع
الى شص كنسبة لك الى حط فنسبة جص الى شص كنسبة حس
الى حط ونسبة جش الى شص كنسبة سط الى طح ونسبة صش
الى شق كنسبة حط الى طن فنسبة جش الى شق كنسبة سط
الى طن ويمثل هذا التدبير نسبة جش الى شا كنسبة سط الى
طم فالنسبة المؤلفة من نسبة جش الى شق ومن نسبته الى شا
اعنى نسبة مربع جش الى سطح قش فى شا كالنسبة المؤلفة من
نسبة سط الى طن ومن نسبته الى طم اعنى نسبة مربع سط الى
سطح طن فى طم لكن مربع سط مساو لسطح نط فى طم فمربع
جش مساو لسطح قش فى شا وسطح قش فى شا مساو لمربع نصف
خط بج فخط جش نصف خط جب فخط جش مثل خط شب فيخط
على نقط ا ب ق ج محيط دائرة قطرها اشق لان سطح قش فى شا
مساو لمربع نصف خط بج وزاوية ش قائمة ويجوز المحيط بنقطة ع
لان زاوية اعق قائمة وايضا ان حركنا البركار حتى تقع زاوية الرأس
الحادة وهى فحى متبادلة مع زاوية المركز الحادة فلان زاوية فعص
قائمة فزاوية فحى مع زاوية صعب مثل زاوية قائمة لان خط يعه
مستقيم وزاوية يعف مساوية لزاوية جعف فزاوية جعق مساوية

MÉMOIRE sur le compas parfait.

لزاوية صعب فالقوس التى بين جق من تلك الدائرة مساوية
للقوس التى فيما بين نقطة ق والتقاء رأس المخط على محيط الدائرة
وتلك النقطة هى ب فخط بج قطر القطع الزائد لانّ مخط عهب من
جهة الزاوية المنفرجة وهو على سطح المخروط المتقابل وايضا لانّ
نسبة وص الى عق كنسبة زح الى لك من جهة تشابه المثلثين
ونسبة عق الى صش كنسبة لك الى حط فنسبة وص الى صش
كنسبة زح الى حط ونسبة زح الى حط كنسبة خط د الذى هو
الضلع القائم الى قطر بج فنسبة خط د الى خط بج كنسبة وص الى
صش لكن نسبة صو الى صش كنسبة خط عص الى صق من
جهة تشابه المثلثين فنسبة خط د الى خط بج كنسبة عص الى
صق ونسبة عص الى صق كنسبة مربع عص الى سطح عص فى
صق وسطح عص فى صق مساو لسطح بص فى صج فنسبة خط د الى
بج كنسبة مربع عص الى سطح بص فى صج اعنى كالنسبة المؤلفة
من نسبة عص الى صب ومن نسبة عص الى صج فنسبة خط د الى
بج كالنسبة المؤلفة من نسبة عص الى صب ومن نسبة عص الى
صج ونسبة عص الى صب كنسبة يت الى تع من جهة تشابه
المثلثين ونسبة عص الى صج كنسبة جت الى تع لانّ سطح جتعض
متوازى الاضلاع فنسبة خط د الى خط بج كالنسبة المؤلفة من

MÉMOIRE sur le compas parfait.

نسبة يت الى تح ومن نسبة جت الى تح أعنى نسبة سطح جت
فى تى الى مربّع تح فنسبة خطّ د الى بج كنسبة سطح جت فى تى الى
مربّع تح ونقطة ع رأس المخروط وخطّ تح موازٍ لقطر القطع الزائد
فخطّ د الضلع القائم لقطر بج كما بيّن ابلونيوس الفاضل فى
المخروطات والزاوية التى يحيط بها ذلك القطر وخطّ ترتيبه هى قائمة
لانّ الفصل المشترك للسطح المفروض ولقاعدة المخروط عمود على مثلّث
يعج لانّ المخروط قائم ورأس المخطّ بحركة البركار يجوز على محيط القطع
الزائد ورأساه على المتقابل الوضع ورسماهما فقد رسمنا بالبركار
الذى محوره خطّ آ على سطح مستوٍ مفروض قطعا زائدا ومتقابل
الوضع احد اقطارهما خطّ بج المعلوم القدر والوضع والضلع القائم
لهما خطّ د المعلوم القدر والزاوية التى يحيط بها قطر بج وخطّ ترتيبه
مساوية لزاوية ة القائمة ۞ وان كانت زاوية ة ليست بقائمة
نجعل زاوية زجط على السطح المفروض مثل زاوية ة ونخطّ على نصف
خطّ بج نصف دائرة وهو جكز ونجعل نسبة مربّع كل الى سطح زل
فى لج كنسبة خطّ د الى خطّ بج ونجعله موازيا لخطّ جط المعلوم
الوضع ونصل خطّ زك ونجعل خطّ زم وسطا فى النسبة فيما بين
خطّى زك زط ونجعل سطح من مساويا لمربّع خطّ جك ونجعل زس
مساويا لخطّ زم ونصل خطّ سعن وهذا العمل هو عمل ابلونيوس

MÉMOIRE sur le compas parfait.

