Publications of the
Institute for the History of
Arabic-Islamic Science

Edited by
Fuat Sezgin

ISLAMIC MATHEMATICS AND ASTRONOMY

Volume
3

Muḥammad ibn Mūsā
al-Khwārizmī
(fl. c. 200/815)

Texts and Studies
Collected and Reprinted

I

1997

Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

Publications of the Institute
for the History of Arabic-Islamic Science

Islamic Mathematics
and
Astronomy
Volume 3

ISLAMIC MATHEMATICS AND ASTRONOMY

Volume
3

MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-KHWĀRIZMĪ
(fl. c. 200/815)

TEXTS AND STUDIES

I

Collected and reprinted
by
Fuat Sezgin

in collaboration with
Mazen Amawi, Carl Ehrig-Eggert,
Eckhard Neubauer

1997

Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

100 copies printed

Beethovenstrasse 32, D-60325 Frankfurt am Main
Federal Republic of Germany

Printed in Germany by
Strauss Offsetdruck, D-69509 Mörlenbach

TABLE OF CONTENTS

HISTOIRE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

EN ITALIE,

DEPUIS LA RENAISSANCE DES LETTRES

JUSQU'À LA FIN DU DIX-SEPTIÈME SIÈCLE,

PAR GUILLAUME LIBRI.

TOME PREMIER.

A PARIS,

CHEZ JULES RENOUARD ET C^{ie}, LIBRAIRES,

RUE DE TOURNON, N° 6.

—

1838.

NOTE XII.

(PAGE 122)

Afin qu'on puisse comparer le texte de Mohammed ben Musa que M. Rosen a publié, avec les anciennes traductions latines qui se trouvent parmi les manuscrits de la bibliothèque du roi (*Supplément latin*, nº 49, f. 110. — *MSS. latins*, nº 7377 A. — *Résidu Saint-Germain, recueil de physique, astronomie et géométrie*, paq. 11, n 7, in-fol.), nous publions ici la partie de l'ouvrage du géomètre arabe qui est contenue dans ces manuscrits.

Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala incipit.

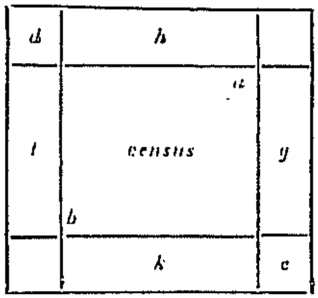
Hic post laudem dei et ipsius exaltationem inquit : postquam illud quod ad computationem est necessarium consideravi, repperi totum illud numerum fore. Omnemque numerum ab uno compositum esse inveni. Unus itaque inter omnes consistit numerum. Et inveni omne quod ex numeris verbis exprimitur esse quod unus usque ad decem pertransit. Decem quoque ab uno progreditur, qui postea duplicatus et triplicatus et cetera quemadmodum fit de uno, fiunt ex eo viginti et trigenta et ceteri usque quo compleatur centum. Deinde duplicatur centum et triplicatur quemadmodum ex decem, et fiunt ex eo ducenta et trecenta, et sic usque ad mille. Post hoc similiter reiteratur mille apud unumquemque articulum usque ad id quod comprehendi potest de numeris ultime: deinde repperi numeros qui sunt necessarii in computatione algebre et almuchabale secundum tres modos fore. Qui sunt radicum et census, et numeri simplicis non relati ad radicem nec ad censum. Radix vero que est unus eorum, est quicquid in se multiplicatur ab uno, et quod est super ipsum ex numeris, et quod est preter eum ex fractionibus. Census autem est quicquid aggregatur ex radice in se multiplicata. Sic numerus simplex est quicquid ex numeris verbis exprimitur absque proportione ejus ad radicem et ad censum. Ex his igitur tribus modis, sunt qui se ad invicem equantur. Quod est sicut si dicas : census equatur radicibus, et census equatur numero, et radices equantur numero. Census autem qui radicibus equatur est ac si dicas : census equatur quinque radicibus. Radix ergo census est quinque. Et census est viginti quinque. Ipse namque quinque suis radicibus equalis existit. Et sicut si dicas : tercia census equatur quattuor radicibus. Totus igitur census est duodecim radices qui est centum quadraginta quattuor. Et sicut si dicas, quinque census equantur decem radicibus. Unus igitur census duabus equatur radicibus. Ergo radix census est duo, et census est quattuor : similiter quoque quod fuerit majus censu aut minus ad unum reducetur censum. Et eodem modo fit ex eo quod ipsi equatur ex radicibus. Census autem qui numero equatur, est sicut cum dicitur : census equatur novem.

Ipse igitur est census et radix ejus est tres. Et sicut si dicas : quinque census equantur octoginta. Unus igitur census est quinta octoginta qui est sedecim. Et sicut si dicas : medietas census equatur decem octo. Ergo census equatur triginta sex et similiter omnis census augmentatus et diminutus ad unum reducitur censum. Et eodem modo fit de eo, quod ei equatur ex numeris. Radices vero que numeris equantur sunt sicut si dicas, radix equatur tribus, radix est tres. Et census qui est ex ea est novem. Et sicut si dicas quattuor radices equantur viginti. Una igitur radix equatur quinque : et similiter si dicas, medietas radicis equatur decem. Ergo radix est viginti. Et census qui est ex ea est quadraginta, hos preterea tres modos qui sunt radices et census et numerus inveni componi. Et sicut ex eis tria genera composita. Que sunt hec : census namque et radices equantur numero, et census et numerus equantur radicibus, et radices et numerus equantur censui. Census autem et radices que numero equantur sunt sicut si dicas : census et decem radices equantur triginta novem dragmis, cujus hec est significatio, ex quo censu cui additur equale decem radicum ejus aggregatur totum quod est trigenta novem. Cujus regula est ut medies radices que in hac questione sunt quinque. Multiplica igitur eas in se et fiunt ex eis viginti quinque : quos triginta novem adde, et erunt sexaginta quattuor. Cujus radicem accipias que est octo. Deinde minue ex ea medietatem radicum que est quinque. Remanet igitur tres qui est radix census. Et census est novem. Et si duo census aut tres aut plures aut pauciores nominentur, similiter reduc eos ad censum unum. Et quod ex radicibus aut numeris et cum eis reduc ad similitudinem ejus ad quod reduxisti censum. Quod est ut dicas: duo census et decem radices equantur quadraginta octo. Cujus est significatio quod cum quibuslibet duobus censibus additur equale decem radicum unius eorum, aggregantur inter quadraginta octo. Oportet itaque ut duo census ad unum reducantur censum. Novimus autem jam quod unus census duorum censuum est medietas. Reduc itaque quicquid est in questione ad medietatem sui. Et est sicut si dicatur census et quinque radices equales sunt viginti quattuor. Cujus est intentio quod cum cuilibet censui quinque ipsius radices adduntur, aggregantur in viginti quattuor. Media igitur radices et sunt duo et semis. Multiplica ergo eas in se et fient sex et quarta, adde his viginti quattuor et erunt trigenta et quarta. Cujus accipias radicem que est quinque et semis, ex qua minue radicum medietatem que est duo et semis. Remanet ergo tres qui est radix census et census est novem. Et si dicatur medietas census et quinque radices equantur viginti octo. Cujus quidem intentio est quod cum cujuslibet census medietati additur equale quinque radicibus ipsius, perveniunt inde viginti octo. Tu autem vis ut rem tuam reintegres donec ex ea unus perveniat census. Quod est ut ipsam duplices. Duplica ergo ipsam et duplica quod est cum ea ex eo quod equatur ei. Erit itaque, quod census et decem radices equantur quinquaginta sex. Media ergo radices, et erunt quinque, et multiplica eas in se et pervenient viginti quinque. Adde autem eas quinquaginta sex et fient octoginta unum.

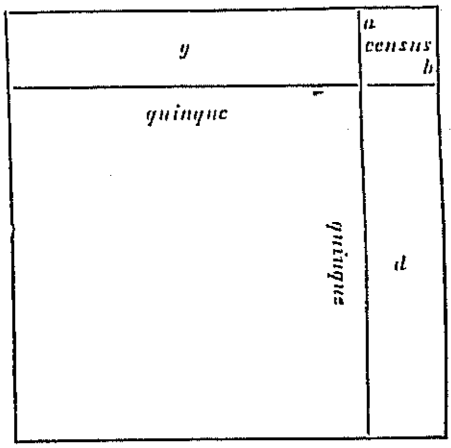
Cujus accipias radicem que est novem, et minuas ex ea mediatem radicum que est quinque, et remanent quattuor qui est radix census quem voluisti. Et census est sedecim cujus medietas est octo. Et similiter facias de unoquoque censuum, et de eo quod equat ipsum ex radicibus et numeris. Census vero et numerus qui radicibus equantur, sunt sicut si dicas : census et viginti una dragma equantur decem radicibus, cujus significatio est quod cum cuilibet censui addideris viginti unum, erit quod aggregabitur equale decem radicibus illius census. Cujus regula est ut medies radices ; et erunt quinque. Quas in se multiplica et perveniet viginti quinque : ex eo itaque minue viginti unum quem cum censu nominasti et remanebit quattuor, cujus accipies radicem, que est duo, quem ex radicum medietate, que est quinque, minue. Remanebit ergo tres qui est radix census quem voluisti, et census est novem. Quod si volueris addes ipsam medietati radicum et erit septem qui est radix census, et census est quadragenta novem. Cum ergo questio evenerit tibi deducens te ad hoc capitulum, ipsius veritatem cum additione experire. Quod si non fuerit, tunc procul dubio erit cum diminutione. Et hoc quidem unum trium capitulorum in quibus radicum mediatio est necessaria progreditur cum additione et diminutione. Scias autem quod cum medias radices in hoc capitulo et multiplicas eas in se, et fit illud quod aggregatur minus dragmis que sunt cum censu, tunc questio est impossibilis. Quod si fuerit eisdem dragmis equalis, tunc radix census est equalis medietati radicum absque augmento et diminutione. Et omne quod tibi eveniet ex duobus censibus aut pluribus aut paucioribus uno censu, reduc ipsum ad censum unum sicut est illud quod in primo ostendimus capitulo. Radices vero et numerus que censui equuantur, sunt sicut si dicas: tres radices et quattuor ex numeris eqantur censui uni. Cujus regula est ut medies radices que erant unus et semis. Multiplica ergo ipsas in se, et pervenient ex eis duo et quarta. Ipsum itaque quattuor dragmis adde et fiunt sex et quarta. Cujus radicem que est duo et semis assume: quam medietati radicum que est unus et semis adde; et erit quattuor qui est radix census. Et census est sedecim. Omne autem quod fuerit majus censu uno aut minus reduc ad censum unum. Hii ergo sunt sex modi, quos in hujus nostri libri principio nominavimus. Et nos quidem jam explanavimus eos et diximus quod eorum tres modi sunt in quibus radices non mediantur; quorum regulas et necessitates in precedentibus ostendimus. Illud vero quod ex mediatione radicum in tribus aliis capitulis est necessarium cum capitulis verificatis posuimus. Deinceps vero unicuique capitulo formam faciemus, per quam pervenitur ad causam mediationis. Causa autem est ut hic census et decem radices equantur triginta novem dragmis. Fit ergo illi superficies quadrata ignotorum laterum que est census quem et cujus radices scire volumus; que sit superficies *a*, *b*. unumquodque autem laterum ipsius est radix ejus. Et unumquodque latus ejus cum in aliquo numerorum multiplicatur, tunc numerus qui inde aggregatur est numerus radicum quarum queque est sicut radix illius superficiei. Postquam igitur dictum est quod cum censu sunt decem radices, accipiam quartam decem, que est duo et semis. Et faciam unicuique quarte cum uno laterum superficiei superficies: fuerint ergo cum superficie prima que est superficies *a. b.* quattuor superficies equales cujusque quarum longitudo est equalis radici *a. b.* et latitudo est duo et semis. Que sunt superficies *g. h. t. k.* Radici igitur superficiei equalium laterum est ignotorum, deest quod ex angulis quattuor est diminutum. Scilicet unicuique angulorum deest multiplicatio duorum et semis in duo et semis. Quod igitur ex numeris necessarium est adhuc ut superficiei quadratura compleatur, est multiplicatio duorum et semis in se quattuor. Et aggregatur ex summa illius totius viginti quinque. Jam autem scivimus quod prima superficies que est superficies census, et quattuor superficies que ipsam circumdant, que sunt decem radices, sunt ex numeris triginta novem. Cum ergo addiderimus ei viginti quinque, qui sunt ex quattuor quadratis qui sunt super angulos superficiei *a. b.* complebitur quadratura majoris superficiei que est superficies *d. e.* Nos autem jam novimus quod totum illud est sexaginta quattuor. Unum igitur laterum ejus est ipsius radix que est octo. Minuas itaque quod est equale quarte decem bis ab extremitatibus duabus lateris superficiei majoris que est superficies *d. e.* Et remanebit latus ejus tres: qui est equalis lateri superficiei prime que est *a. b.* et est radix illius census. Nos autem mediamus radices decem; et multiplicamus eas in se; et addimus eas numero qui est triginta novem; nisi ut compleatur nobis figure majoris quadratura cum eo quod deest quattuor angulis. Cum eo cujusque numeri quarta in se multiplicatur; et de-

17.

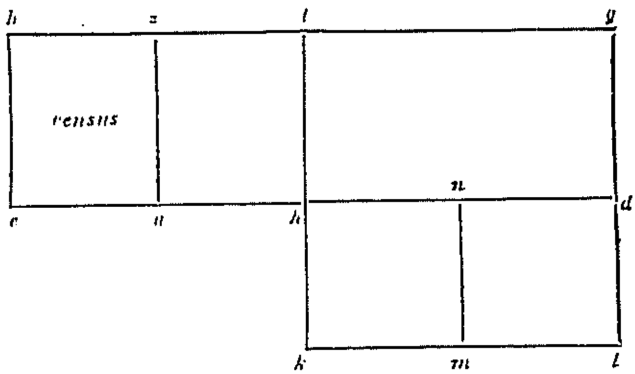
inceps quod inde pervenit in quattuor, erit quod perveniet multiplicationi medietati ejus in se equale. Sufficit igitur nobis multiplicatio medietatis radicum in se, loco multiplicandi quartam in se quattuor.

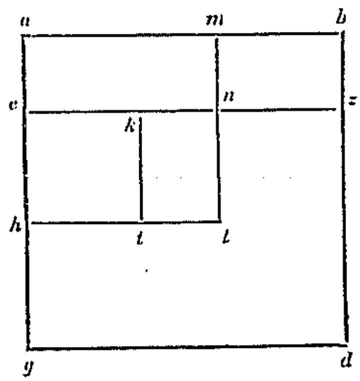


Est ejus preterea forma altera ad hoc idem perducens : que est superficies *a. b.* que est census. Volumus autem ut addamus ei equale decem radicibus ejus. Mediabimus igitur decem et erunt quinque. Et faciemus eas duas superficies super duas partes *a. b.* que sint due superficies *g.* et *d.* quarum cujusque longitudo sit equalis lateri superficiei *a. b.*, et latitudo ejus sit quinque, qui est medietas decem. Remanebit ergo nobis super superficiem *a. b.* quadratura quod fit ex quinque in quinque, qui est medietas decem radicum quas addidimus super duas partes superficiei prime. Scimus autem quod superficies prima est census et quod due superficies que sunt super duas ipsius partes, sunt decem radices ejus. Et hoc totum est triginta novem. Adhuc igitur ut majoris superficiei quadratura compleatur erit totum illud quod aggregatur sexaginta quattuor. Accipe ergo radicem ejus que est quattuor, unum laterum superficiei majoris quod est octo. Cum ergo minuerimus ex ea equale ei quod super ipsam addidimus quod est quinque, remanebit tres qui est latus superficiei *a. b.* que est census. Ipse namque est radix ejus, et census est novem. Census autem et viginti unum equantur decem radicibus.



Ponam itaque censum superficiem quadratam ignotorum laterum que sit superficies *a. b*, deinde adjungam ei superficiem equidistantium laterum cujus latitudo sit equalis uni lateri superficiei *a. b.* quod sit latus *g. d.* et superficies sit *g. a.* et ponam ipsam esse viginti unum; ergo longitudo duarum superficierum simul latus *e. d.* Nos autem jam novimus quod longitudo ejus est decem ex numeris. Omnis namque superficiei quadrate equalium laterum et angulorum, si unum latus multiplicatur in unum, est radix illius superficiei, et si in duo est due radices ejus. Postquam igitur jam dictum est quod census et viginti una dragma equantur decem radicibus, et scimus quod longitudo lateris *e. d.* est decem, quoniam latus *b. e.* est radix census, ergo dividam latus *e. d.* in duo media super punctum *h.*, et erigam super ipsum lineam *h. t.* Manifestum est itaque quod *h. d.* est equalis *h. e.* sic jam fuit nobis manifestum quod linea *h. t.* est equalis *b. e;* addam itaque linee *h. t.* quod sit equale superfluo *d. h.* super *h. t.* ut quadretur superficies quod sit linea *h. k.* Fit ergo *t. k.* equalis *t. g.* quoniam *d.h.* fuit equalis *t. g.* et pervenit superficies quadrata que est superficies *l. t.* Et ipsa est quod aggregatur ex multiplicatione medietatis radicum in se, que est quinque in quinque. Et illud est viginti quinque. Superficies vero *a. g.* fuit jam viginti unum qui jam fuit adjunctum ad censum. Post hoc faciamus super *h. k.* superficiem quadratam equalium laterum et angulorum, que sit superficies *m. h.* Et jam scivimus quod *h. t.* est equalis *e. b:* sic *e. b.* est equalis *a. e.* Ergo *h. t.* est equalis *a. e.* Sic *t. k.* jam fuit equalis *h. e.* Ergo *h. a.* reliqua est equalis reliqu· *h. k.* Sic. *h. k.* est equalis *m. n.* ergo *m. n.* est equalis *h. a.* Sic. *k. a.* fuit equalis *k. l.* et *h. k.* est equalis *m. k.* Ergo *m. l.* reliqua est equalis *h. t.* relique. Ergo superficies *l. n.* est equalis superficiei *t. a.* Jam autem novimus quod superficies *l. t.* est viginti quinque. Nobis itaque patet quod superficies *g. h.* addita sibi superficie *l. n.* est equalis superficiei *g. a.* que est viginti unum. Postquam ergo minuerimus ex superficiei *l. t.* superficiem *g. h.* et superficiem *n. l.* que est viginti unum, remanebit nobis superficies parva que est superficies *n. k.* Et ipsa est superfluum quod est inter viginti unum et viginti quinque. Et ipsa est quattuor, cujus radix est *h.k.* Sic ipsa est equalis *h. a.* et illud est duo. Sic *h. e.* est medietas radicum que est quinque. Cum ergo minuerimus ex ea *h. a.* que est duo remanebit tres qui est linea *a. e.* que est radix census. Et census est novem. Et illud est quod demonstrare voluimus.





Dictum est autem tres radices et quattuor dragme equantur censui. Ponam ergo censum superficiem quadratam ignotorum laterum scilicet equalium, et equalium angulorum que sit superficies *a. d.* Tota igitur hec superficies congregat tres radices et quattuor quos tibi nominavi. Omnis autem quadrate superficie unum latus in unum multiplicatum est radix ejus. Ex superficie igitur *a. d.* secabo superficiem *e. d.* et ponam unum latus ejus quod est *e. g.* tres, qui est numerus radicum. Ipsum vero est equale *z. d.* Nobis itaque patet quod superficies *e. b.* est quattuor qui radicibus est additus. Dividam ergo latus *e. g.* quod est tres radices in duo media super punctum *h.* Deinde faciam ex eo superficiem quadratam que sit superficies *e. t.* Et ipsa est quod fit ex multiplicatione medietatis radicum; que est unum et semis in se, et est duo et quarta. Post hoc addam linee *h. t.* quod fit equale *a. e.* que sit linea *t. l.* Fit ergo linea *h. l.* equalis *a. h.* et pervenit superficies quadrata que est superficies *h. m.* Jam autem manifestum fuit nobis quod linea *a. g.* est equalis *e. z.* et *a. h.* est equalis *e. n.* Remanet ergo *g. h.* equalis *n. z.* Sic *g. h.* est equalis *k. t.* Ergo *k. t.* est equalis *n. z.* Sic *m. n.* est equalis *t. l.* Superficies igitur *m. z.* fit equalis superficiei *k. l.* Jam autem scivimus quod superficies *a. z.* est quattuor qui est additus tribus radicibus. Fiunt ergo superficies *a. n.* et superficies *k. l.* simul equal superficiei *a. z.* que est quattuor. Manifestum est igitur quod superficies *h. m.* est medietas radicum que est unum et semis in se, quod est duo et quarta, et quattuor additi qui sunt superficies *a. n.* et superficies *k. l.* Quod vero ex eo aggregatur est sex et quarta, cujus radix est duo et semis, que est latus *h. a.* Jam autem remansit nobis ex latere quadrati primi quod est superficies *a. d.* que est totus census, medietas radicum que est unum et semis, et est linea *g. h.* Cum addiderimus super lineam *a. h.* que est radix superficiei *h. m.* quod est duo et semis lineam *h. g.* que est medietas radicum trium que est unum et semis, pervenit illud totum quattuor, quod est linea *a. g.* Et ipsa est radix census qui est superficies *a. d.* Et ipse est sedecim. Et illud est quod demonstrare voluimus. Inveni autem omne quod fit ex computatione in algebra et almuchabala impossibile esse quin perveniat ad unum sex capitulorum que retuli tibi in principio hujus libri.

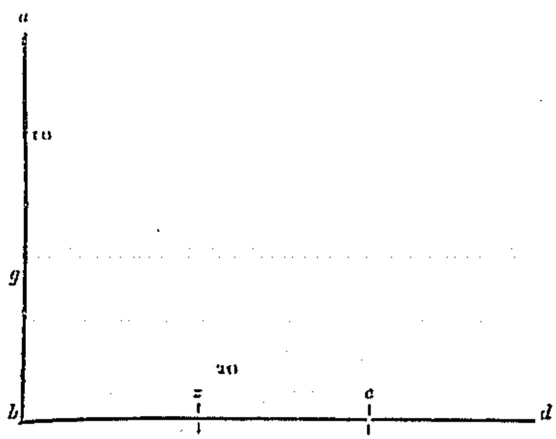
Capitulum multiplicationis.

Nunc quidem refferam tibi qualiter res multiplicentur que sunt radices alie sunt in alias cum fuerint singulares, et cum numerus fuerit cum eis, aut fuerit exceptus ex eis numerus, aut ipse fuerint excepte ex numero, et qualiter alie aliis aggregentur, et qualiter alie ex aliis minuantur. Scias itaque impossibile esse quin unus omnium duorum numerorum quorum unus in alterum multiplicatur, duplicetur secundum quantitatem unitatum que est in altero. Si ergo fuerit articulus, et cum eo fuerint unitates, aut fuerint unitates excepte ex eo, impossibile erit quin ejus multiplicatio quattuor fiat. Videlicet articuli in articulum et unitatum in unitates, et unitatum in articulum, et articuli in unitates. Quod si omnes unitates que sunt cum articulo fuerint addite aut diminute omnes, tunc quarta multiplicatio erit addita. Sin autem une earum fuerint addite et alie diminute, tunc quarta multiplicatio minuetur. Quod est sicut decem et unum in decem et duo. Ex multiplicatione ergo decem in decem fiunt centum. Et ex multiplicatione unius in decem fiunt decem addita. Et ex multiplicatione duorum in decem fiunt viginti addita. Et ex multiplicatione duorum in unum fiunt duo addita. Totum ergo illud est centum et triginta duo. Et cum fuerint decem uno diminuto in decem uno diminuto multiplicabis decem in decem et fient centum, et unum diminutum in decem et fient decem diminuta. Et unum diminutum iterum in decem, et fient decem diminuta. Unum quoque diminutum multiplicabis in unum diminutum, et fiet unum additum. Erit ergo totum illud octoginta unum. Quod si fuerint decem et duo in decem uno diminuto, multiplicabis decem in decem et fient centum, et unum diminutum in decem et erunt decem diminuta. Et duo addita in decem et erunt viginti addita, quod erit centum et decem. Et duo addita in unum diminutum, et erunt duo diminuta. Totum ergo illud erit centum et octo. Hoc autem non ostendi tibi, nisi ut per ipsum perducaris ad multiplicationem rerum aliarum scilicet in alias, quin cum eis fuerit numerus aut cum ipse excipiuntur ex numero, aut cum numerus excipitur ex eis. Cumque tibi dictum fuerit, decem dragme re diminuta, est enim rei significatio radix multiplicate in decem, multiplicabis decem in decem et fient centum, et rem diminutam in decem, et erunt decem res diminute, dico ergo quod sunt centum, decem rebus diminutis. Si autem dixerit aliquis, decem et res in decem, multiplica decem in decem et erunt centum, et rem addite in decem, et erunt decem res addite. Erit ergo totum centum et decem res. Quod si dixerit, decem et res in decem et rem : dic decem in decem faciunt centum. Et res addita in decem facit decem res additas, et res addita in rem additam, facit censum additum. Erit ergo totum centum et viginti res et census additus. Quod si quis dixerit decem re diminuta in decem re diminuta, dices decem in decem fiunt centum. Et res diminuta in rem diminutam fit census additus. Est ergo illud centum et census additus diminutis viginti rebus. Et similiter si dixerit dragma minus sexta in dragmam minus sexta, erit illud quinque sexte multiplicate in se, quod est viginti quinque partes triginta sex partium unius dragme. Regula vero ejus est ut multiplices dragmam in dragmam, et erit dragma, et sextam dragme diminutam in dragmam, et erit sexta dragme diminuta : et sextam diminutam in dragmam, res erit sexta diminuta. Fit ergo illud tertia dragme diminuta, et sextam diminutam in sextam diminutam, et erit sexta sexte addita. Totum ergo illud erit due tertie et sexta sexte. Si vero aliquis dixerit, decem, re diminuta, in decem et rem : dices decem in decem centum fiunt, et res diminuta in decem fit decem res diminute, et res in decem fit decem res addite. Et res diminuta in rem fit census diminutus. Est ergo illud centum dragme, censu diminuto. Si autem dixerit, decem re diminuta in rem, dices decem in rem, fiunt decem res. Et res diminuta in rem, fit census diminutus. Sunt ergo decem res, censu diminuto. Et si dixerit decem et res in rem decem diminutis, dices. Res in decem fit decem res, et res in rem fit census, et decem diminuta in decem, fiunt centum dragme diminute. Dico igitur quod est census centum diminutis, postquam cum eo oppositum fuerit. Quod ideo est quem projiciemus decem res diminutas cum decem rebus additis, et remanebit census centum dragmis diminutis. Si autem dixerit quis, decem dragme et medietas rei in medietatem dragme quinque rebus diminutis, dices : medietas dragme in decem dragmas facit dragmas quinque : et medietas dragme in medietatem rei facit quartam rei addite, et quinque res diminute in decem dragmas, fiunt quinquaginta res diminute. Et quinque res diminute in medietatem rei fiunt duo census et semis diminuti. Est ergo illud quinque dragme diminutis duobus censibus et semis, et diminutis quadraginta novem radicibus et tribus quartis radicis. Quod si aliquis dixerit, tibi decem et res in rem diminutis decem et est quasi dicat : res et decem in rem decem diminutis, dic ergo res in rem facit censum, et decem in rem fiunt decem res addite, et decem diminuta in rem fiunt decem res diminute, pretermittantur itaque, addita cum diminutis, et remanebit census. Et decem diminuta in decem fiunt centum diminu ex censu. Totum ergo illud est census diminutis centum dragmis. Et omne quod est ex multiplicatione additi et diminuti, sunt res diminute in additam rem, in postrema multiplicatione semper minuitur.

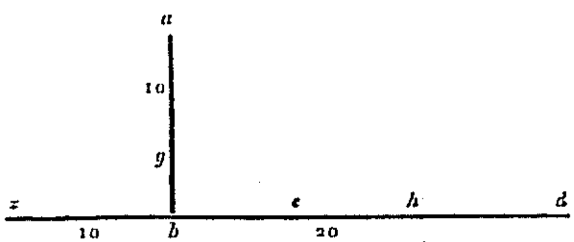
Capitulum aggregationis et diminutionis.

Radix ducentotum diminutis decem adjuncta ad viginti diminuta radice ducentorum est decem equaliter. Et radix ducentorum exceptis decem diminuta ex viginti excepta radice ducentorum, est triginta diminutis duobus radicibus ducentorum. Et due radices ducentorum sunt radix octingintorum : sic centum et census diminutis viginti radicibus, ad quem adjuncta sunt quinquaginta et decem radices diminutis duobus censibus, sunt centum et quinquaginta diminutis censu et decem radicibus. Ego vero illius causam in forma ostendam, si Deus voluerit. Scias itaque quod cum quamlibet census radicem notam sive surdam duplicare volueris, cujus duplicationis significatio est ut multiplices eam in duo, oportet ut multiplices duo in duo, et deinde quod inde pervenerit, in censum. Radix igitur ejus quod aggregatur est duplum radicis illius census. Et cum volueris triplum ejus, multiplicabis tres in tres, et postea quod inde pervenerit in censum. Erit ergo radix ejus quod aggregatur triplum radicis census primi. Et similiter quod additur ex duplicationibus, aut minuitur erit secundum hoc exemplum. Scias ergo ipsum quod si radicis census medietatem accipere volueris, oportet ut multiplices medietatem in medietatem, deinde quod pervenerit in censum. Erit ergo radix ejus quod aggregatur medietas radicis census. Et similiter si volueris tertiam aut quartam ejus aut minus aut plus, usquequo possibile est consequi, secundum diminutionem et duplicationem, verbi gratia : si enim volueris ut duplices radicem novem, multiplica duo in duo, postea in novem, est aggrega triginta sex, cujus radix est sex, qui est duplum radicis novem. Quod si ipsam volueris triplicare, multiplica tres in tres, postea in novem, et erunt octoginta unum, cujus radix est novem, qui est radix novem triplicata. Sin autem radicis novem medietatem accipere volueris, multiplicabis medietatem in medietatem et perveniet quarta, quam postea multiplicabis in novem, et erunt duo et quarta, cujus radix est unus et semis, qui est medietas radicis novem. Et similiter quod additur aut minuitur ex noto et surdo erit, et hic est ejus modus. Quod si volueris dividere radicem novem per radicem quattuor, divides novem, per quattuor, et duo et quarta, cujus radix est id quod pervenit uni. Quod est unus est semis. Quod si radicem quattuor per radicem novem volueris dividere, divide quattuor per novem et erunt quattuor none, cujus radix est id quod pervenit uni, que est due tertie unius. Sin vero duas radices novem per radicem quattuor dividere volueris, et absque hoc aliorum censuum, dupla ergo radicem novem secundum quod te feci noscere in operatione multiplicium, et quod aggregatur deinde per quattuor aut per quod volueris. Et quod ex censibus fuerit minus aut majus, secundum hoc exemplum operaberis per ipsum, si Deus voluerit. Quod si radicem novem in radicem quattuor multiplicare volueris, multiplica novem in quattuor, et erunt triginta sex. Accipe igitur radicem ejus que est sex, ipse namque est radix novem in radicem quattuor. Et similiter si velles multiplicare radicem quinque in radicem decem, multiplica quinque in decem, et acciperes radicem ejus, et quod inde aggregaretur esset radix quinque in radicem decem. Quod si volueris multiplicare radicem tertie in radicem medietatis, multiplica tertiam in medietatem, et erit sexta. Radix ergo sexte est radix tertie in medietatem. Sin autem duas radices novem in tres radices quattuor multiplicare volueris, perducas duas radices novem secundum quod tibi retuli, donec scias cujus census sit. Et similiter facias de tribus radicibus quattuor, donec scias cujus census sit. Deinde multiplica unum duorum censuum in alterum et accipe radicem ejus quod aggregatur. Ipsa namque est due radices novem in tres radices quattuor. Et similiter de eo quod ex radicibus additur aut minuitur secundum hoc exemplum facias. Cause autem radicis ducentorum diminutis decem, adjuncte ad viginti diminuta radice ducentorum, forma est linea *a. b.* Ipsa namque est radix ducentorum. Ab *a.* ergo ad punctum *g.* est decem, et residuum radicis incentorum est residuum linee *a. b.* quod est linea *g. b.* Deinde protrahas a puncto *b.* ad punctum *d.* lineam que sit linea vigenti. Ipsa namque est dupla linee *a. g.* que est decem. A puncto *b.* usque ad punctum *e.* quod sit equale linee *a. b.* que est radix ducentorum. Et residuum de vigenti sit a puncto *e.* usque ad punctum *d.* Et quia volumus aggregare quod remanet ex radice ducentorum post projectionem decem, quod est linea *g. b.* ad lineam *e. d.* que est vigenti diminuta radice ducentorum, et jam fuit nobis manifestum quod linea *a. b.* que est radix ducentorum est equalis linee *b. e.*; et quod linea *a. g.* que est decem est equalis linee *b. z.* et residuum linee *a. b.* que est linea *g. b.* est equale residuo linee *b. e.* quod est *z. e.* et addidimus super lineam *e. d.* lineam *z. e.* ergo manifestum est nobis quod jam minuitur ex linea *b. d.* que est viginti, equale linee *g. a.* qui est decem que est linea *b. z.* et remanet nobis linea *z. d.* que est decem. Et illud est quod demonstrare voluimus.

Causa vero radicis ducentorum exceptis decem diminute ex viginti excepta radice ducentorum, est alia cujus forma est linea *a. b.* que est radix ducentorum. Sic ab *a.* usque ad punctum *g.* sit decem, qui est notus. Protraham autem a puncto *b* lineam usque ad punctum *d.* quam ponam viginti, et ponam ut quod est *a. b.* usque ad punctum e. sit equale radici ducentorum, que est equalis linee *a. b.* Nobis vero jam



fuit manifestum quod linea *g. b.* est id quod remanet ex radice ducentorum post projectionem decem, et linea *e. d.* est id quod remanet ex viginti post rejectionem radicis ducentorum. Volumus itaque ut linea *g. b.* minuatur ex linea *e. d.* protraham ergo à puncto *d. b.* lineam ad punctum *z.* que sit equalis linee *a. g.* que est decem, fit ergo linea *z. d.* equalis linee *z. b.* et linee *b. d.* Sic jam fuit nobis manifestum totum illud fore triginta. Secabo itaque ex linea *e. d.* quod sit equale linee *g. b.* quod est linea *h. e.* Patet igitur nobis quod linea *h. d.* est id quod remanet ex tota linea *z. d.* que est triginta. Ostensum vero est quod linea *b. e.* est radix ducentorum et linea *z. b.* et *b. g.* est radix ducentorum. Et quia linea *e. h.* est equalis linee *g. b.* ergo manifestum est quod illud quod minuitur ex linea *z. d.* quod est triginta et due



radices ducentorum. Et due radices ducentorum sunt radix octingintorum. Et illud est quod demonstrare voluimus.

Centum ergo atque census exceptis viginti radicibus, quibus conjunguntur quinquaginta et decem radices exceptis duobus censibus non convenienti subjicitur forma, tribus generibus divisis, scilicet censibus radicibus et numero, neque cum eis quod eis equetur ut formentur. Nos tamen fecimus eis formam suam non sensibilem. Eorum vero necessitas verbis manifesta est, quod est quod jam scivimus quod apud te sunt centum et census exceptis viginti radicibus. Postquam ergo addidisti eis quinquaginta et decem radices facta sunt centum et quinquaginta et census exceptis decem radicibus; hae namque decem radices addite restaurant viginti radicum diminutarum decem radices. Remanent ergo centum et quinquaginta et census, exceptis decem radicibus. Sic cum centum fuit jam census. Postquam ergo minueris duos census exceptos de quinquaginta, preteribit census cum censu, et remanebit tibi census, fiet ergo centum et quinquaginta excepto censu, et excepto decem radicibus. Et illud est quod demonstrare voluimus.

Capitulum questionum.

Jam processerunt antea capitula numerationis et eorum modos sex questiones quas posui exempla sex capitulis precedentibus in principio hujus libri de quibus tibi dixi, quoniam impossibile est quin computatio algebre et almuchabale eveniat tibi ad aliquod capitulum eorum. Postea secutus sum illud ex questionibus cum eo quod intellectui propinquius fuit, per quod difficultas alleviabitur, et significatio facilior fiet si Deus voluerit.

Questio earum prima est : sicut si diceres, divide decem in duas partes, et multiplica unam duarum partium in alteram, deinde multiplica unam earum in se et sit multiplicatio ejus in se equalis, multiplicationi uni duarum sectionum in alteram quattuor.

Ejus vero regula est ut ponas unam duarum sectionum rem, et alteram sectionem ponas decem excepta re. Multiplica igitur rem in decem excepta re, et erunt decem res excepto censu. Deinde multiplicabis totum in quattuor quem dixisti. Erit ergo quod perveniet quadruplum multiplicationis unius duarum sectionum in alteram, erunt itaque quadraginta res, exceptis quattuor censibus. Postea multiplica rem in rem que est una duarum sectionum in se, et erit census qui est equalis quadraginta rebus exceptis quattuor censibus; deinde restaurabis quadraginta per quattuor census. Post hoc addes census censui, et erit quod quadraginta res erunt equales quinque censibus. Ergo unus census erit octo radices qui est sexaginta quattuor. Radix ergo sexaginta quattuor est una duarum sectionum multiplicata in se, et residuum ex decem est duo, qui est sectio altera. Jam ergo produxi hanc questionem ad unum sex capitulorum, quod est quod census equatur radicibus.

Questio secunda : divide decem in duas partes et multiplica decem in se, et sit quod aggregatur ex multiplicatione decem in se equale uni duarum sectionum multiplicate in se bis, et septem nonis vicis unius. Computationis vero hec regula est ut ponas unam duarum sectionum rem. Multiplica ergo eam in se, et fiet census, deinde in duo et septem nonas. Erunt ergo duo census et septem none census unius, deinde multiplica decem in se, et erunt centum. Est ergo ut centum sit equale duobus censibus, et septem nonis census unius. Reduc ergo totum illud ad censum unicum, qui est novem partes viginti quinque, quod est

18.

quinta et quattuor quintas quinte unius. Accipe ergo quintas centum et quattuor quintas quinte ipsius, que sunt triginta sex. Et ipse equantur censui, cujus radix est sex, qui est una duarum sectionum. Jam ergo produximus hanc questionem ad unum sex capitulorum. Quod est quod census equatur numero.

Questio tertia : divide decem in duas sectiones et divide unam duarum partium per alteram et pervenient quattuor. Cujus regula est ut ponas unam duarum sectionum rem, et alteram decem excepta re. Deinde dividas decem excepta re per rem ut perveniant quattuor. Jam autem scivisti quod cum multiplicaveris quod pervenit ex divisione in idem per quod divisum fuit, redibit census tuus quem divisisti. Sic perveniens ex divisione in hac questione, fuit quattuor, et id per quod divisum fuit, fuit res. Multiplica igitur quattuor in rem, et erunt quattuor res. Ergo quattuor res equantur censui quem divisisti, qui est decem excepta re. Restaura itaque decem per rem, et adde ipsam quattuor. Erit ergo quod decem equatur quinque rebus. Ergo res est duo. Jam ergo produxi hanc questionem ad unum sex capitulorum, quod est quod radices equantur numero.

Questio quarta : multiplica tertiam census et dragmam in quartam ejus et dragmam, et sit quod pervenit viginti. Cujus regula est ut tu multiplices tertiam in quartam, et erit quod perveniet medietas sexte census et dragmam in dragmam, et erit dragma addita, et tertiam rei in dragmam, et erit tertia radicis, et quartam rei in dragmam, et erit quarta radicis. Erit ergo illud medietas sexte census et tertia rei, et quarta rei, et dragma que equatur viginti dragmis. Projice ergo dragmam unam ex viginti dragmis et remanebunt decem et novem dragme, que equantur medietati sexte census et tertie et quarte radices. Reintegra ergo censum tuum. Ejus vero reintegratio est ut multiplices totum quod habes in duodecim, et pervenient tibi census et septem radices, que erunt equales ducentis et viginti octo. Media ergo radices et multiplica eas in se, que erunt duodecim et quarta et adde eas ducentis et viginti octo. Erit ergo illud ducenta et quadraginta et quarta. Deinde accipe radicem ejus que est quindecim et semis, ex qua minue medietatem radicum que est tres et semis. Remanet ergo duodecim qui est census. Jam ergo produximus hanc questionem ad unum sex capitulorum, quod est quod census et radices equantur numero.

Questio quinta : divide decem in duas partes, et multiplica unamquamque earum in se et aggrega eas, et perveniat in quinquaginta octo. Cujus regula est ut multiplices decem excepta re in se, et pervenient centum et census exceptis viginti rebus. Deinde multiplica rem in se et erit census. Postea aggrega ea et erunt centum nota et duo census exceptis viginti rebus, que equantur quinquaginta octo. Restaura ergo centum et duos census per res que fuerunt diminute, et adde eas quinquaginta octo, et dices centum et duo census equantur quinquaginta octo et viginti rebus. Reduc ergo ea ad censum unum, dices ergo quinquaginta et census equantur viginti novem et decem rebus. Oppone ergo per ea. Quod est ut tu projicias ex quinquaginta viginti novem. Remanet ergo viginti unum et census, que equantur decem rebus. Media ergo radices, et pervenient quinque, eas igitur in se multiplica, et erunt viginti quinque, projice itaque ex eis viginti unum, et remanebunt quattuor. Cujus radicem accipias que est duo. Minue ergo ipsam ex quinque rebus que sunt medietas radicum et remanet tres, qui est una duarum sectionum. Jam ergo produximus hanc questionem ad unum sex capitulorum, quod est census et numerus equantur radicibus.

Questio sexta : tertia census multiplicetur in quartam ejus et perveniat inde census, et sit augmentum ejus viginti quattuor. Cujus regula est quam tu nosti quod cum tu multiplicas tertiam rei in quartam rei pervenit medietas sexte census que est equalis rei et viginti quattuor dragmis. Multiplica ergo medietatem sexte census in duodecim ut census reintegretur et fiat census perfectus. Et multiplica et rem et viginti quattuor in duodecim et pervenient tibi ducenta et octoginta octo, et duodecim radices que sunt equales censui. Media ergo radices, et multiplica eas in se, quas adde ducentis et octoginta octo, et erunt omnia trecenta et viginti quattuor. Deinde accipe radicem ejus que est decem et octo, cui adde medietatem radicum, et fiet census viginti quattuor. Jam igitur produximus hanc questionem ad unum sex capitulorum, quod est numerus et radices equantur censui.