الفاضل فى المخروطات ونرسم بالبركار الذى محوره خطّ آ على السطح المفروض قطعا زائدا ومتقابل الوضع احد إقطارهما خطّ سَمَ المعلوم القدر والوضع والضلع القائم لهما مَحَ المعلوم القدر والزاوية التى يحيط بها قطر سَمَ وخطّ ترتيبه قائمة كما رسمنا قبل هذا فهذا القطع هو الزائد والمتقابل الوضع ويجوز على نقطتى جَ بَ احد اقطارهما خطّ بَجَ والضلع القائم لهما خطّ دَ والزاوية التى يحيط بها قطر بَجَ وخطّ ترتيبه مساوية لزاوية ةَ المعلومة كما بيّن ابلونيوس فى المخروطات فقد رسمنا بالبركار الذى محوره خطّ آ على سطح مستو مفروض قطعا زائدا ومتقابل الوضع احد اقطارهما خطّ بَجَ المعلوم القدر والوضع والضلع القائم لهما خطّ دَ المعلوم القدر والزاوية التى يحيط بها قطر بَجَ وخطّ ترتيبه مساوية لزاوية ةَ المعلومة وذلك ما اردنا ان نبيّن

نريد ان نرسم بالبركار الذى محوره خطّ آ على سطح مستو معلوم قطعا ناقصا يكون احد اقطاره خطّ بَجَ المعلوم القدر والوضع وضلعه القائم خطّ دَ المعلوم القدر والزاوية التى يحيط بها القطر وخطّ ترتيبه مساوية لزاوية ةَ المعلومة فان كانت زاوية ةَ قائمة جعلنا نسبة خطّ زَحَ الى حطَ كنسبة الضلع القائم وهو دَ الى القطر المجانب وهو بَجَ فتقع نقطة طَ من جهة زَ خارج من خطّ زَحَ لانّ الضلع

MÉMOIRE sur le compas parfait.

القائم اصغر من القطر الجانب فى القطع الناقص ونحدث على خط
طز نقطة ولتكن ك حتى تكون نسبة سطح حك فى كز الى سطح
كط فى طح كنسبة مربع محور البركار وهو آ الى مربع نصف خط
بج كما عملنا فى كتاب احداث النقط على الخطوط فى نسب السطوح
ونخط على خط كح نصف دائرة كلح ونجعل زل عمودا على خط كح
ونصل خطى كل لح ونخرجهما على استقامة ونجعل خط نطم عمودا
على خط كط ونخط على خط نطم نصف دائرة من جهة ك فيجوز
محيطها على نقطة ل لانّ زاوية نلم قائمة وعلى نقطة من خط كح
ولتكن س ونصل سل ونجعل زاوية رأس البركار مساوية لزاوية
كلس وزاوية المركز لزاوية لكس ونحرّك البركار حتى يلقى رأس
المخطّ من جهة الزاوية الحادّة خطّ المركز على نقطة ما ونطبق تلك
[النقطة] على نقطة ج وخطّ المركز على خط بج وسطح المركز على
السطح المفروض حتّى يكون البركار جعف ورأسه نقطة ع ومحوره
عف ومركزه نقطة ف وخطّ الرأس ان كانت زاوية الرأس الحادّة
مع زاوية المركز الحادّة من جهة واحدة عج وخطّ المركز جف فاقول
انّ رأس المخطّ بحركة البركار يرسم على السطح المعلوم قطعا ناقصا
احد اقطاره بج وضلعه القائم خطّ د والزاوية التى يحيط بها القطر
وخطّ ترتيبه مساوية لزاوية د التى هى اوّلا قائمة برهان ذلك انّا

MÉMOIRE sur le compas parfait.