Quod si aliquis interrogans quesiverit et dixerit : divisi decem in duas partes, deinde multiplicavi unam earum in alteram et pervenerunt viginti unum. Tu ergo jam scivisti quod una duarum sectionum decem est res. Ipsam igitur in decem, re excepta, multiplica, et dicas : decem excepta re in rem sunt decem res, censu diminuto, que equantur viginti uno. Restaura igitur decem excepta re per censum, et adde censum viginti uni, et dic : decem res equantur viginti uni et censui. Radices ergo mediabis; et erunt quinque, quos in se multiplicabis, et perveniet viginti quinque. Ex eo itaque projice viginti unum, et remanet quattuor. Cujus accipe radicem que est duo, et minue eam ex medietate rerum. Remanet tres qui est una duarum partium.

Quod si dixerit : divisi decem in duas partes et multiplicavi unamquamque earum in se, et minui minorem ex majore, et remanserunt quadraginta; erit ejus regula ut multiplices decem excepta re in se, et pervenient centum et census, viginti rebus diminutis. Et multiplica rem in rem, et erit census. Ipsum ergo minue ex centum et censu exceptis vigenti rebus, que equantur quadraginta. Restaura ergo centum per viginti, et adde ipsum quadraginta. Habebis ergo quadraginta et viginti res que erunt equales, censui. Appone ergo per eas centum, projice quadraginta ex centum, remanent sexaginta que equantur viginti rebus. Ergo res equatur tribus, qui est una duarum partium.

Si autem dixerit : divisi decem in duas partes, et multiplicavi unamquamque partem in se, et aggregavi eas, et insuper addidi eis superfluum quod fuit inter utrasque sectiones antequam in se multiplicarentur, et pervenit illud totum quinquaginta quattuor. Regula itaque ejus est ut multiplices decem excepta re in se, et erit quod perveniet centum et census excep.

tis viginti rebus. Ex decem vero remansit res. Multiplica ergo ipsam in se, et erit quod perveniet census, deinde aggrega ea, et erit illud quod perveniet centum et duo census exceptis viginti rebus. Adde igitur superfluum quod fuit inter eas aggregato, quod est decem exceptis duabus rebus. Totum ergo illud est centum et decem et duo census exceptis duabus rebus, et exceptis viginti rebus que equantur quinquaginta quattuor dragmis. Cum ergo restaurabis, dices : centum et decem dragme et duo census equantur quinquaginta quattuor et viginti duabus rebus. Reduc ergo ad censum suum. Et dic : census et quinquaginta quinque equantur viginti septem dragmis et undecim rebus. Projice ergo viginti septem et remanebunt census et viginti octo qui equantur undecim rebus. Media igitur res et erunt quinque et semis. Et multiplica eas in se, et erunt triginta et quarta. Ex eis igitur minue viginti octo, et residui radicem sume, quod est duo et quarta. Est ergo unum et semis. Et minue eam ex medietate radicum, et remanebunt quattuor, qui est una duarum partium.

Quod si dixerit : divisi decem in duas partes et divisi hanc per illam, et illam per istam, et pervenerunt due dragme et sexta, hujus autem regula est, quam cum tu multiplicabis unamquamque partem in se, et postea aggregabis eas erit sicut cum una duarum partium multiplicatur in alteram, et deinde quod pervenit, multiplicatur in id, quod aggregatur ex divisione, quod est duo et sexta. Multiplica igitur decem excepta re in se et erunt centum et census, exceptis viginti rebus. et multiplica rem in rem et erit census. Aggrega ergo illud, et habebis centum et duo census exceptis viginti rebus, que equantur rei multiplicate in decem minus re, que est decem res excepto censu multiplicato in id quod pervenit ex duabus divisionibus que est duo et sexta. Erit ergo illud viginti et una res, et due tertie radicis, exceptis duobus censibus et sexta que equantur centum et duobus censibus, exceptis viginti rebus. Restaura ergo illud et adde duos census et sextam centum et duobus censibus, exceptis viginti rebus. Et adde viginti res diminutas ex centum, viginti uni, et duabus tertiis radicis. Habebis ergo centum et quattuor census et sextam census qui equantur quadraginta uni rei et duabus tertiis rei. Rebus ergo illud ad censum unum. Tu autem eam scivisti quod unus census quattuor censuum et sexte est quinta quinte. Totius igitur quod habes accipe quintam et quinta quinte, et habebis censum et viginti quattuor dragmas que equantur decem radicibus. Media ergo radices et multiplica eas in se, et erunt viginti quinque ex quibus minue viginti quattuor qui sunt cum censu, et remanebunt unum. Cujus assume radicem que est unus. Ipsam ergo minue ex medietate radicem que est quinque, et remanet quattuor, qui est una duarum sectionum. Et pervenit ex hoc ut cum illud quod pervenit ex divisione quarumlibet duorum rerum, quarum una per alteram dividitur, multiplicatur inde quod pervenit ex divisione alterius per primum, erit semper quod perveniet unum.

Sin vero dixerit : divisi decem in duas partes et multiplicavi unam duarum partium in quinque et divisi quod aggregatum fuit per alteram, deinde projexi medietatem ejus quod pervenit, et addidi ipsam multiplicato in quinque, et fuit quod aggregatum est quinquaginta dragme. Erit hec regula ut ex decem accipias rem, et multiplices eam in quinque. Erunt ergo quinque res divise per secundam que est decem excepta re, accepta ejus medietate. Cum ergo acceperis medietatem quinque rerum que est duo et semis, erit illud quod vis dividere per decem excepta re. He ergo due res et semis divise per decem, excepta re, equantur quinquaginta exceptis quinque rebus, quoniam dixit adde ipsam uni duarum sectionum multiplicate in quinque. Est ergo totum illud quinquaginta. Jam autem scivisti quod cum multiplicas quod pervenit tibi ex divisione in id per quod dividitur redit census tuus. Tuus autem census est due res et semis. Multiplica ergo decem, excepta re, in quinquaginta exceptis quinque rebus, erit itaque quod perveniet quinquaginta et quinque census exceptis centum rebus, que equantur duabus rebus et semis. Reduc ergo illud ad censum unum. Erit ergo quod centum dragme et census exceptis viginti rebus equantur medietati rei. Restaura ergo centum et adde viginti res medietati rei, habebis ergo centum dragmas et censum que equantur viginti rebus et medietati rei. Ergo media radices et multiplica eas in se, et minue ex eis centum, et accipe residui radicem, et minue eam ex medietate radicem que est decem et quarta. Et remanebit octo que est una duarum sectionum.

Quod si aliquis dixerit tibi : divisi decem in duas partes et multiplicavi unam duarum partium in se, et fuit quod pervenit equale alteri parti octuagies et semel, erit hec regula ut dicas decem : excepta re in se fient centum et census exceptis viginti rebus, que equantur octoginta uni rei. Restaura ergo centum, et adde viginti radices octoginta uni. Erit ergo quod centum et census erunt equales centum radicibus et uni radici. Media ergo radices et erunt quinquaginta et semis. Multiplica eas in se et erunt bis mille et quingente et quinquaginta et quarta. Ex eis itaque minue centum et remanebunt bis mille et quadringente et quinquaginta et quarta. Accipe igitur ejus radicem que est quadraginta novem et semis et minue eam ex medietate radicum que est quinquaginta et semis, et remanebit unus qui est una duarum sectionum.

Et si aliquis dixerit : duo census sunt inter quos sunt due dragme, quorum minorem per majorem divisi, et pervenit ex divisione medietas, dic ergo res. Et due dragme in medietatem que est id quod pervenit ex divisione, est medietas rei et dragme, que sunt equales rei. Projice ergo medietatem rei cum medietate et remanet dragma que est equalis medietati rei. Dupla ergo et dic ergo quod res est due dragme, et altera est quattuor.

Quod si dixerit tibi : divisi decem in duas partes, deinde multiplicavi unam earum in alteram et post divisi quod aggregatum fuit ex multiplicatione per superfluum quod fuit inter duas sectiones antequam una in alteram multiplicaretur, et pervenerunt quinque et quarta. Erit ejus regula ut accipias ex decem rem, et remanebunt decem, excepta re. Unum igitur multiplica in alterum et erunt decem radices excepto censu. Et hoc est quod pervenit ex multiplicatione unius eorum in alterum, deinde divide illud per superfluum, quod est inter ea, quod est decem exceptis duabus rebus. Pervenit ergo quinque et quarta. Cum ergo multiplicaveris quinque, et quartam in decem, exceptis duabus rebus, perveniet inde census multiplicatus qui est decem res excepto censu. Multiplica ergo quinque et quartam in decem exceptis duabus rebus, et erit quod perveniet quinquaginta due dragme et semis exceptis decem radicibus et semis, que equantur decem radicibus, excepto censu. Restaura ergo quinquaginta duo et semis per decem radices et semis, et adde eas decem radicibus excepto censu, deinde restaura eas per censum et adde censum quinquaginta duobus et semis, et habebis viginti radices et semis que equantur quinquaginta duabus dragmis et semis et censui. Operaberis ergo per eas secundum quod posuimus in principio libri, si Deus voluerit.

Si quis vero tibi dixerit, est census cujus quattuor radices multiplicate in quinque radices ipsius, reddunt duplum census, et augent super hoc triginta sex dragmas; hec regula est, quoniam cum tu multiplicas quattuor radices, fiunt viginti census qui equantur duobus censibus et triginta sex dragmis. Projice ergo ex viginti censibus duos census cum duobus censibus, ergo remanent decem et octo census qui equantur triginta sex. Divide igitur triginta sex per decem et octo, et perveniet duo qui est census.

Quod si dixerit : est census cujus tertia et tres dragme si auferantur, et postea multiplicetur, quod remanet in se, redibit census; erit ejus regula quoniam cum tu projeceris tertiam et tres dragmas, remanebunt ejus due tertie exceptis tribus dragmis, que est radix. Multiplica igitur duas tertias rei (id est census) exceptis tribus dragmis in se, due ergo tertie multiplicate in duas tertias fiunt quattuor none census. Et tres dragme diminute in duas tertias rei due radices sunt. Et tres diminute in duas tertias faciunt duas radices, et tres in tres fiunt novem dragme. Sunt ergo quattuor none census et novem dragme exceptis quattuor radicibus que equantur radici. Adde ergo quattuor radices radici et erunt quinque radices que erunt equales quattuor nonis census et novem dragmis. Cum ergo vis ut multiplices quattuor nonas donec reintegres censum tuum, multiplica igitur omne quattuor in duo et quartam et multiplica novem in duo et quartam, et erunt viginti dragme et quarta. Et multiplica quinque radices in duo et quartam, et erunt undecim res et quarta. Fac ergo per ea sicut est illud quod retuli tibi de mediatione radicum, si Deus voluerit.

Et si dixerit: dragma et semis fuit divisa per hominem et partem hominis, et evenit homini duplum ejus quod accedit parti; erit ejus regula ut dicas: homo et pars est unum et res. Est ergo quasi dicat dragma et semis dividitur per dragmam et rem, et perveniunt dragme due res. Multiplica ergo duas res in dragmam et rem, et pervenient duo census et due res que equantur dragme et semis. Reduc ea ad censum unum. Quod est ut accipias ex unaquaque re ipsius medietatem, et dicas census : et res equantur tribus quartis dragme. Appone ergo per ea secundum quod ostendi tibi.

Quod si dixerit tibi : divisi dragmam per homines, et pervenit eis res, deinde addidi eis hominem, et postea divisi dragmam per eos, et pervenit eis minus quam ex divisione prima secundum quantitem sexte dragme unius. Erit ejus consideratio, ut multiplices homines primos in diminutum quod est inter eos, deinde multiplices quod aggregatur per illud quod et inter homines primos et postremos, perveniet ego census tuus. Multiplica igitur numerum primorum hominum qui est res in sextam que est inter eos, et erit sexta radicis. Deinde multiplica illud in numerum hominum posteriorum qui est res et unum. Erit ergo quod sexta census et sexta radicis divisa per dragmam equatur dragme. Ergo reintegra illud, multiplica ipsum in sex, et erit quod habebis census et radix, et multiplica dragmam in sex, et erunt sex dragme. Census ergo et radix equantur sex dragmis. Media ergo radices, et multiplica eas in se, et adde eas super sex, et accipe radicem ejus quod aggregatur et minue ex ea medietatem radicis. Quod ergo remanet est numerus hominum primorum, qui sunt duo homines.

Capitulum conventionum negociatorum.

Scias quod conventiones negotiationis hominum, que sunt de emptione et venditione et cambitione et conductione et ceteris rebus, sunt secundum duos modos, cum quattuor numeris quibus interrogator loquitur. Qui sunt pretium et appretiatum secundum positionem, et pretium et appretiatum secundum querentem. Numerus vero qui est appretiatum secundum positionem, opponitur numero qui est pretium secundum querentem. Et numerus qui est pretium secundum positionem opponitur numero qui est appretiatum, secundum querentem. Horum vero quattuor numerorum tres semper manifesti et noti, et unus est ignotus, qui est ille qui verbo loquentis notatur per quartum, et de quo interrogator querit. Regula ergo hec est ut consideres tres numeros manifestos. Impossibile est enim quin duo eorum sint quorum unusquisque suo compari est oppositus. Multiplica ergo unumquemque duorum numerorum apparentium oppositorum in alterum et quod perveniet divide per alterum numerum, cui numerus ignotus opponitur. Quod ergo perveniet est numerus ignotus pro quo querens interrogat, qui etiam est oppositus numero per quem dividitur. Cujus exemplum secundum primum modum eorum, est ut querens interroget et dicat : decem cafficii sunt pro sex dragmis : quot ergo perveniet tibi pro quattuor dragmis? Sermo itaque ejus qui est decem cafficii, est numerus appreciati secundum positionem, et ejus sermo qui est sex dragme, est numerus ejus quod est pretium secundum positionem. Et ipsius sermo quo dicitur quantum te contigit, est numerus ignotus appretiati secundum querentem. Et ipsius sermo qui est per quattuor dragmas et numerus qui est pretium secundum querentem. Numerus ergo appretiati qui est decem callicii opponitur numero qui est pretium secundum querentem, quod est quattuor dragme. Multiplica ergo decem in quattuor qui sunt oppositi et manifesti, et erunt quadraginta; ipsum itaque per alium numerum manifestum divide, qui est pretium secundum positionem, quod est sex dragme. Erit ergo sex et due tertie qui est numerus ignotus, qui est sermo dicentis quantum. Ipse namque est appretiatum secundum querentem, et opponitur sex qui est pretium secundum positionem.

Modus autem secundus est sermo dicentis : decem sunt pro octo; quantum est pretium quattuor? aut forsitan dic, quattuor eorum quanti pretii sunt. Decem ergo est numerus appretiati secundum positionem. Et ipse opponitur numero qui est pretii ignoti, qui notatur per verbum illius quantum, et octo est numerus qui est pretium secundum positionem. Ipse namque opponitur numero manifesto qui est appretiati qui est quattuor. Multiplica ergo duorum numerorum manifestorum et oppositorum unum in alterum, sic quattuor in octo, et erunt triginta duo. Et divide quod perveniet per alium numerum manifestum, qui est apppretiati et est decem. Erit ergo quod perveniet tres et quinta, qui est numerus qui est appretiatum. Et ipse est oppositus decem per quem divisus fuit, et similiter erunt omnes conventiones negotiationis et earum regule.

Quod si aliquis querens interrogaverit et dixerit quemdam operarium conduxi in mense pro decem dragmis, qui sex diebus operatus est. Quantum ergo contigit eum? Tu autem jam scivisti quod sex dies sunt quinta mensis, et quod illud quod ipsum contingit ex dragmis est secundum quantitatem ejus quod operatus est ex mense. Ejus vero regula est, quod mensis est triginta dies quod est appretiatum secundum positionem, et sermo ejus qui est decem est pretium secundum positionem. Ejus vero sermo qui est sex dies, est appretiatum secundum querentem, Et sermo ejus quantum contigit, est pretium secundum querentem. Multiplica ergo pretium secundum positionem, quod est decem, in appretiatum secundum querentem, quod est ei oppositum et est sex, et pervenient sexaginta. Ipsum ergo divide per triginta, qui est numerus qui est appretiatum secundum positionem. Erit ergo illud dragme, quod est pretium secundum querentem. Et similiter sunt omnia quibus homines inter se conveniunt in negotiatione, secundum cambium et mensurationem et ponderationem.

Liber hic finitur. In alio tamen repperi hec interposita suprascriptis.

Quod si quis dixerit tibi : divisi decem in duas partes, et multiplicavi unam duarum sectionum in se, et fuit quod pervenit equale alteri octuagies et semel, erit ejus regula ut dicas : decem excepta in se fiunt centum et census exceptis viginti rebus que equantur octoginta uni rei. Restaura ergo centum et adde viginti radices octuaginta uni et erunt centum et census, que erunt equales centum et uni radici. Radices ergo mediabis et erunt quinquaginta et semis. Multiplica ergo eas in se, et erunt bis mille et quingente et quinquaginta et quarta. Ex quibus minue centum, et remanebunt bis mille et quadringinta et et quarta. Hujus itaque accipe radicem, que est quadraginta novem et semis, quam minuas ex medietate radicum, que est quinquaginta et semis, et remanebit unum, qui est una duarum sectionum.

Si autem aliquis dixerit : divisi decem in duas partes et multiplicavi unam duarum partium in decem et alteram in se, et fuerunt equales, erit hec regula ut multiplices rem in decem, et erunt decem radices, deinde multiplica decem excepta re in se, et erunt centum et census exceptis viginti rebus que equantur decem radicibus. Oppone ergo per eas.

Quod si dixerit : due tertie quinte census septime radicis ipsius sunt equales, tota radix equatur quattuor quintis census et duabus tertiis quinte ipsius, qua est quattuordecim partes de quindecim, erit hujus regula ut multiplices duas tertias quinte in septem ut radix compleatur, due vero tertie quinte sunt due partes de quindecim. Multiplica igitur quindecim in se et erunt ducenta et viginti quinque, et quattuordecim in se et erunt centum et nonaginta sex. Minue igitur ex ducentis viginti quinque duas tertias quinte ipsius que est triginta, et erit pars de quindecim, quam dividas per septimam diminutam ex centum nonaginta sex que est viginti octo, et perveniet unum et quarta decima unius que est media septima, si est radix census.

Si autem dixerit : multiplicavi censum in quadruplum ipsius, et pervenerunt viginti : erit ejus regula ut multiplices ipsum in se pervenit quinque. Ipse namque est radix quinque.

Quod si dixerit : est census quem in sui tertiam multiplicavi, et pervenit decem; erit ejus consideratio, quoniam cum tu multiplicas ipsum in se pervenit triginta : dic ergo quod census est radix triginta.

Si dixerit : est census quem in quadruplum ipsius multiplicavi, et pervenit tertia census primi, erit ejus regula, quoniam si tu multiplicaveris ipsum in duodecuplum ipsius, perveniet quod erit equale censui : quod est medietas sexte in tertiam.

Quod si dixerit : est census quem multiplicavi in radicem ipsius, et pervenit triplum census primi, erit ejus consideratio, quoniam cum tu multiplicas radicem census in tertiam ipsius, pervenit census : dic igitur quod istius census tertia est radix ejus. Et ipse est novem. Si vero dixerit : est census cujus tres radices in ipsius quattuor radices multiplicavi et pervenit census et augmentum quadraginta quattuor, erit regula hujus : quoniam cum tu multiplicas quattuor radices in tres radices fiunt duodecim census, qui sunt equales censui, et quadraginta quattuor dragmis. Ex duodecim igitur censibus, projice censum unum; remanet ergo undecim census equales quadraginta quattuor : divide itaque quadraginta quattuor per undecim, et perveniet unus census qui est quattuor.

Et similiter si dixerit : est census cujus radix in quattuor radices ejus multiplicata reddit triplum census et augmentum quinquaginta dragmarum; erit ejus regula, quoniam radix una in quattuor radices multiplicata facit quattuor census qui equantur triplo censui illius radicis, et quinquaginta dragmas. Ergo projice tres census ex quattuor censibus, et remanebit census qui erit equalis quinquaginta dragmis. Ipse enim est census; cum ergo multiplicabis radices quinquaginta in radices quattuor, quinquaginta perveniet triplum census, et augmentum quinquaginta dragmarum.

Quod si dixerit : tibi est census cui addidi viginti dragmas, et fuit quod pervenit equale duodecim radicibus census, erit ejus regula, quoniam dicis quod census et viginti equantur duodecim radicibus : ergo media radices et multiplica eas in se, et minue ex eis viginti dragmas, et assume radicem ejus quod remanet. Ipsam ergo ex medietate radicum que est sex minue. Quod igitur remanet est radix census, quod est duo, et census et quattuor.

Si vero dixerit : multiplicavi tertiam census in quartam ipsius, et rediit census : erit ejus regula : quoniam cum multiplicas tertiam rei in quartam rei, pervenit medietas sexte census que equatur rei. Ergo census est duodecim res, et ipse et census.

Quod si tibi dixerit : est census cujus tertiam et dragmam multiplicavi in quartam ipsius et duas dragmas, et rediit census, et augmentum tredecim dragmarum erit ejus consideratio ut multiplices tertiam rei in quartam rei, et perveniet medietas sexte census, et dragmam in quartam rei, et perveniet quarta rei, et duas dragmas tertiam rei, et pervenient due tertie rei, et dragmam in duas dragmas et erunt due dragme. Erit ergo totum illud medietas sexte census et due dragme; et undecim partes duodecim ex radice, que equantur radici et tredecim dragmis. Projice ergo duas dragmas ex tredecim et remanebunt undecim. Et projice undecim partes ex radice, et remanebit medietas sexte radicis, et undecim dragme qui equantur medietati sexte census. Ipsum ergo reintegra quod est ut ipsum in duodecim multiplices et multiplices omne quod est cum eo in duodecim. Perveniet ergo quod census equatur centum et triginta duabus dragmis et radici. Oppone ergo per ea.

Quod si dixerit est census cujus tertiam et quartam projeci, et insuper quattuor dragmas, et multiplicavi quod remansit in se, et quod pervenit fuit equale censui, et augmento duodecim dragmarum. Hujus regula erit, ut accipias rem et auferas tertiam et quartam ex eo, et remanebunt quinque duodecim partes rei. Et minue ex eis quattuor dragmas, et remanebunt quinque duodecime partes rei exceptis quattuor dragmis. Eas igitur in se multiplica; erunt ergo quinque partes in se multiplicate, viginti quinque partes centesime quadragesime quarte census. Postea multiplica quattuor dragmas exceptas in quinque partes duodecimas rei duabus vicibus, et erunt quadraginta partes, quarum queque duodecim sunt res una, et quattuor dragme diminute in quattuor fiunt sedecim dragme addite, fiunt ergo quadraginta partes tres radices et tertia radicis diminute. Pervenient ergo tibi viginti quinque partes centesime quadragesime quarte census, et sedecim dragme, exceptis tribus radicibus, et tertiam que equantur radici, et duodecim dragmis. Per eas ergo oppone, projice igitur duodecim ex sedecim, et remanent quattuor dragme, et adde tres radices et tertiam radicis, et pervenient tibi quattuor radices et tertia radicis; que equantur viginti quinque partibus centesimis quadragesimis quartis census, et quattuor dragmis. Oportet igitur ut censum tuum reintegres. Ipsum ergo multiplica in quinque et decem, et novem partes vigesimas quintas donec reintegretur, et multiplica quattuor dragmas tres in quinque et decem et novem partes. Erunt ergo viginti dragme et per una vigesima quinta. Et multiplica quattuor radices et tertiam in quinque et decem et novem partes vigesimas quintas. Erunt ergo viginti quattuor radices et viginti quattuor partes vigesimas quintas radicis. Media ergo radices. Erunt ergo duodecim radices, et duodecim partes vigesime quinte. Multiplica ergo eas in se, et erunt centum et quinquaginta quinque et quadringente et sexaginta novem partes sexcentesime et vigesime quinte. Minue ergo ex eis viginti tres et partem vigesimam quintam que est cum censu, et remanebunt centum et triginta duo et quadraginte et quadringinta quattuor partes sexcentesime et vigesime quinte. Ejus itaque accipe radicem que est undecim et tredecim partes vigesime et quinte. Ipsam ergo medietati radicum que est duodecim et duodecim partes vigesime quinte adde. Erit ergo illud viginti quattuor, qui est census quem queris.

Si vero dixerit: est census quem in duas tertias multiplicavi et pervenit quinque: erit ejus consideratio ut multiplices rem aliquam in duas tertias rei et sint due tertie census equales quinque. Ipsam ergo reintegra per equalitatem medietatis ipsius, et adde supra quinque ipsius medietatem, et habebis censum equalem septem et semis. Radix ergo ejus est res quam multiplicabis in duas tertias et perveniet quinque.

Quod si dixerit tibi : duo census sunt inter quos sunt due dragme, quorum minorem per majorem divisi, et evenit ex divisione medietas. Erit ejus regula ut multiplices rem et duas dragmas in id quod ex divisione pervenit quod est medietas, et erit quod perveniet medietas rei et dragma que equantur rei. Projice ergo medietatem cum medietate, remanet dragma que equantur medietati rei. Duplica eas. Ergo habebis rem que equatur duabus dragmis, et ipsa est unus duorum censuum. Et alter census est quattuor.

Si autem dixerit : multiplicavi censum in tres radices, et pervenit quintuplum census ; quod est quasi dixisset multiplicavi censum in radicem suam, et multiplicavi censum in radicem suam, et fuit quod pervenit equale censui et duabus tertiis. Ergo radix et census est due dragme et septem none.

Quod si dixerit tibi : est census cujus projeci tertiam, deinde multiplica residuum in tres radices census primi, et rediit census primus. Erit ejus regula : quoniam cum tu multiplices totum censum ante projecionem sue tertie in tres radices ejus, pervenit census et semis, quoniam due tertie ejus multiplicate in tres radices ejus faciunt censum. Ergo ipse totus multiplicatus in tres radices ejus, est census et semis.

Ipse ergo totus multiplicatus in radicem unam redit census medietatem. Ergo radix census est medietas. Et census est quarta. Tertie ergo census due sunt sexta. Et tres radices census est dragmam et semis. Quotiescumque igitur multiplicas sextam in dragmam et semis, pervenit quarta que est census tuus.

Sin autem dixerit, est census cui abstuli quattuor radices, deinde accepi tertiam residui, que fuit equalis quattuor radicibus : census igitur est ducenta et quinquaginta sex : erit ejus regula. Quia enim scis quod tertia ejus quod remanet est equale quattuor radicibus ejus, et sic illud quod remanet est equale duodecim radicibus. Ergo adde quattuor radices quas prius abstulisti, et erit sedecim radices. Ipse enim est radix census.

Quod si dixerit est census de quo radicem suam projeci et addidi radici, radicem ejus quod remansit, et quod pervenit fuit due dragme. Ergo hec radix census et radix ejus quod remansit, fuit equale duabus dragmis. Projice ergo ex duabus dragmis radicem census. Erunt itaque due dragme, excepta radice, in se multiplicate. Quattuor dragme et census, exceptis quattuor radicibus, que equantur censui radice diminuta. Oppone ergo per eas. Et ergo census et quattuor dragme que equantur censui et tribus radicibus. Projice ita censum cum censu, et remanebunt tres radices equales quattuor dragmis. Ergo radix equatur dragme et tertie, et census est dragma et septem none dragme unias.

Et si dixerit : est census ex quo projeci tres radices suas, deinde residuum in se multiplicavi et pervenit census. Jam ergo scis quod illud quod remanet est et radix, et quod census est quattuor radices, et ipse est sedecim dragme.

Si quis autem tibi dixerit : multiplicavi censum in duas tertias ipsius et pervenit quinque : erit ejus regula, quoniam cum multiplicas ipsum in se, pervenit septem et semis. Multiplica igitur duas tertias radicis septem et semis, quod est ut multiplices duas tertias in duas tertias, perveniet ergo quattuor none. Quattuor ergo none multiplicate in septem et semis sunt tres et tertia. Ergo radix trium et tertia, est due tertie radicis septem et semis. Multiplica igitur tres et tertiam in septem et semis, et pervenient viginti-quinque dragme, cujus radix est quinque.

Parmi les manuscrits de la bibliothèque royale, qui contiennent l'ouvrage précédent et que nous avons cités au commencement de cette note, il en est un (*Supplément latin*, n° 49 in-folio) intitulé *Mathematica*, qui mérite une attention particulière. Ce manuscrit, sur lequel nous aurons l'occasion de revenir souvent, a appartenu à Boulliau et contient un grand nombre de pièces scientifiques intéressantes. Voici le catalogue de ces pièces tel qu'il se trouve au commencement de ce volume.

In isto volumine sunt infrascripti libri, imprimis :

Liber Theodosii de speris, et habet partes tres, f. 1, 5, 13.
Liber Autoloci de spera mota, f. 19.
Liber Esculei de ascensionibus, f. 22.

Cordam per archum et archum per cordam invenire, f. 23.

Liber quem edidit Thebit, filius Chore, de his quæ indigent expositione antequam legatur Almaghestus, f. 24.

Liber Theodosii de locis in quibus morantur homines, f. 25.

Liber Arsamitis de mensura circuli, f. 29.

Epistola Abuiafar, Ameti filii Josephy, de arcubus similibus, f. 30.

Liber de quinque essentiis quem Jacob Alchildus, filius Ysaac, compilavit ex dictis Aristotelis, f. 32.

Liber Miley de figuris sphericis : sunt tres tractatus, f. 33, 46, 49.

Verba filiorum Moysi, filii Sechir, 1. Maumeti Hameti Hasen, f. 55.

Epistola Ameti, filii Josephy, de proportione et proportionalitate, f. 64.

Liber Jacob Alkindi de causis diversitatum aspectus et dandis demonstrationibus geometricis super eas, f. 75.

Tractatus Euclidis (immo Ptolemæi) de speculis, f. 82.

De exitu radiorum et conversione eorum, f. 83.

Sermo de speculis, editus a Tideo, filio Theodori, f. 84.

Principia Apollonii de pyramidibus, f. 86.

Liber de aspectibus Euclidis, f. 89.

Liber Abaci super decimum Euclidis, f. 93.

Liber Maumeti, filii Moysi Alchoarismi, de algebra et almuchabala, f. 111.

Liber Abhabuchri qui dicebatur Deus, de mensuratione terrarum, translatus a magistro Ghirardo de Cremona, f. 117.

Liber Asaidi Abuochmi, f. 126.

Liber Aderameti, f. 126.

Liber augmenti et diminutionis, vocatus numeratio divinationis (id est positione falsa), quem Abraham composuit, f. 127.

Liber Jacob Alkindi philosophi, de gradibus, f. 135.

Tractatus Thebit, filii Chore, in motu accessionis et recessionis, f. 141.

Liber Alpharabii de scientiis, translatus a magistro Ghirardo predicto, f. 144.

Liber Noe de hortis et plantationibus, f. 152.

Forma tabularum et ordinis earum et nominationis mensuum in capitibus suis et nominationis mansionum in eis, f. 153.

TRATTATI

D' ARITMETICA

PUBBLICATI

DA BALDASSARRE BONCOMPAGNI

SOCIO ORDINARIO DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI,
E SOCIO CORRISPONDENTE DELL'ACCADEMIA REALE
DELLE SCIENZE DI TORINO,
DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI,
E DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA

I.

ALGORITMI DE NUMERO INDORUM.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE
in Via Lata N.° 211.
1857.

(1)

I.

ALGORITMI DE NUMERO INDORUM.

(Biblioteca dell'Università di Cambridge, Codice manoscritto contrassegnato « *Ii*. 6. 5 » carte 102, *recto* — 109, *verso*).

DIXIT algoritmi: laudes deo rectori nostro atque defensori dicamus dignas, que et debitum ei reddant, et augendo multiplicent laudem, deprecemurque eum ut nos dirigat in semita rectitudinis et ducat in uiam ueritatis, et ut auxilietur nobis super bona uoluntate in his que decreuimus exponere ac patefacere de numero indorum per .ix. literas, quibus exposuerunt uniuersum numerum suum causa leuitatis atque abreuiationis, ut hoc opus scilicet redderetur leuius querenti arithmeticam, idest numerum tam maximum quam exiguum, et quicquid in eo est ex multiplicatione et diuisione, collectione quoque ac dispersione et cetera. car. 102 *recto*.

Dixit algoritmi: Cum uidissem yndos constituisse .ix. literas in uniuerso numero suo, propter dispositionem suam quam posuerunt, uolui patefacere de opere quod fit per eas aliquid quod esset leuius discentibus, si deus uoluerit. Si autem indi hoc uoluerunt, et intentio eorum in his .ix. literis fuit causa que mihi patuit, deus direxit me ad hoc. Si uero alia de causa, preter eam quam ego exposui, hoc fecerunt per hoc quod ego exposui, eadem causa certissime et absque ulla dubitatione poterit inueniri. Leuiterque patebit aspicientibus et discentibus.

Fecerunt igitur .ix. literas, quarum figure sunt he .... (1). est quoque diuersitas inter homines in figuris earum: fit autem hec diuersitas in figura quinte litere et sexte, septime quoque

(1) La lacuna indicata con quattro punti nelle linea 25 della presente pagina trovasi anche nel sopraccitato Codice *Ii*. 6. 5 della Biblioteca dell' Università di Cambridge (carta 102 *recto*, lin. 18).

1

et octaue. Set in hoc nullum impedimentum est. Sunt enim note signantes numerum, et he sunt figure in quibus est illa diuersitas .... (1). Et iam patefeci in libro algebre et almucabalah, idest restaurationis et oppositionis, quod uniuersus numerus sit compositus, et quod uniuersus numerus componatur super unum. Vnum ergo inuenitur in uniuerso numero; et hoc est quod in alio libro arithmetice dicitur. Quia unum est radix uniuersi numeri, et est extra numerum. Radix numeri est, quare per eum inuenitur omnis numerus. Extra numerum uero est, quare inuenitur per se, idest absque alio aliquo numero. Reliquus autem numerus sine uno inueniri non potest. Cum enim unum dicis, inuentione sui non indiget alio numero. Reliquus autem numerus indiget indiget (*sic*) uno: quare non potes dicere duo uel tria, nisi precedat unum. Nichil aliud est ergo numerus, nisi unitatum collectio; et hoc quod diximus non potes dicere duo uel tria, nisi precedat unum:
car. 102 verso. non de uoce diximus, ut ita dicam, set de re. Non enim | possunt esse duo uel tria, si unum auferatur. Vnum uero potest esse absque secundo uel tercio. Igitur nichil aliud sunt duo, nisi unius duplicitas uel geminatio: et similiter tria nichil aliud sunt, nisi eiusdem unitatis triplicatio: sic de reliquo numero intellige. Set nunc redeamus ad librum.

Inueni, inquid algorizmi, omne quod potest dici, ex numero, et esse quicquid excedit unum usque in .ix., idest quod est inter .ix. et unum, idest duplicatur unum et fiunt duo; et triplicatur idem unum, fiuntque tria, et sic in ceteris usque in .ix. De inde ponuntur .x. in loco unius, et duplicantur .x. ac triplicantur, quemadmodum factum est de uno, fiuntque ex eorum duplicatione .xx., ex triplicatione .xxx., et ita usque ad .xc. Post hec redeunt .c. in loco unius, et

(1) La lacuna indicata con quattro punti nella linea terza della presente pagina trovasi anche nel sopraccitato Codice *Ii.* 6. 5. (carta 102 *recto*, lin. 22).

duplicantur ibi atque triplicantur, quemadmodum factum est de uno et .x.; efficiunturque ex eis .cc. et .ccc. et cetera usque in .DCCCC. Rursum ponuntur mille in loco unius; et duplicando et triplicando, ut diximus, fiunt ex eis .II. milia, et .III. et cetera usque in infinitum numerum, secundum hunc modum. Et inueni quod operati sunt yndi ex his differentiis. Quarum prima est differentia unitatum, in qua duplicatur et triplicatur quicquid est inter unum et .IX. Secunda differentia decenorum, in qua duplicatur uel triplicatur quicquid est a .x. in nonaginta. Tercia differentia centenorum, in qua duplicatur uel triplicatur quicquid est a .c. in .DCCCC. Quarta uero est differentia milium, in qua duplicatur ac triplicatur quicquid est a mille in .IX. M. Quinta differentia est .x̄. hoc modo: quocienscumque ascenderit numerus, adduntur differentie: erit dispositio numeri ita: Omne unum quod fuerit in superiora (*sic*) differentia, erit in inferiori que est ante ipsam .x.; et quod fuerit .x. inferiori, erit unum in superiori que precedit eam; et erit inicium differentiarum in dextera scriptoris: et hec erit prima earum, et ipsa posita est unitatibus. Cum autem ponerentur .x. in loco unius, et fierent in secunda differentia, essetque figura eorum figura unius, necesse fuit eis figura decenorum, eo quod similis esset figure unius, ut scirent per eam quod essent .x. Proposuerunt igitur ei unam differentiam, et posuerunt in ea circulum paruulum in similitudine .o. litere, ut per hoc scirent quod differentia unitatum esset uacua, et nichil numeri esset in ea preter circulum paruulum, quem diximus occupare eam: et ostenditur quod numerus, qui est in sequenti differentia, esset decenis, et quod hec esset differentia secunda que est differentia decenorum. Et posuerunt post circulum in predicta differentia secunda quicquid uoluerunt ex numero decenorum de hoc quod est inter .x. et .xc., et he sunt figure decenorum: figura .x. est car. 103 recto. hec .... Figura .xx .... (1). Et similiter figura .xxx. est ita, | et ita usque ad .ıx. : erit scilicet circulus in prima differentia, et caracter pertinens ad ipsum numerum in secunda differentia. Hoc autem sciendum est, quod caracter qui sic in prima differentia, unum; in secunda sic .x.; in tercia .c., atque in quarta .ī. Et similiter qui sic in prima differentia duo; in secunda sic .xx., et in tercia .cc., et in quarta .iī. et sic de ceteris intellige. Nos autem redeamus ad librum.

Post differentiam decenorum sequitur sequitur (*sic*) differentia centenorum, in qua duplicatur ac triplicatur quicquid est a .c. in .dcccc.; et eius figura est sicut figura unius in tercia differentia posita ita .100.; et figura ducentorum est sicut figura duorum posita similiter in tercia differentia ita .200.: figura quoque tercentorum est figura trium posita in tercia differentia ita .300, et sic usque ad nongenta. Hac quoque sequitur differentia milium, in qua similiter duplicatur et triplicatur quicquid est a mille in .īx. Cuius figura est sicut figura unius in quarta differentia posita ita .1000: figura duorum milium est sicut figura duorum in quarta differentia posita ita. 2000. et ita usque ad ıx. milia: ponuntur autem in differentia quarta ante caracterem tres circuli, ut ostendatur, quod sit in quarta differentia, sicut positus est in secunda differentia unius, et in tercia duo, ut ostenderetur quod essent differentie decenorum uel centenorum: et hoc fit cum non fuerit ante ipsum numerum alius numerus in eadem differentia. Si autem fuerit cum numero, qui ponitur in his differentiis, aliquis numerus infra eum, debet poni in ea differentia que sibi debetur. Verbi gratia: si fuerit cum .x. aliquis numerus de his qui sunt infra eum, utpote .xı, uel xıı., ponuntur ita .ıı. : in prima scilicet differentia, ubi positus erat circulus, ponatur unus, et

(1) Le due lacune, ciascuna delle quali è indicata con quattro punti nella prima linea della presente pagina, trovansi anche nel sopraccitato Codice *Ii*. 6. 5. (carta 102 *verso*, lin. 33).

in secunda differentia ponatur etiam unum quod sic .x. Similiter si fuerit cum .c. alius numerus de his qui sunt infra eum, ponatur in differentia que sibi debetur. Quod ostendamus sub quodam exemplari, et dicamus quod esset numerus .ccc. xxv. Quem cum uellemus ponere in suis differentiis, posuimus ita. Incepimus a dextera scriptoris, et posuimus in prima differentia .v.; in secunda, eundo uersus sinistram partem scriptoris, .xx., et in tercia differentia .ccc., unumquemque numerum in differentia sua, idest unitates in differentia unitatum, que est prima; et decenos in differentia decenorum, que est secunda. Centenos uero in differentia centenorum, que est tercia; et hec est figura .325.: et similiter erit in aliis differentiis secundum hunc ordinem, idest quociens cumque augmentatus fuerit numerus et creuerint differentie, ponatur unumquodque genus numeri in sua differentia que debetur ei. Cum autem collecti fuerint in aliqua differentiarum .x. uel plus, erigantur ad superiorem differentiam, et fiat de unoquoque .x. in superiori differentia unum. Rursum si fuerit in eadem differentia, ad quam peruenerit numerus ascendendo, alter numerus addatur desuper, et colligantur insimul: et si fuerint in eo .x. uel plus, fiat de unoquoque .x. unum, et erigatur ad superiorem differentiam, idest si collecti fuerint in prima differentia decem, | fiat de eis unum, et ponatur in secunda differentia: et si in eadem differentia similiter fuerit numerus, iungatur ei: et si fuerint ibi .x., fiat de eis unum, et erigatur etiam ad terciam differentiam. Verbi gratia. Si in prima differentia, que est differentia unitatum, habueris .x., fac de eis unum, et pone ipsum in secunda differentia. In prima uero differentia pone circulum sicut diximus, ut ostendatur due esse differentie. Si uero fuerint .xi., fac de .x. unum, et pone eum in secunda differentia ut supra, et dimitte unum in prima. Si autem inueneris in secunda differentia, ubi posuistis ipsum numerum quem fecisti de .x., aliquem numerum, iunge eum cum illo. Et car. 103 recto.

si fuerint .x. uel plus, fac de .x. unum, et iterum pone eum in differentia tercia; et quod remanserit infra .x. maneat in suo loco. Quod autem dicimus plus .x., hoc pertinet ad multum numerum. Verbi gratia. Si fuerit in secunda uel tercia differentia magnus numerus, utpote si inueneris in differentia tercia, que est differentia centenorum, .ix.; et si fuerint in differentia secunda .x., facies de .x. unum, et mutabis eum ad terciam differentiam, ubi iunges eum cum .ix., et fiunt .x.: facies unum de ipsis .x., et mutabis eum in quarta differentia, et ibi erit mille. Si uero inuenisses in secunda differentia .xx., et facies de eis duo, addensque duo super .ix. in tercia differentia, et fierent .xi.: faceres iterum de .x. unum, et mutares eum ad quartam differentiam, ubi esset mille, et remanet unum in tercia differentia: et ideo dicit .x. uel plus. Et hoc sciendum, quare cum mutaueris numerum, et posueris eum in sequenti differentia, debes ponere per caracteres suos, idest si fuerint .x., pones pro eis caracterem qui significat in prima differentia unum; et si fuerint .xx., pones pro eis caracterem qui significat in prima differentia duo, et sic de ceteris intellige. Si uero remanserit in eadem differentia, de qua mutasti numerum, aliquid ex numero, dimitte eum similiter per caracteres suos, idest si remanserit unum uel duo, dimittes eum ibi per caracterem qui significat eundem numerum, idest si remanserit unum, describes ibi caracterem unius; et si remanserint duo, describes ibi caracterem duorum et cetera. Set significabit unaqueque figura secundum quod fuerit differentia, idest in prima differentia significabit unitates; in secunda deceno (*sic*); in tercia centenos et cetera, sicut supra dictum est.

Si autem fuerit numerus multus, et uolueris scire quotus sit, uel quot differentie sint in ipso, ut scribas eum in libro, uel loquaris de eo, scito quod non sit in aliqua differentia plus .ix., nec minus uno, nisi circulus sit qui nichil est. Cum ergo uolueris hoc scire, numera differentias, incipiens a prima que erit in dextera parte, et hec erit differentia unitatum. Relique uero differentie erunt descripte per successiones suas uersus sinistram partem scriptoris. Ex quibus secunda erit differentia decenorum, et tercia centenorum, et quarta milium, et quinta .x. milium. Sexta uero differentia erit .c. milium, et septima mille milium. Rursum VIII.^{a} erit .x. milia milium,| et nona .c. milia milium, et decima mille mille milium tribus uicibus, et undecima .x. millia milia milium tribus uicibus, et duodecima .c. millia milia milium tribus uicibus, et $\overline{\text{XIII}}$. mille mille mille milium quatuor uicibus; et similiter in omni differentia ex differentiis numeri addes in locutione tua. Quia super tres differentias, idest decenorum et centenorum, et milium residuum fuerit unum, erunt .x. milia ipsorum milium que exierunt tibi in dictis. Si uero remanserint duo, erunt .c. milia ex ipsis milibus: et iam constitui tibi exemplar, quo poteris scire ac probare per eum quicquid augmentatur super numerum, uel minuitur ex eo; et hec est figura eiusdem . . . . (1). car. 104 recto.

Due litere cum collegeris eas secundum quod diximus de his notis, erit numerus milium earum notarum mille mille mille millium quinque uicibus secundum numerum caracterum qui sunt sub eis; uel centum millia milia milia milium quatuor uicibus, secundum numerum caracterum qui sunt sub eis; uel octoginta milia milia milia milium quatuor uicibus, secundum quod est ex eis caracteribus. Deinde septingenta milia milia milium milium tribus uicibus, secundum caracteres qui sunt sub eis; et tria milia milia milium tribus uicibus; uel quinquaginta unum milia milium duabus uicibus; uel quadringenta milia et nonaginta duo milia et octingenta sexaginta tres.

Cum uolueris addere numerum super numerum, uel mi-

---

(1) La lacuna indicata con quattro punti nella linea 17 della presente pagina trovasi anche nel sopraccitato Codice *Ii*. 6. 5. (carta 104 *recto*. lin. 8, 9).

nuere numerum de numero, pone utrosque numeros in duobus ordinibus, unum scilicet ex eis sub altero, et sit differentia unitatum sub differentia unitatum, et differentia decenorum sub differentia decenorum. Quod si uolueris colligere utrosque numeros, addes scilicet unum super alterum : addes unamquamque differentiam super differentiam que est super eam de genere suo, idest unitates super unitates, et decenos super decenos. Cum collecti fuerint in aliqua differentiarum, idest in differentia unitatum uel decenorum, siue in alia aliqua decem, pones pro eis unum, et eriges eum ad superiorem differentiam, idest si habueris in prima differentia, que est differentia unitatum, decem, facies de eis unum, et sub leuabis eum ad differentiam decenorum, et ibi significabit decem. Si autem remanserit aliquid de numero quod sit infra x; uel fuerit ipse numerus infra .x., dimictens eum in eadem differentia; et si nichil remanserit, pones circulum, ut non sit differentia uacua: set car. 104 verso. sit in ea circulus qui occupet ea, ne forte cum | uacua fuerit, minuantur differentie, et putetur secunda esse prima; et sic decipieris in numero tuo. Sic quoque facies in omnibus differentiis. Similiter cum collecti fuerint in secunda differentia .x., facies de eis unum; et subleuabis eum ad differentiam terciam; ibique significabit centum ; et quicquid remanserit infra .x., remanebit ibi. Si uero nichil in ceteris remanserit, pones ibi circulum ut supra. Sic facies in ceteris differentiis, si plus fuerit. Si uero uolueris minuere unum de alio, numerum scilicet de numero, minues unam quamque differentiam de alia differentia que est super se ex genere suo, sicut supra dictum est. Quod si non fuerit in superiori differentia tantus numerus, de quo possis minuere numerum inferioris differentie, idest si fuerit minus, uel nichil ibi fuerit, accipies de secunda differentia que est alcior illo superiori unum, et de eo facies decem; minuesque de eo quod debueris, et quod remanserit dimittes in eadem superiori differentia. Si uero nichil remanserit, pones ibi circulum ut supra. Si autem in secunda differentia a superiori nichil fuerit, accipe unum de tercia differentia, et erunt .x. in secunda. Et rursum ex illis .x. accipias unum, et fac de eo ut supra, et remanebunt in secunda .ix.; et incipe semper in augmentacione uel diminutione ab altiori differentia: postea a sequenti que eam succedit, quia utilius ac leuius erit opus, si Deus uoluerit. Quod ut facilius intelligatur, necesse est ut hoc sub exemplo notemus, et hoc dicamus tribus modis, ne quis in eo aliquo modo turbetur. Constituamus ergo aliquem numerum, et dicamus, uerbi gratia. Ponamus sex milia quadrigentos uiginti duo per differentias suas, et dicamus quod uolumus minuere de eis tria milia ducentos undecim : ponamus itaque in prima differentia que est in dextera, scilicet duo, et in secunda .xx. In tercia quoque quadringentos, et in quarta sex milia : et ponamus etiam ipsum numerum quem uolumus minuere de eo sub ipso per consimiles differentias ita. Ponamus scilicet unum sub duobus in prima differentia, et .x. sub .xx. in secunda; ducentos quoque sub quadringentis in tercia, et tria milia sub VI. milibus in quarta; et hec est eorum figura.

Cumque uellemus minuere unum numerum de alio, minorem scilicet de maiori, cepimus a superiori differentia, idest a quarta. Minuimus itaque III. de VI. , et remanserunt tria in quarta differentia. Minuimus quoque duo de IIII^{or}, et remanserunt in tercia differentia duo. Minuimus etiam unum de II.^{obus}, et remansit unum in secunda differentia: et similiter remansit in prima differentia unum, cum minuerimus de duobus, que erant super eum, unum; et hec | remanencium figura est . . . . (1). Rursum ponamus alium numerum alio modo ad placitum, de quo nichil remaneat in differentiis suis. Sitque car. 105 *recto*.

(1) La lacuna indicata con quattro punti nella linea 20 della presente pagina trovasi anche nel supraccitato Codice *Ii.* 6. 5. (carta 105 *recto*, linea prima).

numerus noster mille centum quadraginta quatuor, de quibus minuamus .c.xliiii., et constituamus unum quemque ex eis sub alio hoc modo.

Cum uolueris mediare aliquem numerum, accipe a prima differentia, et media eam: in qua si fuerit numerus inpar, media pares, et remanebit unum, quod mediabis, idest diuides in duas medietates; constituesque medietatem unam triginta partem ex sexaginta, que faciunt unum; et pone sub eadem differentia .xxx.: deinde mediabis sequentem differentiam, si fuerit numerus eius par; et si fuerit impar, accipe medietatem paris, et pone eam in loco eius, et constitue medietatem unius residui quinque; et pone eos in differentia que est ante ipsam. Si autem non fuerit in eadem differentia quam uolueris mediare, nisi tantum unum, pone in loco eius circulum, et pone quinque in differentia que est ante ipsam. Et similiter operare in uniuersis differentiis. Et cum uolueris duplare, incipe a superiori differentia, et dupla; et cum numerus crescendo excesserit .x., fac de decem unum, et pone eum in sequenti differentia, et inuenies, si Deus uoluerit.

Etiam patefeci in libro, quod necesse est omni numero qui multiplicatur in aliquo quolibet numero, ut duplicetur unus ex eis secundum unitates alterius. Cumque uolueris multiplicare aliquem numerum in alio per literas indorum, necesse est retinere multiplicationem numeri, qui est inter unum et .ix. in inuicem, siue concors fuerit numerus, siue diuersus. Cumque uolueris multiplicare numerum in altero, pone unum ex eis secundum quantitatem mansionum eius in tabula, uel in qualibet re alia quam uolueris. De inde pone primam differentiam alterius numeri sub altiori differentia primi. Eritque prima mansio eiusdem numeri sub ultima mansione primi numeri quem posuisti. Et erit mansio secunda precedens primum numerum uersus sinistram: cuius rei exemplar est. Quod cum uellemus multiplicare duo milia tercentos .xxvi. in .ccx.iiii^{or}, posuimus duo milia tercentos .xxvi. per indas literas in iiii.or differentiis; fueruntque in prima differentia, que est in dextera, .vi.; et in secunda duo, qui sunt .xx.; et in tercia tres, qui sunt tercenti; et in quarta duo, qui sunt duo milia. Post hec posuimus sub duobus milibus iiiior; de inde in precedenti uersus sinistram unum, qui sunt .x.; postea in tercia duo, qui sunt ducenti: et hec est figura eorum.

| Post hec incipias ab ultima differentia superiori; et multiplica eam in ultima differentia inferioris numeri, qui est sub eo, uel quod exierit de multiplicatione, scribes de super. Postea scribes etiam in differentia que succeditur, redeundo uersus dexteram inferioris numeri. Deinde facies similiter, donec multiplices ultimam differentiam superioris numeri in uniuersis differentiis inferioris numeri: et cum hec perfeceris, mutabis numerum inferiorem una differentia uersus dexteram. Eritque prima differentia inferioris numeri sub differentia que succedit numerum quem multiplicasti uersus dexteram. De inde pones reliquas differentias pur successiones eorum: post hec multiplicabis etiam ipsum numerum, sub quo posuisti primam differentiam inferioris numeri ultima mansione inferioris numeri: de inde in ea que succedit, donec perficias omnes, quemadmodum fecisti in prima differentia: uel quicquid collectum fuerit ex multiplicatione unius cuiusque differentie, scribes eum in differentia que est super ipsum: uel cum hec feceris, mutabis etiam eum numerum, scilicet tuum, una differentia; et facies de eo quemadmodum fecisti in differentiis primis; et non cessabis ita facere, donec perficias omnes differentias. Sic que multiplicabis uniuersum numerum superiorem in uniuerso numero inferiori. Cumque euenerit ut prima differentia inferioris numeri sit sub aliqua differentia, in qua nullus sit numerus, idest in qua fuerit circulus, faciamus eam transire ad succedentem differentiam, in qua fuerit numerus uersus dexteram. Quia omnis circu- car. 105 verso.

lus qui multiplicatur in aliquo numero, nichil est, idest nullus numerus surgit ex eo; et quicquid multiplicatur in circulo, similiter nichil. Cumque mutauerimus differentias uersus dexteram; postea multiplicauerimus ipsum numerum superiorem in una quaque differentia ex numero inferiori, addemus quod exierit nobis de multiplicatione super differentiam que est super illam differentiam, in qua multiplicauimus: dumque crescente numero collecti fuerint nobis in aliqua differentia .x., faciemus ex eis unum: ponemusque eum in sequenti differentia uersus sinistram; et si aliquid remanserit, notabimus eum in loco suo: si uero nichil remanserit, ponemus in loco eius circulum, ne minuatur aliquid ex differentiis: et cum perduxerit multiplicatio ad primam differentiam numeri inferioris, debebimus quicquid fuerit in differentia, que est super eam; et notabimus id quod exierit nobis ex multiplicatione in loco eius. Sicque faciemus, donec multiplicemus uniuersas differentias superioris numeri in uniuersis differentiis inferioris; et sic multiplica-
car. 106 recto. bimus | numerum ex eis secundum numerum unitatum alterius, et perficietur multiplicatio: et hec est figura numeri, qui exiuit nobis de multiplicatione duorum milium et tercentorum uiginti sex in ducentis .xiii., que sunt quadringenta milia et nonaginta septem milia et septingenta .lxiii.

Cum uolueris scire utrum inuenisti uel errasti in duplatione tua uel multiplicatione, accipe numerum quem uolueris duplare, et diuide eum per .ix. et .ix., et quicquid remanserit minus .ix., duplica eum: in quo si fuerint .ix., proice eos, et quod remanserit serua. Post hoc duplica numerum tuum, idest ipsum numerum quem uolueris duplare, et diuide eum per .ix., et .ix.; et quod remanserit, si fuerit simile illi qui prius remanserat dum duplicaueras eum, iam inuenisti: sin autem, errasti. Et cum multiplicare uolueris aliquem numerum in aliquo; et uolueris probare ut supra, diuide numerum quem duplicasti per .ix., et quod remanserit infra .ix., serua. Iterum diuide alium numerum per .ix., et quod remanserit infra .ix. serua. Deinde multiplica quod remanserit de primo in eo quod remanserit tibi de secundo; et proinde ex eo quod collectum fuerit .ix., si fuerit ibi; et si non fuerint ibi .ix., quod remanserit, erunt nota. Si autem fuerint ibi .ix., proice .ix. et serua quod remanserit; et quare hec erunt nota, intellige. Post hec multiplica unam multiplicationem in aliam; et diuide quod collectum fuit per .ix.; et quod remanserit, si fuerit simile illi quod dixi tibi de nota, scito quare inuenisti. Si uero non fuerit simile, errasti: intellige.

In diuisione autem pones numerum quem uolueris diuidere per differentias suas : postea pones ipsum numerum, super quem uis diuidere, sub eo. Sitque ultima differentia numeri super quem diuidis sub ultima differentia superioris numeri quem diuidis. Si autem fuerit numerus, qui est ultima differentia superioris numeri quem uis diuidere, minus illo qui est ultima differentia inferioris numeri super quem diuidis, retrahe ipsam differentiam uersus dexteram, donec sit numerus superioris differentie plus 1 : pone ultimam differentiam inferioris numeri, super quem diuidis, sub differentia secunda que succedit ultimam differentiam superioris numeri. Post hec aspice primam differentiam numeri super quem uis diuidere, et pone in directo eius super numerum superioriorem (*sic*) quem diuidis, uel sub eo in directo eius aliquem|numerum quem inde multiplicaueris in ultima differentia inferioris numeri super quem diuidis, erit similis illius numeri qui fuerit in superiori differentia, uel prope eum qui sit minus illo. Cumque scieris eum, multiplica eum in ultima differentia inferioris numeri, et minue quod exierit tibi de multiplicatione de eo quod est supra eum ex inferiori numero qui diuiditur. Iterum multiplica eum in secunda differentia que succedit ultimam differentiam uersus dexteram; et minue eum de eo quod est super eum; et car. 106 verso.

fac in diminutione quem admodum fecimus in inicio libri. Cum uolueris minuere aliquem numerum de aliquo numero, et similiter fac, donec multiplices eum in uniuersis differentiis inferioris numeri super quem diuidis. Post hec muta uniuersas differentias inferioris numeri, super quem diuidis, una differentia uersus dexteram, et pone in directo prime differentie illius ad similitudinem illius quod prius posuisti. Quod cum multiplicaueris in ultima differentia inferioris numeri super quem diuidis, consument id quod supra eum est, uel quod fuerit prope eum: et multiplica illud quod posuisti in directo eius in ultima differentia numeri inferioris; et minue quod exierit tibi de multiplicatione de eo quod supra eum est; et sic facies in uniuersis differentiis : et si remanserit de differentiis numeri superioris quem diuidis aliquid quod debeat diuidi, semper muta differentias inferioris numeri una differentia, donec sit prima differentia eius in directo alicuius differentie superioris numeri : quod si fuerit in aliqua differentia, ex differentiis numeri quem diuidis, circulus, et peruenerit mutatio ad eum, non transeas eum, quem ad modum fecisti in multiplicatione. Set pones in directo eius aliquid quod multiplicabis quem ad modum narrauimus. Cumque perfeceris hec omnia, quicquid exierit tibi ex differentiis in directo numeri quem diuidis, illud debetur uni: et si aliquid remanserit, erit pars unius ex eo numero quem diuidis, et numquam remanebit nisi quod erit minus illo quod diuidis. Si autem plus remanserit, scito quod errasti.

Et scito quod diuisio sit similis multiplicationi; set hoc fit econuerso: quare in diuisione minuimus, et ibi addimus, idest in multiplicatione eius exemplar est. Quod cum uellemus diuidere quadraginta sex milia et quadrigentos sexaginta octo super tercentos .xxiii., posuimus primum in dextera parte octo; postea posuimus sex uersus sinistram qui sunt sexaginta: de inde .iiii.^{or} qui sunt quadringenti; postea sex que sunt .vi.

milia ; postea .IIII.^{or} que sunt quadringinta milia. Eruntque ultima harum differentiarum uersus sinistram, et prima earum octo uersus | dexteram: post hec scribes sub eis numerum super quem diuidis; scribesque ultimam differentiam numeri, super quem diuidis, que est figura trium, et sunt terceuti sub ultima differentia numeri superioris, que sunt IIII.^{or}, eo quod sit minus illo quod est supra eum : et si esset plus illo, retrahemus eum una mansione, ponemusque eum sub sex : post hec ponemus in ea, que succedit tres, figuram duorum que sunt .XX. sub sex: postea ponemus in ea que succedit .IIII.^{or} idem .IIII.^{or}: et hec figura earum. car. 107 recto.

Post hec insipientes scribamus in directo prime differentie numeri super quem diuidimus super numerum superiorem quem diuidimus qui sunt quater unum: et si posuissemus eum sub .IIII.^{or}, esset conueniens. Multiplicemusque ipsum in tribus, et minuemus eum de eo quod supra ipsum est, et remanebit unum. De inde multiplicemus eum in duobus; minuemus eum de eo quod supra ipsum est, qui sunt .VI., et remanebunt .IIII.^{or} Post hec multiplicemus eum iterum in .IIII.^{or}, et minuemus eum de eo quod supra ipsum est, que sunt .IIII., et nichil remanebit : ponemusque in loco eius circulum. Postea mutabis inicium numeri super quem diuidis, uel .IIII.^{or} sub .VI., et erunt duo sub circulo, et III. sub .IIII. De inde scribes in directo inferioris numeri aliquid in ordine unius, idest .IIII., quos multiplicabis in tribus, et erunt XII.; minuesque eos de eo quod est super tres qui sunt XIIII., et remanebunt .II : post hec multiplicabis etiam ipsos .IIII.^{or} in duobus qui succedunt tres, et erunt VIII., quos minues de eo quod supra ipsum est qui sunt .XX., et remanebunt XII., duo scilicet supra II.^{o}, et unum supra tres. Iterum multiplicabis .IIII., in .IIII. qui succedunt dexteram, et erunt XVI.; minuesque eos de eo quod supra ipsos est qui sunt .CXXVI., et remanebunt supra .IIII. circulus, et supra duos unum, et super tres unum. Iterum mutabis numerum super quem diuidis, idest IIII.^{or} sub VIII., erunt duo sub circulo et tres sub uno: postea scribes in directo III. super numerum superiorem quem diuidis in ordine .IIII., atque unius tres, quos multiplicabis in tribus, et erunt .IX.; minuesque eos de eo quod est supra tres, qui sunt XI., et remanebunt super tres duo. Multiplicabis quoque tres in duobus qui succedunt tres, et erunt VI., quo minues de eo quod est supra tres qui sunt .XX., remanebunt .XIIII. Iterum multiplicabis predictos tres in .IIII.^{or} qui succedunt duos, et erunt XII.; minuesque eos de eo quod super illos est, qui sunt CXXVIII., et remanebunt supra .IIII. sex, et supra duos tres, et supra tres unum. Exibitque nobis quod debetur uni ex eis; et hoc erit .CXLIII., et CXXXVI. partes de .CCC.XXIIII. partibus unius: et hec figura eorum.

car. 107 verso. | Et si uolueris diuidere differentias plures super unam, ut pote mille .DCCC. per .IX., scribes mille octingentos, quorum figura est, ut ponas uersus dexteram duos circulos: postea .VIII.; deinde unum: post hec ponas .IX. sub .VIII., eo quod sint plus .VIII.: deinde scribes in directo eius super octo aliquid, quod cum multiplicaueris in .IX., consumet quod est super se, idest XVIII. qui sunt super .IX.; inueniesque illud esse duo, quos multiplicabis .IX. IX. et erunt .XVIII.; minuesque eos de eo quod est desuper, et nichil remanebit: de inde muta .IX. una differentia uersus dexteram, et fient sub circulo. Ponesque aliquid de super, quod cum multiplicaueris in .IX., nichil erit: quare est circulus super .IX., et nullus numerus est ibidem. Pones ergo circulum in directo .IX. in ordine duorum, et multiplicabis .IX. in circulo, eritque circulus, idest nichil. Post hec muta etiam .IX. ad differentiam que est ante eam, que est prima differentia; eruntque .IX. sub circulo: et fac de eis quem admodum fecisti de circulo qui erat eos (*sic*). Eruntque ibidem duo circuli, post quos erunt duo qui sunt ducenti; et hoc est quod debetur uni, et non remanebit ex eo quod diuiditur quicquam: et quocienscumque diuiseris aliquem numerum super aliquem, et remanserint de eo quod diuiditur circuli, ante quos nullus sit numerus, accipe quod residuum fuit ex circulis ab inicio differentiarum diuisi numeri uersus dexteram, et addes eos super id quod exierit de diuisione; et quod fuerit, ipsum est quod debetur uni. Et hec est quedam abreuiacio propinqua. Ordo autem primus est ordo operis: cuius rei exemplar est, quod cum scriberemus mille .DCCC, fuerunt duo circuli et VIII., et in tercia differentia, atque unum in quarta: posuimus .IX. sub .VIII, eo quod sint plus illo, quod est in ultima differentia; fuitque figura eorum ita. Cumque scriberemus in directo .IX. supra .VIII. duo, multiplicaremusque ea in .IX., fuerintque .XVIII., quos cum minueremus de eo quod est supra .IX., et remanserunt duo circuli, nullum habentes ante se numerum. Scripsimus ergo duos circulos in ordine duorum, qui sunt supra .IX., et fuerunt .CC., quorum hec est figura.

Hec sunt uniuersa que necessaria sunt hominibus ex diuisione et multiplicatione in eo numero qui fuerit integer. Et nunc incipiemus tractare de multiplicatione fractionum, et earum diuisione, et de extractione radicum, si Deus uoluerit.

Scito quod fraciones appellentur multis nominibus innumerabilibus | atque infinitis, ut medietas, tercia, quarta, nona car. 108 recto.
et decima, et una pars ex XIII., et pars ex .X.VIII., et cetera. Set indi posuerunt exitum partium suarum ex sexaginta: diuiserunt enim unum in .LX. partes, quas nominauerunt minuta. Iterum unum quodque minutum in .LX. partes, quas uocauerunt secunda; eritque unum ex LX. minutum, et unum ex tribus milibus et sexcentis erit secundum; et unum quodque secundum iterum diuiditur in .LX., eritque unum ex ducentis milibus et XVI. milibus tercium; et unum quodque tercium diuiditur in LX. quarta, et ita usque ad infinitum erunt diffe-

2

rentie: prima igitur est differentia graduum, in qua est numerus integer, et in secunda mansione erunt minuta. In tercia quoque sunt secunda; et in quarta tercia, et ita usque in .ix., et .x. mansione : et scito quod omnis numerus integer qui multiplicatur in numero integro, efficitur numerus integer; et omnis numerus integer multiplicatus in aliqua fractione, efficitur ex genere illius fractionis; eruntque duo gradus multiplicati in duobus minutis .IIII. minuta, et tres gradus in sex terciis .XVIII. tercia. Minuta quoque in minutis erunt secunda; et secunda in secundis tercia; et tercia in terciis quarta; et quarta in quartis quarta : quare coniunctis utrasque differentias quas multiplicas inuicem; et quod colligitur ex numero fractionum simile ei quod exit de numero integro in inuicem multiplicato. Verbi gratia. Sex minuta multiplicata in VII. minuciis, erunt .XLII. secunda: quare minuta sunt partes ex LX. partibus unius integri : et cum multiplicaueris partes ex LX. in .LX., erit quod exierit de multiplicacione ex LX. in LX., que sunt tria milia sexcenta: et similiter .VII. secunda in .IX. minutis erunt .LX. tria tercia; eruntque omnia quoque LX. ex eis secundum unum, et remanebunt tria tercia : quare minuta sunt partes ex LX., et secunda partes ex tribus milibus et sexcentis. Multiplica ergo ea in inuicem, et efficientur partes ex ducentis milibus et XVI. milibus que sunt tercia, et sunt .LX. ex tribus milibus et sexcentis.

Et cum uolueris multiplicare unum et dimidium in duo et dimidio, fac unum et dimidium minuta, et erunt .XC. Iterum fac unum et dimidium quem uis multiplicare in eadem minuta, et erunt similiter .XC.: multiplica unum ex eis in alio, et erunt .VIII. milia et .C. secunda : diuide secunda per LX., car. 108 verso. et erunt minuta: quare omnia queque | LX^{ta} II^{da}. faciunt unum minutum. Exibuntque tibi .C.XXX.^{ta} V^{que} minuta : et diuide ea per LX., et erunt gradus: quare omnia queque .LX.^{ta} minuta faciunt unum gradum; et hoc erit unum integrum ex numero; exibuntque tibi duo et XVI. minuta, que sunt quarta unius.

Et si uolueris multiplicare duo integra, idest duos gradus et xLv. minuta in tribus integris et x. minutis, ac .xxx. secundis, pone duo integra minuta, idest multiplicabis ea in .Lx., et erunt .c.xx., quibus addes predicta .xLv. minuta, et erunt .$\overset{c}{x}$Lv. minuta: serva ea; quare iam reddidisti ea in ultimam differentiam. Post hec fac predictos tres gradus minuta, multiplicando ea in Lx. ut supra. Quibus addes .x. predicta minuta, et erunt .c.xc. minuta: de inde pone ipsa .c.xc. minuta secunda, multiplicando iterum ea in .Lx., donec reddas ea in ultimam differentiam, idest in secunda. Erunt .xi. milia quadrigenta, quibus addes .xxx. secunda que sunt cum eis. Eruntque .xi. milia quadringenta secunda. Sicque reddes ea in ultimum genus fractionis eiusdem numeri. Multiplica hec omnia predicta in .c. Lxv. minuta, et erunt mille milium, et octingenta octoginta quinque milia ac nongenta quinquaginta tercia: quare multiplicasti ea, idest in secundas in minutiis, et facta sunt tercia. Quod diuides per Lx., ut reddantur secunda. Exibuntque tibi .xxxi. milia et quadringenta .xxx.^{ta} ii.^{o} secunda, et remanebunt .xxx.^{ta} tercia. Item diuides secunda per .Lx., ut reddantur minuta. Exibuntque tibi quingenta .xx. tria minuta, et super erunt Lii. secunda. Rursum diuide minuta, ut reddantur gradus, idest numerus integer. Eruntque .viii.^{to}, et remanebunt .xL^{ta}iii^{a}. minuta. Eritque omne quod exierit de multiplicacione octo gradus, et xLiii. minuta, et Lii. secunda, ac .xxx. tercia: et similiter facies de uniuersis fractionibus; reddes scilicet unamquamque ex eis quam uolueris multiplicare in aliam inferiorem differentiam que fuerit in unaquaque ex eis. Post hec multiplica unam earum in aliam; et serua quod exierit; et uide ex qua differentiarum sit: deinde diuide per .Lx. quemadmodum dixi tibi, ut erigas eas ad gradus, uel ergo peruenerint ex differentiis que sunt infra gradus, et quod fuerit, ipsum erit quod exiuit tibi de multiplicacione unius earum in aliam: et est ei alius modus breuior:

set hic ordo est, quo usi sunt indi, super quem figurare numerum suum.

Scito quare cum uolueris diuidere numerum cum fractione per aliquem numerum cum fractione; uel numerum cum fractione per numerum integrum; aut numerum integrum per numerum cum fractione, facies utrumque numerum unius generis, idest uertes utrosque numeros in inferiorem differentiam. Verbi gratia. Si fuerit inferior differentia ex secundis, pones utrumque numerum secunda: quod si fuerint in uno ex eis tercia, et cum alio secunda, uertes utrosque in tercia: et si fuerit cum aliquo ex quarta, uel sexta, uel aliud quod sit his differentiis inferius, alter uero fuerit numerus integer, uertes utrosque in eam differentiam que fuerit in utrisque inferior: deinde diuide quod uolueris super quod uolueris: post quam reddideris utrumque
car. 109 recto. numerum unius generis, et quod exi | erit, erunt gradus, idest numerus integer: quare omnes duo numeri qui fuerint unius generis, si diuidatur unus eorum per alterum, erit quod exierit numerus integer. Verbi gratia : xv. tercie si diuidantur per sex tercias, exibunt de equalitate diuisionis duo et dimidium: quare .xv. tercie faciunt .v. integros; quos cum diuiseris per .vi. tercias qui sunt duo integri, exibunt duo et dimidium : et similiter diuiduntur medietates per medietates, et quarte per quartas , minuta quoque per minuta per minuta, et secunda per secunda, ac tercia per tercia : et cum uolueris diuidere .x. secunda super .v. minuta, pone minuta secunda , ut sint unius generis , atque unius differentie ; eruntque tercenta secunda, super quem dum uolueris diuidere .x. secunda , non possunt diuidi .x. super tercenta. Scito itaque quod non exiuit unus integer: pone ergo circulum in loco unius, et multiplica .x. in .lx. , et erunt sexcenti; quos cum diuiseris super tercentos, exibunt duo, que sunt duo secunda; et hoc est quod debetur uni: quare cum multiplicasti ea in .lx. ; postea diuisisti , iam minuisti ea

una differentia, que sunt secunda: et scito quare omnis numerus qui diuiditur super aliquem numerum, quod extrahitur de diuiso, si multiplicatur in eo super quem diuiditur, redibit numerus primus, idest numerus qui diuiditur. Cuius rei exemplar est : quare cum diuiseris .L. super .X. exibunt que debentur uni, idest quinque. Cumque multiplicaueris id quod exiuit tibi de diuiso, idest quinque, in eo super quem diuidis que sunt .X., redibit numerus primus, idest .L. Cum ergo diuideremus .X. secunda super .V. minuta, exiuit quod debetur uni, idest duo secunda: et cum multiplicaremus duo secunda, hoc est quod exiuit nobis ex diuisione, in eo super quod diuisimus que sunt .V. minuta, facta sunt .X. secunda, et hec est probatio diuisionis. Item cum uolueris diuidere .X. minuta super .V. tercia, uerte minuta in tercia, eruntque .XXXVI. milia tercia; diuidesque super .V. tercia, et erunt .VII. milia ducenti gradus, et hoc est quod debetur uni.

Cumque hoc uolueris probare, multiplica .VII. milia ducentos gradus in .V. tercia, et exibunt .XXXVI. milia, que cum diuiseris per .LX., exibunt .VI. centa secunda; et cum iterum diuiseris .VI. centa secunda, exibunt decem minuta.

Cum uolueris constituere numerum integrum et fractiones, pone numerum integrum in altiori differentia : deinde pone quicquid fuerit ex differentia prima que sunt minuta sub numero integro, et secunda sub minutis; et similiter tercia sub secundis, et cetera que uolueris ex differentiis. Cuius rei exemplar est. Quod cum uellemus constituere .XII. gradus et .XXX. minuta, .XL. quoque .VI. secunda, et .L. quarta, constituimus .XII. Post hec posuimus sub eis .XXX. in differentia minutorum ; et sub .XXX. XLV. in differentia secundorum. In differentia uero terciorum posuimus circulos, quare carebat terciis, et ut sciremus quare adhuc restabant quarta. Deinde posuimus sub circulis quinquaginta in differentia quartorum; et hec est figura eorum.

Et similiter uniuersas differentias fractionum sub se inuicem; et quotienscumque collecta fuerint in aliqua mansione .LX., uel plus, ponemus in loco eorum, idest in eorum differentia quicquid residuum fuerit super .LX.; et faciemus de omni .LX. unum.|Ponemus eum in superiora (*sic*) differentia: et similiter si uoluerimus inuenire fractiones, incipiemus a superiori differentia; minuemusque unamquamque differentiam de ea que supra ipsa est. Quod si fuerit in eadem superiori differentia minus eo quod uolueris, minue ex ea : uel fuerit in ea circulus, minue unum de differentia que est super eam; fietque ipsum unum partes .LX. de fractione quam operaris; et minue ex eo quod operaris; et adde quod residuum fuerit super differentiam inperfectam: et si fuerit supra ipsam differentiam circulus, minue de differentia que est supra eam, unum, et redde eum partes .LX. in differentia que est infra ipsam: deinde minue iterum ex ea etiam unum, et fac eum partes ut supra in differentia quam uolueris. Post hec minue ex ea quod uolueris; et quod residuum fuerit pone in ea differentia qua finitum est id quod minuitur ex ea.

car. 109 verso.

Et cum duplare aliquem numerum uel fractionem, incipe a differentia altiori: de inde ab ea que eam succedit. Cumque collectum fuerit in aliqua differentiarum aliud plus numero eius partium, pone superfluum in ea differentia, et subleua unum a differentia que est supra ipsam. In mediatione autem incipies ab inferiori differentia, mediabisque illam; deinde sequentem : et si inueneris ibi unum, fac de eo quemadmodum exposui tibi in inicio libri. Et si uolueris multiplicare fractiones et numerum, ac fractiones extra minuta, uel secunda, ut sunt quarte et septime, ac cetere partes his similes, et diuidere eas in inuicem, erit opus in eis sicut opus minutorum et secundorum; et constituam tibi exemplar, si deus uoluerit. Et iam patefeci tibi in multiplicacione minutorum et secundorum ac terciorum de duobus numeris, quos uolueris multiplicare in inuicem, idest unum eorum in alio; qualiter constitues eos unius generis, ut uertas eos, scilicet in genus ultime differentie, idest si fuerit ultima ex secundis, uerte eos .ii. secunda; et si fuerit ex terciis in tercia, et cetera. Similiter facies in partibus, idest si fuerit ultima differentia ex quintis uel ex septimis, reddes numerum tuum ex genere eiusdem partis. Post hec multiplicabis eum in inuicem; et quod exierit, subleuabis eum ad numerum integrum, idest diuides eum per similem eiusdem generis multiplicati in alio genere, quasi uelles multiplicare .iii. septimas in .iiii.^{or} nouenis, essentque ille septene et nouene in prima differentia fractionis quasi minuta; multiplicaresque eas in inuicem, et fierent in sua differentia ex genere secundorum. Cumque uolueris eas subleuare ad numerum integrum, diuides eas per utrasque differentias, que sunt septene in nouenis. Quod si aliud diuisum fuerit, et exierit de diuisione, numerus erit integer; et si non poterit diuidi, erunt partes unius eiusdem generis per quod diuisisti. Eruntque tres septene in .iiii.^{or} nouenis .xii. partes et .lx. tribus partibus unius. Cum ergo uolueris multiplicare tres et dimidium, idest .viii. et tribus partibus .xi., scribes tres, et pones sub eis unum, et sub uno duo. Iamque scripsisti tres et dimidium: quare dimidium est una pars duorum, quemadmodum unum minutum est una pars de .lx. partibus unius. Post hec scribes in alia parte .viii., et sub eis tres, et sub tribus .xi., sicque constitues .viii. (1).

(1) Nel margine inferiore della carta 109 *verso* del suddetto codice *Ii.* 6. 5. si legge: *dicque constitues* .VIII. Più sotto nel margine stesso si legge: *est quidem*. Il *recto* della carta 110 del codice medesimo incomincia così (lin. 1—4): *Est quidem quazal cora tabula ad celi rotunditatem conformata, cuius itemque superficies equali spatiorum intersticione quadrifidis ab ipso centro per diametrum, fusis lineationibus, partita est.*

PARTIE GÉOMÉTRIQUE DE L'ALGÈBRE

DE

Abou Abdallah Mohammed ben Moussa (al Khowarezmi).

PAR M. ARISTIDE MARRE.

L'ouvrage de *Mohammed ben Moussa*, auquel, ne fût-ce que par reconnaissance, étaient si légitimement dus les honneurs de l'impression, est resté manuscrit et depuis trois siècles dans l'oubli, quand pour la première fois, en 1831, M. *Rosen* l'a publié en arabe et en anglais. M. *Libri* vient aussi de reproduire, dans le 1er volume de son *Histoire des sciences en Italie*, l'une des traductions latines que l'on conservait à la bibliothèque royale. Celle-ci n'est pas aussi complète que le manuscrit dont s'est servi M. *Rosen*. La partie géométrique, entre autres, ne s'y trouve pas. (*Chasles*, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, p. 490.) C'est cette lacune dans la reproduction latine de l'algèbre de *Mohamed ben Moussa*, que nous voulons combler par une traduction faite sur la version anglaise du manuscrit d'Oxford ; là se bornera notre tâche. Mais il ne sera peut-être pas inutile de rappeler succinctement ce que fut *Mohammed ben Moussa*, et quels sont ses titres impérissables à notre reconnaissance.

Abou Abdallah Mohamed ben Moussa, de *Khowarezm sur l'Oxus* (de là son nom de *Alkhowarezmi*), vécut et écrivit sous le khalife *Al Mamoun*, qui commença à régner à *Bagdad* en l'an 814.

Il abrégea, à la requête de l'illustre Abbasside, mais avant l'accession de ce prince au khalifat, le *Sindhind* (tables astronomiques), traduit par *Mohammed ben Ibrahim al Fazâry* d'après l'ouvrage d'un astronome indien qui visita la cour d'*Al Mansour* dans la 156e année de l'hégire ou 773e de notre ère. (*Ebn al Adami*, préf. à ses tabl. astronomiq ; *Casiri*. I. 427-428 ; *Colebrooke*. Dissertation, p. LXIV-LXII.)

On ne doit pas le confondre avec *Abou Djafar Mohammed ben Moussa*, l'un des trois fils de *Moussa ben Shaker*. En effet, *Aboulfaradj* (Histor. Dyn., p. 280) et *Casiri* (I, 386-418) rapportent que *Moussa ben Shaker*, dont la jeunesse n'avait été rien moins qu'honorable, car il avait débuté par le métier de bandit, avait ensuite trouvé moyen de s'attacher à la cour du khalife *Al Mamoun*, et qu'après sa mort ce grand prince prit soin de l'éducation de ses trois fils *Mohammed*, *Ahmed* et *Al Hassan*, qui plus tard s'illustrèrent comme mathématiciens et astronomes sous le khalife *Al Mohtaded*. On sait que ce dernier régna de 279 à 289 de l'hégire, ou de 892 à 902 de notre ère. (*Rosen.*, p. XII.)

Mohammed, dans sa préface, nous apprend que ce fut encore *Al Mamoun*, devenu khalife, qui l'encouragea à écrire un ouvrage *populaire* sur l'algèbre, ou plutôt, suivant ses propres expressions un petit ouvrage sur le calcul par *Gebr* et *Mokabalah*, restreint à ce qu'il y a de plus aisé et de plus utile en arithmétique, c'est-à-dire aux opérations dont on a constamment besoin dans les cas d'héritage, de donations, de procès, de négoce et affaires de la vie pratique, ou nécessaires pour la mesure des terres, le creusement des canaux, le calcul géométrique, etc.

Pour comprendre ce que nous devons à *Mohammed ben Moussa*, il suffit de rappeler que c'est dans son ouvrage que nous avons puisé nos premières connaissances algébriques, qu'il est notre véritable instituteur dans cette branche principale des sciences mathématiques; avant de juger son œuvre, il faut mûrement réfléchir sur ce fait, qu'un traité d'algèbre, *regardé comme élémentaire au IXe siècle* chez les Arabes, et en quelque sorte comme manuel pratique à l'usage du peuple, est devenu 700 ans après, l'*ars magna* des Européens, la base et l'origine de leurs grandes découvertes dans les sciences. (*Chasles*, Aper. Hist., p. 491). A. M.

Mesure.

Sachez que la signification de l'expression « *un par un* » est mesure (1), car l'on entend par là une coudée (2) (en longueur) par une coudée (en largeur). Tout quadrangle équilatéral et équiangle, qui a une coudée pour chacun de ses côtés, a aussi *un* pour son aire. Un tel quadrangle a-t-il deux coudées pour son côté, alors l'aire du quadrangle est quatre fois l'aire d'un quadrangle, dont le côté est une coudée. Il en est de même de *trois* par *trois*, et ainsi de suite, en montant ou en descendant : par exemple, un demi par un demi, qui donne un quart, ou d'autres fractions, toujours suivant la même règle. Un carré, dont chaque côté est une demie coudée, est égal à un quart de la figure qui a une coudée pour son côté. De la même manière, un tiers par un tiers, ou un quart par un quart, ou un cinquième par un cinquième, ou deux tiers par un demi, ou plus ou moins que ceci, toujours d'après la même règle (3).

Un côté d'une figure quadrangulaire équilatérale, pris une fois, est la racine de ce carré; si ce même côté est multiplié par deux, alors il équivaut à deux des racines du carré, qu'il soit petit ou grand.

Si vous multipliez la hauteur d'un triangle équilatéral par la moitié de la base sur laquelle la ligne marquant la hauteur se tient perpendiculaire, le produit donne l'aire de ce triangle (4).

Dans tout quadrangle équilatéral, le produit d'un diamètre multiplié par la moitié de l'autre sera égal à son aire (5).

Dans un cercle, le produit de son diamètre, multiplié par trois et un septième, sera égal à la périphérie. C'est là, la règle généralement suivie, dans la vie pratique, quoiqu'elle ne soit pas tout à fait exacte. Les géomètres ont deux autres méthodes. Une d'elles consiste en ceci, que vous multipliez le diamètre par lui-même, puis par dix, et qu'enfin vous preniez la racine du produit; la racine sera la périphérie. Les astronomes parmi eux se servent de l'autre méthode; la voici : vous multipliez le diamètre par soixante-deux mille huit cent trente-deux, et divisez le produit par vingt mille; le quotient est la périphérie (6).

Les deux méthodes conduisent à très-peu près au même résultat.

Si vous divisez la périphérie par trois et un septième, le quotient est le diamètre.

L'aire du cercle sera trouvée si l'on multiplie la moitié de la circonférence par la moitié du diamètre; puisque dans tout polygone dont les côtés et les angles sont égaux, tels que triangles, quadrangles, pentagones et ainsi de suite, l'aire est trouvée en multipliant la moitié de la périphérie par la moitié du diamètre du cercle moyen qui peut être tracé au travers.

Si vous multipliez le diamètre d'un cercle par lui-même, et que vous retranchiez du produit un septième et un demi-septième de ce même produit, alors le reste est égal à l'aire du cercle. Ceci conduit à très-peu près au même résultat que la méthode donnée ci-dessus (7).

Toute portion d'un cercle peut être comparée à un arc. Cet arc sera ou exactement égal à la demi-circonférence, ou plus petit ou plus grand qu'elle. Ceci peut être fixé par la flèche (8) de l'arc. Quand il arrive qu'elle est égale à la moitié de la corde, c'est qu'alors l'arc est exactement la moitié de la circonférence; est-elle plus petite que la moitié de la corde, alors l'arc est moindre que la demi-circonférence; la flèche est-elle plus longue que la demi-corde, alors l'arc comprend plus de la moitié de la circonférence.