نجعل خطّ عصق عمودا على خطّ فح ونجعل نسبة عف الى صش
كنسبة خطّ لك الى حط ونخرج من نقطة ش عمودا على بج حتى
يلقى خطّى فح عص على نقطتى آق ونخرج من نقطة ج عمودا على
محور عف وهو جيت ونجعل خطّ عت موازيا لخطّ بج فلانّ نسبة مربّع
محور البركار وهو عف الى مربّع نصف خطّ القطر وهو بج كنسبة
سطح حك فى كز الذى هو مساو لمربّع كل الى سطح كط فى طح فنسبة
مربّع كل الى سطح كط فى طح كنسبة مربّع عف الى مربّع نصف
خطّ بج وايضا نسبة عف الى فص كنسبة لك الى كح من جهة
تشابه المثلّثين ونسبة عف الى صش كنسبة كل الى طح فنسبة
عف الى فش كنسبة لك الى كط فالنسبة المؤلّفة من نسبة عف
الى فش ومن نسبته الى صش اعنى نسبة مربّع عف الى سطح فش
فى صش كالنسبة المؤلّفة من نسبة لك الى كط ومن نسبته الى
حط اعنى نسبة [مربّع] لك الى سطح كط فى طح فنسبة مربّع عف
الى فش فى شص كنسبة مربّع لك الى سطح كط فى طح فنسبة
مربّع عف الى كلّ واحد من سطح فش فى شص والى مربّع نصف
خطّ بج واحدة لانّها كنسبة مربّع لك الى سطح كط فى طح فسطح
فش فى شص مساو لمربّع نصف خطّ بج وايضا لانّ نسبة قش الى
شص كنسبة فش الى شا من جهة تشابه المثلّثين فسطح قش فى

MÉMOIRE sur le compas parfait.

شا مساو لسطح فش فى شص الذى هو مساو لمربّع نصف خط بج
فسطح قش فى شا مساو لمربّع نصف خط بج وايضا لانّ نسبة جص
الى فع كنسبة حس الى لك من جهة تشابه المثلّثين ونسبة فع
الى شص كنسبة لك الى طح فنسبة جص الى صش كنسبة سح
الى حط ونسبة جش الى شص كنسبة سط الى طح ونسبة صش
الى شق كنسبة حط الى طن فنسبة جش الى شق كنسبة سط
الى طن وبهذا التدبير نسبة جش الى شا كنسبة سط الى طم
فالنسبة المؤلّفة من نسبة جش الى شق ومن نسبته الى شا اعنى
نسبة مربّع جش الى سطح فش فى شا كالنسبة المؤلّفة من نسبة
سط الى ط ومن نسبته الى طم اعنى نسبة مربّع سط الى سطح
نط فى طم لكن مربّع سط مساو لسطح نط فى طم فمربّع جش
مساو لسطح قش فى شا وسطح قش فى شا مساو لمربّع نصف خط بج
فخط جش نصف خط جب فخط جش مساو لخط شب فيختط على
نقط ا ب ق ج محيط دائرة قطرها خط اشق لانّ سطح قش فى شا
مساو لمربّع شب ويجوز بنقطة ع لانّ زاوية قعا قائمة وايضا ان
حرّكنا البركار حتى تقع زاوية الرأس الحادّة وهى فتى مبادلة مع
زاوية المركز الحادّة تكون زاوية فعج مساوية لزاوية فتى فالقوس
التى فيما بين جا من تلك الدائرة مساوية للقوس التى بين

MÉMOIRE sur le compas parfait.

نقطة ا والنقطة التى ينتهى [اليها] خط عى وتلك النقطة هى ب
فخط بج قطر القطع الناقص لانّ خط عيب من جهة الزاوية الحادّة
وهو على سطح المخروط الذى على المحور وايضا لانّ نسبة وص الى عغ
كنسبة زح الى لك من جهة تشابه المثلّثين ونسبة عغ الى صش
كنسبة كل الى حط فنسبة وص الى صش كنسبة زح الى حط ونسبة
زح الى حط كنسبة خط د الذى هو الضلع القائم الى قطر بج فنسبة
خط د الى خط بج كنسبة وص الى صش لكن نسبة وص الى صش
كنسبة عص الى صق لانّ خط قش مواز لخط عو فنسبة خط د الى
خط بج كنسبة عص الى صق كنسبة مربّع عص الى سطح عص فى
صق وسطح عص فى صق مساو لسطح جص فى صب فنسبة خط د
الى خط بج كنسبة مربّع خط عص الى سطح جص فى صب اعنى
كالنسبة المؤلّفة من نسبة عص الى صب ومن نسبته الى صج
فنسبة خط د الى خط بج كالنسبة المؤلّفة من [نسبة] عص الى
صب ومن نسبته الى صج ونسبة عص الى صب كنسبة تى الى تع
من جهة تشابه المثلّثين ونسبة عص الى صج كنسبة جت الى تع
لانّ سطح صجتع متوازى الاضلاع فنسبة خط د الى خط بج مؤلّفة
من نسبة يت الى تع ومن نسبة جت الى تع اعنى نسبة سطح جت
فى تى الى مربّع تع فنسبة خط د الى قطر بج كنسبة سطح جت فى

MÉMOIRE sur le compas parfait.