Si vous avez besoin de déterminer le cercle auquel il appartient, multipliez la moitié de la corde par elle-même, divisez par la flèche et ajoutez le quotient à la flèche, la somme est le diamètre du cercle auquel cet arc appartient (9).

S'il vous faut calculer l'aire de l'arc, multipliez la moitié du diamètre du cercle par la moitié de l'arc et conservez le produit dans votre pensée. Alors retranchez la flèche de l'arc, de la moitié du diamètre du cercle, si l'arc est plus petit que le demi-cercle, ou s'il est plus grand que le demi-cercle, retranchez la moitié du diamètre du cercle, de la flèche de l'arc. Multipliez le reste par la moitié de la corde de l'arc, et retranchez le produit de celui que vous avez retenu dans votre pensée si l'arc est moindre que la moitié du cercle, ou ajoutez-le à ce même produit si l'arc est plus grand que le demi-cercle. La somme après l'addition, ou le reste après la soustraction, est l'aire de l'arc (10).

On trouve le volume d'un corps quadrangulaire en multipliant la longueur par la largeur, et alors par la hauteur.

S'il est d'autre forme que la quadrangulaire (circulaire ou triangulaire par exemple), mais telle cependant qu'une ligne représentant sa hauteur puisse se tenir perpendiculairement sur la base, et être encore parallèle aux côtés, il faut le calculer en déterminant d'abord l'aire de sa base. Celle-ci, multipliée par la hauteur, donne le volume du corps.

Les cônes et les pyramides triangulaires ou quadrangulaires sont calculés en multipliant un tiers de l'aire de la base par la hauteur (11).

Observez que dans tout triangle rectangle, les deux petits côtés étant multipliés chacun par lui-même, les produits, additionnés ensemble, égalent le produit du long côté multiplié par lui-même. La preuve en est ci-dessous (12).

Nous traçons un quadrangle ABCD, avec ses côtés égaux et ses angles égaux. Nous partageons la ligne AC en deux moitiés au point K, et de ce point nous tirons une parallèle jusqu'au point R. Puis nous partageons aussi la ligne AB en deux moitiés au point T, et tirons une parallèle jusqu'au point G. Alors le carré ABCD est divisé en quatre quadrangles qui ont côtés égaux et angles égaux, et sont de même aire ; savoir, les carrés AK, CK, BK et DK. Maintenant, nous tirons du point H au point T une ligne qui divise le quadrangle AK en deux parties égales : il se forme ainsi deux triangles dans le quadrangle, savoir les triangles ATH et HKT. Nous savons que AT est la moitié de AB, et que AH lui est égal, comme moitié de AC; et la ligne TH qui les joint est opposée à l'angle droit. Nous tirons de la même manière des lignes de T à R, de R à G, et de G à H. Ainsi tous les carrés donnent naissance à huit triangles égaux, et quatre d'entre eux, conséquemment, valent la moitié du grand carré AD. Nous savons que la ligne AT multipliée par elle-même est égale à l'aire de deux triangles, et AH donne l'aire de deux triangles qui leur sont égaux; leur somme est en conséquence quatre triangles. Mais la ligne HT multipliée par elle-même donne pareillement l'aire de quatre de ces triangles. Nous apercevons donc que la somme de AT multipliée par elle-même et de AH multipliée par elle-même, est égale à TH multipliée par elle-même. C'est là l'observation que nous étions désireux d'éclaircir. Voici la figure y relative (*fig.* 1).

Les quadrangles sont de cinq espèces : premièrement avec les angles droits et les côtés égaux; secondement, avec les angles droits et les côtés inégaux; troisièmement, le rhombe avec des côtés égaux et des angles inégaux ; quatrièmement, le rhomboïde, dont la longueur diffère de la largeur et dont les angles sont inégaux ; seulement les deux grands côtés et les deux petits sont respectivement d'égale longueur ; cinquièmement, les quadrangles avec angles et côtés inégaux (13).

Première espèce. — L'aire d'un quadrangle dont les côtés sont égaux et les angles droits, ou les côtés inégaux et les angles droits, peut être trouvée en multipliant la longueur par la largeur. Le produit est l'aire. Par exemple : une pièce de terre quadrangulaire, dont chaque côté a cinq coudées, a une aire de vingt-cinq coudées carrées. Voici quelle est la figure (*fig.* 2).

Deuxième espèce. — Une pièce de terre quadrangulaire ; ses deux grands côtés sont de huit coudées chacun, tandis que la largeur est six. Vous trouvez l'aire en multipliant six par huit, ce qui donne quarante-huit coudées. Voici pour ce cas la figure (*fig.* 3).

Troisième espèce (14).—Le rhombe : ses côtés sont égaux ; que chacun d'eux soit cinq et que ses diagonales soient l'une huit et l'autre six coudées. Vous pouvez alors calculer l'aire, soit par l'une des diagonales, soit par les deux. Comme vous les connaissez toutes deux, vous multipliez l'une par la moitié de l'autre, le produit est l'aire ; c'est-à-dire que vous multipliez huit par trois, ou six par quatre ; cela donne vingt-quatre coudées, et c'est l'aire. Si vous ne connaissez qu'une des diagonales, alors vous faites attention qu'il y a deux triangles pour chacun desquels deux côtés ont respectivement cinq coudées, tandis que le troisième côté est la diagonale. Dès lors vous pouvez faire le calcul d'après les règles pour le triangle. Voici la figure (*fig.* 4).

La *quatrième espèce*, ou rhomboïde, est calculée de la même manière que le rhombe (15). Voici quelle est la figure (*fig.* 5).

On calcule les autres quadrangles en tirant une diagonale et en les évaluant comme triangles (16).

Les triangles sont de trois sortes : acutangles, obtusangles ou rectangles (17).

La propriété du triangle rectangle est que si vous multipliez chacun de ses deux petits côtés par lui-même, qu'alors vous les ajoutiez ensemble, leur somme sera égale au long côté multiplié par lui-même. Le caractère du triangle acutangle est celui-ci : Si vous multipliez chacun de ses deux petits côtés par lui-même, et si vous additionnez les produits, leur somme est plus grande que le long côté seul multiplié par lui-même. La définition du triangle obtusangle est celle-ci : si vous multipliez ses deux petits côtés chacun par lui-même, et si vous additionnez les produits, leur somme est moindre que le produit du long côté multiplié par lui-même.

Le triangle rectangle a deux cathètes et une hypoténuse. Il peut être considéré comme la moitié d'un quadrangle. Vous trouvez son aire en multipliant une de ses cathètes par la moitié de l'autre. Le produit est l'aire

Exemples. Un triangle rectangle, une cathète étant six coudées, l'autre huit, et l'hypoténuse dix. Vous l'évaluez en multipliant six par quatre, ce qui donne vingt-quatre : c'est là l'aire. Ou si vous le préférez, vous pouvez aussi le calculer par la hauteur qui s'élève perpendiculairement du plus long côté ; car les deux plus petits côtés peuvent eux-mêmes être considérés comme deux hauteurs. Si vous préférez cela, vous multipliez la hauteur par la moitié de la base. Le produit est l'aire (18). Voici la figure (*fig.* 6).

Seconde espèce. — Un triangle équilatéral avec ses angles aigus, dont chaque côté a dix coudées de long. Son aire peut être déterminée par la ligne représentant sa hauteur et le point d'où elle émerge. Observez que dans tout triangle isocèle, une ligne tirée jusqu'à la base pour représenter la hauteur émerge de la base à angle droit, et que le point d'où elle s'élève est toujours situé au milieu de la base; si, au contraire, les deux côtés ne sont pas égaux, alors ce point ne se trouve jamais au milieu de la base (19). Dans le cas actuellement sous nos yeux, nous apercevons que, quel que soit le côté vers lequel nous tirions la ligne qui doit représenter la hauteur, ce sera toujours nécessairement en son milieu que cette ligne tombera, là où la longueur de la base est cinq. Maintenant la hauteur sera ainsi obtenue : vous multipliez cinq par lui-même; alors multipliez un des côtés, c'est-à-dire dix par lui-même, ce qui donne cent. Maintenant vous retranchez de ce produit celui de cinq multiplié par lui-même, ce qui est vingt-cinq; le reste est soixante-quinze, dont la racine est la hauteur. Celle-ci est une ligne commune aux deux triangles rectangles (20).

Si vous avez besoin de trouver l'aire, multipliez la racine de soixante-quinze par la moitié de la base, qui est cinq. Vous effectuez ceci, en multipliant d'abord cinq par lui-même; alors vous pouvez dire, que la racine de soixante-quinze est à multiplier par la racine de vingt-cinq. Le produit est mille huit cent soixante-quinze; prenez sa racine, c'est l'aire; c'est quarante-trois et une petite quantité (21). Voici la figure (*fig.* 7).

Il y a aussi des triangles acutangles avec des côtés différents. Leur aire sera trouvée par le moyen de la ligne représentant la hauteur, et du point d'où s'élève cette dernière. Prenez, par exemple, un triangle, dont un des côtés est quinze coudées, un autre quatorze et le troisième treize coudées. Afin de trouver le point d'où s'élève la ligne marquant la hauteur, vous pouvez prendre pour base tel côté qu'il vous plaira choisir, par exemple : celui qui est long de quatorze coudées. Le point d'où s'élève la ligne représentant la hauteur, est situé sur cette base à une distance inconnue de chacun des deux autres côtés. Essayons de trouver sa distance inconnue du côté qui est long de treize coudées (22).

Multipliez cette distance par elle-même ; il en résulte *Mâl*. Retranchez-le de treize multiplié par lui-même, c'est-à-dire cent soixante-neuf. Le reste est cent soixante-neuf moins *Mâl*. La racine de ceci est la hauteur. Le reste de la base est quatorze moins *Shaï*. Nous multiplions ce reste par lui-même ; il en résulte cent quatre vingt-seize et *Mâl* moins vingt-huit *Shaï*. Nous retranchons ceci de quinze multiplié par lui-même ; le reste est vingt-neuf, et vingt-huit *Shaï* moins *Mâl*. La racine de ceci est la hauteur. Attendu que la racine de ceci est la hauteur, et que la racine de cent soixante-neuf moins *Mâl* est pareillement la hauteur, nous savons qu'elles sont toutes deux identiques. Réduisez-les, en transportant *Mâl* contre *Mâl*, puisque tous deux sont négatifs. Il reste vingt-neuf plus vingt-huit *Shaï*, qui sont égaux à cent soixante-neuf. Retranchez maintenant vingt-neuf de cent soixante-neuf. Le reste est cent quarante, égal à vingt-huit *Shaï*. *Shaï* est conséquemment cinq. Telle est la distance du point susdit, du côté de treize coudées. Le complément de la base vers l'autre côté est neuf. Maintenant pour trouver la hauteur, vous multipliez cinq par lui-même et retranchez ce produit, du côté contigu, qui est treize, multiplié par lui-même. Le reste est cent quarante-quatre. Sa racine est la hauteur. C'est douze (23). La hauteur forme toujours deux angles droits avec la base, et on l'appelle la *colonne*, parce qu'elle se tient perpendiculairement. Multipliez la hauteur par la moitié de la base, qui est sept. Le produit est quatre vingt-quatre, ce qui est l'aire (24). Voici la figure (*fig.* 8).

La troisième espèce est celle du triangle obtusangle avec un angle obtus et des côtés de longueurs différentes. Par exemple, un côté étant six, un autre cinq, et le troisième neuf. L'aire d'un tel triangle sera trouvée par le moyen de la hauteur et du point d'où s'élève une ligne représentant cette hauteur. Ce point, dans un tel triangle, peut être situé seulement sur son plus grand côté (25). Prenez le donc comme base : car si vous préfériez prendre un des petits côtés comme base, alors ce point tomberait par delà le triangle. Vous pouvez trouver la distance de ce point, et la hauteur, de la même manière que j'ai montrée pour le triangle acutangle; le calcul tout entier est le même; voici la figure (*fig.* 9).

Nous avons traité précédemment des cercles (26), de leurs propriétés et de leur évaluation. Ce qui suit est un exemple : si un cercle a sept pour son diamètre, alors il a vingt-deux pour sa circonférence. Vous trouvez son aire de la manière suivante : Multipliez la moitié du diamètre (27), qui est trois et un demi, par la moitié de la circonférence qui est onze. Le produit est trente huit et un demi, ce qui est l'aire. Ou bien vous pouvez encore multiplier le diamètre qui est sept, par lui-même; ceci est quarante-neuf; en en retranchant un septième et un demi-septième, ce qui est dix et un demi, il reste trente-huit et un demi, ce qui est l'aire. Voici la figure (*fig.*10).

Si quelqu'un s'enquiert du volume d'un pilier pyramidal, sa base étant quatre coudées par quatre coudées, sa hauteur dix coudées, et les dimensions à son extrémité supérieure deux coudées par deux coudées; nous savons déjà que toute pyramide va en décroissant vers son sommet, et que un tiers de l'aire de sa base, multiplié par la hauteur, donne son volume. La présente pyramide n'a pas de sommet. Nous devons en conséquence chercher à déterminer ce qui manque à sa hauteur pour rétablir le sommet. Nous observons que le rapport de la hauteur totale au dix que nous avons maintenant devant nous, est égal au rapport de quatre à deux (28). Or comme deux est la moitié de quatre, dix doit pareillement être la moitié de la hauteur totale, et la hauteur entière du pilier doit être vingt coudées. A présent nous prenons un tiers de l'aire de la base; c'est cinq et un tiers, et nous le multiplions par la hauteur qui est vingt. Le produit est cent six coudées et deux tiers, dont nous devons alors retrancher le fragment que nous avons ajouté afin de compléter la pyramide. C'est ce que nous exécutons en multipliant un et un tiers, ce qui est un tiers du produit de deux par deux, par dix; cela donne treize et un tiers. C'est là le fragment que nous avons ajouté afin de compléter la pyramide. Retranchant de cent six coudées et deux tiers, il reste quatre-vingt-trois coudées et un tiers; et c'est là le volume de la pyramide tronquée. Voici la figure (*fig.* 11).

Si le pilier a une base circulaire (29), retranchez un septième et un demi-septième du produit du diamètre multiplié par lui-même, le reste est la base.

Si quelqu'un dit : « Il y a une pièce de terre triangulaire, deux de ses côtés ont dix coudées chacun, et la base douze, quelle doit être la longueur d'un côté d'un carré situé dans un tel triangle? » La solution est celle-ci (30). D'abord vous déterminez la hauteur du triangle, en multipliant la moitié de la base, par elle-même, et retranchant le produit qui est trente-six, de l'un des deux petits côtés multiplié par lui-même, ce qui est cent; le reste est soixante-quatre : prenez-en la racine, c'est huit. Voilà la hauteur du triangle. Son aire est donc quarante huit coudées; puisque tel est le produit de la hauteur multipliée par la moitié de la base qui est six. Maintenant nous prenons pour un côté du carré cherché : *Shaï*. Nous le multiplions par lui-même; il en résulte *Mâl*, que nous gardons dans notre pensée. Nous savons qu'il doit rester deux triangles, aux deux côtés du carré, et un au-dessus. Les deux triangles aux deux côtés du carré sont égaux entre eux : ils ont même hauteur et sont rectangulaires. Vous trouvez leur aire en multipliant *Shaï* par six moins *un demi-Shaï*, ce qui donne six *Shaï* moins un demi-*Mâl*. Telle est l'aire de l'ensemble des deux triangles situés des deux côtés du carré. L'aire du triangle supérieur sera trouvée en multipliant huit moins *Shaï*, qui est la hauteur, par un demi-*Shaï*. Le produit est quatre *Shaï* moins un demi-*Mâl*. Tout ceci réuni est égal à l'aire du carré plus celle des trois triangles : ou, dix *Shaï* égalent quarante-huit, ce qui est l'aire du grand triangle. D'où *Shaï* est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée ; et c'est là la longueur d'un côté du carré. Voici la figure (*fig.* 12).

NOTES.

(1) Le savant arabiste M. *Rosen* n'est pas certain si sa traduction de la définition que *Mohammed* donne de la mesure est correcte. Bien que les points diacritiques manquent en partie dans le manuscrit, il ne peut cependant, dit-il, y avoir aucun doute pour ce qui est de la lecture du passage.

(2) Le mot arabe est *zara*, coudée, avant-bras. Dans les définitions des termes techniques données par *Bhascara-Acharya*, page 2 du *Lilavati*, on rencontre cette même mesure. Dans la cinquième stance, il dit : huit largeurs d'un grain d'orge sont ici un doigt ; quatre fois six doigts, une coudée (*cara*, avant-bras) ; quatre coudées, un bâton ; etc. Suivant le commentateur *Ganésa*, ceci s'applique à la coudée pratique adoptée par les artisans, et vulgairement appelée *gadj* ; suivant le même, trois longueurs d'un grain de riz aussi bien que huit largeurs d'un grain d'orge constituent le doigt. Quant au bâton (*danda*), *Manou* 2.41. dit qu'il doit être coupé à peu près de la hauteur d'un homme.

(3) Le début de *Mohammed ben Moussa* montre suffisamment que c'était véritablement bien une sorte de manuel, à l'usage du peuple, qu'il voulait composer ; il ne donne pas les définitions de la science, il enseigne de prime abord le moyen pratique de mesurer les surfaces, celle du carré premièrement, et cela à l'aide d'exemples numériques. On peut à ce passage comparer l'introduction à la géométrie de *Beha-eddin*.

(4) *Mohammed ben Moussa*, versé dans les sciences des hindous, ne donne point ici la formule particulière qui convient à la surface du triangle équilatéral. Il donne le moyen général de mesurer un triangle quel qu'il soit (la hauteur par la moitié de la base), quoiqu'il connût non-seulement la formule $S = \sqrt{3 . \frac{a^4}{16}}$, mais encore

celle qui donne la surface d'un triangle quelconque en fonction de ses trois côtés. Mais il n'oublie pas qu'il écrit pour le vulgaire, et non pour des mathématiciens; une seule règle, qui convienne à tous les cas, suffit. *Beha-eddin* au contraire a bien soin de relater la règle : « Tu multiplies par 3 le carré de la quatrième partie du carré d'un côté indistinctement; ensuite c'est la racine carrée du produit, la réponse. »

(5) Il faut observer la différence de signification attachée au mot diamètre par *Mohammed ben Moussa* et par *Beha-eddin*. Ici, le diamètre est la diagonale du carré, ou le diamètre du cercle circonscrit. Quand *Beha-eddin*, au contraire, donne la mesure du polygone régulier d'un nombre pair de côtés, il dit : multiplie le demi-diamètre, par la demi-somme des côtés, et il ajoute : or, le diamètre est la ligne qui joint les points milieux de deux côtés opposés.

Ainsi, pour *Mohammed ben Moussa*, c'est le diamètre du cercle circonscrit, et pour *Beha-eddin*, c'est le diamètre du cercle inscrit.

Les mathématiciens hindous *Souryadâsa* et *Ranganâtha*, disent la diagonale ou diamètre d'un tétragone. (*Lilavati*, p. 59.)

(6) Ici nous remarquons trois valeurs distinctes du rapport de la circonférence au diamètre, trois formules différentes. La première donne $\pi = \frac{22}{7}$, c'est le rapport d'*Archimède*. La deuxième donne : $\pi = \sqrt{10}$, et la troisième, celle en usage parmi les astronomes et la plus exacte en même temps, suppose $\pi = \frac{62832}{20000}$; ces trois valeurs en décimales, sont :

3,1428. . . . . .
3,16227. . . . .
3,14160. . . . .

Pour obtenir une plus grande approximation que cette dernière, il faut se servir du rapport 3,1415926. . . . .

La première et la troisième formule

$$\text{circ} = \frac{22}{7}\,\text{D} \quad \text{et} \quad \text{circ} = \frac{62832}{20000}\,\text{D},$$

se trouvent dans le *Lilavati* de *Bhascara*, p. 87 de l'introduction de M. Colebrooke. Seulement cette dernière est donnée par le géomètre hindou sous la forme plus simple, à laquelle elle est réductible, en divisant par 16 les deux termes du rapport

$$\text{circ} = \frac{3927}{1250}\,\text{D}.$$

La seconde formule circ $= \sqrt{10\,D^2}$ se trouve dans le *Ganita d'hyaya* de *Brahmagupta*, § 40. Nous croyons devoir rectifier à ce sujet l'erreur que M. *Rosen* a laissée échapper. Il dit que cette seconde formule se rencontre dans le *Vija Ganita*, p. 308, 309. Pour le lecteur qui n'aurait pas l'ouvrage de *Colebrooke* entre les mains, et ne pourrait se porter aux pages désignées, cette erreur ne serait pas indifférente, car elle ferait supposer que c'est *Bhascara*, l'auteur du *Vija Ganita* qui emploie cette formule, tandis que c'est *Brahmagupta*, antérieur de près de six cents ans, et qui n'en emploie pas de plus approchée. On lit aussi dans le savant ouvrage de M. *Chasles*, p. 446. « Il paraît, d'après le texte anglais, que *Brahmegupta* a regardé cette expression $(\sqrt{10})$, comme étant le rapport *exact* de la circonférence au diamètre. *Chaturveda*, dans ses notes, semble le croire ainsi. Cela ne nous étonne point de la part de ce scoliaste; mais il est difficile de penser qu'un géomètre qui a été capable d'écrire sur la théorie du quadrilatère inscrit au cercle, et de résoudre les questions que nous avons trouvées dans l'ouvrage de *Brahmegupta*, ait commis cette faute. Il est vrai que la quadrature du cercle a été aussi l'écueil d'un grand nombre de géomètres modernes, qu'elle a entraînés dans des erreurs semblables; quoique plusieurs d'entre eux eussent donné des preuves d'un véritable et profond savoir en mathématiques. Il nous suffira de citer *Oronce Finée* et *Grégoire de Saint-Vincent*. L'expression $\sqrt{10}$ est précisément le rapport que *J. Scaliger* disait avoir trouvé le premier, et croyait avoir démontré géométriquement : mais on connaissait depuis longtemps en Europe cette expression, qu'on savait n'être qu'approchée. On l'attribuait aux arabes ou aux indiens, et l'on supposait que ces peuples l'avaient regardée comme exacte. »

La présence simultanée des trois valeurs de π, et le langage de *Mohammed ben Moussa*, devaient prouver suffisamment, ce me semble, aux géomètres européens *Purbach*, *Regiomontanus*, *Buteon*, etc., que les Arabes ne regardaient point $\sqrt{10}$, comme la valeur *exacte* du rapport. Voici une note marginale du manuscrit d'Oxford, faite sur le passage qui nous occupe, s'il restait quelques doutes, elle pourrait les dissiper : « Ceci est une approximation, non pas l'exacte vérité; personne ne peut fixer l'exacte vérité de ceci, et trouver la circonférence réelle, excepté celui qui sait tout : car la ligne n'est pas droite de manière à ce que son exacte longueur puisse être trouvée. Ceci est appelé une approximation, de la même manière que l'on dit des racines carrées des nombres irrationnels, qu'elles sont une approximation, et non pas l'exacte vérité; car Dieu seul sait quelle est la racine exacte. La meilleure méthode ici donnée, c'est de multiplier le diamètre par trois et un septième : car elle est la plus aisée et la plus prompte. Dieu sait mieux ! » (*Rosen*, p. 200.)

Quant aux Hindous, croyaient-ils $\sqrt{10}$ le rapport exact? Du temps de *Bhascara*, évidemment non; car des trois valeurs du rapport, celle-ci seule n'est pas mentionnée par *Bhascara*, et au contraire c'est celle de *Brahmagupta*. Ce qui a fait pencher à croire que *Brahmagupta* la regardait peut-être comme exacte, c'est simplement l'expression anglaise *neat value* (*) appliquée à ce rapport $\sqrt{10}$, et que l'on a traduite par *valeur exacte*, *vraie*; or, de l'avis de Johnson et de Walker, ce n'est pas là la signification du mot *neat*. Aryabhatta, antérieur à Brahmagupta, avait pour ce rapport, une valeur plus approchée, $\frac{22}{7}$, et il ne la croyait pas exacte !

M. *Rosen* fait observer qu'il a simplement traduit les mots *handasah* par *geometricians* (géomètres), quoique, d'après la manière dont *Mohammed* se sert ici de cette expression, il semblerait qu'il la prenait dans un sens plus spécifique. Il cite à l'appui *Firouzabadi* (*Kamus*, p. 814, éd. Calcutt.), qui donne au mot *handasah* une origine persane, et prétend qu'il signifie « celui qui détermine à l'aide de mesures où les canaux pour l'eau seront creusés. » Les Persans eux-mêmes assignent une autre signification au mot *hindisah*, comme ils le prononcent; ils l'emploient dans le sens de notation décimale des nombres (*Burhani Kati*). Si nous adoptions cette version, ajoute M. *Rosen*, le passage nous apparaîtrait sous un jour entièrement nouveau. Les *handassi*, auxquels notre auteur attribue les deux dernières formules, seront alors les mathématiciens Hindous, qui avaient apporté avec eux la notation décimale; et les *alhandasah*, auxquels la seconde et la plus exacte de ces méthodes est attribuée, seront les astronomes parmi ces mathématiciens Hindous. Ce qui précède donne tout lieu de croire cette dernière version préférable.

(7) L'aire du cercle dont le diamètre est d, est :

$$\pi\frac{d^2}{4}=\frac{22}{7\times 4}d^2=\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{2\times 7}\right)d^2.$$

La première méthode donne aire du cercle

$$=\frac{\text{circ}}{2}\times\frac{d}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi d}{2}\times\frac{d}{2} \quad \text{ou} \quad \pi\frac{d^2}{4},$$

(*) C'est probablement une erreur typographique, il faut lire *near*, approchée. TR.

en supposant $\pi = \frac{22}{7}$, elle conduit identiquement au même résultat que le produit effectué de $\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{2 \times 7}\right)$ par d^2, c'est-à-dire à $\frac{11}{14} d^2$, valeur donnée comme bonne dans la pratique, quand on n'a pas besoin d'une grande approximation, par *Bhascara Acharya*, p. 89 du *Lilavati*. Ces différents moyens d'obtenir la surface du cercle, sont tous énoncés par *Beha edd n*. (*Khelasat al Hisab*. Géomét., 2e section.)

(8) Les Hindous avaient aussi les mots *sara*, *ishou*, et autres synonymes qui signifient flèche, pour désigner cette même droite. *Bhascara* et *Brahmagupta* emploient le mot flèche. De plus, le commentateur *Chatourveda* observe dans ses notes au *Ganita-d'hyaya*, 41e stance, que ce qui est appelé de son temps (diamètre moins la flèche), est dénommé par *Arya-Bhatta* la grande flèche. En effet, *Aryabhatta* dit : « Dans un cercle, le produit des flèches est égal au carré de la demi-corde des deux arcs. »

Arya-Bhatta est le plus ancien algébriste Hindou connu; il fut à peu près contemporain de *Diophante*; il se servait de la valeur $\pi = \frac{22}{7}$, que n'employa pas *Brahmagupta* qui vint après lui, mais qui fut adoptée plus tard par *Bhascara*. Pour donner une idée de ses connaissances algébriques, il suffit de dire qu'il donna la résolution de l'équation du premier degré à deux inconnues, en nombres entiers, par une méthode semblable à celle de *Bachet de Meziriac*, qui a paru en Europe, pour la première fois, en 1624.

(9) Dans la partie géométrique du *Khelasat-al-Hisab*, ce passage ou son analogue ne se rencontre pas. *Beha-Eddin* se borne à donner, dans un ordre logique, les définitions des différentes lignes des surfaces et des corps, puis à énoncer les moyens de mesurer ces surfaces et les volumes et les surfaces de ces corps. En revanche, nous retrouvons cet énoncé chez les Hindous dans le *Ganita d'hyaya* de *Brahmagupta*, stance 41 : « Le carré de la corde, divisé par quatre fois la flèche, et ajouté à la flèche, est le diamètre. » *Chatourveda*, dans son commentaire, l'explique par quatre exemples, dont les trois derniers sont imités par *Bhascara* dans son *Lilavati*, § 148-153, et dans son *Vija-Ganita*, § 123-125 et 139. Voici l'un de ces exemples : « Un bambou haut de dix-huit coudées était brisé par le vent; le sommet touchait la terre à six coudées de la racine : dites la longueur des segments du bambou. (Ces segments sont dix et huit.) » *Bhascara* donne l'énoncé de *Mohammed* mot à mot; ainsi il dit : « Le carré de la demi-corde étant divisé par la flèche, le quotient ajouté à la flèche est

prononcé le diamètre du cercle. Le commentateur *Ganésa* observe que prononcé signifie *cela a été déclaré ainsi par les anciens*. *Aryabhatta* et *Brahmagupta*, sont considérés comme des anciens par les commentateurs de *Bhascara*. Nous rapporterons encore ici la règle suivante pour trouver l'arc. Elle est citée par *Ganesa* d'après *Arya-Bhatta* : « Six fois le carré de la flèche étant ajouté au carré de la corde, la racine carrée de la somme est l'arc.

(10) C'est ce qu'exprime plus brièvement *Beha-Eddin* lorsqu'il dit : « Quant aux deux *segments*, marque bien le centre, et achève les deux secteurs, alors il se forme là un triangle; retranche-le du plus petit secteur, il en résulte le plus petit segment, ou ajoute-le au plus grand, il en résulte le plus grand segment. »

Colebrooke, dans la traduction du *Lilavati*, p. 96, donne la note suivante, intéressante en elle-même, et qui trouve naturellement ici sa place :

« Pour trouver l'aire de l'arc ou le segment d'un cercle, la règle suivante est donnée dans le *Ganita-Sára* de *Vishnou*, ainsi que le rapporte *Gangádhara*; cette même règle est enseignée par *Césava*, cité par son fils *Ganésa* : « La flèche étant multipliée par la demi-somme de la corde et de la flèche, et un vingtième du produit étant ajouté à ce produit, la somme est l'aire du segment. »

La règle de *Srid'hara*, citée par *Ganésa*, est : « le carré de la flèche, multiplié par la demi-somme de la corde et de la flèche, étant multiplié par dix et divisé par neuf, la racine carrée du produit est l'aire de l'arc. » *Ganésa* ajoute : « la corde et la flèche étant données, trouvez le diamètre, puis la circonférence, et par suite l'arc. Alors, des extrémités de l'arc, tirez des lignes au centre du cercle. Trouvez l'aire du secteur (*Vritta-chanda*, portion d'un cercle) en multipliant la moitié de l'arc, par le demi-diamètre; et l'aire du triangle, en multipliant la moitié de la corde par le demi-diamètre diminué de la flèche. Retranchant l'aire du triangle de l'aire du secteur, la différence est l'aire du segment. » Le *Manórandjana* donne une semblable règle; mais il trouve l'aire du secteur par la proposition : comme la circonférence entière est à l'aire entière, de même l'arc proposé est à l'aire du secteur. »

Comme on le voit, les derniers moyens employés pour trouver l'aire du segment ne sont autres que ceux de *Mohammed-ben-Moussa* et de *Beha-Eddin*. La formule rapportée par *Ganga-d'hara*, et enseignée par *Césava*, segment $=\frac{21}{20}f\left(\frac{c+f}{2}\right)$, f désignant la flèche et c la corde, donne pour le cas particulier $f=\mathrm{R}$, où le segment égale le demi-cercle, la valeur $\frac{441}{280}\mathrm{R}^2$, et si l'on emploie la formule habituelle : R^2, $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$, on trouve, pour le demi-cercle $\frac{440}{280}$ R^2. La différence est donc de $\frac{1}{280}$.

(11) Pour les cylindres et prismes de chaque espèce, multiplie la hauteur par la surface plane de la base. — Pour les cônes entiers et les pyramides de chaque espèce, multiplie la hauteur par un tiers de l'aire de la base. (*Beha-Eddin*, Géom., 3e section.)

Ainsi, nos deux auteurs arabes regardent le cylindre comme une variété du prisme, comme un prisme, le cône comme une pyramide. Cette assimilation a un caractère encore plus frappant chez les Hindous, qui par le seul mot *sama-châta* (solide de figure régulière avec des côtés égaux) désignent le parallélipipède, le cylindre, etc.; pour les pyramides et les cônes, ils emploient l'expression *souchi-châta* (*solide aigu*). (*Lilavati*, stance 217.)

(12) La preuve qu'en donne *Mohammed-ben-Moussa* ne s'applique qu'au triangle rectangle isocèle. La vérité géométrique énoncée se vérifie pour le triangle donné en exemple. Elle parle aux yeux, et son but est d'aider la mémoire plutôt que de satisfaire rigoureusement l'esprit. Aussi termine-t-il en disant : « C'est cette observation que nous étions désireux *d'éclaircir.* » C'est cette figure relative au carré de l'hypoténuse que *Beha-Eddin* appelle la *figure de la fiancée.* Jusqu'ici on n'a pu expliquer d'où est provenue cette désignation. Les précieux fragments arabes et persans inédits, relatifs à l'Inde, antérieurement au onzième siècle de l'ère chrétienne, recueillis et publiés récemment par M. *Reinaud*, jetteront un jour nouveau sur cette question. L'auteur des deux passages que nous allons rapporter d'après le savant professeur est *Beladori*. Son véritable nom était *Ahmed*, fils de *Yahya*; il vivait à la cour du khalife de Bagdad *Almotawakkel*, et dirigea l'éducation d'un prince de la famille du khalife. Il mourut l'an 279 de l'hégire (892 de J. C.). L'ouvrage est intitulé : *Livre des Conquêtes des pays*; il appartient à la riche bibliothèque de Leyde. « *Mohammed*, fils de *Cassem*, quitta *Armâyl* ayant avec lui *Djehem*, fils de *Zakhar Aldjofy*; il arriva un vendredi devant *Daybal*; des navires lui amenèrent en cet endroit des hommes, des armes et des machines. Aussitôt il creusa un fossé autour de son camp. Les approches du fossé étaient défendues par des hommes armés de lances, et les étendards étaient tenus déployés. Chaque troupe de guerriers était rangée auprès de son étendard; en même temps, *Mohammed* fit dresser la machine de guerre nommée *la fiancée*, laquelle était de la force de cinq cents hommes. Or, il y avait à *Daybal* un grand *bodd* surmonté d'un grand mât; sur le mât était

un drapeau rouge qui, lorsque le vent soufflait, se déployait sur la ville. »

Le *bodd* est un temple (probablement consacré à *Bouddha*). (*Reinaud.*) Le second passage est une lettre du fameux *Hadjadj*, gouverneur musulman de l'Irac, à son lieutenant *Mohammed* (celui dont il est question dans le premier passage), campé aux portes de *Daybal*. « Dresse *la fiancée* et raccourcis-lui une des jambes; tu placeras la machine du côté de l'Orient; ensuite tu appelleras l'homme chargé de la faire mouvoir, et tu lui ordonneras de viser le mât dont tu m'as fait la description. » *Beladori* continue son récit : « On lança donc des projectiles contre le mât, qui fut brisé : cet événement affligea vivement les Infidèles. »

Les Arabes, aussi bien que les Hindous, disent *jambe* ou *côté* d'un triangle; ce fut probablement cette machine de guerre qui donna son nom à la figure du carré de l'hypoténuse. La panoplie aura fourni cette expression à la géométrie, de même que les mots *arc*, *flèche*, etc. (*fig.* 1 et 2).

Nous allons rapporter ici la démonstration figurée du théorème du carré de l'hypoténuse donnée par les Hindous, et une autre du même genre, à laquelle la connaissance de la première a dû conduire naturellement.

$$c^2 = (a-b)^2 + 4\frac{ab}{2} \qquad\qquad c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2}$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ab \qquad\qquad = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab$$
$$= a^2 + b^2, \qquad\qquad = a^2 + b^2.$$

(13) Ce sont ces quadrangles avec angles et côtés inégaux que *Beha-Eddin* nomme *trapèzes*. Le célèbre commentateur d'*Euclide*, *Nasr' Eddin*, parle aussi de trapèzes, et ces quadrilatères n'ont pas de côtés parallèles. Le mot trapèze, qui répond à la dénomination sanscrite *rishama-chatourasra*, s'applique, chez les Hindous, au tétragone qui a ses quatre côtés inégaux. C'est la signification que lui donne aussi *Euclide* (définition 34e du 1er livre), c'est celle-là que lui ont toujours conservée les Anglais. C'est vers la fin du siècle dernier que le mot trapèze a pris la signification qu'il a aujourd'hui en France; jusque là, parmi nous, il avait eu celle d'*Euclide*.

Chatourveda, le commentateur de *Brahmagupta*, distingue aussi cinq espèces de tétragones ou quadrilatères. Le tétragone est (*sama-chatourasra*) équilatéral; (*âyata-sama-chatourasra*) oblong avec côtés égaux (deux à deux); (*doui-sama-chatourasra*) ayant deux côtés égaux; (*tri-sama-chatourasra*) ayant trois côtés égaux; (*rishama-chatourasra*) les ayant tous inégaux.

Ganésa distingue les quadrangles en deux classes principales. Ils ont leurs diagonales égales ou inégales. La 1re classe comprend 4 espèces : carré, trapèze, parallélogramme oblique, rectangle. La seconde classe renferme 6 espèces : losange, trois côtés égaux, rhomboïde, deux côtés égaux, quatre côtés inégaux ou trapèze; perpendiculaires égales ou trapézoïde.

Outre les figures planes citées par *Mohammed-ben-Moussa*, nous trouvons encore dans *Beha-Eddin*, la *lune*, le *fer à cheval*, le *navet*, le *myrobolan*, certains trapèzes qu'il dénomme : *trapèze à une pointe*, *à deux pointes* et *concombre*. Puis, parmi les polygones singuliers d'un plus grand nombre de côtés, les figures *scalariforme*, *tympaniforme*, *spiculiforme*.

Nous trouvons de même chez les Hindous les figures suivantes, citées par *Srid'hara*, *Souryadasa* et *Gangad'hara*. On peut en faire le curieux rapprochement avec les figures planes de *Beha-Eddin*.

Le *gadja-danta* ou dent d'éléphant, que l'on peut traiter comme un triangle; le *bâlendou*, ou le croissant, qui peut être considéré comme composé de deux triangles; le *yava*, ou grain d'orge (lentille convexe), traité comme consistant soit en deux triangles, soit en deux segments; le *némi*, ou jante de roue, considéré comme un quadrilatère. La *vadja*, ou la foudre, traitée comme comprenant deux triangles, suivant *Souryadasa*, ou un quadrilatère avec deux segments ou deux trapèzes, suivant *Gangad'hara*, ou bien encore deux quadrilatères, suivant *Srid'hara*; la *sanc'ha* ou conque, le *mridanga*, ou grand tambour, et beaucoup d'autres.

(14) Soient en général d, d', les diagonales d'un losange, c son côté. Son aire sera $\frac{dd'}{2} = d \times \sqrt{c^2 - \frac{d^2}{4}}$.

On peut remarquer en passant que *Mohammed-ben-Moussa* dans tous ses exemples, choisit des nombres rationnels entiers; de plus ici les côtés du losange sont ceux du carré précédemment figuré, et les diagonales sont les côtés du rectangle qu'il vient de donner pour exemple.

(15) Les deux triangles rectangles qui joints au rectangle forment le rhomboïde, ne sont autres que deux des quatre triangles rectangles qui constituent le rhombe. On doit remarquer encore que leurs côtés sont trois nombres entiers consécutifs 3, 4 et 5.

(16) « Partage les autres quadrilatères en deux triangles, alors la somme des deux aires est égale à l'aire de la somme. » *Beha-Eddin*.

(17) *Mohammed-ben-Moussa* et *Beha-Eddin* ne définissent ni l'un ni l'autre le triangle dont ils reconnaissent trois espèces; ils énoncent la propriété caractéristique qui distingue chacune d'elles.

Ganésa dit : « Le triangle est une figure qui contient trois angles et consiste en autant de côtés. » Selon lui, le triangle est ou rectangulaire (*jatya*) ou trilatéral et (oblique) (*tribhoudja*) comme le fruit du *Sringata* (Trapa natans). On le distingue encore d'après la direction de la perpendiculaire (*lamba*), c'est-à-dire suivant que la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors du triangle, en *antar-lamba* acutangle et *bahir-lamba* obtusangle. *Chatourveda* au contraire, le commentateur de *Brahmagupta*, distingue trois sortes de triangles; ce sont le (*sama-tribhoudja*) équilatéral, (*doui-sama-tribhoudja*) isocèle, et (*vishama-tribhoudja*) scalène.

(18) C'est le triangle moitié du rectangle déjà donné comme exemple, et en même temps équivalent au losange dont on a donné la figure. Les côtés sont les trois nombres pairs consécutifs : 6, 8, 10 doubles des trois côtés 3, 4, 5, nombres impairs consécutifs des triangles rectangles qui constituent le susdit losange.

(19) Pour trouver dans un triangle quelconque, le pied de la perpendiculaire, on a d'après *Beha-Eddin*, en appelant a la base, b le côté moyen, c le plus petit côté, la formule suivante :

$$x=\frac{a}{2}-\frac{(b+c)(b-c)}{2a}.$$

Si dans cette formule, on fait $b=c$, on voit immédiatement que

$$x=\frac{a}{2}.$$

(20) $H=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{100-25}=\sqrt{75}.$

(21) $S=H\times\frac{B}{2}=\sqrt{75}\times 5=\sqrt{75}\times\sqrt{25}=\sqrt{1875}=43,30.$

(22)
$$\begin{aligned}15^2-(14-x)^2&=13^2-x^2\\ 15^2-196-x^2+28x&=169-x^2\\ 29+28x&=169\\ 28x&=140\\ x&=5.\end{aligned}$$

Beha-Eddin emploie la formule

$$x=\frac{a}{2}-\frac{(b+c)(b-c)}{2a}=7-\frac{28.2}{2.14}=7-2=5.$$

Il arrive à cette formule en appliquant le théorème qui donne la valeur du carré fait sur un côté opposé à un angle aigu.

(23) $H=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12.$

(24) La hauteur et les trois côtés sont les quatre nombres entiers consécutifs : 12, 13, 14, 15. *Mohammed ben Moussa* a choisi le triangle le plus propre à servir d'exemple. Nous résumerons ici les

observations auxquelles ces nombres ont conduit M. *Chasles* dans son Aperçu historique. « Ces nombres sont très-remarquables en ce qu'ils sont ceux choisis à plusieurs siècles d'intervalle, non-seulement par les Hindous, mais aussi par *Héron d'Alexandrie*, *Héron le Jeune*, les trois fils de *Moussa ben Shaker*, *Léonard de Pise*, *Jordan*, *Lucas de Burgo*, *Georges Valla*, *Tartalea*, etc. » L'usage général de ces trois nombres semblait dire qu'ils avaient une origine commune; mais M. *Chasles* en y réfléchissant davantage, ne tarda pas à reconnaître que ces nombres n'offraient probablement pas les secours historiques qu'il avait espérés d'abord. En effet, on aura cherché naturellement, pour les trois côtés du triangle à proposer en exemple, trois nombres pour lesquels l'aire de ce triangle, et conséquemment la hauteur, fussent exprimées en nombres rationnels. Cette question se réduit à construire deux triangles rectangles en nombres rationnels, ayant un côté commun. C'est ainsi que *Brahmagupta* a fait. Maintenant parmi tous les systèmes de deux triangles rectangles exprimés en nombres rationnels entiers, et ayant un côté commun, on aura pris celui où ces nombres sont les plus petits; ce sont ceux qui ont pour côtés, le premier 5, 12, 13, et le second 9, 12, 15. Plaçant ces deux triangles de manière que leurs deux côtés égaux se confondent et que les autres côtés des angles droits soient dans le prolongement l'un de l'autre, on forme le triangle acutangle qui a sa base égale à 14, et ses deux autres côtés égaux à 13 et à 15. C'est ainsi que différents géomètres, chacun de son côté, auront pu être conduits au triangle exprimé par les nombres 13, 14, 15.

(25) Dans le triangle obtusangle, multiplie la perpendiculaire qui tombe de l'angle obtus sur le côté opposé, par la moitié de ce côté opposé, ou inversement (*Beha-Eddin*. — *Khelasat al Hisâb*).

Dans un triangle obtusangle, la base multipliée par la moitié de la perpendiculaire, est l'aire (*Ganésa*. Commentaire au *Lilavati*). Ce même géomètre hindou donne une démonstration directe et bien simple du théorème qui exprime la surface du triangle en fonction de sa base et de sa hauteur. Il forme un rectangle qui a même base que le triangle et pour hauteur la moitié de la perpendiculaire. L'inspection de la figure fait reconnaître *à priori* que la surface du triangle est égale à celle du rectangle, d'où il conclut que l'aire du triangle est égale au produit de la base par la moitié de la perpendiculaire.

Dans le *Khelesat al Hisâb*, nous avions répété d'après M. *Taylor* de Bombay, qu'il n'existait aucun exemple de la multiplication par le *Réseau* ou *Shabacah* dans les livres sanscrits; la traduction du *Lilavati* par l'illustre *Colebrooke*, nous prouve le contraire; l'exemple qui se rencontre dans le commentaire est de *Ganesa*.

(26) *Mohammed ben Moussa* et *Beha-Eddin* ne définissent point la circonférence; *Beha-Eddin* divise la *ligne courbe* en *ligne circulaire qui est connue*, et en *courbe non circulaire*, dont il n'a point à s'occuper dans son *Khelasat al Hisâb*.

Dans les ouvrages hindous, dans ceux de *Brahmagupta* et de *Bhascara*, on ne voit pas de définition du cercle, et *Ganésa* explique cette absence de définition, en disant que le cercle et l'arc n'ont pas besoin d'être définis.

(27) Il est à remarquer que ni *Mohammed ben Moussa*, ni *Beha-Eddin* n'emploient de mot unique équivalent au nôtre: *rayon*. Ils mentionnent toujours le diamètre, et pour *rayon*, ils disent demi-diamètre. Les Hindous ont un mot *carcata*, ouverture de compas, littéralement *écrevisse*, pour désigner le rayon (p. 90 du *Lilavati*).

(28) $H : 10 :: 4 : 2$ d'où $H = 20$.

$$\text{Pyramide entière} = 5\frac{1}{3} \times 20 = 106\frac{2}{3}.$$

$$\text{Fragment ajouté} = \frac{4}{3} \times 10 = 13\frac{1}{3}.$$

$$\text{Pyramide tronquée} = 106\frac{1}{3} - 13\frac{1}{3} = 83\frac{1}{3}.$$

Pour la pyramide tronquée, multiplie un côté de la plus grande base par la hauteur, et divise le produit par la différence entre un côté de cette base et un de la petite, tu as alors la hauteur de la pyramide entière; mène ensuite l'opération à fin (*Beha-Eddin*).

(29) C'est-à-dire si le pilier prend la forme d'un cône tronqué. Alors multiplie le diamètre de la plus grande base par la hauteur, et divise le produit par la différence des diamètres des deux bases, il en résulte la hauteur du cône comme s'il était entier, etc. (*Beha-Eddin*).

(30) Voici la marche suivie par l'auteur pour résoudre cette question :

$$H = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$$
$$S = 8 \times 6 = 48$$
$$S = x^2 + x\left(6 - \frac{1}{2}x\right) + (8 - x)\frac{1}{2}x;$$

donc
$$x^2 + 6x - \frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{1}{2}x^2 = 48$$
$$10x = 48$$
$$x = \frac{48}{110} = 4\frac{4}{5}.$$

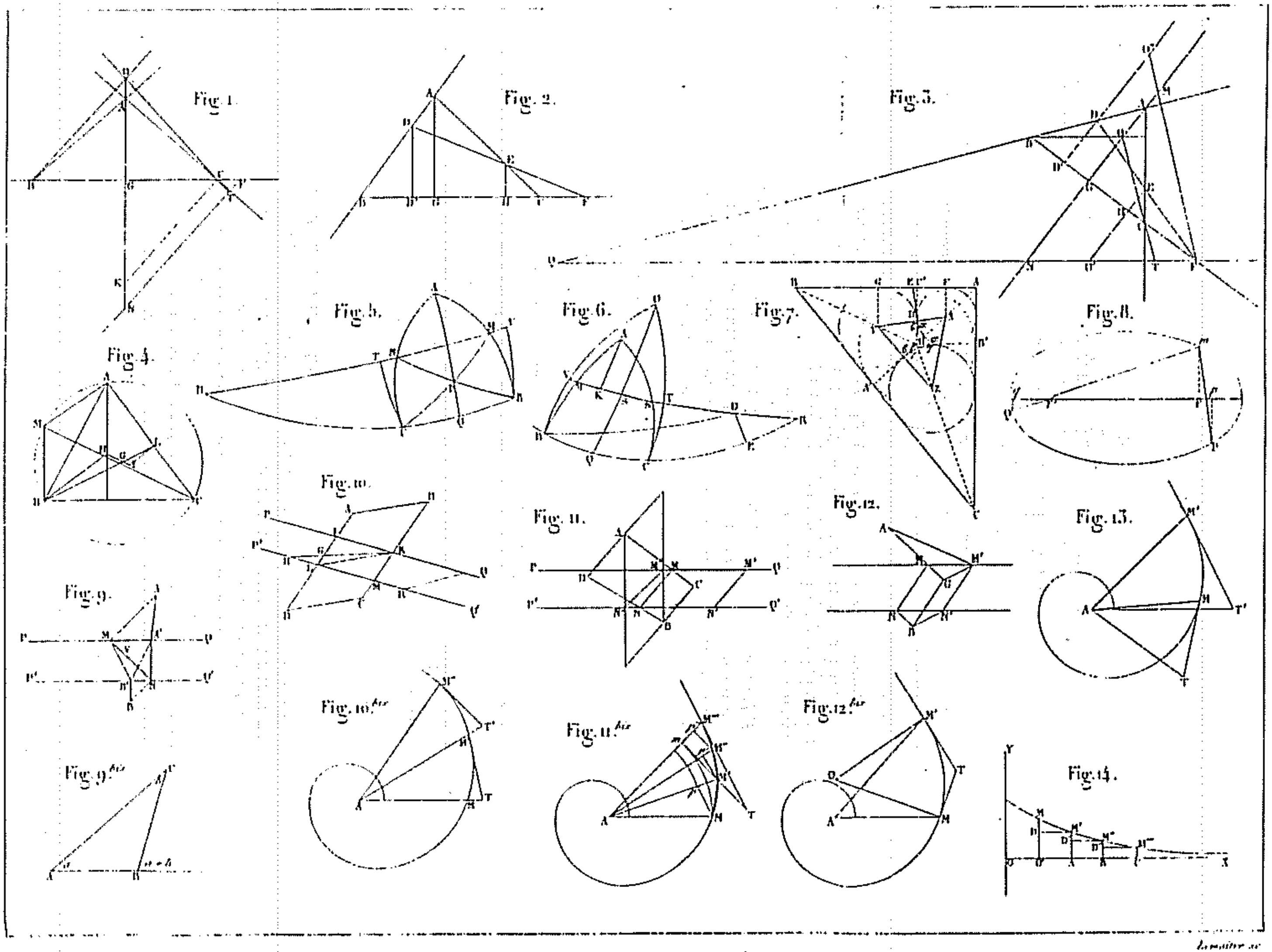


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 9. bis
Fig. 10.
Fig. 10. bis
Fig. 11.
Fig. 11. bis
Fig. 12.
Fig. 12. bis
Fig. 13.
Fig. 14.
Lemaître sc.

102

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

LE MESSÂHAT

DE

MOHAMMED BEN MOUSSA AL KHÂREZMI

EXTRAIT DE SON ALGÈBRE

TRADUIT ET ANNOTÉ

PAR

ARISTIDE MARRE

PRÉFACE

Abou Abdallah Mohammed ben Moussa Al Khârezmi est le plus ancien algébriste arabe connu. C'est l'opinion de Zakâria ben Mohammed ben Mahmoud Al Qazouīni et de presque tous les historiens et mathématiciens de sa nation. Ibn Khaldoûn déclare expressément que le premier, parmi les Arabes, qui écrivit sur l'Algèbre, fut Abou Abdallah Al Khârezmi.

Vers l'an 820 de J. C., à la demande de l'illustre Khalife Al Mamoun, Mohammed ben Moussa composa « un ouvrage abrégé sur le calcul par *djebr et » mokâbalah*, restreint à ce qu'il y a de plus aisé et de plus utile, c'est-à-» dire aux opérations dont on a sans cesse besoin dans les cas d'héritage, de » donation, de procès, dans les affaires du commerce et de la vie pratique, ou » encore pour la mesure des terres, le creusement des canaux et autres appli-» cations du calcul à la géométrie. » C'est ainsi que s'exprime notre auteur lui-même dans sa préface à son *Kitâb al mokhtessar fî hissâb aldjebr oua'l mokâbalah*. Ce petit traité eut de nombreux commentateurs, non seulement parmi les Arabes d'Espagne, honorés d'une mention spéciale à cet égard par Ibn Khaldoûn *, mais encore parmi leurs frères d'Orient : il nous suffira de citer le

* Ibn Khaldoûn nomme Al Korachi, comme l'auteur d'un des meilleurs commentaires de l'Algèbre de Mohammed ben Moussa. Ce pourrait bien être là le nom de l'auteur d'un des traités inédits qui se trouvent dans le même volume que le manuscrit de Mohammed ben Moussa, à la Bibliothèque Bodléyenne d'Oxford. Ce nom est complètement dépourvu de points diacritiques, c'est pourquoi M. Fréd. Rosen a lu par conjecture Al Jaza'ï, mais ce mot pourrait se lire Al Korachi, par la simple substitution d'un *chîn* au lieu d'un *aïn*, pour l'avant-dernière lettre. Le commentaire aurait été réuni tout naturellement ainsi sous la même couverture que le traité commenté. Sans toucher au corps du mot, on pourrait encore lire Al Khozâa'ï, nom bien connu dans les annales de l'Islam, puisqu'il fut porté par le Khalife Omrân ben Hosseïn Al Khozâa'ï.

célèbre Abou'l-wafâ Al Bouzdjâni, mort en 999 de J. C. L'auteur du lexique bibliographique intitulé: *Tarikh al hokama*, (1198 de J. C.), parlant des ouvrages hindous parvenus aux Arabes, s'exprime ainsi: « In manus nostras incidit Liber Artis Logisticæ, a Mohammado ben Musa al Khuarezmita exornatus, qui cæteros omnes brevitate methodi ac facilitate præstat, Indorumque in præclarissimis inventis ingenium et acumen ostendit. » On sait qu'avant l'avènement d'Al Mamoun au Khalifat, c'est-à-dire avant 814 de J. C, et à la demande de ce prince, Mohammed ben Moussa avait déjà fait un Abrégé de Tables astronomiques dressées par un savant Hindou venu en 773 de notre ère à la cour d'Al Mansour, et traduites par Mohammed ben Ibrahim Al Fazâri *. Si l'on a pu contester la provenance hindoue de l'algèbre arabe, un fait historique demeure aujourd'hui incontestable: C'est que Mohammed ben Moussa Al Khârezmi est le véritable instituteur des nations de l'Europe moderne dans cette branche principale des Mathématiques. Les traductions latines de l'Algèbre de Mohammed ben Moussa, faites par les savants du moyen âge, furent la source où les savants du XVI.e siècle vinrent puiser leurs connaissances algébriques. L'*ars logistica*, le calcul par Djebr de Mohammed ben Moussa, devint l'*ars magna* de Cardan et des autres mathématiciens de l'Italie, de l'Espagne, de la France, de l'Angleterre et de l'Allemagne.

L'existence d'une copie du *Kitâb al mokhtessar fî hissâb aldjebr oua'l mokâbalah* de Mohammed ben Moussa Al Khârezmi, parmi les manuscrits arabes de la Bibliothèque Bodléyenne d'Oxford, avait été dûment constatée par le catalogue de Jean Uri, mais le premier, Colebrooke, en 1817, attira sur ce précieux ms. l'attention du monde savant par la Dissertation magistrale qu'il mit en tête de son beau livre intitulé: « Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara ». En 1831, M. Rosen publia le texte arabe tout entier en l'accompagnant d'une traduction anglaise. Quelques années plus tard, M. Libri reproduisit, dans le 1.er volume de son *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (PARIS 1835, NOTE IV, page 227, lignes 11-25; pages 228-264; page 265, lignes 1-14 — A PARIS 1838, NOTE XII, page 253, lignes 12-24; pages 254-296; page 297, lignes 1-14) une traduction latine que possédait la Bibliothèque royale de Paris; mais le chapitre relatif à la géométrie, le *bâb al messâhat*, manquait. En 1846, désireux de combler cette lacune autant qu'il était alors en mon pouvoir, je publiai dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*tome cinquième*, page 557, lignes 19-20; page 558-560; page 570, lignes 1-8) une traduction faite sur la version anglaise de Rosen, de cette partie du Traité de Mohammed ben Moussa, La traduction que je donne aujourd'hui diffère en certains endroits de la première, par la raison que, au lieu d'être exclusivement fondée sur la version anglaise, elle a été faite littéralement sur le texte arabe lui-même.

Ar. Marre.

* Ibn Al Adami: Préface à ses Tables astronomiques. — Casiri, tome I, p. 427, 428. — Colebrooke: Dissertation, p. 504 des Miscellaneous Essays.

BÂB AL MESSÂHAT

(CHAPITRE DU MESSÂHAT) *.

Sache que l'expression « un par un » appartient au *Messâhat*, et signifie » *derâa* par *derâa* » **. Tout quadrilatère dont les côtés et les angles sont égaux, qui a pour chacun des côtés *un*, a pour sa superficie entière *un*. Si dans un quadrilatère équilatéral et équiangle, chaque coté est *deux*, alors sa superficie est quatre fois la superficie de celui qui est égal à « *derâa* par *derâa* »; de même trois par trois, et ainsi de suite en montant ou en descendant, ainsi un-demi par un-demi un quart, et de même des autres fractions. Tout carré dont chaque côté est *un-demi derâa*, est égal à un quart de celui dont chaque côté est *un derâa*, et tu fais de même pour *un tiers par un tiers*, et *un quart par un quart*, et *un cinquième par un cinquième*, et *un demi tiers par un demi tiers* ***, ou plus ou moins que cela. Dans tout carré, si l'un des côtés (est multiplié) par *un*, c'est la racine de ce carré; si par deux, deux racines; que ce carré soit petit ou grand.

Dans tout triangle équilatéral, si tu multiplies la colonne par la moitié de la base sur laquelle tombe la colonne; c'est la mesure du triangle ****.

Dans tout rhombe équilatéral, si tu multiplies une des deux diagonales par la moitié de l'autre, c'est sa mesure.

---

* De même que l'ouvrage traduit du sanscrit par Colebrooke renferme trois parties: Algebra, Arithmetic, Mensuration, c'est-à-dire: Algèbre, qui fait partie de la science du nombre, Calcul proprement dit, et ce que les Arabes nomment *Messâhat*, qui fait partie de la géométrie, de même la plupart des ouvrages purement élémentaires sur le calcul, composés par les Arabes, renferment ces trois parties successivement exposées. Chacune d'elles, quand elle est traité séparément, fait l'objet d'ouvrages spéciaux beaucoup plus développés.

Littéralement *messâhat* signifie l'art de mesurer; mais comme sa principale application a été de mesurer et de diviser les terres, on a souvent traduit ce mot par géodésie. Dans son *messâhat*, Mohammed ben Moussa ne se borne pas à donner la mesure des surfaces, il donne aussi le moyen de mesurer des solides; c'est pourquoi nous conservons le terme technique arabe, *messâhat*, en tête de notre chapitre, plutôt que de le traduire par le mot géodésie. Ibn Khaldoûn, dans ses Prolégomènes, dit qu'on a écrit sur la science du *messâhat* de bons et nombreux ouvrages, mais il n'en nomme aucun.

** Le *derâa* (coudée) est l'unité linéaire; nous n'en connaissons pas la valeur exacte. Cette première phrase du texte, telle que l'a reproduite M. Rosen, est fautive. M. Rosen l'a traduite ainsi: « *Know that the meaning of the expression " one by one " is mensuration: one yard (in length) by » one yard (in breadth) being understood* ». A la page 196, dans une note sur ce passage, il dit: « *I am » uncertain whether my translation of the definition which Mohammed gives of mensuration be cor» rect. Though the diacritical points are partly wanting in the manuscript, there can, I believe, be » no doubt as to the reading of the passage.* » Mohammed ben Moussa n'a point songé à donner une définition du *Messâhat*. En lisant la proposition *ilâ* au lieu du pronom personnel féminin *hya*, on rétablit le véritable sens. La définition attribuée à Mohammed ben Moussa, si c'en était une, serait fausse et incomplète.

*** M. Rosen a traduit « *two thirds by a half* » c'est-à-dire $^2/_3$ par $\frac{1}{2}$. C'est $^1/_2$ tiers par $^1/_2$ tiers qu'il faut lire. La suite des fractions représentant la longueur de chaque côté étant $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, Mohammed ben Moussa a exprimé cette dernière à la façon arabe.

**** Mohammed ben Moussa, versé dans les sciences des Hindous, ne donne point ici la formule particulière qui convient à l'aire du triangle équilatéral. Il donne le moyen général de mesurer un triangle quelconque; il n'oublie pas qu'il écrit pour le vulgaire et non pour des mathématiciens. Une seule règle, qui convienne à tous les cas, lui paraît suffisante.

Dans tout cercle, si tu multiplies le diamètre par 3 et $\frac{1}{7}$, c'est la circonférence dont il est ceint, c'est le procédé usité par les gens du vulgaire.

La famille des géomètres a deux autres méthodes; l'une d'elles, c'est que tu multiplies le diamètre par lui-même, puis par dix, et qu'ensuite tu prends la racine du tout; ce qui en résulte, c'est la circonférence. La seconde, celle des astronomes, c'est que tu multiplies le diamètre par 62832, et que tu divises cela par 20000; ce qui en résulte est la circonférence. Et tout cela diffère peu l'un de l'autre *.

Et la circonférence, si tu la divises par 3 et $\frac{1}{7}$, tu obtiens le diamètre.

Dans tout cercle, si tu multiplies la moitié du diamètre par la moitié de la circonférence, c'est sa mesure; en effet dans tout polygône équilatéral et équiangle, parmi les triangles, quadrilatères, pentagones, et ceux d'un plus grand nombre de côtés, si tu multiplies la moitié du périmètre par la moitié du diamètre du cercle inscrit, c'est sa mesure.

Dans tout cercle, si tu multiplies le diamètre par lui-même, et que tu en retranches le septième et le demi-septième, c'est sa mesure. Et cela concorde avec la formule de la première classe **.

Tout segment de cercle est assimilé à un arc. Il faut nécessairement que ce segment soit égal au demi-cercle, ou plus petit que le demi-cercle, ou plus grand que le demi-cercle. Cela est indiqué par la flèche de l'arc : si elle est égale à la moitié de la corde, le segment est égal à la moitié du cercle; si elle est plus petite que la moitié de la corde, il est plus petit que la moitié du cercle; si la flèche est plus grande que la moitié de la corde, il est plus grand

---

* Mohammed ben Moussa nous donne ici trois valeurs distinctes du rapport de la circonférence au diamètre, trois formules différentes. La première donne $\pi = \frac{22}{7}$, c'est le rapport d'Archimède. La deuxième donne $\pi = \sqrt{10}$, et la troisième, celle particulièrement en usage parmi les astronomes et la plus exacte, donne $\pi = \frac{62832}{20000}$. Ces trois valeurs sous la forme décimale, sont :

$$\pi = \frac{22}{7} = 3,\ 1424 \ldots, \qquad \pi = \sqrt{10} = 3,\ 16227 \ldots; \qquad \pi = \frac{62832}{20000} = 3,\ 14160 \ldots$$

La première et la troisième formule se trouvent dans le Lilavati de Bhascara, page 87 de l'introduction de Colebrooke. Seulement la troisième est donnée par le géomètre hindou sous la forme $\frac{3927}{1250}$; en multipliant par 16 chacun des termes, Mohammed ben Moussa voulut probablement lui substituer un rapport équivalent plus facile à retenir de mémoire, et plus aisé à calculer. C'est par erreur que M. Rosen a dit que la seconde se rencontrait dans le Vija Ganita de Bhascara, p. 308, 309; elle n'est pas mentionnée par cet auteur, mais bien par deux de ses prédécesseurs, Brahmagupta et Aryabhatta, qui savaient parfaitement qu'elle n'était qu'une valeur approchée du rapport.

Voici une note marginale du ms. d'Oxford, faite sur le passage qui nous occupe en ce moment: « Cela est une approximation, non pas l'exacte vérité; personne ne peut déterminer l'exacte vérité de » ce rapport, et trouver la circonférence réelle, excepté Celui qui sait tout : car la ligne n'est pas » droite de telle sorte que son exacte longueur puisse être trouvée. Cela s'appelle une approximation, » de même que l'on dit des racines carrées des nombres irrationnels, qu'elles sont une approximation et non pas l'exacte vérité. Dieu seul sait quelle est la racine exacte. La meilleure méthode » ici donnée, c'est de multiplier le diamètre par 3 et $\frac{1}{7}$, car elle est la plus aisée et la plus expé» ditive. Dieu sait mieux ! ».

** L'aire du cercle dont le diamètre est d, si l'on suppose $\pi = \frac{22}{7}$, est en effet égale à $\frac{22}{7 \times 4} d^2$ ou $\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \times 2}\right) d^2$. Bhascara, p. 90 du Lilavati, donne la valeur $\frac{11}{14} d^2$, comme bonne dans la pratique, lorsqu'on n'a pas besoin d'une grande approximation.

que la moitié du cercle. Si tu veux connaître de quel cercle il est, multiplie la moitié de la corde par elle-même, divise par la flèche, et ajoute le résultat à la flèche; ce que tu obtiens, c'est le diamètre du cercle dont ce segment fait partie *.

Si tu veux connaitre l'aire de l'arc, multiplie la moitié du diamètre du cercle par la moitié de l'arc, et garde ce produit; puis retranche la flèche de l'arc de la moitié du diamètre du cercle, si l'arc est plus petit que la demi-circonférence, ou bien s'il est plus grand que la demi-circonférence, retranche la moitié du diamètre du cercle de la flèche de l'arc; ensuite multiplie ce qui reste par la moitié de la corde de l'arc, et retranche ce produit de celui que tu as gardé si l'arc est plus petit que la demi-circonférence, ou bien additionne-les ensemble si l'arc est plus grand que la demi-circonférence. Alors le résultat obtenu après l'addition ou bien la soustraction, c'est l'aire de l'arc **.

Dans tout solide quadrangulaire, si tu multiplies la longueur par la largeur, puis par la profondeur, c'est sa mesure. Si la base n'est pas quadrangulaire, mais qu'elle soit circulaire ou triangulaire ou autre, à condition que la profondeur reste égale et parallèle, pour opérer le *messâhat* de ce solide, tu calcules la surface de la base, tu sais sa mesure, tu la multiplies par la profondeur, et c'est la mesure (du solide).

Pour la pyramide, qu'elle soit triangulaire, quadrangulaire, circulaire, tu multiplies un tiers de la superficie de sa base par sa colonne, c'est là sa mesure ***.

Sache que dans tout triangle rectangle, chacun des deux plus petits côtés étant multiplié par lui-même, les produits additionnés égalent le produit du plus grand côté multiplié par lui-même. Voici qui le démontre : Je trace un quadrilatère équilatéral et équiangle ABCD, je coupe le côté AC en deux moitiés au point H, et je mène HR, puis je coupe le côté AB en deux moitiés au point T, et je mène TG. La surface ABCD est devenue quatre surfaces ayant leurs

---

* Le théorème sur lequel repose ce calcul est énoncé par Aryabbatta, ainsi qu'il suit : « dans » un cercle, le produit des flèches est égal au carré de la demi-corde des deux arcs. » Quant au procédé de Mohammed ben Moussa, il est exprimé par Bhascara exactement dans les mêmes termes.

** C'est ce qu'exprime plus brièvement Behâ-Eddin dans son *Kholâçat al hissâb* : « Quant aux » deux segments, dit-il, marque bien le centre, et achève les deux secteurs: alors il se forme là un » triangle; retranche-le du plus petit secteur, il en résulte le plus petit segment ; ou bien ajoute-le » au plus grand secteur, il en résulte le plus grand segment. »

Les géomètres Hindous avaient la formule :

$$\text{Segment} = \frac{21}{20} f \left(\frac{c+f}{2}\right)$$

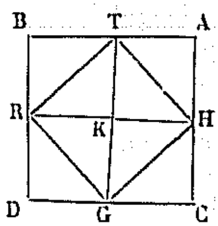
f désignant la flèche, et c la corde (page 96 du Lilavati de Bhascara).

*** Mohammed ben Moussa range sous une même dénomination les parallélipipèdes, les prismes et les cylindres, et sous une autre dénomination commune. les pyramides et les cônes. C'est ainsi que dans le Lilavati, Stance 217, cette première classe de solides se nomme *sama-chata*, et la seconde *souchi-chata* (solides aigus). Le terme arabe « *makrouttah* » qui désigne indistinctement pyramides et cônes, vient du verbe « *Kharatt* », dont l'une des significations: « être délié, effilé, menu, mince » conduit directement à la même source de dérivation que pour le terme sanscrit.

Nous remarquerons encore que la hauteur des solides de la première catégorie a le nom spécial de profondeur, tandis que la hauteur des solides de la seconde catégorie s'appelle colonne (*aamoud*), comme la hauteur d'un triangle.

On voit enfin par ce passage que le mot *messâhat* peut s'appliquer non seulement à la mesure du sol et des surfaces planes, mais aussi à la mesure des solides, et qu'ainsi il a parfois une acception plus générale que celle qu'on lui attribue d'ordinaire.

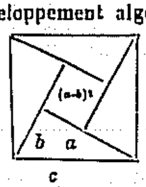
côtés et leurs angles égaux, savoir : surface AK, surface CK, surface BK et surface DK. Ensuite je tire du point H au point T une ligne, elle coupe la surface AK en deux moitiés. Cette surface a donné naissance à deux triangles, qui sont les triangles ATH et HKT. Or, il est bien évident pour nous que AT est la moitié de AB, que AH lui est égal comme moitié de AC, et que la ligne TH leur sous-tendante est la corde d'un angle droit. Je tire de même des lignes de T à R, de R à G, et de G à H. L'ensemble des carrés donne naissance à huit triangles égaux, et il est bien clair pour nous que quatre de ces triangles sont la moitié de la plus grande surface, c'est-à-dire de AD. Il est évident pour nous que la ligne AT (multipliée) par elle-même est la mesure de deux des triangles, et que AH par elle-même est la mesure de deux triangles qui leur sont égaux, la somme est donc la mesure de quatre triangles. Mais d'autre part le côté HT par lui-même est la mesure de quatre triangles. Enfin il est clair pour nous que la ligne AT par elle-même et AH par elle-même donnent une somme égale au résultat de la multiplication de TH par elle-même, c'est là ce que nous voulions montrer. Voici la figure *



Sache qu'il y a cinq espèces de quadrilatères, la première dont les côtés sont égaux et les angles droits; la deuxième avec angles droits et côtés inégaux, la longueur étant plus grande que la largeur; la troisième se nomme rhombe et

* La démonstration de Mohammed ben Moussa ne s'applique qu'au cas du triangle rectangle isocèle. Elle parle aux yeux, et s'adresse évidemment à des gens que Platon n'aurait pas admis à ses leçons; ce qui nous fait voir une fois de plus et surabondamment que notre auteur était bien loin d'exposer tout ce qu'il savait, mais qu'il tâchait de vulgariser la science en la simplifiant et la mettant à la portée des plus petits. L'élégante démonstration du carré de l' hypoténuse universellement connue, se trouve dans les éléments d'Euclide ou supposés d'Euclide, car Kâdhi Zadeh Al Roumi (vir bene meritus, selon Hadji Khalfa) et le fameux Al Kendi, l'un des douze plus grands génies qui aient paru parmi les hommes selon Cardan, assurent qu'Euclide n'est pas l'auteur des Eléments qui portent son nom. Al Kendi attribue cet ouvrage de géométrie à Abolonious Al Neddjâr Al Iskanderâni. Le traité complet était divisé en quinze livres ou sections. Longtemps après la mort d'Apollonius vivait à Alexandrie un roi qui aimait et cultivait la géométrie. Parmi les mathématiciens ses contemporains brillait Euclide. Le roi le chargea de rétablir l'ouvrage en son entier et de l'expliquer. De là treize livres exposés par Euclide et qui reçurent son nom. Ensuite Hypsiclès, son disciple, découvrit les deux autres, le quatorzième et le quinzième, les ajouta aux précédents et les offrit au roi. Tel est en substance le récit d'Alkendi. (voir Hadji Khalfa, Tome 1.er p. 380.)

Mohammed ben Moussa ne devait pas ignorer l'ingénieuse et charmante démonstration des Hindous, fondée sur le développement algébrique de $(a-b)^2$.

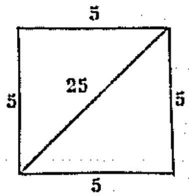


$$c^2 = 4\ \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

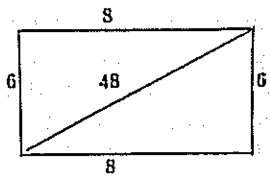
r

c'est celle dont les côtés sont égaux et les angles différents; la quatrième est le rhomboïde, sa longueur et sa largeur sont différentes et ses angles inégaux, mais les deux longueurs sont égales entre elles et ses deux largeurs aussi égales *; la cinquième, dont les côtés et les angles sont inégaux **.

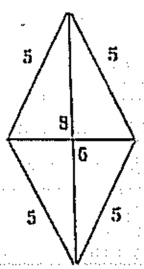
Pour la mesure des quadrilatères dont les côtés sont égaux et les angles droits, ou les côtés inégaux et les angles droits, si tu multiplies la longueur par la largeur, le résultat est la mesure. Exemples : 1° Une pièce de terre quadrangulaire dont chacun des côtés a cinq derâa, sa mesure est de vingt-cinq derâa. Voici la figure:



2° Une pièce de terre quadrangulaire; ses deux longueurs sont huit derâa, huit derâa, et ses deux largeurs six et six. Pour avoir sa mesure, tu multiplies six par huit, ce qui donne quarante-huit derâa; c'est là sa mesure. Voici la figure:



Soit le rhombe équilatéral dont chaque côté est cinq derâa, l'une de ses diagonales est huit, et l'autre six derâa. Apprends quelle est sa mesure, lorsque tu connais les deux diagonales ou l'une d'elles. Si tu connais les deux diagonales en même temps, c'est que tu multiplies l'une d'elles par la moitié de l'autre, c'est là sa mesure; ainsi tu multiplies huit par trois, ou quatre par six, ce qui fait vingt-quatre derâa, et c'est la mesure. Si tu connais une seule diagonale, tu sais bien qu'il y a deux triangles dans chacun desquels deux côtés sont cinq derâa, cinq derâa, leur troisième côté étant la diagonale. Calcule-les selon le calcul des triangles. Voici la figure :



* Comme on le voit, Mohammed ben Moussa appelle longueurs les deux côtés parallèles les plus grands, et largeurs les deux autres côtés parallèles, dans le rhomboïde ou parallélogramme.

** Ce sont ces quadrilatères avec côtés et angles inégaux que Behâ Eddin nomme trapèzes. La

Pour le rhomboïde on fait comme pour le rhombe.

Pour la dernière espèce de quadrilatères, tu connais sa mesure par le moyen de la diagonale, cela conduit au calcul des triangles. Apprends-le. Voici la figure du rhomboïde :

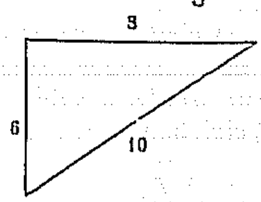
Les triangles. — Il y en a trois espèces : rectangles, acutangles et obtusangles.

Du rectangle. — Dans ce triangle, si tu multiplies chacun des deux plus petits côtés par lui-même, puis que tu fasses l'addition, cette somme est égale au résultat de la multiplication du plus grand côté par lui-même.

De l'acutangle. — Dans ce triangle, si tu multiplies chacun des deux plus petits côtés par lui-même, puis que tu fasses l'addition, la somme est plus grande que le plus grand côté multiplié par lui-même.

De l'obtusangle. — Dans tout triangle obtusangle, si tu multiplies chacun des deux plus petits côtés par lui-même, puis que tu fasses l'addition, la somme est plus petite que le plus grand côté multiplié par lui-même.

Le triangle rectangle est celui qui a deux colonnes et un diamètre (pour côtés); il est la moitié d'un quadrangle. Tu connais sa mesure, en multipliant un des deux côtés adjacents à l'angle droit par la moitié de l'autre. Ce qui en résulte, c'est sa mesure. Exemple d'un triangle rectangle : un de ses côtés six deràa, un de ses côtés huit deràa, et le diamètre dix. Pour faire le calcul, tu multiplies six par quatre, ce qui donne vingt-quatre deràa, et c'est la mesure. S'il te plait de faire le calcul du triangle par la colonne, ce n'est que sur le plus grand côté que tombe sa colonne, car les deux plus petits côtés sont deux colonnes. Si tu veux cela, alors multiplie sa colonne par la moitié de sa base; ce qui en résulte, c'est sa mesure. Voici la figure :

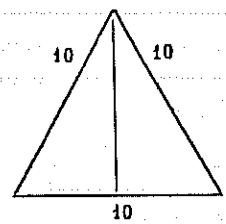


La deuxième espèce. — Soit à mesurer un triangle équilatéral acutangle dont chaque côté a dix deràa. Tu détermines d'abord son *masquèt al hadjar* * et sa colonne. Sache que dans tout triangle isocèle, si tu mènes la colonne sur la base, elle tombe à angles droits sur le milieu de la base, si les deux côtés sont

dénomination sanscrite Vishama Chatourasra qui répond au mot trapèze, s'applique chez les Hindous au quadrilatère irrégulier quelconque. C'est la signification que donne également Euclide au trapèze, c'est celle-là que lui ont conservée les Anglais jusqu'à présent, et que les Français avaient gardée intacte jusqu'à la fin du siècle dernier.

* *Masquèt al hadjar*, à la lettre : *le lieu où tombe la pierre*. C'est le pied de la hauteur du triangle, ou de la colonne selon l'expression arabe.

égaux; s'ils sont inégaux, le *masquèt al hadjar* n'est pas au milieu de la base. Mais nous savons que dans ce triangle-ci, sur quelque côté que tu opères, le *masquèt al hadjar* ne sera jamais qu'en son milieu; et c'est cinq deràa. Pour connaître la colonne, tu multiplies le cinq par lui-même, et tu multiplies un des côtés, c'est-à-dire dix, par lui-même, ce qui fait cent; tu retranches de ce produit celui de cinq par lui-même, c'est-à-dire vingt-cinq; il reste soixante-quinze. Tu en prends la racine, c'est la colonne, et elle est devenue un côté des deux triangles rectangles. Si tu veux la mesure, multiplie la racine de 75 par la motié de la base, qui est 5; pour cela tu multiplies le 5 par lui-même, afin d'avoir la racine de 75 par la racine de 25; multiplie 75 par 25, c'est 1875; prends-en la racine, c'est la mesure du triangle. Et c'est 43 et peu de chose *. Voici la figure :



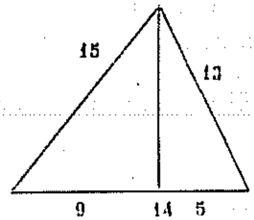
Si tu as un triangle acutangle dont les côtés sont inégaux, sache que sa mesure se connait par son *masquèt al hadjar* et sa colonne. Soit un triangle dont un côté est 15 deràa, un côté 14 deràa, et un côté 13 deràa. Si tu veux connaitre son *masquèt al hadjar*, prends pour base celui des côtés qu'il te plaira, prenons celui de 14. Son *masquèt al hadjar* tombe sur ce côté à la distance *chéy* (x) à partir de celui des deux côtés adjacents que tu voudras. Posons le *chéy* à partir de l'adjacent 13. Multiplions-le par lui-même, il devient un *mâl* (x^2); retranchons-le de treize par lui-même, c'est-à-dire de 169, cela devient 169 *moins mâl*. Nous savons que la racine de cela, c'est la colonne. Il nous est resté de la base 14 *moins chéy*. Nous multiplions ce reste par lui-même, il en résulte 196 *et mâl moins* 28 *chéy*. Nous le retranchons de 15 *par lui-même*, le reste est 29 *derhems* ** *et* 28 *chéy moins mâl*. La racine est la colonne. Or la racine de 169 *moins mâl*, c'est encore la colonne. Toutes deux sont donc égales. Compare-les, c'est que tu rejettes le mâl avec le mâl, car les deux mâl sont négatifs. Alors il reste 29 *et* 28 *chéy* égal à 169. Rejette 29 de 169, il reste 140 égal à 28 chéy. Un seul chéy est 5. C'est le *masquèt al hadjar* à partir du côté adjacent, 13. Le complément de la base, contigu à l'autre côté, c'est 9. Si tu veux connaitre la colonne, multiplie ce 5 par lui-même, puis soustrais le pro-

* $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75}$,

$S = h \times \frac{b}{2} = \sqrt{75} \times 5 = \sqrt{75} \times \sqrt{25} = \sqrt{1875} = 43$ et $\frac{30}{100}$ à moins de 0,01.

** Le mot *derhem* est employé par les algébristes arabes pour désigner les quantités numériques, les termes tout connus de l'équation, et les distinguer des *chéy*, ou termes en x, et des *mâl*, ou termes en x^2.

duit du côté contigu, 13, multiplié par lui–même. Il reste 144. La racine de cela est la colonne. C'est 12. La colonne tombe toujours sur la base suivant deux angles droits, et c'est pour cela qu'on la nomme justement colonne. Multiplie la colonne par la moitié de la base, c'est–à–dire par 7, tu obtiens 84 et c'est la mesure du triangle *. Voici la figure ** :



La troisième espèce; Obtusangle. C'est le triangle qui a un angle obtus. Ce triangle a pour chaque côté un nombre différent; soit un de ses côtés six, un côté cinq, un côté neuf. Tu connaîtras sa mesure par son *masquèt al hadjar* et sa colonne. Or le *masquèt al hadjar* intérieurement ne tombe que sur le plus grand côté. Prends celui–ci pour base. Si tu posais un des deux plus petits côtés pour base, le *masquèt al hadjar* serait projeté en dehors d'elle. Tu trouveras son *masquèt al hadjar* et sa colonne, en suivant la même marche que je

* Voici la marche suivie par Mohammed ben Moussa :

$$15^2 - (14 - x^2) = 13^2 - x^2$$
$$15^2 - 196 - x^2 + 28x = 169 - x^2$$
$$29 + 28\,x = 169$$
$$28\,x = 140$$
$$x = 5$$
$$\text{Colonne} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$
$$\text{Triangle} = 12 \times \tfrac{14}{2} = 12 \times 7 = 84.$$

Pour trouver dans un triangle quelconque le pied de la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets. Behâ Eddin emploie la formule

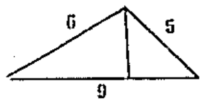
$$x = \frac{a}{2} - \frac{(b+c)\,(b-c)}{2a}.$$

Pour $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$, cette formule donne

$$x = 7 - \frac{28 \times 2}{2 \times 14} = 7 - 2 = 5.$$

** La hauteur et les troi côtés du triangle sont les quatre nombres entiers consécutifs, 12, 13, 14, 15. Nous résumerons ici les observations auxquelles ces mêmes nombres, qui se rencontrent dans un exemple de triangle donné par Brahmegupta, ont conduit M. Chasles (Aperçu historique). « Ces » nombres sont très-remarquables en ce qu'ils sont ceux choisis à plusieurs siècles d'intervalle, non » seulement par les Hindous, mais aussi par Héron d'Alexandrie, Héron le jeune, les trois fils de » Moussa ben Chaker, Léonard de Pise, Jordan, Luca di Burgo, Georges Valla, Tartalea, etc. » L'usage général de ces trois nombres semblait dire qu'ils avaient une origine commune; mais M. Chasles, en y refléchissant davantage, ne tarda pas à reconnaître que ces nombres n'offraient probablement pas les secours historiques qu'il avait espérés d'abord. « En effet, dit-il, on aura cherché naturellement, » pour les trois côtés du triangle à proposer en exemple, trois nombres pour lesquels l'aire de ce » triangle, et conséquemment la hauteur fussent exprimées en nombres rationnels. Cette question se » réduit à construire deux triangles rectangles en nombres rationnels, ayant un côté commun. C'est » ainsi que Brahmegupta a fait. Maintenant parmi tous les systèmes de deux triangles rectangles exprimés en nombres rationnels entiers, et ayant un côté commun, on aura pris celui où ces nombres » sont les plus petits ; ce ont ceux qui ont pour côtés, le premier 5, 12, 13, et le second 9, 12, 15. » Plaçant ces deux triangles de manière que leurs deux côtés égaux se confondent, et que les autres » côtés des angles droits soient dans le prolongement l'un de l'autre, on forme le triangle acutangle » qui a sa base égale à 14, et ses deux autres côtés égaux à 13 et à 15. C'est ainsi que différents » géomètres, chacun de son côté, auront pu être conduits au triangle exprimé par les nombres 13, » 14, 15. »

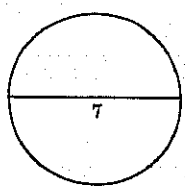
t'ai enseignée dans l'acutangle, et par suite sa mesure. Voici la figure :



Des cercles. — Nous avons terminé l'exposé de leurs propriétés et de leur mesure dans la première partie du livre.