نى الى مربع تع ونقطة ع راس المخروط وخط تع مواز لقطر القطع
الناقص فخط دَ هو الضلع القائم لذلك القطر وهو بجَ كما بيّن
ابلونيوس الفاضل فى كتاب المخروطات والزاوية التى يحيط بها قطر
بجَ وخط ترتيبه قائمة لانّ الفصل المشترك للسطح المفروض ولقاعدة
المخروط عمود على مثلث يبجَ لانّ المخروط قائم وراس المخط يجوز على
محيطه فقد رسمنا بالبركار الذى محوره خط آ على السطح المستوى
المعلوم قطعا ناقصا احد اقطاره خط بجَ المعلوم القدر والوضع والضلع
القائم له خط دَ المعلوم القدر والزاوية التى يحيط بها قطر بجَ وخط
ترتيبه مساوية لزاوية دَ التى فرضناها قائمة ۞ وان كانت
زاوية دَ ليست بقائمة نجعل زاوية زجط على سطح معلوم مساوية
لزاوية دَ ونخط على نصف خط بجَ على السطح المعلوم [نصف] دائرة
جكز ونجعل نسبة مربع كل الى سطح زل فى لج كنسبة خط دَ الى
خط بجَ ولك موازيا لخط جط المعلوم الوضع ونصل خط زك ونجعل
خط زم وسطا فى النسبة فيما بين خطى كز زط ونجعل سطح من مساويا
لمربع خط جك ونجعل زس مساويا لخط زم ونصل خط سنع وهذا
العمل هو عمل ابلونيوس فى القطع الناقص وخط عم الضلع القائم
لقطر سم على زاوية قائمة فى القطع الذى احد اقطاره خط بجَ وضلعه
القائم على زاوية متساوية لزاوية زجط مساو لخط دَ كما بيّنه

MÉMOIRE sur le compas parfait.

ابلونيوس الفاضل فى المخروطات خط مس امّا القطر المجانب وامّا
القطر القائم فان كان القطر المجانب نرسم بالبركار الذى محوره خط آ
قطعا ناقصا ضلعه القائم خط عم وسهمه مس كما رسمنا قبل وان
كان القطر القائم خط سم نجعل خط قص وسطا فى النسبة لخطى
عم مس وعمودا على خط مس ونقسمه بنصفين على نقطة ز ونجعل
نسبة قص الى خط آخر وهو ف كنسبة عم الى مس ونرسم بالبركار
الذى محوره آ على السطح المعلوم قطعا ناقصا قطره المجانب قص
وضلعه القائم خط ف فذلك القطع هو القطع الناقص الذى يجوز
محيطه على نقطتى ج ب واحد اقطاره خط جب وضلعه القائم خط
د والزاوية التى يحيط بها قطر جز وخط ترتيبه مساوية لزاوية زجط
التى هى مساوية لزاوية د المعلومة كما بيّن ابلونيوس الفاضل فى
المخروطات فقد رسمنا بالبركار الذى محوره خط آ على السطح المستوى
المعلوم قطعا ناقصا احد اقطاره خط جز المعلوم القدر والوضع وضلعه
القائم خط د المعلوم القدر والزاوية التى يحيط بها قطر جز وخط
ترتيبه مساوية لزاوية د المعلومة وذلك ما اردنا ان نبيّن

فقد تبيّن لنا رسم الفصول المشتركة للسطح المخروطى وأىّ سطح كان
من السطوح المختلفة الاجناس على وضع معلوم بهذا البركار وسهل
علينا بذلك عمل الاسطرلابات على السطوح المستوية وذوات المحاور

MÉMOIRE sur le compas parfait.

وعمل الرخائم على اىّ سطح كان وكذلك كلّ الآلات التى يكون عليها خطوط الفصول المشتركة للسطح المخروطىّ واىّ سطح كان والله تعالى أعلم

تمّت المقالة الثانية من كتاب البركار التامّ وهو آخر الكتاب
والحمد لله ربّ العالمين وصلواته على سيّدنا محمّد وآله وصحبه اجمعين
وسلّم تسليما كثيرا

فهرس المحتويات

طبع في ١٠٠ نسخة

نشر بمعهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
بفرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية
طبع في مطبعة شتراوس، مورلنباخ، ألمانيا الاتحادية

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٦٦

السجزي

أحمد بن محمد بن عبد الجليل

(القرن ٤هـ/ ١٠م)

نصوص ودراسات

جمع وإعادة طبع

فؤاد سزكين

بالتعاون مع

كارل إيرج-إيجرت، مازن عماوي، إكهارد نويباور

١٤١٩هـ - ١٩٩٨م

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

يصدرها
فؤاد سزكين

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٦٦

السجزي
أحمد بن محمد بن عبد الجليل
(القرن ٤هـ/١٠م)

نصوص ودراسات

جمع وإعادة طبع

١٤١٩هـ - ١٩٩٨م
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

سلسلة الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

المجلد ٦٦