Soit un cercle dont le diamètre est sept derâa, sa circonférence sera vingt-deux derâa. Pour sa mesure, tu multiplies la moitié du diamètre *; c'est-à-dire $3\frac{1}{2}$ par la moitié de la circonférence dont il est ceint, c'est-à-dire par 11, cela fait $38\frac{1}{2}$, et c'est sa mesure.

Si cela te plait, multiplie le diamètre qui est 7 par lui-même, cela fait 49; retranches-en son septième et son demi-septième, c'est-à-dire $10\frac{1}{2}$, il reste $38\frac{1}{2}$, et c'est la mesure. Voci la figure :



Si l'on dit : dans un pilier pyramidal la base est quatre derâa par quatre derâa, la hauteur dix derâa, et la tête deux derâa par deux derâa. Nous savons bien que toute pyramide entière a la tête terminée en pointe, et que un tiers de la mesure de sa base multiplié par sa colonne, c'est sa propre mesure. Comme ce pilier-ci n'est pas terminé en pointe, nous voulons savoir de combien l'élever pour rétablir la tête, car il n'a pas de tête. Or nous avons appris que le dix est à la hauteur totale comme le deux est au quatre; mais le deux est la moitié du quatre, donc puisque cela est ainsi, le dix est la moitié de la hauteur. Et la hauteur totale est vingt derâa. Maintenant que nous connaissons la hauteur, prenons un tiers de la mesure de la base, c'est $5\frac{1}{3}$, multiplions-le par la hauteur qui est vingt derâa; cela s'élève à 106 derâa et $\frac{2}{3}$ derâa. Nous en retrancherons ce que nous avions ajouté afin de le terminer en pointe, c'est-à-dire un tiers de la mesure 2 par 2, ou $1\frac{1}{3}$, multiplié par dix, ce qui fait 13 et $\frac{1}{3}$. Et c'est là la mesure de ce que nous lui avons ajouté pour qu'il fût terminé en pointe. Si nous enlevons cela de 106 derâa et $\frac{2}{3}$ derâa, il reste 93 derâa et $\frac{1}{3}$, et c'est là la mesure du pilier pyramidal **. Voici la figure:

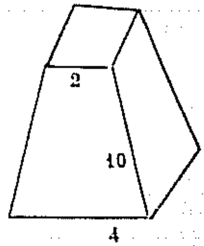
* Il est à remarquer que ni Mohammed ben Moussa, ni Behâ Eddin n'emploient de mot simple équivalent au nôtre, *rayon*. Ils expriment toujours le *rayon*, en disant *demi-diamètre*. Les Hindous ont un mot *carcata*, ouverture de compas, à la lettre *écrevisse*, pour désigner le rayon (p. 90 du Lilavati de Bhascara.)

** $10 : H :: 2 : 4$, $H = 20$.

Pyr. entière $= 5\frac{1}{3} \times 20 = 106\frac{2}{3}$

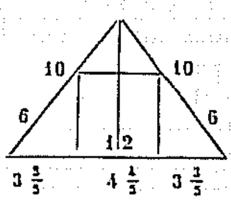
Pyr. complémentaire $= \frac{4}{3} \times 10 = 13\frac{1}{3}$

Pyr. tronquée ou Pilier pyramidal $= 106\frac{2}{3} - 13\frac{1}{3} = 93\frac{1}{3}$.



Si la base de la pyramide était un cercle, alors retranche du résultat de la multiplication de son diamètre par lui–même, son septième et la moitié de son septième; ce qui reste, c'est sa mesure.

Si l'on dit: une pièce de terre est un triangle dont deux côtés sont dix deràa, dix deràa, et la base douze deràa; elle est circonscrite à une pièce de terre qui est un carré, combien chaque côté du carré ? Pour le déterminer, il faut que tu connaisses la colonne du triangle; multiplie la moitié de la base, c'est–à–dire six, par elle–même, ce qui donne 36, retranche cela de l'un des deux plus petits côtés multiplié par lui–même, c'est–à–dire de 100, il reste 64, prends–en la racine, 8; c'est la colonne. La mesure du triangle est 48 deràa, résultat dela multiplication de la colonne par la moitié de la base, qui est six. Nous posons un des côtés du carré, *chéy* (x); nous le multiplions par lui–même, il en résulte *mdl* (x^2), nous le gardons. Nous savons qu'il nous est resté deux triangles aux deux côtés du carré, et un triangle au–dessus de lui. Or les deux triangles fixés aux deux côtés du carré sont égaux entre eux, leurs colonnes étant les mêmes et formant entre elles un angle droit. Leur mesure, c'est que tu multiplies *chéy* par 6 *moins* $\frac{1}{2}$ *chéy*, ce qui est 6 *chéy moins* $\frac{1}{2}$ *mdl*; telle est la mesure de la somme des deux triangles qui sont fixés aux deux côtés du carré. La mesure du triangle placé au dessus, c'est que tu multiplies *huit moins chéy*, qui est sa colonne, par *la moitié de chéy*. C'est *quatre chéy moins un demi mdl*. Tout cela additionné ensemble c'est la mesure du carré et la mesure des trois triangles; et c'est *dix chéy*. Tu l'égales avec 48, qui est la mesure du grand triangle. Il suit de là *qu'un chéy* est 4 *derda* et $\frac{4}{5}$ *deràa*. Et c'est là chaque côté du carré *. Voici la figure:



* $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

$S = 8 \times 6 = 48$

$S = x^2 + \left(6 - \frac{x}{2}\right)x + (8 - x)\frac{x}{2}$

d'où $x^2 + 6x - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^2}{2} = 48$

$10\,x = 48$

$x = \frac{48}{10} = 4\,\frac{4}{5}$.

ASTRONOMIE. — *Recherches sur l'astronomie indienne; par* M. CHASLES.

« L'histoire de l'astronomie indienne ne nous présente encore qu'incertitude et obscurité. Les fragments de cette science et les notions éparses qui nous sont parvenus ont formé un véritable chaos, et ont pu facilement conduire, par des combinaisons ingénieuses des nombres et des hypothèses plus ou moins plausibles, à des résultats partiels très-différents; mais il a été d'autant plus difficile d'y saisir les traces de la vérité, et d'établir des points fondamentaux incontestables.

» Aussi a-t-on émis des opinions très-différentes sur l'origine, l'étendue, la valeur et l'antiquité de cette science.

» Les uns, y trouvant des méthodes ingénieuses qui semblaient avoir demandé une longue culture, l'ont regardée comme plus parfaite et plus ancienne que l'astronomie grecque.

» D'autres n'ont voulu y voir que des connaissances modernes empruntées des Arabes, vers le IX^e ou le X^e siècle, ou même plus tard.

» D'autres enfin, et c'est l'opinion qui paraît admise généralement aujourd'hui, font des Indiens les disciples d'Hipparque et de Ptolémée.

» Telle est l'incertitude où nous jette l'histoire de l'astronomie indienne, quoique des hommes éminents s'en soient occupés, et qu'ils aient travaillé sur des documents de date et de nature différentes, qui semblaient pouvoir se compléter mutuellement et conduire à des résultats concluants.

» De ces documents, les premiers que l'on ait connus sont les Tables astronomiques en usage chez les Indiens modernes, et qu'ils font dériver de méthodes anciennes.

» Les autres sont des Traités d'astronomie, ou du moins des fragments de Traités renfermant, avec les *éléments* principaux du mouvement des planètes, plusieurs théories et méthodes de calcul ou d'observation. Ces ouvrages se sont conservés dans l'Inde, en langue sanscrite, et passent pour être d'une très-haute antiquité. Plusieurs sont accompagnés de commentaires d'époques différentes.

» Ces documents n'ont pas suffi pour fixer les opinions sur l'origine, l'étendue et l'ancienneté de l'astronomie indienne.

» Mais il existe une autre source, qu'on a trop négligée jusqu'ici, et qui doit nous procurer d'utiles révélations sur l'astronomie indienne : ce sont les manuscrits arabes; car il est bien certain, nonobstant l'opinion contraire, et quelle que soit l'autorité des savants qui l'ont émise, il est certain, dis-je, que les Arabes ont reçu leurs connaissances astronomiques des Indiens, en même temps que des Grecs. Les Arabes eux-mêmes en conviennent dans beaucoup d'ouvrages, et l'on sait à quelle époque et comment ils ont eu communication de l'astronomie et de quelques autres parties des sciences hindoues. Ces particularités sont rapportées d'une manière fort précise dans une biographie arabe que Casiri appelle la *Bibliothèque des philosophes*, et dont il nous a fait connaître de nombreux extraits.

» Non-seulement les Arabes ont reçu l'astronomie indienne à leur début dans la carrière scientifique, mais, quelque temps après, ils ont été eux-mêmes dans l'Inde pour y puiser de nouvelles connaissances qu'ils ont rapportées dans leur pays. On connaît déjà la relation de Masoudi; il en est une autre surtout qui paraît pouvoir nous procurer de bien plus amples renseignements sur les sciences hindoues : c'est celle d'Albyrouny, qui, lui-même géomètre et astronome distingué, a pu bien voir et apprécier ce qu'il trouvait dans l'Inde. Un savant orientaliste, à qui l'on doit déjà quelques extraits des ouvrages d'Albyrouny (1), s'occupe de nous les faire connaître plus complétement. Il ne paraît pas douteux que ce nouveau champ de recherches n'excite l'intérêt et la curiosité des érudits.

» Mais je n'ai à m'occuper ici que des ouvrages composés par les Arabes à l'imitation de l'astronomie indienne, dans les premiers temps de leur initiation aux études scientifiques, c'est-à-dire à l'époque même où ils commençaient à étudier aussi l'*Almageste* de Ptolémée.

» Voici ce qu'on lit, à ce sujet, dans la *Bibliothèque des philosophes :*

« En l'an de l'hégire 156 (772), il vint, sous le règne d'Almansor, un
» Indien très-versé dans la connaissance de l'astronomie, qui possédait,
» avec des observations d'éclipses, des Tables pour le calcul des mouvements
» des astres, attribuées à un ancien roi des Indiens. L'empereur Almansor
» voulut que ce livre fût traduit pour l'usage des Arabes. Ce travail fut confié
» à Mohammed ben Abrahim Alphazari, dont l'ouvrage fut appelé, par les

---

(1) Voyez *Fragments arabes et persans inédits, relatifs à l'Inde;* par M. Reinaud. Paris, 1845. — *Extrait d'un Mémoire historique sur l'Inde, antérieurement au* XI*e siècle de l'ère chrétienne;* par le même.

Le Mémoire d'où cet extrait est tiré, et qui renferme des détails beaucoup plus étendus, a été lu à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, et s'imprime dans le tome XVII de l'Académie.

» astronomes, le *grand Sendhend,* et resta en usage jusqu'au temps d'Al-
» mamon (813-833).

» A la demande de ce prince, Abu Giaphar Mohammed ben Musa Alkoresmi fit un abrégé de ce livre, et, adoptant les moyens mouvements indiens (1), construisit des Tables qui ont été très-célèbres parmi les mahométans. Mais, différant des Indiens, principalement sur l'équation et la déclinaison du soleil, il adopta l'équation des Persans (2) et la déclinaison de Ptolémée, et fit, de son propre fonds, quelques autres modifications qui n'étaient point à dédaigner.

» Ce beau travail fut très-goûté des astronomes et se répandit au loin sur tout le globe de la terre, où il est encore en usage (3). »

» Le biographe ajoute qu'ensuite Almamon, devenu calife, fit vérifier par les plus savants mathématiciens les observations de l'*Almageste,* avec des instruments construits à cet effet.

» Ce passage est intéressant, parce qu'il prouve qu'Alkoresmi, qui fut un des auteurs de la *Table vérifiée*, avait déjà fait ses Tables imitées du *Sendhend*, et que les moyens mouvements qui s'y trouvent, sont bien ceux des Tables indiennes, comme les avait donnés Alphazari.

» La *Bibliothèque des philosophes* cite plusieurs autres astronomes qui avaient aussi construit des Tables dans le système indien. On y lit : « Les Indiens possèdent trois systèmes astronomiques, le *sendhend,* l'*argebarh* et l'*arcand,* dont un seul, le *sendhend,* nous est parvenu anciennement. La plupart des astronomes mahométans l'ont suivi dans la construction de leurs Tables ; tels sont : Mohammed ben Abrahim Alphazari; Habs ben Abdella, de Bagdad; Mohammed ben Musa Alkoresmi; Hossain ben Mohammed, appelé ben Aladami. Et d'autres. »

» Ailleurs, on trouve encore nommés Fadhl ben Hatem en 912, et Jacob ben Tarec, Espagnol, comme ayant construit des Tables astronomiques dans le même système.

---

(1) Je suis ici le texte de M. Gildemeister qui a corrigé Casiri. (Voyez *Scriptorum Arabum de rebus indicis loci et opuscula*; p. 102.

(2) Casiri dit *l'équation* (du soleil), et M. Gildemeister, *les équations.*

(3) C'est ce même Mohammed ben Musa Alkoresmi qui a composé, à l'imitation encore des ouvrages hindous, et à la demande du calife Almamon, un Traité d'Algèbre qui a été très-célèbre chez les Arabes, et dont une traduction latine, faite au XII^{e} siècle, a contribué à répandre chez les chrétiens la connaissance de l'algèbre. Il ne faut pas confondre cet auteur avec Mohammed ben Musa ben Shaker, autre géomètre et astronome distingué qui lui fut postérieur de trente à quarante ans.

111..

» Abulpharage parle aussi de Mohammed ben Musa Alkoresmi et de ses Tables qui portaient le nom de *Sendhend.*

» Ainsi, il est bien constant que les Arabes, loin d'être les auteurs de l'astronomie indienne, comme quelques personnes l'ont pensé, ont reçu, au contraire, une partie de leurs connaissances astronomiques des Indiens, et qu'ils ont composé un grand nombre d'ouvrages dans le système indien.

» Il faut donc enfin consulter les manuscrits arabes. Peut-être y retrouvera-t-on l'ouvrage d'Alphazari. Ce sera le plus précieux, sans doute, des documents arabes sur l'astronomie indienne. Ensuite viendraient les Tables du Sendhend de Mohammed ben Musa Alkoresmi. Celles-ci ont joui d'une grande renommée et ont été très-répandues pendant plusieurs siècles; il est donc à croire qu'il ne sera pas très-difficile d'en retrouver des copies originales.

» Mais ces Tables ont été traduites au XII^e siècle par Adelard de Bath, le traducteur des *Éléments d'Euclide;* et cette version subsiste; j'en ai trouvé deux exemplaires : l'un, de la Bibliothèque de Chartres, paraît complet; le deuxième, de la Bibliothèque Mazarine, est incomplet dans le texte et dans les Tables. Le premier n'a pas de titre, mais on voit dans le texte que l'ouvrage est traduit d'Alkoresmi; le deuxième ne laisse aucun doute, parce qu'il porte ce titre : Liber Ezitcii. Incipit liber Ezith Japharis Elkaurezmy per Adelardum Bathoniensem ex arabico in latinum sumptus (1).

» Ainsi, ce sont bien les Tables du Sendhend de Giaphar Mohammed ben Musa Alkoresmi, dont il est fait mention dans la Bibliothèque arabe des philosophes, et dans Abulpharage.

» Ces Tables renferment donc l'astronomie indienne : elles ont encore l'avantage d'être, après celles d'Alphazari, les plus anciennes dont les Arabes aient fait usage. A ce double titre, elles sont un document précieux qui demande à être mis au jour. M'occupant de ce travail, auquel je joindrai un commentaire, je n'en parlerai ici que très-succinctement.

SUR LES TABLES KARISMIENNES.

» Ces Tables, avec les préceptes qui en expliquent l'usage, forment un Traité d'astronomie pratique beaucoup plus étendu et plus complet que ce qui nous était parvenu directement de l'Inde; on y reconnaît que tout y est

(1) Il existe une autre copie en Angleterre sous le titre : *Ezich Elkaurismi, id est Tabulæ Chawaresmicæ per Ethelardum Bathoniensem ex arabico traductæ.* (Voyez *Catalogi librorum Ms.torum Angliæ et Hiberniæ*; t. I^{er}, p. 186.)

différent de l'*Almageste,* tant la forme de l'ouvrage, que la nomenclature technique, les éléments numériques et les méthodes. Cependant la difficulté d'entendre ces textes, que tant de causes, outre une foule d'expressions arabes, et, parfois, des omissions et autres erreurs de copiste, rendent fort obscurs, m'a conduit à étudier d'abord les méthodes de l'*Almageste,* espérant qu'à raison, du moins, de leur ancienneté, elles se rapprocheraient encore plus des méthodes hindoues que notre astronomie moderne, et me fourniraient quelques secours. Ce travail pénible m'a fort retardé dans l'étude de mon manuscrit, mais il m'a permis d'établir un parallèle entre l'astronomie grecque et l'astronomie indienne. Et cette comparaison m'a fait découvrir, si ne je m'abuse, le véritabl epoint de vue sous lequel il faut considérer les travaux des Grecs, de Ptolémée et d'Hipparque surtout, dans leurs rapports avec l'astronomie indienne et chaldéenne : ce point de vue sera la clef de bien des difficultés.

» C'est surtout dans le calcul du mouvement des planètes, que les méthodes indiennes diffèrent de celles de Ptolémée. Ce calcul, en longitude et latitude, y est très-simple et se traduit aisément en formules modernes, où les termes sont des sinus. Pour la longitude, on commence par calculer l'*apogée déterminé,* dans une Table intitulée *Sublimatio definita,* où l'on entre avec l'élongation moyenne pour argument. Ce calcul, qui semblait indiquer un mouvement d'oscillation des apogées, m'étonnait fort; mais j'ai bientôt vu que c'était un mouvement fictif, et j'ai reconnu que ce mouvement tient lieu de l'*équant* de Ptolémée, c'est-à-dire qu'il produit le même effet dans le calcul. De sorte que les Indiens auraient seulement l'*excentrique* ou *déférent* et l'*épicycle*; et non le troisième cercle appelé *équant* par les Arabes, et dont Ptolémée considère principalement le centre, qu'il appelle *le point autour duquel se font les mouvements égaux.* On peut concevoir que ce procédé a pu apporter beaucoup de simplicité dans la théorie des planètes, car l'équant est cause, en grande partie, des calculs compliqués auxquels donne lieu le système de Ptolémée.

» Former un apogée fictif, c'est comme si l'on donnait une équation fictive à l'apogée réel. Et, en effet, j'ai trouvé, depuis, cette équation, ou la manière de la former, dans d'autres Tables que j'ai reconnues être imitées du Sendhend, et dans lesquelles ces traces manifestes d'une astronomie étrangère avaient échappé à l'attention des astronomes historiens. L'équation en question est précisément la moitié de *l'équation du centre.* C'est ainsi que l'auteur la désigne. C'est la *prostaphérèse de longitude* de Ptolémée. Les Arabes lui donnent divers autres noms qu'il est inutile de rapporter ici.

» Le calcul de la latitude des planètes est aussi très-simple, et l'on peut croire que cet avantage n'était point acquis aux dépens de l'exactitude; car je vois que cette méthode a été conservée dans des Tables où, pour la longitude, on a suivi celle de Ptolémée: telles sont notamment les Tables d'Arzachel, qui ont été très-renommées parmi les Arabes, et que citent souvent les astronomes modernes.

» Ces Tables, et je crois pouvoir dire toutes les Tables arabes en général, renferment beaucoup d'autres emprunts du Sendhend, qui ont passé, à la Renaissance, dans notre astronomie moderne, mais dont on ne s'est pas occupé de rechercher l'origine, bien qu'il fût assez évident qu'elle ne venait pas des Grecs.

» Les Tables karismiennes, outre qu'elles nous présentent le système complet d'astronomie pratique des Indiens, répandent beaucoup de jour et nous procurent même des solutions définitives sur plusieurs questions particulières qui se rattachent à l'astronomie et qui ont donné lieu à des divergences d'opinion chez les érudits.

» Je vais rappeler ici quelques-unes de ces questions. Elles suffiront pour montrer qu'il y a beaucoup à attendre de l'exploration des manuscrits arabes.

» Je n'ai en vue, dans ce moment, que l'astronomie orientale, indienne et chaldéenne; mais il serait aisé de prouver que l'étude des manuscrits arabes sera également utile pour l'histoire des sciences mathématiques chez les Grecs et chez les Arabes eux-mêmes, dont les travaux originaux nous sont peu connus.

» *Table des sinus.* — L'ouvrage d'Albategni nous a offert pour la première fois l'usage des sinus substitués aux cordes dont se servaient les Grecs dans leur trigonométrie, et l'on a attribué à cet astronome célèbre l'idée heureuse de ce perfectionnement extrêmement utile. Depuis, on a trouvé les sinus, et même la manière de les calculer et d'en construire une Table, dans le *Sourya siddhanta*, qui est regardé comme le plus ancien Traité d'astronomie hindoue: il était donc à croire que cette théorie avait passé des Indiens aux Arabes; mais, puisque l'on voulait qu'au contraire ceux-ci, et notamment Albategni, eussent été les maîtres des Indiens, il n'était pas sans intérêt de trouver une preuve qui pût convaincre les plus incrédules. Or une Table des sinus et l'explication relative à son usage se trouvent dans l'ouvrage d'Alkoresmi. Le traducteur les appelle *elgeib* du nom arabe; *elgeib elmustewi* seu *planum*, le sinus droit; et *elgeib elmacus* seu *diminutum*, le sinus-verse. Il appelle *argument* l'arc donné avec lequel on entre dans la Table.

» Ainsi, il ne faut plus attribuer à Albategni l'invention des sinus, il faut en faire honneur aux Indiens; et, en tous cas, Alkoresmi a sur Albategni une antériorité de soixante à quatre-vingts ans environ.

» Remarquons, en passant, que ce terme *argument*, qui est d'un usage si fréquent dans l'astronomie moderne, paraît dériver de l'astronomie indienne.

» *Mesure de la terre par les Chaldéens.* — Bailly regrettait de ne trouver aucune trace historique d'une mesure de la terre par les Chaldéens; mais il ne doutait pas que ces astronomes si renommés n'eussent effectué cette opération. Notre manuscrit confirme ces conjectures et nous donne la mesure de la terre selon les Chaldéens. On y lit : « D'après les Chaldéens, quatre » mille pas de chameau font 1 mille (*milliare*); et 33 milles et $\frac{1}{3}$, c'est-à- » dire un *thuild*, sur la terre, répondent à un demi-degré dans le ciel : d'où » il résulte que la circonférence entière de la terre contient 24 000 milles. » En effet, si d'un lieu quelconque on se dirige sur le méridien, quand » on aura fait 66 milles $\frac{2}{3}$, une étoile observée au point de départ paraîtra, » à la même heure, plus élevée d'un degré. Cela étant, $1\frac{1}{2}$ degré corres- » pond à 100 milles, et, par conséquent 15 degrés à 1 000 milles; un » signe à 2 000 milles, et douze signes à 24 000 milles (1). »

» C'est la première fois, je crois, qu'on trouve la mesure de la terre exprimée en pas de chameau. On voit dans les mesures arabes le poil de chameau, de même que le crin de la queue d'un cheval, mais non le pas de chameau, qui nous paraît caractériser ici la mesure de la terre chez les Chaldéens (2).

» Plusieurs auteurs arabes, Abulféda, Masoudi, Ebn-al-Ouardi, Halazen, etc., donnent cette mesure, 24 000 milles; et quelques-uns l'attribuent à Ptolémée, qui cependant n'en dit rien et exprime la circonférence de la terre par 180 000 stades. La raison de cela, c'est que, quand les Arabes ont commencé à cultiver les sciences et à consulter les ouvrages des Grecs, les

(1) *Groma.* Notandum quod secundum Caldeos $\overline{\text{IIII}}$ passus cameli milliare faciunt. Atque XXXIII milliaria et tertia, id est thuild, in terra, gradus in cœlo dimidius, unde totus terræ circulus $\overline{\text{XXIIII}}$ milliaria, continet. Rationis causa : si nunc a qualibet plaga directe ad meridiem eatur, LXVI milliaribus et duabus tertiis transgressis in priori plaga notata stella uno jam gradu, eodem momento horæ, superior esse videbitur. Quæ cum ita sint, gradus quidem et dimidius C milliaria exigunt; quindecim ergo mille; signum itaque $\overline{\text{II}}$; duodecim igitur $\overline{\text{XXIIII}}$.

(2) J'ai vu quelque part une mesure exprimée par le chemin que fait un bon chameau en une heure.

Syriens se servaient d'un mille de $7\frac{1}{2}$ stades. Ce rapport du mille asiatique au stade grec a montré aux Arabes l'identité de la mesure de la terre de Ptolémée avec celle des Chaldéens.

» Ne sera-t-on pas induit à conclure aujourd'hui que Ptolémée a reçu des Chaldéens, en même temps que leur astronomie, leur mesure de la terre, et qu'il l'a adoptée?

» *Les Chaldéens ont-ils possédé des Tables astronomiques?* — Cette question capitale dans l'histoire de l'astronomie ancienne, et dont l'énoncé seul pourra paraître téméraire, a donné lieu, il y a une vingtaine d'années, à une discussion entre M. Ideler et M. Delambre, discussion où néanmoins les deux adversaires étaient à peu près du même sentiment. M. Halma, en traduisant un Mémoire de M. Ideler sur les connaissances astronomiques des Chaldéens, lui avait fait dire: « Il est impossible qu'ils n'aient pas eu des » Tables astronomiques, qui sont le résultat d'une longue suite de recher- » ches théorétiques sur les révolutions des corps célestes. » Dans une critique générale du Mémoire du savant astronome allemand, ce passage surtout fixa l'attention de M. Delambre qui le censura vivement, prétendant que si les Chaldéens pouvaient avoir eu quelques observateurs, ils n'avaient jamais eu un seul astronome, et qu'ils n'avaient point su calculer les éclipses, par la raison qu'ils n'avaient point de Tables astronomiques (1). M. Ideler se plaiguit de la fausse interprétation de ses paroles, car il avait dit: « Comme il » est impossible que les Chaldéens aient eu des Tables astronomiques, qui ne » peuvent être que le résultat de recherches longues et appliquées sur les » révolutions des corps célestes, mon idée est qu'ils ont fait ces prédictions » (d'éclipses) par le moyen de la période de dix-huit ans (2). » M. Delambre n'admettait pas, malgré les deux passages connus de Géminus et de Ptolémée, et le sentiment de Laplace sur l'accord de ces deux textes, que cette période fût des Chaldéens. Sur ce point il différait de M. Ideler; mais les deux savants s'accordaient pour refuser aux Chaldéens la connaissance du calcul du mouvement des planètes.

» Forts de cette opinion de deux hommes célèbres comme astronomes et érudits, plusieurs écrivains ont émis, depuis, le même sentiment. Il semble bien extraordinaire et même impossible, je l'avoue, que les Chaldéens, qui jouissaient, au dire d'une foule d'auteurs grecs et romains, d'une grande renommée comme astronomes et astrologues; qui passaient pour les maîtres

(1) Voyez *Analyse des travaux mathématiques de l'Académie des Sciences*, année 1820.

(2) *Journal des Savants*, janvier 1822, page 47.

des Grecs; qui avaient déterminé, avec une précision remarquable, le mouvement du soleil (2), ceux de la lune, de son nœud et de son apogée même, ce qui était une détermination très-délicate; qui savaient calculer les éclipses, du moins les éclipses de lune, si la question est douteuse quant aux éclipses de soleil; qui observaient les planètes, et surtout Saturne; chez qui Callisthènes, à la suite d'Alexandre, a trouvé des observations astronomiques qui embrassaient un espace de 1903 ans; observations qui ont servi (en partie du moins), à Hipparque et à Ptolémée, pour fonder leur système astronomique; il semble impossible, dis-je, que les Chaldéens ne soient point parvenus aux équations du mouvement de la lune, du soleil et des planètes. Comment auraient-ils été astrologues sans savoir déterminer le mouvement des planètes? car il suffit de lire les ouvrages d'astrologie de Manilius, de Firmicus, de Ptolémée, des Indiens (chez les auteurs arabes), pour y voir que le fonds de cette science, c'est la détermination du point orient de l'écliptique, ou horoscope, et de la position des planètes. La détermination du point orient est d'un calcul difficile, qui exige la trigonométrie sphérique: toutefois on peut concevoir qu'une longue étude des levers et des couchers des étoiles ait pu suppléer à ce calcul; mais quant à la connaissance du mouvement des planètes, rien ne pouvait en tenir lieu. Ne voit-on pas encore que les apogées des planètes, que leurs révolutions, qui donnaient lieu aux grandes années ou périodes, sont d'autres éléments essentiels de l'astrologie? Les Chaldéens, de même que les Indiens, comme nous l'apprennent les livres arabes, étaient donc en possession de toutes ces connaissances. D'ailleurs Ptolémée, dans sa théorie des planètes, dit luimême qu'il existe déjà des Tables de leur mouvement; et Ibn Jounis confirme ce fait en rapportant qu'avant Ptolémée, on faisait l'équation du centre de Mars trop grande. Il semble donc qu'une foule de considérations concourent pour prouver, contrairement à l'opinion admise, que les Chaldéens ont eu des Tables du mouvement des planètes.

» Un passage de notre manuscrit paraît ajouter une nouvelle preuve tout à fait décisive. En effet, dans le calcul du lieu des planètes, l'auteur appelle le lieu moyen compté de l'apogée, *centre;* et le lieu calculé, c'est-à-dire le lieu vrai, *centre obtenu,* ou *dernier centre;* et il ajoute que les

(1) Albategni (*de Scientia stellarum*, cap. XVII) dit que l'on sait que les plus anciens Égyptiens et Babyloniens faisaient l'année de $365^j \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{131}$ de jour, c'est-à-dire de $365^j 6^h 11^m$. C'est l'année sidérale, et sa valeur est d'une approximation qui suffit pour donner une idée favorable du développement des connaissances astronomiques chez les Chaldéens.

Chaldéens l'appellent *elhacil* : « Quodque inde surget a Chaldeis elhacil, a nobis obtentum vel centrum ultimum potest dici. » Il faut donc conclure de là que les Chaldéens calculaient le lieu des planètes, ou, en d'autres termes, qu'ils avaient des Tables astronomiques. L'extrême réserve qu'exigent ces questions si délicates et si sujettes à controverse nous permettrait-elle de conjecturer que la méthode que l'auteur vient d'enseigner, était aussi celle des Chaldéens? Je reviendrai plus tard sur ce point important, en étayant de plusieurs autres considérations, et de textes divers, l'opinion que les Chaldéens, appelés par M. Delambre « ces vieux astrologues que quelques per- » sonnes ont encore la bonté de considérer comme des astronomes », ont réellement été des astronomes, et ont eu des Tables astronomiques. »

MÉMOIRE

SUR

LA PROPAGATION DES CHIFFRES INDIENS,

PAR M. F. WOEPCKE.

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES.

En étudiant l'histoire de l'esprit humain, on remarque une différence essentielle entre celles de ses évolutions qui aspirent à la réalisation du beau et du bon, et celles qui tendent vers la connaissance du vrai.

On voit, à différentes époques et chez différentes nations, naître et se développer un art, une religion, formant un tout complet en soi, et portant un caractère individuel bien marqué. Mais il n'en est pas de même de la science, soit qu'elle se borne à recueillir des observations et à en tirer des conséquences, soit qu'elle s'efforce à découvrir ou à approfondir des vérités abstraites ou transcendantes. Aussi longtemps que durera le genre humain, la science ne sera qu'une. La somme des faits prouvés et des théorèmes acquis constitue un héritage qui se transmet de génération à génération et de peuple à peuple, et qui, en se transmettant, s'accroît. C'est ainsi que les mathématiques des Grecs et des Indiens sont léguées aux Arabes, lesquels, à leur tour, communiquent à l'Occident chrétien ce précieux dépôt, après en avoir augmenté la valeur par leurs travaux.

Lorsque, dans cet échange de connaissances, la nation qui sert d'intermédiaire habite, comme les Arabes, des espaces fort étendus, de sorte qu'elle a avec les autres peuples des points de contact nombreux, mais éloignés et indépendants les uns des autres; lorsqu'il existe, entre cette nation et celles qui historiquement la précèdent et lui succèdent, des relations multipliées qui alternativement se brisent et se renouent, on conçoit que le passage de la science à travers ces nations, effectué par parties et sous l'influence de mille circonstances fortuites, suive des chemins extrêmement compliqués, et que l'étude qui se propose d'en retracer la marche donne lieu aux questions les plus difficiles.

A côté de faits dont les preuves abondent et qui sont connus jusqu'aux moindres détails, on rencontre des lacunes pleines d'obscurité, et des contradictions qui paraissent inextricables. La solution parfaite de ces problèmes ne résulterait que d'une connaissance tellement complète des événements et de leurs phases, qu'il faut à peu près renoncer à jamais l'obtenir. D'un autre côté, remplir les vides par des hypothèses arbitraires ou préconçues serait livrer l'histoire des sciences aux hasards et au dogmatisme des inspirations individuelles.

Est-ce à dire qu'on devra se résigner à ajouter de loin en loin quelque pièce isolée à un amas de matériaux destiné à ne jamais faire un édifice ; qu'on devra abandonner cette recherche de l'enchaînement des effets et des causes qui est un des besoins suprêmes de l'humanité ?

Je ne le pense pas, pourvu qu'en tâchant de construire un ensemble, on fasse consciencieusement connaître les parties conjecturales pour les distinguer d'avec les parties certaines, et pourvu que l'on ne présente les explications hypothétiques auxquelles on est obligé de recourir que comme la résultante la plus probable des faits connus dans le moment; pourvu enfin que l'on soit toujours prêt à modifier ses conclusions dans le cas où la découverte de documents nouveaux en rendrait la nécessité évidente.

Il est d'ailleurs indubitable que, lorsque l'exploration d'une question historique est arrivée à un certain point, la masse des résultats obtenus commence à converger vers une solution à laquelle les recherches ultérieures n'apportent plus de changements fondamentaux. Et certainement l'historien a le droit, sinon le devoir, d'indiquer cette solution lorsqu'il croit être sûr de l'entrevoir.

Les réflexions qui précèdent s'appliquent au sujet que je me propose de traiter.

Nos chiffres modernes, que l'usage a appelés *arabes*, n'ont pas les Arabes pour inventeurs. Tout le confirme, et les Arabes eux-mêmes le proclament.

Voilà un fait bien sûr et bien clair.

Mais quel est l'auteur de cette découverte, non moins importante peut-être que celles du feu et de la vapeur? Sont-ce les Indiens, auxquels elle est attribuée par les Arabes? est-ce Pythagore, comme l'affirme le texte d'un auteur latin antérieur aux Arabes? Nous savons, avec une certitude et une exactitude suffisantes, de quelle manière les chiffres indiens et leur usage ont été communiqués aux Arabes de l'Orient. Nous possédons même actuellement la traduction latine, faite au moyen âge, du traité arabe qui avait initié les contemporains du khalife Al-Mâmoûn aux méthodes et aux signes de l'arithmétique indienne. Mais il est aisé de s'assurer qu'il existe une différence essentielle entre les chiffres indiens des Arabes de l'Orient et nos chiffres européens, tandis que ceux-ci offrent une ressemblance frappante avec les chiffres gobâr qui sont en usage chez les Arabes de l'Afrique et de l'Espagne. En même temps, des recherches savantes et des arguments dont on ne saurait méconnaître le poids paraissent établir que les premiers procédés de calcul, dans lesquels on voit les nations chrétiennes de l'Europe employer neuf chiffres avec valeur de position, ne leur viennent point des Arabes d'Espagne, comme on l'avait cru pendant longtemps, et qu'ils sont antérieurs aux communications scientifiques de l'Europe avec les Arabes de l'Orient.

D'où viennent alors ces chiffres? Les Arabes du Maghreb les auraient-ils empruntés aux chrétiens, qui pourtant, on le sait bien, allaient étudier en Espagne pour s'approprier les sciences des Arabes? ou aux Indiens, qui cependant avaient donné aux Arabes de l'Orient des chiffres d'une forme différente? La réponse serait peut-être facile, si nous possédions des manuscrits arabes maghrébins des premiers siècles de l'hégire, ou des manuscrits latins des premiers siècles de notre ère, contenant les chiffres dont il s'agit. Mais on n'en connaît point dont l'âge remonte au delà du XIe siècle.

Voilà donc des contradictions et des lacunes.

Dans cet état de la question, il sera nécessaire d'introduire quelques éléments probables, pour suppléer aux données qui nous manquent dans la suite des faits certains. Mais la probabilité de ces éléments sera fondée sur de fortes inductions, et sur des pièces inédites ou des circonstances restées inaperçues jusqu'à présent, qui conserveront leur valeur absolue, quand même les conclusions qui m'ont semblé en résulter ne seraient pas exemptes d'erreur.

Je commencerai par analyser un passage de la Géométrie de Boèce qui joue un rôle considérable dans l'histoire des chiffres, et par examiner diverses questions qui se rattachent à ce texte.

Je tirerai de manuscrits arabes inédits plusieurs morceaux concernant la forme et l'origine des chiffres gobâr, employés, comme je l'ai déjà dit, par les Arabes occidentaux, et très-semblables aux chiffres les plus anciens que l'on trouve dans les manuscrits latins du moyen âge.

Je proposerai ensuite quelques rapprochements qui me paraissent rendre très-vraisemblable une origine indienne des chiffres gobâr et de ces chiffres des manuscrits latins. Mais, pour donner un appui plus solide à cette hypothèse, j'entrerai dans des recherches assez étendues sur l'histoire de l'arithmétique chez les Indiens. Je discuterai en particulier un passage du *Lalitavistara* qui contient l'exemple sans contredit le plus ancien d'un calcul réellement effectué avec de grands nombres, et qui offre en même temps une analogie remarquable avec l'Arénaire d'Archimède. Je traduirai en outre un passage fort important, extrait de l'ouvrage inédit d'Albîroûnî sur l'Inde, et relatif aux chiffres employés par les Indiens et à leurs systèmes de numération.

Après avoir ainsi jeté quelque lumière sur des parties jusqu'ici obscures des origines et du développement de l'emploi des chiffres, je présenterai un aperçu succinct de l'histoire de la propagation des signes de la numération chez les Arabes. Je donnerai à cette occasion l'analyse d'un traité de calcul indien, composé en arabe vers le milieu du XIe siècle de notre ère, et je ferai connaître plusieurs faits nouveaux tirés de parties inédites des œuvres d'Avicenne et d'autres manuscrits arabes inédits.

LE PASSAGE DE LA GÉOMÉTRIE DE BOÈCE.

Depuis qu'on a appris à connaître les traités arabes relatifs aux mathématiques et en particulier à l'arithmétique pratique, on a de plus en plus acquis la certitude que le nom d'*arabes* donné à nos chiffres implique une erreur. Cependant les erreurs mêmes, lorsqu'elles sont très-répandues et qu'elles se maintiennent pendant longtemps, ont leur raison d'être, et il n'est pas inutile, si elles touchent à des questions historiques, d'en rechercher les causes. C'est ce que j'essayerai de faire plus loin, pour l'origine arabe attribuée erronément à nos chiffres. Mais je dirai dès à présent que l'usage d'appeler arabes les chiffres employés par les nations modernes de l'Europe doit remonter bien au delà du XVII[e] siècle, car c'est à cette époque que l'on commence à le combattre.

Dans une note sur un passage curieux de la Chronique de Théophanes[1], publiée en 1655, le P. Goar s'exprime de la manière suivante:

« Hinc numerorum notas et characteres, *cifras* « vulgo dictos, Arabicum inventum, aut *Arabicos* « nulla ratione vocandos, qui hæc legerit, mecum « contendet..... Notas itaque characteresque, qui- « bus numeros summatim exaramus, 1, 2, 3, 4, etc. « ab Indis et Chaldæis usque ad nos scite magis ad- « vocat Glareanus in Arithmeticæ præludiis[2]. »

[1] *Theophanis Chronographia*. Parisiis, M. DCLV, in-fol. p. 616, 2[e] col. Le passage auquel cette note se rapporte se trouve p. 314. J'aurai à revenir, dans la suite du présent mémoire, à ce passage de Théophanes, dont M. Libri a signalé le premier, si je ne me trompe, l'importance pour l'histoire de l'arithmétique. (Voir *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. I, p. 378.) Il paraît aussi que déjà Huet en a également eu connaissance, du moins indirectement.

[2] Le P. Goar paraît ici faire allusion au passage suivant de l'ouvrage de Glareanus, intitulé : *De sex Arithmeticæ practicæ speciebus*,

Trente ans plus tard, l'illustre Wallis[1], faisant preuve déjà d'une connaissance assez exacte des auteurs arabes, contemporain d'ailleurs de Greaves et de

Henrici Glareani Epitome. Parisiis, 1554, in-8° (fol. 9 r°, lig. 14 à 21). « De numeratione. Numerorum notas, alii figuras, alii signa, alii « characteres vocant. Tum autem Numerare discimus, cum charac« terum significationes intelligimus. Characteres simplices sunt no« vem significativi, ab Indis usque, sive Chaldaeis asciti. 1. 2. 3. 4. « 5. 6. 7. 8. 9. Est item unus. o circulus, qui nihil significat, sed « aliorum characterum variis in locis facit differentiam. »

Ce passage montre en même temps que la tradition d'une origine indienne des chiffres s'était toujours maintenue à côté de l'usage plus général qui attribuait l'invention des chiffres aux Arabes. Je citerai encore à l'appui de cette assertion les passages suivants, empruntés à deux ouvrages publiés dans la première moitié du XVII[e] siècle.

« Supersunt volgares illi characteres Barbari, quibus hodie utitur « universus fere orbis. Suntque universim novem, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. « 8. 9. queis additur o cyphra, seu figura nihili, Nulla, Zero Arabi« bus. Nonnullorum sententia est, primos harum figurarum inven« tores fuisse Arabes (alii Phoenices malunt; alii Indos) quæ sane « opinio non est a veritate aliena. Nam sicut Arabes olim totius fere « orbis potiti sunt, ita credibile est, scientiarum quoque fuisse pro« pagatores. Quicunque sit Inventor maxima sane illi debetur gratia. » (*Pet. Laurembergi Rostochiensis Institutiones arithmeticæ.* Hamburgi, 1636, in-12°, p. 20, lig. 14, à p. 21, lig. 2.)

« Computatores autem ob majorem supputandi commoditatem « peculiares sibi finxerunt notas (quarum quidem inventionem non« nulli Phœnicibus adscribunt, quidam, ut Valla et Cardanus, Indis « assignant, plerique vero Arabibus et Saracenis acceptam referunt) « quas tamen alii ab antiqua vel potius corrupta Græcarum literarum « forma, nonnulli vero aliunde derivatas autumant. Atque his poste« rioribus hodierni quoque utuntur Arithmetici. » (*Christophori Nottnagelii Professoris Wittebergensis Institutionum mathematicarum Pars I.* Wittebergæ, 1645, in-8°, p. 185.)

[1] Voir *Joh. Wallis de Algebra tractatus historicus et practicus.* Opp. math. vol. II. Oxoniæ, 1693, in-fol. p. 7 et suiv. et particulièrement p. 9. La première édition du Traité d'Algèbre parut en 1685.

Hyde, observe que les Arabes eux-mêmes conviennent d'avoir reçu les chiffres des Indiens, et que l'on aurait tort, par conséquent, de leur attribuer une invention à laquelle ils ne prétendent en aucune façon.

Mais il ne s'agit point encore, chez cet auteur, de contester aux Arabes le rôle d'intermédiaires. Au contraire, l'opinion la plus généralement reçue jusqu'à ces derniers temps, fondée principalement sur l'autorité de Wallis, et s'appuyant en partie sur le récit d'un chroniqueur anglais du XII^e^ siècle, Guillaume de Malmesbury[1], admettait que les Arabes avaient adopté les chiffres indiens et les avaient transportés dans les pays soumis par leurs conquêtes, notamment en Espagne; que Gerbert, plus tard pape sous le nom de Sylvestre II et mort en 1003, avait étudié à Séville ou à Cordoue, où il avait acquis la connaissance des chiffres et de leur usage; et que, grâce aux efforts par lesquels il s'est immortalisé comme restaurateur des sciences, l'emploi des chiffres s'était répandu chez les nations chrétiennes de l'Europe.

Un élément tout nouveau et incompatible avec cette opinion fut introduit dans la question par Isaac Vossius[2] et surtout par Weidler[3], le célèbre historien de l'astronomie.

[1] *Willielmi monachi Malmesburiensis de gestis regum Anglorum libri V, etc.* Londini, 1596, in-fol. Folio 36 r°.

[2] *Pomponii Melæ libri tres de situ orbis. Cum obss. Isaaci Vossii.* Ed. secunda. Franckeræ, 1700, in-12, p. 85. La première édition est de 1658.

[3] *De characteribus numerorum vulgaribus et eorum ætatibus veterum*

3.

Ils furent les premiers à signaler l'existence d'un passage qui se trouve à la fin du premier livre de la Géométrie de Boèce, et dont j'aurai à parler ci-après d'une manière plus détaillée. Vossius ne le mentionne qu'en passant, non sans en conclure cependant une origine pythagoricienne ou du moins grecque, et non arabe ni indienne, de nos chiffres[1]. Mais Weidler en fit l'objet d'une étude plus approfondie. Il dirigea son attention tout particulièrement sur les chiffres dont il est question dans le cours de ce passage, et sur les figures par lesquelles ces chiffres sont représentés dans un manuscrit de la Géométrie de Boèce conservé à la bibliothèque de l'université d'Altdorf. Il pensait avec raison qu'il fallait voir dans ces figures les formes les plus anciennes des chiffres dont nous nous servons actuellement, et considérant que le texte du passage présente ces figures comme celles qu'avaient employées dans leurs calculs certains philosophes de l'école de Pythagore, il se prononça pour une origine grecque de nos signes de numération.

monimentorum fide illustratis, diss. math. — crit. a J. F. Weidlero et G. J. Weidlero. Witembergæ, 1727, in-4°. — J. F. Weidleri *Spicilegium observationum ad historiam notarum numeralium pertinentium*. Wittenbergæ, 1755, in-4°.

[1] Après Vossius, Huet, le docte évêque d'Avranches, se sert du même passage de Boèce comme d'un argument en faveur d'une hypothèse qu'il développe sur l'origine des chiffres dans sa *Demonstratio evangelica*, hypothèse d'après laquelle les neuf chiffres ne seraient autre chose que des déformations des neuf premières lettres de l'alphabet grec. (Voir *Petri Danielis Huetii Demonstratio evangelica ad*

Le texte du passage dont il s'agit a été imprimé dans les éditions des œuvres complètes de Boèce publiées à Venise en 1499 et à Bâle en 1546 et 1570; mais il s'y trouve dans un état tellement corrompu que l'on ne doit point s'étonner si certains savants ont été induits à croire que Boèce n'avait pas bien compris lui-même le système de numération et d'arithmétique qu'il se propose d'expliquer. C'est ce qui m'a déterminé à publier de nouveau ce texte, d'après deux manuscrits latins de la Bibliothèque impériale de Paris[1]. Il offre, dans cette forme plus correcte, le sens le plus complet et le plus satisfaisant; et s'il y reste quelque obscurité, elle provient d'une description trop concise de certaines opérations arithmétiques fort compliquées[2], mais non d'une connaissance imparfaite de ces opérations de la part de Boèce.

La reproduction de ce passage prendrait trop de place ici; mais il sera utile d'exposer brièvement les points les plus remarquables de son contenu. En voici l'énumération :

1° Définition des termes *digit* et *article*, et de quelques autres expressions techniques.

serenissimum Delphinum. Parisiis, 1690, in-fol. p. 172, 1re col. lig. 46, à p. 174, 1re col. lig. 3.)

[1] Voir *Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident, etc.* par F. Woepcke. Rome (Imprimerie des sciences mathématiques et physiques), 1859, p. 9 à 11.

[2] C'est ce que Boèce dit lui-même, à la fin du passage, en ces termes : « Hæc vero brevi introductione prælibantes, si qua obscure « sunt dicta, vel, ne tædio forent, prætermissa, diligentis exercitio « lectoris committimus. »

2° Réflexions sur l'importance des nombres dans les sciences mathématiques et dans les spéculations des Pythagoriciens ou plutôt des Néopythagoriciens, indiqués assez clairement par les expressions : « Priscæ « prudentiæ viri Pythagoricum dogma secuti, Plato- « nicæque auctoritatis investigatores speculatoresque « curiosi. »

3° Énoncé du fait que les Pythagoriciens se servaient, dans les multiplications et les divisions, d'un tableau à colonnes [1] inventé par Pythagore, et appelé, en son honneur, *Table de Pythagore* (mensa Pytha-

[1] Comme il sera encore question, à différentes reprises, dans la suite de ce mémoire, du tableau à colonnes, comme d'un moyen de remplacer l'emploi du zéro, j'ajouterai une courte explication pour ceux d'entre les lecteurs qui ne seraient pas tout à fait familiarisés avec cette matière. Nous écrivons actuellement des nombres, tels que les suivants,

305
84009076
1020084000

en faisant usage du zéro; mais on comprend que, si des lignes verticales étaient tracées d'avance sur la page où l'on voudrait écrire ces nombres, par exemple, pour en faire l'objet d'un calcul, on pourrait se passer du zéro en écrivant

							3		5
		8	4			9		7	6
1		2			8	4			

Cette notation est moins commode, mais aussi claire et aussi précise que la nôtre, pourvu que l'on convienne, une fois pour toutes, que les chiffres signifient des unités lorsqu'ils sont placés dans la première colonne à droite; des dizaines, dans la colonne suivante; des mille dans la troisième, et ainsi de suite. Le tableau à colonnes fournit donc un moyen d'écrire tous les nombres, quelque grands qu'ils soient, au moyen de neuf chiffres, en donnant à ceux-ci des valeurs différentes, selon leur position, et sans faire usage du zéro.

gorea), mais qui reçut plus tard le nom d'*Abacus* (a posterioribus appellabatur Abacus).

4° Description de trois modes différents en usage chez les Pythagoriciens, pour figurer les neuf caractères employés dans l'exécution des calculs sur le tableau à colonnes. Ces trois modes consistaient en ce que les uns (quidam) se servaient de chiffres (notæ, notulæ) d'une forme particulière, les autres des neuf premières lettres de l'alphabet, d'autres encore de jetons[1] marqués des neuf premiers nombres naturels[2].

5° Explication du principe de la valeur de position que l'on donnait aux neuf caractères, au moyen du tableau à colonnes.

6° Règles de la multiplication exécutée sur le tableau à colonnes avec neuf caractères prenant une valeur de position.

7° Règles de la division d'après le même système.

Si ce passage a réellement Boèce pour auteur; si, comme il paraît l'affirmer, Pythagore est l'inventeur de la valeur de position; si certains Pythagoriciens ou Néopythagoriciens ont calculé avec neuf chiffres, et si les figures que l'on trouve à cet endroit dans les manuscrits de la Géométrie de Boèce sont, d'une part, identiques au fond à nos chiffres actuels et sont,

[1] Ou d'autres objets semblables; le texte porte : «apices naturali «numero insignitos et inscriptos.»

[2] Probablement au moyen des chiffres romains ordinaires, ou d'un nombre de points ou de traits, correspondant au nombre que l'on voulait inscrire sur le jeton.

d'autre part, des représentations fidèles, ou à peu près, des chiffres qu'employaient les Pythagoriciens auxquels ce texte fait allusion; si on peut démontrer, en outre, que Gerbert n'a jamais visité les écoles des Arabes, la thèse d'une origine indienne de nos chiffres et d'une transmission par les Arabes devient fort invraisemblable; on ne pourra pas s'empêcher de considérer comme très-probable que le moyen âge chrétien ait puisé la connaissance des chiffres et de leur usage dans l'ouvrage de Boèce, et l'on sera disposé à chercher l'origine de nos chiffres dans l'école de Pythagore.

Mais, comme il est certain que les nations chrétiennes du moyen âge ont effectivement reçu, plus tard, l'arithmétique indienne, par l'intermédiaire des Arabes; comme il est peu probable qu'entre deux systèmes issus de deux sources complétement différentes il ait pu s'établir une fusion tellement facile que la transition est presque imperceptible; comme l'invention indépendante des chiffres et de la valeur de position, une fois dans l'Inde, une autre fois chez les Pythagoriciens, serait peu conforme aux lois qu'on observe généralement dans l'histoire des progrès de l'esprit humain, on conçoit la nécessité de scruter plus profondément qu'on ne l'a fait encore l'histoire de l'arithmétique dans l'antiquité, et de concilier, par la découverte de faits nouveaux, les résultats contradictoires auxquels paraissent aboutir les recherches entreprises jusqu'à présent.

En premier lieu, il faudra soumettre à un examen soigneux les questions que je viens de proposer concernant le passage de Boèce et les sources auxquelles Gerbert puisa ses connaissances. Il sera désirable d'obtenir, avant d'aller plus loin, une solution de ces questions, affirmative ou négative, mais claire et précise.

Une grande partie de cette tâche a été remplie avec un succès incontestable par M. Martin, dans un mémoire intitulé *Recherches nouvelles concernant les origines de notre système de numération écrite*, qu'il a publié dans les cahiers de décembre 1856 et de janvier 1857 de la Revue archéologique[1]. Surtout le paragraphe IV de ce mémoire, consacré à un examen critique de la biographie de Gerbert, est un modèle d'érudition et de méthode. M. Martin établit d'une manière concluante que Gerbert n'a pas été le disciple des Arabes, mais de Boèce ou d'autres auteurs, comme saint Odon, qui paraissent avoir écrit sur l'arithmétique d'après le système de Boèce déjà antérieurement à Gerbert, et que le savoir mathématique de ce dernier se rattachait exclusivement à la tradition grecque et romaine. Il accueille, avec

[1] Je regrette d'avoir ignoré l'existence de ce mémoire au moment où je rédigeai les recherches ci-dessus citées sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident. Ayant passé en Allemagne les années de 1856 à 1858, et occupé par les devoirs d'un enseignement qui venait de m'être confié, j'avais été empêché de suivre aussi attentivement que d'habitude les publications relatives aux sciences mathématiques paraissant à Paris. C'est vers la fin du même espace de temps que j'écrivis le mémoire auquel j'ai fait allusion plus haut, et dont l'impression fut terminée en 1859.

la réserve que mérite une semblable assertion, l'invention de la valeur de position par Pythagore lui-même, en rappelant que « les Pythagoriciens de « toutes les époques aimaient à rapporter à Pythagore la première origine de toutes leurs découvertes. » Mais il montre que « rien ne nous empêche « d'attribuer à des Néopythagoriciens d'une époque « peu antérieure à celle de Boèce la première application de la méthode de l'Abacus. »

M. Martin a réuni aussi, avec une habileté judicieuse, des arguments nombreux et valables en faveur de l'authenticité de la Géométrie de Boèce et du passage sur l'Abacus, et je pense que les conclusions du savant critique doivent être prises en sérieuse considération. Mais j'aurais vivement désiré que M. Martin eût répondu à une grave objection soulevée par M. Halliwell, dans l'intéressant recueil qu'il a publié sous le titre de *Rara mathematica*. Dans l'appendice de cet ouvrage[1], on lit ce qui suit :

« Il est fort probable que le passage bien connu « sur l'Abacus, dans le premier livre de la Géométrie de Boèce, est une interpolation; car dans un « manuscrit qui a appartenu autrefois à M. Ames, « on ne voit rien d'un semblable passage, et dans « un autre manuscrit qui se trouve actuellement « dans la bibliothèque de Trinity College, il manque « pareillement. »

Il me semble aussi que, si l'on divise la Géomé-

[1] Page 107 de la seconde édition, publiée à Londres en 1841.

trie de Boèce en deux parties, dont l'une finit et dont l'autre commence à la quatrième ligne de la page 1516 de l'édition faite à Bâle en 1570 des Œuvres de Boèce, la démonstration de M. Martin (principalement le témoignage de Cassiodore *Variarum I, Epist.* 45[1]) ne prouve peut-être que l'authenticité de la première partie; que la seconde pourrait être l'œuvre d'un continuateur; et que l'authenticité de la première partie est bien confirmée par la seconde, mais non celle de la seconde par la première. Telle à peu près paraît avoir été aussi la pensée de M. Lachmann[2]; et M. Bœckh, dont la haute autorité philologique commande une attention particulière, exprime en ces termes son sentiment sur l'authenticité du passage de la Géométrie de Boèce, relatif à l'Abacus :

« Hæc etsi a Boethio profecta esse vix nobis persuademus, quum universa de abaco disputatio male « cohæreat cum Boethii de Geometria libro primo et « stilo satis horrido scripta sit : tamen dubitari ne- « quit, ex antiquo et Græco fonte derivatam hanc « illius Appendicis partem esse, quæ in abaci ratio- « nibus enucleandis versatur, sive ex Boethii aliquo

[1] Tome I, p. 20, col. 1re de l'édition de Venise, 1729, in-folio, des Œuvres de Cassiodore. Un autre passage de Cassiodore, signalé par M. Martin, où Boèce est mentionné comme traducteur d'Euclide, se trouve t. II, p. 558, col. 2e de la même édition, dans l'ouvrage intitulé : *De artibus ac disciplinis liberalium litterarum.*

[2] *Die Schriften der rœmischen Feldmesser,* herausgegeben und erlæutert von F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff. Berlin, 1848 à 1852, in-8°, t. II, p. 93 à 94; et comparer p. 90.

« libro sive ex alio auctore Latino Græcarum litte-« rarum perito sua petiit compilator[1]. »

LA FORME ET LES NOMS DES CHIFFRES DANS LES MANUSCRITS LATINS DU MOYEN ÂGE.

Il reste une des questions ci-dessus proposées, la plus importante pour l'objet qui nous occupe ici. Il faut examiner si les chiffres que nous trouvons dans les manuscrits de la Géométrie de Boèce sont des formes anciennes de nos chiffres actuels, et sont en même temps des reproductions véritables des signes qu'employaient autrefois les Néopythagoriciens.

Remarquons d'abord que les chiffres dont il s'agit n'appartiennent pas d'une manière spéciale à la Géométrie de Boèce. On les trouve non-seulement dans les manuscrits de cet ouvrage, comme ceux d'Altdorf et de Chartres, et les n[os] 7185 et 7377 C de l'ancien fonds latin de la Bibliothèque impériale de Paris, mais aussi dans des manuscrits contemporains, contenant des traités d'arithmétique pratique écrits dans le système de Boèce, comme les n[os] 533 et 534 du fonds Saint-Victor de la Bibliothèque impériale de Paris, et le n° 343 du fonds d'Arundel de la bibliothèque du British Museum. Les différences qu'on observe entre les formes des chiffres des manuscrits de Boèce d'une part, et les formes des chiffres des manuscrits relatifs à l'arithmétique pratique d'autre part, ne sont pas plus considérables que les diffé-

[1] *Index lectionum quæ in Universitate litteraria Friderica Guilelma per semestre æstivum a. MDCCCXLI instituentur.* Berlin, in-4°, p. x.

rences que présentent entre eux les chiffres de chacune de ces deux classes de manuscrits.

Ce n'est pas mon intention de donner ici une énumération complète de tous les manuscrits qui contiennent ces chiffres; mais je ne peux pas m'empêcher d'en citer encore un très-beau spécimen, dont je dois la connaissance à la bienveillance de M. Léopold Delisle. Ce sont deux pages du n° 9377 de l'ancien fonds latin, intitulé *Fragmenta veterum codicum.* Tandis que, dans les autres manuscrits, les chiffres ne se trouvent ordinairement qu'épars au milieu du texte, et souvent plus ou moins mal formés, ces deux pages, très-grandes, sont entièrement remplies de groupes de chiffres, exécutés avec un soin et une régularité remarquables. Ces groupes ou tableaux représentent des exemples des différentes espèces de nombres définies par Nicomaque dans les derniers chapitres du premier livre de son Arithmétique.

La conformité des chiffres dans les divers manuscrits que je viens de mentionner ne prouve pas que les formes des chiffres que présentent les manuscrits de Boèce doivent être considérées comme appartenant seulement aux copistes du XI[e] siècle, et ne sont pas plus anciennes. Cette conformité n'exclut pas la possibilité que les arithméticiens chrétiens du moyen âge aient reçu ces chiffres par une tradition qui remonte jusqu'à Boèce; c'est même une supposition fort probable. Mais provisoirement nous devons affirmer seulement, comme un fait certain, que le moyen âge est en possession de ces chiffres, quelle que soit d'ailleurs leur origine, dès le XI^e siècle, et que leur forme n'est pas encore considérablement modifiée pendant le cours du XII^e siècle.

M. Natalis de Wailly montre, dans ses *Éléments de paléographie*[1], les formes que ces chiffres présentent avant de prendre la forme cursive qu'ils ont au XIII^e siècle, et comment cette forme devient peu à peu, au XIV^e et au XV^e siècle, identique à celle que montrent les commencements de l'imprimerie. Cette dernière forme se conserve depuis lors avec la stabilité par laquelle la reproduction typographique se distingue si essentiellement de la transmission par des copies écrites.

Il est donc hors de doute, et prouvé par une suite non interrompue de documents authentiques, que nos chiffres actuels descendent de ceux que nous rencontrons pour la première fois dans des manuscrits latins du XI^e siècle.

Il n'est pas tout à fait aussi sûr que ces derniers chiffres nous retracent la vraie forme des caractères employés, d'après le passage de Boèce, par certains d'entre les Néopythagoriciens dans leurs calculs. Cependant il est une circonstance qui rend cette supposition, comme je viens de le dire, très-probable.

Ce sont les noms qui accompagnent les chiffres dans quelques-uns des manuscrits de la Géométrie de Boèce[2], et que leur assigne pareillement un assez

[1] Tome I, p. 711 à 716, et t. II, p. 255, 256, 303 à 305, et planche VII.

[2] Huet paraît également avoir eu sous les yeux un manuscrit de

grand nombre de traités relatifs à l'arithmétique pratique, datant du XI[e] siècle et des siècles suivants, et conservés dans les manuscrits latins du moyen âge.

Voici ces noms, précédés des chiffres auxquels ils appartiennent :

1	Igin.	6	Caltis ou Chalcus.
2	Andras.	7	Zenis.
3	Ormis.	8	Temenias.
4	Arbas.	9	Celentis.
5	Quimas.	0	Sipos.

C'est le mérite de M. Vincent[1] d'avoir le premier vu dans ces noms un mélange de racines grecques et sémitiques[2], dont les unes rappellent les idées mystiques des Néopythagoriciens sur les nombres,

Boèce qui contenait ces noms, et que Greaves lui avait communiqué. (Voir *Dem. evang.* édition de 1690, p. 173, col. 2[e], lig. 28, à p. 174, col. 1[re], lig. 3.)

[1] Voir *Note sur l'origine de nos chiffres, et sur l'Abacus des Pythagoriciens* (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, publié par M. Liouville, cahier de juin 1839), et *Des notations scientifiques à l'école d'Alexandrie* (*Revue archéologique*, cahier de janvier 1846).

[2] Vu la forme modifiée et mutilée de ces racines, transcrites, en outre, au moyen des caractères latins, si peu conformes au génie des langues sémitiques, ce serait, il me semble, une vaine subtilité que de vouloir les attribuer plutôt à tel qu'à tel autre membre de la famille des langues sémitiques. Mais si la question valait la peine d'être posée, elle devrait être résolue par des arguments plutôt historiques que purement philologiques, et il faudrait se décider probablement pour celui des dialectes sémitiques dont l'influence était prépondérante à Alexandrie, dans les premiers siècles de notre ère. Plus que toute autre, la supposition d'une origine arabe me paraîtrait devoir être exclue.

tandis que les autres désignent simplement des valeurs numériques.

Le savant Huet avait déjà soupçonné l'origine sémitique de quelques-uns de ces noms[1]; mais, engagé dans une opinion préconçue, il s'était contenté d'une explication trop facile. M. Nesselmann[2], quoique désespérant de fournir une étymologie quelconque pour Ormis, Caltis et Celentis, voulut que tous ces noms eussent une origine sémitique. La même hypothèse avait été proposée déjà par Radulphe, mort évêque de Laon en 1131, qui se prononce pour une origine chaldéenne de ces noms et de l'abacus même, dans un passage fort curieux de son Traité de l'Abacus que je reproduis en note[3].

[1] « Præterea in codice illo manu scripto ad notas arithmeticas apposita sunt vocabula quædam quorum nonnulla originem Ebraicam « præferunt : puta quaternarius appellatur *Arbas*, quod est ארבע : « quinarius, *Quimas*, quod est חמש : septenarius, *Zenis*, fortasse *Zevis*, « quod est שבע : octonarius, *Temenias*, quod merum est Chaldaicum « תמניא, factum ex Ebraico שמנה. Addita autem suspicor hæc « vocabula a librario, in gratiam Orientalium ; cum codicem fortasse « descripserit eo tempore, quo literæ arabicæ florebant. » (Voir *Demonstr. evang.* édition de 1690, p. 173, col. 2e, lig. 49, à p. 174, col. 1re, lig. 3.) Ce passage ne se trouve pas dans l'édition de 1679.

[2] *Die Algebra der Griechen.* Berlin, 1842, in-8°, p. 102 à 104.

[3] Manuscrit 534 du fonds Saint-Victor latin de la Bibliothèque impériale de Paris, fol. 1 v°, ligne 19, à fol. 2 v°, ligne 4. « In hujus « ergo tabulæ descriptione, ut dicere inchoavimus, in ter novena « spatiorum multitudo distinguitur; videlicet in cubi formam a ter- « naria longitudine in latum et altum æquis dimensionibus auctam. « Et quum instrumenti hujus Assirii inventores fuisse perhibeantur, « qui chaldeo sermone et litteris utentes, et a dextera scribendi « initium sumentes, in sinistram versus extendunt, ad auctoritatem « inventoribus prorogandam, hujus tabulæ descriptio, a dextera ini-

Libre de l'esprit de système qui avait égaré ses prédécesseurs, M. Vincent sur reconnaître la nature

« tium faciens, longitudinem suam in sinistram porrigit. Ipsa autem « spatia hoc modo distincta sunt, ut, cum singula quæque suas ha- « beant superductiones, terna tamen, a principio tabulæ usque ad « finem, singulis superductionibus claudantur; ita ut ternis semper « intervallis uno semicirculo clausis in tota tabulæ longitudine IX « superductiones inveniantur. Et prima quidem trium spatiorum « superductio unitatis caractere inscribitur, qui chaldeo nomine di- « citur *igin*; I latinæ litteræ figuram exprimit. Quod icciro factum « dinoscitur, ut tria illa intervalla, quæ præscriptum sibi unitatis « caracterem gerunt, primum se per hoc locum obtinere testificen- « tur. Secunda vero trium intervallorum superductio hanc 2 binarii « figuram, quæ apud prænominatos inventores *andras* dicitur, in- « scriptam habet, ut per hanc tria illa spatia, quibus inscribitur, « secundum sibi vindicare locum insinuetur. Tertia autem trium spa- « tiorum superductio per hoc se tertium locum docet obtinere, quia « hac 3 ternarii forma, quæ apud Chaldeos *ormis* appellatur insi- « gnita est. Similiter et quarti ordinis superductio per hoc se quar- « tum locum tenere testatur, quia hoc 4 quaternarii caractere, qui « apud inventores *arbas* nuncupatur, inscribitur. Nec non et quintus « ordo quintum se locum obtinere denunciat, quia hanc 5 quinarii « figuram, quæ *quimas* dicitur, inscriptam portat. Itidem sextus ordo « sextum se perhibet, quia hunc 6 senarii caracterem, qui *caltis* di- « citur, inscriptum habet. Septimus quoque septenarii, qui *zenis* di- « citur, 7 tali figura prætitulatur. Octavus octonarii, quem *temeniam* « dicunt, 8 hanc habet formulam; et nonus novenarii hac 9 figura « insignitur, quæ apud inventores *celentis* appellatur. Inscribitur in « ultimo ordine et figura ⊙ *sipos* nomine quæ, licet numerum nullum « significet, tamen ad alia quædam utilis est, ut insequentibus de- « clarabitur. »

Les chiffres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui figurent dans le texte qui précède, ont dans le manuscrit la forme particulière au xii^{e} siècle.

La circonstance que Radulphe présente les noms des chiffres et l'Abacus comme étant d'invention chaldéenne me paraît une preuve assez forte en faveur de l'opinion que son ouvrage, ainsi que les traités de l'Abacus écrits dans le même système, se rattache à la tradition grecque, et qu'ils sont antérieurs à l'introduction de l'arithmixte de ces noms, et montrer dans leur formation cette combinaison d'influences pythagoriciennes, cabalistiques, juives et gnostiques, qui est un des traits caractéristiques de la spéculation alexandrine.

M. Vincent adopte pour les noms Arbas, Quimas, Zenis et Temenias, les étymologies données par Huet. Il fait dériver les noms Igin, Andras et Ormis des racines : γυν (précédé de l'article ἡ ou du signe de l'unité), ἀνδρ et ὁρμ, qui devaient rappeler les idées du principe femelle, du principe mâle et de l'action. Rejetant la forme *Caltis*, il identifie le nom du nombre six avec le mot χαλκοῦς, en se fondant sur un passage de Cassiodore, qui dit que le nombre six a été appelé *once*, en sa qualité de nombre parfait, et en y joignant un autre passage de Pollux, qui déclare que le mot once, οὐγγία, est un mot sicule qui a pour équivalent grec χαλκοῦς. Quant au neuf, M. Vincent conjecture, en se fondant sur un passage d'Olympiodore, que ce nombre représente l'idée de la puissance, et il ramène le nom Celentis à ἀθήλυντος, *ineffœminatus*, *virilis*.

métique arabe en Europe. S'il en était autrement, pourquoi Radulphe, voulant attribuer aux chiffres et à l'Abacus une origine sémitique ou très-ancienne, aurait-il nommé les Chaldéens et les Assyriens, et non les Arabes ou les Indiens? On sait que les Grecs ramènent aux Chaldéens l'origine première de leurs connaissances astronomiques. Mais au moyen âge, aussitôt que l'influence des traductions de traités arabes se fait sentir, c'est-à-dire dès la première moitié du XIIe siècle, le nom des Indiens ne tarde pas à paraître dans les ouvrages latins relatifs aux sciences mathématiques.

M. Bienaymé, que de vastes lectures, entreprises dans un autre but, ont profondément initié à tout ce qui est relatif, dans la littérature grecque, à l'histoire de l'école pythagoricienne, a bien voulu m'autoriser à faire connaître ici quelques-unes des explications des mêmes noms que ces études lui ont suggérées. M. Bienaymé pense que Caltis (qu'il considère comme la vraie leçon), Zenis et Celentis, dérivent respectivement de καλότης (forme un peu rare, employée par des écrivains philosophes et synonyme de κάλλος), Ζηνίς (féminin patronymique, formé de Ζεύς, génitif Ζηνός, à la manière de Ταντᾰλίς, Ἰναχίς, etc.), et Σελήνη. Ces étymologies me paraissent avoir le mérite de rattacher chacun des trois noms Caltis, Zenis et Celentis, à l'idée que les Pythagoriciens combinaient *de préférence* avec le nombre correspondant.

Qu'il me soit permis de citer à l'appui de cette assertion trois passages extraits des notes et de la traduction dont Bouillaud a accompagné son édition de la Musique de Théon de Smyrne [1], en attendant que M. Bienaymé fasse connaître les preuves, sans doute bien plus décisives et plus intéressantes, par lesquelles il justifiera ces étymologies, quand il publiera lui-même les résultats de ses méditations sur cette matière.

Pour le nombre six, on lit dans l'ouvrage cité (p. 283) :

« (Senarius) dictus est..... sanitas et *pulchritudo*

[1] Paris, 1644, in-4°.

4.

« propter partium absolutam integramque compre« hensionem, et symmetriam[1]. »

Pour le nombre sept (*ibid.* p. 161) :

« Septenarius etiam Decadis unus, mirabili pro« prietate præditus est, solus enim intra denarium « nec quemquam generat nec a quoquam generatur, « propterea eum numerum Pythagorici *Minervam* « appellabant, quæ matre genita non fuerat, nec « mater erat : non enim ex combinatione fit, aut « alicui combinatur[2]. »

Pour le nombre neuf (*ibid.* p. 288) :

« Orpheus et Pythagoras novenarium *κυρίτιδα* ap« pellant..... utpote dominam sanctam tribus par« tibus, et triadibus constantem, vel filiam, utraque « enim ternario applicata sunt[3]....... Novenarium « ergo sic appellant *ἡ κόρηνγε*, id est filiam. Proprie « Proserpina sic appellatur, cui plura insuper impo« sita nomina Hecates nimirum, Dianæ, Lucinæ. Et « tergeminam vocant illam, ob tres Lunæ phases « crescentis, plenæ, et decrescentis, nam et ipsa « *Luna* dicta est. »

Quant à Sipos, M. Vincent le rapproche du mot

[1] *Ὑγιεία, καὶ κάλλος, διὰ τὴν ἐν αὐτῷ ὁλοκληρίαν τῶν μερῶν, καὶ συμμετρίαν* (c'est-à-dire : parce que six est un nombre parfait, dont les diviseurs 1, 2, 3 forment une suite régulière).

[2] *Καὶ ἡ ἑβδομὰς δὲ τῆς δεκάδος οὖσα θαυμαστὸν ἔχει δύναμιν, μόνος γὰρ ἐντὸς τῆς δεκάδος οὔτε γεννᾷ ἕτερον, οὔτε γεννᾶται ὑφ' ἑτέρου· διὸ καὶ Ἀθηνᾶ ὑπὸ τῶν Πυθαγορικῶν ἐκαλεῖτο, οὔτε μητρὸς τινος οὖσα οὔτε μήτηρ· οὔτε γὰρ γίνεται ἐκ συνδυασμοῦ, οὔτε συνδυάζεταί τινι.*

[3] *Ἅτε κυρῖτιν ἱερὰν ὑπάρχουσαν τριῶν τριμερῆ, ἡ κόρηνγε, ἅπερ ἀμφότερα τριάδι ἐφηρμόσθη.*

hébreu ספ, *vase*, comme impliquant l'idée de *vide;* tandis que M. Martin considère comme plus vraisemblable une autre étymologie, d'après laquelle Sipos viendrait de ψῆφος, dans le sens de jeton à compter, rond, cercle.

En résumé, les noms dont la discussion précède[1],

[1] Parmi les étymologies ci-dessus proposées, une des moins satisfaisantes est certainement celle du nom de l'unité, *igin*. Or, quoiqu'il me répugne de remplacer une conjecture par une autre, aussi invraisemblable peut-être que la première, je crois cependant devoir signaler un fait, une coïncidence de forme et de sens tellement frappante, qu'elle m'a semblé mériter du moins une attention passagère.

Dans une note *sur le système primitif de la numération chez la race berbère,* qui a paru dans le cahier d'août-septembre 1860 du *Journal asiatique,* M. Reinaud propose, comme des exemples de l'ancienne numération berbère, conservée chez les Kabyles, deux tableaux de noms de nombres, dont l'un a été recueilli par M. Letourneux dans les oasis du Souf, le pays des Chamba et l'Oued Ghyr, et dont l'autre est emprunté à l'*Essai de grammaire de la langue tamachek,* publié par M. Hanoteau. Dans le premier de ces tableaux, le nom de l'unité est *ighem,* et dans le second *iien.* En outre, dans une lettre publiée dans les nouvelles et mélanges du même cahier du *Journal asiatique,* M. Hanoteau constate que chez les Beni-Mozab (tribu berbère de l'intérieur de l'Algérie) le nom de l'unité est *igguen,* et il exprime l'opinion qu'en donnant la variante *ighem* dans le tableau ci-dessus mentionné, M. Letourneux a probablement confondu les sons de l'*m* et de l'*n.*

Il est difficile de rencontrer une conformité plus complète que celle qui existe entre *igguen* (où le *u* ne se trouve que pour le besoin de la prononciation française) et le nom *igin* des manuscrits du moyen âge; et faut-il considérer comme absolument impossible que l'école de philosophes qui emprunta dans une nomenclature mystique et symbolique une partie des termes à la théologie des nombres, une autre partie à un dialecte sémitique, ait tiré un de ces noms d'un idiome qui avait peut-être des représentants à Alexandrie? « La « langue berbère, dit M. Hanoteau dans la préface de son *Essai de* « *grammaire kabyle,* a été parlée, ou l'est encore, de Tétouan jusqu'aux de même que les expressions du passage de Boèce sur l'Abacus, constituent des arguments assez forts en faveur de l'opinion que le moyen âge chrétien a reçu des Néopythagoriciens de l'école d'Alexandrie les mots bizarres que nous venons d'examiner, et les chiffres qu'ils désignent. Ces mots et le passage de Boèce nous ramènent, dans la recherche de l'origine de nos chiffres, jusqu'aux premiers siècles de notre ère, où nous nous arrêtons provisoirement, sans vouloir fixer à cette époque, ni à la ville d'Alexandrie, l'invention même et la création première de ces signes.

Notons encore que, en dernière analyse, ce résultat est indépendant de l'authenticité de la Géométrie de Boèce. Car quand même toute la partie

« confins de l'Égypte, et d'Alger jusqu'au Sénégal. Là où elle a cessé « d'être en usage, on retrouve son empreinte caractéristique dans les « noms de localité, qui restent pour attester les droits antiques du « peuple berber à la propriété du sol; » et M. Reinaud commence en ces termes la note ci-dessus citée : « On sait qu'à une certaine époque « tout le nord de l'Afrique, depuis l'Océan Atlantique jusqu'à la « vallée du Nil, depuis la Méditerranée jusqu'au fleuve appelé main- « tenant du nom de *Niger*, fut habité par une seule et même race, « que les anciens nommaient en général *Libyque*, et que l'on com- « prend maintenant sous la dénomination de *Berber*. » Je déclare cependant que ce n'est en aucune façon mon intention d'engager le lecteur à rapporter l'origine du mot *igin* plutôt au numératif berber *igguen* qu'au substantif grec γυνή. Seulement, dans un mémoire où je me propose d'examiner tout ce qui peut jeter de la lumière sur l'origine de nos chiffres, je n'ai pas voulu, en quelque sorte, tenir caché un fait qui, rapproché d'autres circonstances dont la découverte est peut-être réservée à l'avenir, pourrait acquérir une signification inattendue, et une valeur que je suis très-éloigné d'y attacher en ce moment.

de cet ouvrage qui suit la traduction des théorèmes d'Euclide ne serait que l'œuvre d'un continuateur, et appartiendrait à l'époque de Gerbert, ou à une époque peu antérieure[1], ce texte n'en prouverait pas moins, d'une manière explicite, que le moyen âge rattachait à l'antiquité grecque et romaine ses premières traditions en fait d'arithmétique pratique, et non aux Arabes, dont les écrits ne se répandent et ne font école, en Occident, qu'à une époque postérieure.

LES CHIFFRES GOBÂR.

On voit qu'un des principaux inconvénients de l'étude qui nous occupe consiste en ce que nous ne pouvons franchir qu'à l'aide d'inductions l'intervalle qui sépare le XIe siècle des premiers siècles de notre ère, et que nous manquons pour cet espace de temps d'une suite de documents authentiques semblable à celle qui nous permet d'observer sans

[1] La vraie solution de ce doute ne serait-elle pas dans une étude approfondie de la latinité de Boèce? Ne serait-il pas possible de noter dans la Géométrie de Boèce certains mots, certains tours de phrase fort communs aussi dans les traités d'arithmétique du moyen âge, mais que peut-être on chercherait en vain dans les ouvrages de Boèce dont l'authenticité est certaine? — Ces lignes étaient écrites lorsque j'ai appris par un mémoire allemand intitulé *Gerbert, die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern*, que l'auteur de ce mémoire, M. Friedlein, a déjà entrepris de réaliser l'idée que je viens de proposer, et qu'il espère publier ses résultats, qui sont contraires à l'authenticité de la Géométrie de Boèce. Le même ouvrage m'apprend que le manuscrit désigné dans le courant du présent mémoire par le nom de manuscrit d'Altdorf de la Géométrie de Boèce se trouve actuellement à Erlangen, en Bavière.

interruption, depuis le XI^{e} siècle, les transformations successives de nos chiffres actuels.

Il pourra donc être utile de corroborer ou de rectifier ces inductions par des considérations puisées dans un autre ordre de faits.

En discutant l'hypothèse de l'introduction des chiffres en Europe par les Arabes, en soutenant tantôt l'affirmative, tantôt la négative, on a jusqu'à présent laissé complétement inaperçu qu'il existe chez les Arabes *deux* espèces de chiffres.

L'une de ces espèces, que je désignerai dans la suite par le nom de chiffres *orientaux*, est celle dont les Arabes d'Orient font usage exclusivement ou à peu près; l'autre est celle dont les Arabes d'Afrique et d'Espagne se servent de préférence, sans exclure cependant entièrement l'usage des chiffres orientaux. On rencontre cette seconde espèce de chiffres arabes dans les manuscrits écrits en caractère africain. Je les appellerai soit *occidentaux*, soit *gobâr*, nom employé par les Arabes eux-mêmes, et dont il sera question ci-après. Ces faits, dont on s'assure par l'étude des manuscrits arabes, sont confirmés aussi par le témoignage exprès d'arithméticiens arabes, comme, par exemple, dans un passage que je ferai connaître tout à l'heure.

On conçoit qu'en négligeant une circonstance aussi capitale, en traitant comme simple une question complexe, on devait nécessairement raisonner à faux et tomber dans une confusion regrettable.

Je crois avoir signalé le premier, à l'occasion d'un travail publié dans le *Journal asiatique*[1], la différence essentielle qui existe entre les chiffres arabes orientaux et nos chiffres modernes, en même temps que la très-grande ressemblance que l'on remarque entre ceux-ci et les chiffres gobâr. J'ai signalé ensuite, dans un autre travail[2], la ressemblance non moins grande des chiffres gobâr avec les formes des chiffres attribués dans les manuscrits de Boèce aux Néopythagoriciens, en tâchant de l'expliquer par des considérations que je reprendrai ici avec tous les développements que ce sujet exige.

Cette ressemblance est, en effet, tellement frappante, que l'on ne peut pas la constater sans sentir la nécessité d'en chercher la cause, et qu'on est forcé d'y reconnaître une identité, modifiée seulement par les changements de forme, qui sont inévitables aux âges où le mécanisme invariable de l'imprimerie n'a pas encore remplacé la main de l'homme, sujette aux influences individuelles.

On comprend l'importance de cette identité, qui nous permettra de renouer le fil de nos recherches, qui s'arrêtaient, d'une part, au XIe siècle, et, d'autre part, aux premiers siècles de notre ère. Trois manuscrits arabes, récemment achetés par la Bibliothèque impériale, et dont j'ai fait la description dans une notice insérée dans le cahier de février-mars 1862 du *Journal asiatique*, contiennent plusieurs

[1] Cahier d'octobre-novembre 1854, p. 358.

[2] Voir le mémoire ci-dessus cité *Sur l'Introduction de l'arithmétique indienne en Occident*, p. 10 et p. 55.

données intéressantes au point de vue que je viens d'indiquer.

De chacun de ces trois manuscrits j'extrairai un passage relatif à la forme et à l'origine des chiffres gobâr. Je donnerai d'abord la traduction de ces trois passages, accompagnée des textes arabes, et je discuterai ensuite les données qu'ils renferment. Ils sont empruntés tous les trois à des commentaires, dans lesquels les passages de l'ouvrage commenté sont mêlés aux explications du commentateur, mais écrits à l'encre rouge pour les distinguer de ces explications, qui sont écrites à l'encre noire. J'imiterai cet arrangement dans ma traduction, en mettant en italique les mots ou phrases qui appartiennent à l'ouvrage original, et en caractère ordinaire tout le reste, c'est-à-dire le commentaire.

PREMIER PASSAGE [1].

« Quant aux Pythagoriciens, et ce sont les hommes « (qui s'occupaient d'une manière spéciale des pro- « priétés) des nombres, ils admettaient six ordres, « tandis que la plupart des anciens admettaient quatre

واما الفشاعرريون [2] وهم اهل العدد فان المراتب عندهم ستة واما جمهور القدماء فان مراتب العدد عندهم اربع

[1] Extrait d'un commentaire du *Talkhis* d'Ibn Albannâ, composé par Alkalaçâdî. Fol. 3 r°, lig. 12 et suiv. du manuscrit désigné par le numéro II dans la notice ci-dessus citée (première pièce contenue dans le manuscrit).

[2] *Sic*, il faut lire الفثاغورريون.

« ordres de nombres[1] conformément aux ordres qu'ils « observaient dans les choses naturelles. Car la plu- « part des choses naturelles établies par le Créateur, « dont la puissance soit glorifiée, sont disposées sui- « vant une relation quaternaire, comme, par exemple, « les quatre principes[2], les quatre qualités naturelles[3], « les quatre saisons, les quatre points cardinaux, les « quatre vents, les quatre éléments, les quatre hu- « meurs[4], et d'autres semblables. L'auteur dit : *Le « premier ordre s'étend depuis un jusqu'à neuf et s'appelle « l'ordre des unités.* Ces neuf signes, appelés les signes

ملاحظة لمراتب الامور الطبيعية وذلك ان الامور الطبيعية
أكثر ما جعلها البارى جلّت قدرته على نسب اربع مثل
الاركان الاربع والطبايع الاربع والازمان الاربع والجهات
الاربع والرياح الاربع والاستقصات الاربع والاخلاط الاربع
ونحو ذلك قوله فالمرتبة الاولى من واحد الى تسعة وتسمّى
مرتبة الآحاد هذه الاحرف التسعة المسمّات باحرف الغبار

[1] Ce sont les unités, les dizaines, les centaines et les mille. Les Pythagoriciens auraient-ils désigné les dizaines de myriades par un nom particulier? ou faut-il voir dans les «six ordres» qu'auraient employés les Pythagoriciens une allusion aux six signes I, Π, Δ, H, X, M, qu'employait, d'après Hérodien (Voir *Stephani Thesaurus linguæ græcæ*, t. V, Appendix, p. 205 et suiv.), une notation numérique grecque très-ancienne?

[2] La matière, la forme, la cause efficiente et la cause finale. Ou bien : l'âme intelligente, l'âme animale, l'âme végétative et la substance matérielle. (Comparez les *'Ouyoûn al-maçâil* d'Alfârâbî, p. 28, lig. 3 à 5 du texte arabe de l'ouvrage de M. Schmoelders, intitulé : *Documenta philosophiæ Arabum.* Bonnæ, 1836, in-8°.)

[3] Chaud, froid, sec et humide. Ou bien : les quatre tempéraments.

[4] La bile noire, la bile jaune, le phlegme et le sang.

« du gobâr (de la poussière), sont ceux dont l'emploi « est très-fréquent dans nos provinces espagnoles et « dans les pays du Maghreb et de l'Afrique[1]. Leur « origine fut, d'après ce qu'on a dit, qu'un homme « de la nation des Indiens prenait de la poussière fine, « la répandait sur une table faite de bois ou d'une « autre substance, ou sur une surface plane quel- « conque, et y marquait ce qu'il voulait en fait de « multiplications ou de divisions, ou d'autres opéra- « tions. Or, lorsqu'il avait terminé ce problème, il « serrait (la table) dans une armoire[2] jusqu'à ce qu'il « eût besoin de ce (qu'il y avait écrit). On a fait sur « ces signes les vers suivants :

« (Ce sont) un *élif* (ا) et un *yá* (ب), puis (le mot) *hidj-*
« *djoun* (جّ), après cela (le mot) *'awwoun* (عو), et après
« le *'awwoun*, on trace un *'aïn* (ع) ;

هى التى كثر استعمالها ببلادنا الاندلسية وبلاد المغرب وافريقية واصلها على ما قيل ان اهل الهند كان يأخذ احدهم غبارا لطيفا ويبسطه على لوح من خشب او غيره او ما كان مستو ويضع ما اراده من ضرب او قسمة او غير ذلك فاذا فرغ من تلك المسئلة ضمّه فى وعائه الى ان يحتاج الى ذلك وقد نظم بعضهم هذه الاحرف فقال

الف وياء ثم جّ وبعده   عوّ وبعد العو عين ترسم

[1] L'Afrique signifie ici le nord de l'Afrique, depuis les Syrtes jusqu'à Constantine et Bougie, et le Maghreb la partie occidentale, depuis Constantine et Bougie jusqu'à l'Atlantique.

[2] Ou : « il mit la table dans son étui. »

« (Ensuite) un *hé* (ه)[1], et, après le *hé*, apparaît une figure
« qui, lorsqu'on l'écrit, ressemble à un fer dont la tête
« est recourbée (٩)[2];
« Le huitième de ces (signes est formé par) deux zéros
« (reliés) entre eux (par) un *élif*[3], et le *wâw* (و) en est
« le neuvième, par lequel (la série) est terminée. »

« La figure du *hâ* (ح) n'est pas pure[4]. Voici la

هاء وبعده الهاء شكل ظاهر يبدو كخطّاف اذا هو يرقم

صفران ثامنها والف بينهما والواو تاسعها بذلك يختم[5]

ويكون شكل الحاء غير صريح وهذه صورة التسعة احرف

[1] Dans les manuscrits arabes maghrebins la forme du *hé* final détaché ressemble tout à fait au chiffre 6.

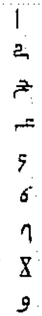
[2] خُطّافٌ « Ferrum capite aduncum. » (Freytag.)

[3] Cette description correspond parfaitement à la variante 9 du chiffre 8 que l'on trouve effectivement dans les manuscrits, par exemple, dans celui que j'ai désigné par le numéro III dans la notice ci-dessus citée, et dans le n° 1912 du supplément arabe de la Bibliothèque impériale.

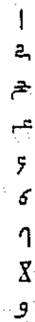
[4] Cette observation paraît se rapporter à la forme du chiffre 2, et devoir exprimer que la variante ح, qui existe également, ne représente pas la vraie forme de ce chiffre, mais que celui-ci ressemble plutôt à la forme ے du *yâ* final.

[5] Le texte porte برسم (*lisez* يرسم), mais le manuscrit est très-incorrect, et je considère comme certain qu'il faut lire يختم avec le manuscrit III de la notice ci-dessus citée, qui reproduit ces vers comme nous le verrons tout à l'heure. Si l'on change dans le premier hémistiche du premier vers وبعده en بعده, et dans le premier hémistiche du troisième vers بينهما en بينها, le mètre de ces vers est كامل. J'hésite pourtant à faire ces changements, parce que les leçons وبعده et بينهما, dont la dernière est exigée aussi par le duel صفران qui précède, se trouvent à la fois dans les deux manuscrits (II et III) qui donnent ces vers, et parce que ces vers ne s'y présentent pas dans deux copies d'un même ouvrage, mais dans

« forme des neuf signes (que nous devons écrire de « manière) que l'unité occupe la place la plus haute, « et que le deux se trouve au-dessous du un, comme « il suit [1] : »



وليكن الواحد اعلى وتحته الاثنان هكـــــــــــذا



des copies de deux ouvrages indépendants l'un de l'autre, de sorte que la supposition d'une erreur reproduite simplement par des scribes se copiant l'un l'autre est exclue.

[1] Les signes ci-après sont ceux d'un type des chiffres gobâr que l'Imprimerie impériale a fait graver pour l'impression d'un article ci-dessus cité et inséré dans le *Journal asiatique*, p. 348 à 384 du cahier d'octobre-novembre 1854.

SECOND PASSAGE[1].

« *La préface traite* de la forme des figures *des signes* « *indiens*, telle qu'elle a été établie par la nation des « Indiens; *et ce sont*, c'est-à-dire les signes indiens, « *neuf figures* qu'on est convenu de former *comme il* « *suit*, à savoir : un, deux, trois, quatre, cinq, six, « sept, huit, neuf, en leur donnant la forme que « voici : ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩, *lesquels sont employés chez* « *nous*, c'est-à-dire chez les Orientaux, *de préférence;* « mais on en emploie aussi d'autres. *Ou* on est con- « venu de les former *comme il suit :* ا ح جـ عو ع ٦ و « 9 و, *lesquels sont peu employés* chez nous, tandis

فالمقدمة فى صفة اشكال الاحرف الهندية بوضع اهل
الهند وهى اى الاحرف الهندية تسعة اشكال موضوعة
هكذا وهى واحد واثنان وثلاثة واربعة وخمسة وستة
وسبعة وثمانية وتسعة على هذه الصورة هكذا ١ ٢ ٣ ٤ ٥
٦ ٧ ٨ ٩ وهى مستعملة عندنا اى عند المشارقة غالبا وقد
يستعمل غيرها او موضوعة هكذا ا ح جـ عو ع ٦ و 9 و
وهى قليلة الاستعمال عندنا وكثر استعمالها عند المغاربة

[1] Extrait d'un commentaire, composé par Hoçaïn Ben Mohammed Almahallî, sur un traité d'arithmétique pratique de 'Abdou'l-kâdir Alsakhâwî, fol. 79 v°, lig. 2 et suiv. du manuscrit désigné par le numéro III dans la notice ci-dessus citée (deuxième traité contenu dans le manuscrit).

« que leur emploi est très-fréquent chez les Occi-« dentaux. Nota bene. Le sens de la phrase de l'au-« teur est évidemment que tous les deux sont d'ins-« titution indienne, et telle est la vérité. Le docte « Chanchoûrî a dit dans son commentaire de la Mour-« chidah[1] : Et on l'appelle, c'est-à-dire on appelle « la seconde manière (de former les signes dont il « s'agit), indienne, parce qu'elle a été établie par la « nation des Indiens. Fin de la citation. On les dis-« tingue cependant les uns des autres par leurs dé-« nominations, en appelant les premiers indiens, et « les seconds gobârî ; et on appelle ceux-ci gobârî « (de poussière), parce que les anciens avaient l'ha-« bitude de répandre de la farine sur une table de « bois et d'y tracer ces figures. On a fait sur ces signes « les vers suivants :

تنبيه ظاهر كلام المصّ ان كلا منهما وضع هندى وهو كذلك قال العلامة الشنشورى فى شرح المرشدة وتسمى اى الطريقة الثانية بالهندية لانها وضع اهل الهند انتهى وانما يفرق بينهما بالتسمية فيقال للاولى هندية وللثانية غبارية وانما سميت غبارية لان القدماء كانوا يبسطون دقيقا على لوح خشب ويرسمون فيه هذه الاشكال وقد نظمها بعضهم فقال

[1] Voir sur cet ouvrage la notice ci-dessus citée, p. 102, lig. 14, 15 et 19 à 21.

« (Ce sont) un *élif* et un *hâ*[1], puis (le mot) *hidjdjoun*, après
« cela (le mot) *'awwoun*, et, après le *'awwoun*, on trace
« un *'aïn*,

« (Ensuite) un *hâ*, et, après le *hâ*, apparaît une figure qui,
« lorsqu'on l'écrit, ressemble à un fer dont la tête est
« recourbée;

« Le huitième de ces (signes est formé par) deux zéros
« (reliés) entre eux (par) un *élif*, et le *wâw* en est le
« neuvième, par lequel (la série) est terminée. »

« On les a réunis aussi dans un seul vers, comme
« il suit :

« Un *élif*, un *hâ*, (le mot) *hidjdjoun*, (le mot) *'awwoun*, un
« *'aïn*, un *hâ*, un *wâw* retourné[2], deux zéros et un *wâw*. »

الف وحاء ثم حجّ وبعده   عوّ وبعد العو عين ترسم
هاء وبعد الهاء شكل ظاهر   يبدو كخطّاف اذا هو يرقم
صفران ثامنها والف بينهما   والواو تاسعها بذلك يختم

ونظمها بعضهم فى بيت واحد فقال

الف وحاء حجّ وعوّ عين ها   مقلوب واو صفرتان وواو[3]

[1] On trouve ici, de même que dans le vers isolé qui termine ce passage, la variante ح de la forme du chiffre 2, dont il a été question ci-dessus.

[2] On trouve, en effet, dans une note marginale du manuscrit désigné dans la notice ci-dessus citée par le numéro I, la variante suivante ٯ du chiffre 7.

[3] Si l'on prononce dans le premier hémistiche وحاء *wa-hâ*, en supprimant la dernière syllabe, et عينَ, au lieu de عينٌ, le mètre de ce vers devient également كامل.

TROISIÈME PASSAGE[1].

« *Les neuf figures indiennes sont les suivantes :* ١ ٢ ٣ « ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩. C'est ainsi que, dans toutes les copies « de cet ouvrage, autant que j'ai pu en prendre con« naissance, les figures se trouvent tracées suivant la « largeur, tandis qu'il vous sera certainement expli« qué, si Dieu Très-Haut le permet, qu'elles doivent « proprement être tracées suivant la longueur[2], afin « que toutes se trouvent au rang des unités[3]. Il est « possible que cette manière de les tracer suivant la « largeur vienne du fait des copistes, et il est possible « aussi qu'elle vienne du fait de l'auteur, lequel, au « commencement, se propose seulement de faire

واشكاله التسعة الهندية هذه ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ هكذا
وجد فى جميع نسخ هذا الكتاب حسبما اطلعت عليه رسم
الاشكال عرضا وسيتضح لك ان شاء الله تعالى انه يتعين
رسمها طولا ليكون الجميع فى منزلة الآحاد فيحتمل ان
رسمها عرضا من النساخ ويحتمل ان يكون من المصنف

[1] Extrait d'un commentaire composé par 'Ali Ben Abi Beqr Ben Aldjamâl Alançâri Almeqqi, sur le traité de calcul gobâr intitulé *Almourchidah*, dont il vient d'être question, fol. 46 v°, lig. 8 et suiv. du manuscrit désigné par le numéro I dans la notice ci-dessus citée (deuxième traité contenu dans le manuscrit).

[2] De haut en bas, comme dans le premier passage ci-dessus.

[3] Afin que l'on ne soit pas induit à croire que ces chiffres, placés comme dans le texte arabe, doivent exprimer le nombre neuf cent quatre-vingt-sept millions six cent cinquante-quatre mille trois cent vingt et un.

« connaître (ces signes), se reposant sur les développements qu'il va donner plus tard en disant : « Si « on trace une des neuf figures non précédée d'un « zéro, elle appartient aux unités » (et ce qui suit) « jusqu'à la fin de la phrase, laquelle indique ce que « je viens de dire. En ce cas, ce qui a été dit de « l'évidence de la première possibilité doit être écarté. « Réfléchissez à cela. *Ou les suivantes :* ا ح جـ عـ ع « 6 ٦ 8 و. Le commentateur[1], que Dieu Très-Haut « soit miséricordieux envers lui! soulève une difficulté en faisant observer que le jugement énoncé « dans la phrase de l'auteur est que la seconde série « de figures est une seconde espèce des figures in- « diennes; que cependant il n'en est pas ainsi, mais « que ce sont les figures de l'écriture gobâr. Il aurait « donc fallu supprimer le mot « indiennes, » ou dire :

لاجل التعليم فى الابتداء اتّكالا على ما يذكره بعد من قوله
فان رسم شكل من الاشكال التسعة ولا صفر قبله فهو من
الآحاد الى آخره الدالّ على ما ذكرته فاندفع ما قد يقال
من تعيين الاحتمال الاول فتأمله او هذه ا ح جـ عـ ع
6 ٦ 8 و واعتراض الشارح رحمة الله تعالى عليه بان قضية
كلامه ان الاشكال الثانية نوع ثان للهندية وليس كذلك
بل هى اشكال قلم الغبار فكان ينبغى حذف قوله الهندية

[1] C'est un autre commentaire du même ouvrage, auquel l'auteur du présent commentaire fait ici allusion.

5.

« les neuf figures sont les suivantes, » puis mentionner « les premières, « et, d'après (l'écriture du) gobâr, « les suivantes, » puis mentionner les secondes. Notre « seigneur, maître et chaïkh, le seigneur Omar Ben « Alrahîm[1], puisse-t-il être agréable à Dieu! (consulté « sur ce point) a répondu que (l'opinion ci-dessus « énoncée) est fondée sur ce que le second article « démonstratif[2] est considéré comme conjoint[3] au « premier, et que cela n'est pas nécessaire, mais qu'il « est permis de rattacher celui-ci au mot « indiennes, » « après que ce mot a été placé comme prédicat[4] du « mot « figures, » et de considérer le second article « démonstratif comme conjonctif explicatif[5] ou per- « mutatif[6] du mot « figures[7]. » On peut encore y « répondre d'autres manières. »

او يقول واشكاله التسعة هذه ويذكر الاولى وبالغبار هذه
ويذكر الثانية اجاب عنه سيدنا ومولانا وشيخنا السيد
عمر بن الرحيم رضى الله تعالى عنه بانه مبنى على جعل
اسم الاشارة الثانى معطوفا على الاول وليس بمتعين بل يجوز

[1] *Sic*; c'est peut-être une faute de copiste pour « Ibrâhim. »

[2] Le mot هذه « les suivantes, celles-ci. » (Voir De Sacy, *Grammaire arabe*, t. I, p. 439.)

[3] Voir *ibid.* t. II, p. 530, 531.

[4] Voir *ibid.* p. 98.

[5] Voir *ibid.* p. 529, 530.

[6] Voir *ibid.* p. 528, 529.

[7] L'explication du chaïkh veut dire que le sens de la phrase de l'ouvrage commenté pourrait être aussi : « Les neuf figures sont, ou bien les indiennes, à savoir les suivantes, ١ ٢ ٣, etc. ou bien les suivantes, ا ب ج, etc. »

عطفه على الهندية بعد جعلها خبرا عن اشكاله وجعل
اسم الاشارة الثانى لها عطف بيان او بدلا واجيب عنه
بغيرما ذكر

UNE CONJECTURE.

Dans les passages que je viens de faire connaître deux points me paraissent mériter une attention particulière.

Ce sont d'abord les vers sur les chiffres gobâr, qui fixent d'une manière précise et ingénieuse les formes de ces chiffres, les mettent à l'abri des altérations inévitables par les copistes, et nous épargnent la tâche pénible de chercher la vraie forme des chiffres gobâr, en comparant les variantes d'un grand nombre de manuscrits.

En second lieu, nous constatons que la tradition d'une origine indienne des chiffres gobâr existe chez les arithméticiens arabes et est discutée par eux.

C'est une donnée, sans doute, fort importante; mais malheureusement la critique historique fait tellement défaut à la plupart des écrivains arabes, qu'on ne peut accepter qu'avec la plus grande réserve leurs assertions, lorsqu'il s'agit de faits dont ils n'ont pu avoir une connaissance certaine et immédiate. Si donc nous finissons peut-être par nous décider pour une origine indienne des chiffres gobâr, ce ne sera pas parce qu'elle est explicitement affirmée dans deux des passages que l'on vient de lire;

et si nous n'admettons pas une transmission directe des chiffres gobâr des Indiens aux Arabes, comme la concevaient probablement les auteurs ci-dessus, nos doutes ne seront pas fondés sur les raisonnements grammaticaux et quelque peu pédantesques débités dans le troisième passage.

D'autres documents, moins incertains, nous guideront dans nos jugements.

Si nous voulons examiner la thèse d'une origine indienne des chiffres gobâr, l'idée qui se présente le plus naturellement à l'esprit est d'entendre cette origine comme elle est entendue pour les chiffres employés par les Indiens eux-mêmes. Or, les indianistes sont d'accord que les chiffres indiens ont été formés originairement des initiales des numératifs sanscrits correspondant aux nombres désignés par les chiffres. Le premier auteur de cette découverte est l'illustre Prinsep, dont l'activité trop courte a été si féconde cependant en résultats précieux pour les études indiennes. Dans un mémoire publié dans le Journal de la Société asiatique du Bengale [1], Prinsep s'exprime en ces termes [2] :

« Le mode le plus ancien de désigner des nombres « consistait, dans les langues sanscrites, comme en « grec et en latin, dans l'emploi de lettres rangées « suivant un ordre alphabétique. Nous trouvons ce

[1] Cahier d'avril 1838, p. 334 à 356, article intitulé : *Examination of the Inscriptions from Girnar in Gujerat, and Dhauli in Cuttack*, continued by James Prinsep, Sec. As. Soc.

[2] Page 348.

« système prédominant dans tous les anciens ouvrages « sanscrits, de même que dans le pali, le tibétain et « d'autres systèmes dérivés. Il paraît effectivement « qu'il n'existe point de signes numériques particu- « liers au pali. Dans leurs histoires sacrées, les mots « sont toujours écrits tout au long; ils possèdent aussi « les mots symboliques des ouvrages astronomiques « sanscrits[1] et ce qui est appelé le *Varna sankhya* ou « classification numérique de l'alphabet. Les signes « numériques actuellement employés à *Ceylan*, *Ava*, « *Cambodia*, *Siam*, ont entre eux à peine la plus lé- « gère affinité. Il ne paraît pas qu'il soit connu ou « que les savants aient examiné à quelle époque ce « système fut changé contre celui de la notation « décimale avec emploi du zéro. En remontant « jusqu'au IXe ou Xe siècle de notre ère, les signes « numériques de l'écriture nagari, existant sur des « monuments nombreux, ne diffèrent pas essentiel- « lement de ceux qui sont en usage à présent. »

Prinsep entre ensuite dans l'examen de certaines plaques de cuivre datées, et de monnaies frappées par des satrapes de Soûrâchtra, pour déterminer, au moyen de ces documents, la forme la plus ancienne des chiffres sanscrits. Il s'aide aussi, comme d'un moyen de contrôle ou de confirmation, de la comparaison de ces formes avec celles que présentent les systèmes de chiffres des autres alphabets de l'Inde, tels que ceux du Kachmir, du Tibet (du

[1] J'aurai à parler plus loin, avec beaucoup de détails, de cette manière d'exprimer les nombres.

VII^e^ siècle de notre ère), de Ceylan, du Népal, etc. et dans le cours de cette discussion, il arrive à la conclusion suivante :

« En regardant attentivement les formes d'une « grande partie des signes numériques, on ne peut « s'empêcher d'arriver à la supposition que les « initiales des noms écrits furent, pour beaucoup « d'entre eux, choisies comme leurs symboles nu- « mériques[1]. »

[1] Dans le même mémoire, Prinsep soutient encore une seconde thèse, à savoir que les anciens chiffres des plaques de cuivre et des monnaies de Soûrâchtra qu'il avait examinées sont employés aussi avec valeur de position. Mais d'après un nouvel examen auquel M. E. Thomas a depuis soumis les mêmes plaques de cuivre, et un nombre beaucoup plus grand de monnaies des satrapes de Soûrâchtra, il paraîtrait que ces chiffres ne comportent ni la valeur de position ni l'emploi d'un signe pour zéro que Prinsep avait cru y reconnaître. Le travail de M. Thomas (voir *Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland*, vol. XII, p. 1 à 77; et comparer *Essays on indian antiquities, historic, numismatic, and palæographic, of the late James Prinsep*, edited by Edward Thomas. London, 1858, in-8°, t. II, p. 80 à 84), exécuté dans l'esprit d'une saine et rigoureuse critique, me paraît prouver surtout que les documents actuellement connus sont encore insuffisants pour en tirer des résultats décisifs. Il convient de remarquer aussi que Prinsep ne présente sa découverte que comme une première tentative, car il dit (p. 353) : « Avec toutes ces ressources et analo- « gies, je me suis efforcé de ranger les neuf anciens symboles nu- « mériques dans leur véritable ordre sur la planche ci-jointe, de « manière à satisfaire en même temps aux conditions de la succes- « sion des dates sur les monnaies des Satrapes de Surashtra. Je suis « très-éloigné d'être assuré d'avoir réussi dans cette entreprise; mais « ayant, pour ainsi dire, rompu la glace, etc. » En tout cas, la vérité de la première thèse concernant l'identité originaire des signes numériques avec les initiales des numératifs sanscrits est indépendante de la valeur de position attribuée ou refusée à ces chiffres.

La conclusion de Prinsep a été adoptée depuis par les indianistes les plus célèbres. M. Benfey[1] et M. Weber[2] l'ont même reproduite sous une forme beaucoup plus absolue; et M. Lassen[3] se range en définitive au même avis, quoique avec plus de réserve.

Du reste, la justesse de cette opinion ne m'est pas nécessaire comme un moyen de démonstration dont j'aurais à faire usage. Je la cite seulement pour montrer combien il est naturel de chercher une analogie semblable pour les chiffres gobâr, dès que la question d'une origine indienne de ces chiffres est soulevée.

Dans ce but, j'ai comparé les chiffres gobâr et les chiffres les plus anciens des manuscrits latins du moyen âge, dont nous avons ci-dessus vu l'identité avec les chiffres gobâr, à une liste d'anciens alphabets sanscrits appartenant à différentes époques avant et après le commencement de notre ère, liste que Prinsep a publiée dans le Journal de la Société asiatique du Bengale[4].

Le résultat de cette comparaison a de beaucoup dépassé mes espérances, car non-seulement les chiffres des manuscrits du moyen âge présentent une ressemblance extraordinaire avec les initiales

[1] Article sur l'Inde, dans l'*Encyclopédie d'Ersch et Gruber*, 2e section, t. XVII, p. 264.

[2] *Akademische Vorlesungen über indische Literaturgeschichte*, p. 228, note 2.

[3] *Indische Alterthumskunde*, t. II, p. 1140.

[4] Cahier de mars 1838, planches XIII et XIV, placées en regard de la page 276.

des numératifs sanscrits correspondants, prises dans l'un de ces alphabets, mais encore cet alphabet appartient précisément au IIe siècle de notre ère, c'est-à-dire à l'époque à laquelle nous ramenaient déjà d'autres considérations, établies d'une manière tout à fait indépendante dans un des paragraphes précédents de ce mémoire.

Il est vrai que l'alphabet du IIIe siècle avant J. C. qui précède, dans le tableau de Prinsep, immédiatement celui du IIe siècle de l'ère chrétienne, est encore assez semblable à ce dernier; mais en somme celui-ci offre, pour les initiales des noms de nombres sanscrits, une ressemblance essentiellement plus complète avec les chiffres gobâr et du moyen âge, que les alphabets des époques antérieures et postérieures.

Pour laisser le lecteur seul juge de la ressemblance que je viens de signaler, je donne, dans la première ligne de la planche ci-contre, les initiales des numératifs sanscrits, calquées sur les lettres que la liste de Prinsep assigne au IIe siècle de notre ère. Je donne ensuite, dans la seconde ligne de la planche, les formes des chiffres qui se trouvent dans le manuscrit d'Altdorf de la Géométrie de Boèce, calquées sur le fac-simile qu'en a fait graver Mannert, dans sa dissertation intitulée : *De numerorum quos arabicos vocant vera origine Pythagorica*[1]. Je prends ce manuscrit pour type de comparaison, parce que Mannert, en déclarant qu'il a été écrit au XIe siècle,

[1] Nuremberg, 1801, in-8°.

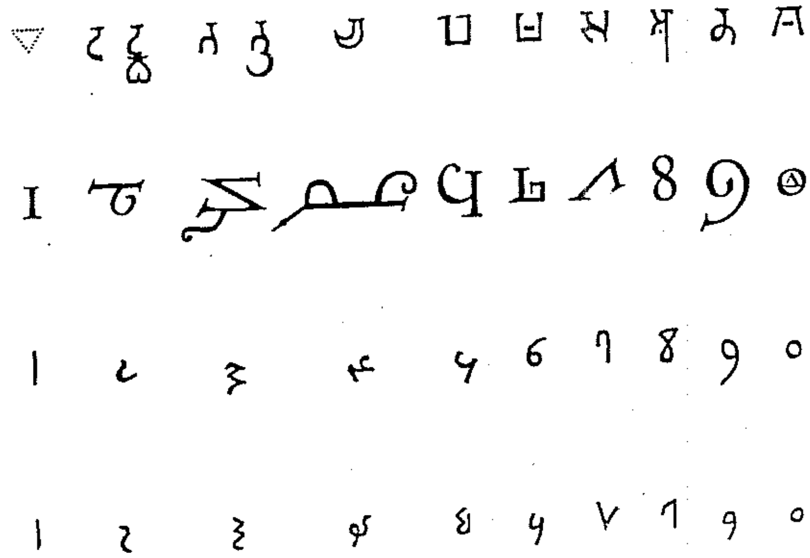
e *d* *dv* *t* *tr* *tch* *p* *ch* *s* *a* *n* *ç*

Lettres sanscrites du IIe siècle de l'ère chrétienne, d'après Prinsep, *Journal de la Société asiatique du Bengale*, mars 1838.

Apices de Boèce, d'après le *fac-simile* de Mannert du manuscrit d'Altdorf (du XIe siècle).

Chiffres gobâr, d'après un manuscrit de la Bibliothèque impériale de Paris.

Chiffres arabes orientaux, d'après un manuscrit écrit à Chirâz au Xe siècle.



a rendu compte[1] des raisons paléographiques qui l'ont déterminé à assigner au manuscrit cette date, que l'on peut, de cette manière, accepter avec confiance. La troisième ligne de la planche contient un spécimen des chiffres gobâr, d'après un manuscrit de la Bibliothèque impériale de Paris, spécimen que je considère ici seulement comme un moyen de mettre sous les yeux du lecteur des figures conformes aux règles établies dans les vers ci-dessus cités; ces vers me serviront, pour la forme des chiffres gobâr, d'autorité principale[2].

J'ai maintenant quelques observations à faire sur la première ligne de la planche. Les initiales des numératifs sanscrits *dvi* (deux) et *tri* (trois) sont des consonnes composées qui ne se trouvent pas dans la liste de Prinsep. Il s'agissait donc de savoir comment il fallait les figurer. Heureusement la combinaison *dv* se trouve dans les inscriptions de Piyadasi[3], où l'on voit qu'elle est formée d'un *d* avec un *v* placé au-dessous. Toutefois les figures gobâr et du moyen âge du chiffre 2 paraissent dérivées du *d* seul, qui correspondrait, comme initiale, à la forme déroulée *douvi* au lieu de *dvi*. La figure de la combinaison *tr* est formée, dans la première ligne de la planche, d'après l'analogie du mot *çrî* dont Prinsep donne des spécimens pour les différentes époques

[1] Voir pages 7 et 8 de la dissertation citée.

[2] Quant à la quatrième ligne de la planche, il en sera question dans une autre partie du présent mémoire.

[3] Par exemple, *Journal of the Asiatic Society of Bengal*, mars 1838, p. 228, *Third tablet*, première ligne.

de ses alphabets. Ces spécimens montrent que la combinaison *çr* est également formée par un *ç*, sous lequel on a placé un *r*. J'ai donc formé le *tr* de mon tableau en calquant le *t* de Prinsep avec le *r*, appendice du *ç* dans *çri*.

Je n'ajouterai rien pour énumérer en détail les points de ressemblance des lettres sanscrites et des chiffres du manuscrit d'Altdorf, ni pour atténuer les différences qui certainement se trouvent et doivent se trouver entre les deux séries de signes. On a tellement abusé de ces sortes de plaidoyers, que le moyen le plus sûr de convaincre le lecteur est d'éviter toute observation qui pourrait paraître de nature à capter son jugement. Je ferai même remarquer expressément que, pour le *4*, l'initiale et le chiffre présentent une dissemblance absolue; mais je ferai observer aussi que, de tous les chiffres des manuscrits latins du moyen âge, le *4* est celui qui donne lieu aux variantes les plus nombreuses et les plus divergentes. On peut s'en assurer par le tableau ci-dessus cité des Éléments de paléographie de M. Natalis de Wailly, et par le jugement de M. Vincent qui avoue que ce chiffre « présente, dans les manuscrits, bien des variétés[1]. »

En revanche, je signalerai un détail qui me paraît offrir un intérêt particulier; c'est la figure de l'ancien अ sanscrit qui fait si bien comprendre l'origine des formes gobâr et du moyen âge, et par conséquent de la forme actuelle du chiffre 8, tandis que

[1] *Revue archéologique*, cahier du 15 janvier 1846, p. 603.

cette forme restait complétement inexplicable tant qu'on voulait la rattacher à celle du 8 des Arabes orientaux, qui est ٨.

Je n'ai sans doute pas besoin d'excuser, pour ainsi dire, que l'unité soit représentée dans les chiffres gobâr et du moyen âge par un simple trait; il faut plutôt considérer comme une exception que, dans ces deux espèces de chiffres, les formes du 2 et du 3 puissent se rattacher à un signe alphabétique, et ne soient pas pareillement des combinaisons de deux et de trois traits respectivement; car l'idée de représenter les trois premières unités par un, deux et trois traits respectivement, reliés entre eux dans les deux derniers cas, pour l'écriture cursive, d'une façon plus ou moins simple, paraît être celle qui a déterminé la forme des trois premiers chiffres chez la presque totalité des peuples anciens et modernes[1].

En somme, si l'on examine, signe pour signe, les chiffres du manuscrit d'Altdorf d'une part, et les anciennes initiales des numératifs sanscrits d'autre part, la coïncidence des deux suites de signes me paraît telle, qu'il est impossible de la considérer comme purement accidentelle[2].

[1] C'est ce que prouve l'examen du beau travail intitulé *Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes*, dans lequel M. Pihan, prote de la typographie orientale à l'Imprimerie impériale, a réuni avec un zèle infini des spécimens de plus de cinquante systèmes différents de notation numérique; en même temps une réunion rare de connaissances savantes et techniques a permis à M. Pihan de faire de cet ouvrage un chef-d'œuvre d'exécution typographique.

[2] Il est facile d'en faire la contre-épreuve. Prenons réellement au

Mais si elle est la conséquence et la marque d'une affinité réelle, elle ne peut signifier qu'une chose, à savoir que les Néopythagoriciens d'Alexandrie ont reçu de l'Inde les signes que certains d'entre eux employaient dans leurs opérations d'arithmétique pratique.

Cette hypothèse sera admissible seulement à la condition qu'elle se laisse concilier avec les faits bien constatés qui ont précédé et suivi le fait qu'elle suppose. Occupons-nous d'abord de la seconde partie de cette tâche, et examinons comment l'origine indienne des signes néopythagoriciens s'accorde avec l'existence des chiffres gobâr chez les Arabes d'Afrique et d'Espagne, et avec ce que nous rapportent, au sujet de ces chiffres, les passages ci-dessus traduits.

hasard les initiales des numératifs dans d'autres langues et leurs alphabets, par exemple, l'arabe et le latin :

و	ا	ث	ا	خ	س	س	ث	ت
U	D	T	Q	Q	S	S	O	N

On voit sur-le-champ l'impossibilité absolue d'établir un rapport quelconque entre ces lettres et les formes des chiffres gobâr et du moyen âge, même par les rapprochements les plus forcés.

(La suite dans un prochain cahier.)

MÉMOIRE

SUR

LA PROPAGATION DES CHIFFRES INDIENS,

PAR M. F. WOEPCKE.

(Suite.)

IDENTITÉ DES CHIFFRES DES NÉOPYTHAGORICIENS ET DES CHIFFRES GOBÂR.

Le mécanisme des institutions de l'Empire romain était éminemment propre à répandre, dans des espaces fort étendus, la connaissance d'idées et de conceptions nées sur un point quelconque de cette vaste masse de pays. On sait le puissant secours que cette circonstance a prêté au développement du christianisme ; elle ne devait pas être moins favorable à la propagation de l'arithmétique pratique, fondée sur la valeur de position, que possédaient, d'après le passage de Boèce, les Néopythagoriciens. Mais, de même que la vérité divine, l'invention scientifique ne trouvait pas partout un terrain également bien disposé. Je dois m'associer entièrement à l'opinion émise, au sujet de la propagation du système de l'*abacus*, par M. Martin, dans son mémoire sur les origines de notre système de numération écrite[1]. Il a exprimé cette opinion en si bons termes, que je ne crois pouvoir mieux faire que de reproduire textuellement quelques passages de ce mémoire.

« Il ne faut pas s'étonner, dit M. Martin, que « cette méthode se soit propagée en Occident plus « qu'en Grèce, car en Occident le système de l'*aba*- « *cus* était venu disputer la place à la numération « écrite des Romains, à laquelle il était préférable. « En effet, dans cette numération, il fallait deux ou « plusieurs caractères pour exprimer tel ou tel nombre « au-dessous de 10, tel ou tel des multiples les plus « simples de 10 ou de ses puissances, ce qui était « très-incommode pour écrire les calculs. » Et plus loin : « Cette invention[2]..... a été faite surtout au « profit des peuples latins, qui en avaient grand be- « soin, à cause de l'incommodité extrême que leur « numération écrite présentait dans les calculs..... « Faite ainsi surtout pour les Latins, peut-être par « quelque grec écrivant en latin, comme le géo- « mètre Archytas, cité par Boèce, il est peu surpre- « nant que cette invention tardive ait eu peu de cours « chez les Grecs, à qui leur numération écrite, moins « imparfaite que celle des Romains, pouvait plus

[1] § VII. « Antécédents de l'*abacus* de Boèce chez les Grecs et chez les Romains. »

[2] L'invention de l'*abacus*.

« facilement suffire pour la pratique des calculs. . . .
« Ce qui a empêché les Grecs d'arriver de bonne « heure à ce changement si simple[1], qui aurait été « pourtant un perfectionnement notable, c'est qu'ils « en étaient précisément trop près pour en sentir « vivement le besoin. »

Ainsi donc l'arithmétique pratique des Néopythagoriciens, calculant avec neuf chiffres auxquels elle donne une valeur de position au moyen d'un tableau à colonnes, devait se répandre peu ou point dans les provinces orientales de l'Empire romain, mais bien en Italie où Boèce en expose les principes, dans les Gaules où Gerbert la fait revivre, et en Espagne où les Arabes devaient la trouver au commencement du VIII^e siècle.

Lorsque les Arabes sortirent du désert, pour conquérir un empire qui s'étendit depuis l'Oxus et l'Indus jusqu'à l'Èbre et à l'Atlantique, ils possédaient à peine l'écriture[2]. Il est certain qu'ils ne connaissaient point encore l'usage des chiffres. Mais ayant à administrer sur-le-champ les immenses revenus que les impôts et la capitation faisaient refluer au centre de l'empire, et dont il fallait rendre compte, ils firent la chose la plus naturelle et presque la seule possible en pareille occurrence; ils adoptèrent partout les signes de numération employés par

[1] A notre notation numérique moderne.

[2] Voir dans les Mémoires de l'Académie des inscriptions et belles-lettres, t. IX de la nouvelle série, le *Mémoire sur quelques papyrus écrits en arabe et récemment trouvés en Égypte*, par M. le baron Silv. de Sacy, p. 78 à 80.

les peuples établis avant eux dans les pays où ils arrivèrent. Ceci n'est pas une hypothèse, mais un fait avéré par les documents historiques.

Voici d'abord ce qui eut lieu en Syrie[1]. A Damas le khalife Wâlid, qui régna de 705 à 715 de J. C., défendit de tenir en langue grecque les registres du trésor public, et ordonna qu'ils fussent rédigés en langue arabe. Cependant il fut obligé de faire une exception pour les signes de numération, « parce « qu'il était impossible d'écrire en arabe[2] un, ou « deux, ou trois, ou huit et demi, etc. » Ainsi, en Syrie, les Arabes continuèrent encore après la fin du VIIe siècle de notre ère à conserver la notation numérale grecque.

En Égypte, ils adoptèrent pareillement le chiffre copte, qui, du reste, ne consiste que dans une modification à peine sensible, et concernant seulement la forme extérieure, des lettres numérales grecques[3].

[1] Voir *Theophanis chronographia*, Parisiis, 1655, in-folio, p. 314.

[2] C'est-à-dire : d'écrire au moyen de signes numériques pareils à la notation alphabétique grecque pour les entiers et les fractions ; car il va sans dire que, si les Arabes étaient en état d'écrire en arabe le reste des registres, ils pouvaient écrire aussi, en toutes lettres, les noms de nombre un, deux, etc. ou les noms des fractions un demi, un tiers, etc.

[3] On pourrait être arrêté par la forme du 90 copte, qui ressemble (par exemple dans le tableau de M. de Sacy, *Gr. arabe*, 2e édition, t. I, pl. VIII) entièrement au ص arabe, lequel signifie, chez les Arabes de l'Orient, également 90. Mais cette forme n'est qu'une des variantes de l'épisème *κόππα*. (Voir Montfaucon, *Palaeogr. graeca*, p. 122 et 132, et Bœckh, *Staatshaushaltung der Athener*, Berlin, 1817, in-8°, t. II, p. 386.) Pareillement le 900 copte est une des variantes de l'épisème *σαμπῖ*.

On sait en outre qu'en Égypte l'administration des finances resta pendant longtemps presque exclusivement entre les mains des chrétiens, c'est-à-dire des Coptes, employés comme officiers des gouverneurs arabes. Aussi le manuscrit 1912 du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale, en énumérant le chiffre copte parmi ceux dont la connaissance est nécessaire aux gens de bureau, prouve-t-il que ce chiffre resta en usage pendant longtemps dans certaines localités [1].

A Bagdad, une ambassade arrivant de l'Inde à la cour du khalife Almançoûr, en 773 de notre ère, apporta des tables astronomiques indiennes, et probablement aussi des traités d'algèbre et d'arithmétique pratique [2]. On sait du moins que les Arabes reçurent de l'Inde un traité d'arithmétique pratique qu'un bibliographe arabe déclare avoir été très-facile

[1] Ce manuscrit est un recueil de pièces relatives à l'art du secrétaire ou écrivain (*qâtib*), qu'une personne fort attentive aux notations particulières des écrivains coptes paraît avoir réunies pour son propre usage dans le courant de l'année 1571 de notre ère. Du moins on trouve à la page folio 150 r° du manuscrit (lig. 9 à 17) le 4 djoumâdâ premier de l'année 979 de l'hégire (24 septembre 1571) comme date de l'achèvement de la copie d'un morceau; et à la page folio 180 r°, qui est en même temps la dernière du manuscrit, le 15 djoumâdâ premier de l'année 979 de l'hégire (5 octobre 1571) comme date de l'achèvement de la copie d'un autre morceau. C'est de ce manuscrit que M. de Sacy a tiré aussi le spécimen des chiffres *gobâr* qu'il a publié dans les planches jointes au tome I de sa Grammaire arabe.

[2] Il est possible aussi que les préliminaires des tables astronomiques aient contenu, comme le *Brahmasiddhânta* de Brahmagoupta, des chapitres relatifs à l'arithmétique et à l'algèbre.

à comprendre, très-expéditif et très-ingénieux. On sait aussi que Mohammed Ben Moûçâ Alkhârizmî, le contemporain du khalife Almâmoûn, prit ce traité indien pour base d'un ouvrage plus développé, dont il faut placer la rédaction dans la première moitié du IXe siècle de notre ère. Un fragment d'une traduction latine de cet ouvrage d'Alkhârizmî a été découvert et publié, il y a quelques années, par le prince Don Balthasar Boncompagni[1].

Tous ces faits rendent plus que probable que les Arabes, en arrivant en Espagne, y adoptèrent pareillement les chiffres et, pour l'exécution des calculs, le tableau à colonnes et les méthodes, dont les Néopythagoriciens avaient répandu[2] l'usage dans les parties occidentales de l'Empire romain. Mais lorsque, cent ans plus tard, les méthodes indiennes, infiniment plus simples et plus pratiques, commencèrent à être connues dans la partie orientale du monde musulman, elles ne pouvaient pas manquer de s'introduire peu à peu aussi dans le Maghreb. C'est ainsi que M. Reinaud[3] signale un traité com-

[1] *Trattati d'aritmetica pubblicati da Baldassarre Boncompagni.* I. *Algoritmi de numero Indorum*, Roma, 1857, in-8°. Je n'ai pas besoin de dire combien cette découverte est précieuse pour l'histoire des mathématiques. J'ai tâché d'en montrer l'importance dans le mémoire ci-dessus cité *Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident.*

[2] «Ut, quod alta mente conceperant, melius in notitiam *omnium* «transfundere possent» dit le passage de Boèce.

[3] Addition au Mémoire sur l'Inde, p. 565 du t. XVIII des Mémoires de l'Académie des inscriptions et belles-lettres.

16.

posé vers 950 de J. C. probablement à Kayrowân[1], dont l'auteur cite un autre de ses ouvrages relatif au «calcul indien connu sous le nom de calcul du «*gobâr* ou calcul de poussière.» Ce dernier nom, donné au calcul, est en effet essentiellement d'origine indienne; car à la preuve contenue dans le titre que je viens de citer d'après M. Reinaud, se joignent non-seulement un passage de Planude[2], un passage d'Albîroûnî que je traduirai plus loin, et des

[1] Ville du nord de l'Afrique, située actuellement dans la régence de Tunis.

[2] Voici ce passage, qui fait partie du «Traité de calcul indien» (*Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς*) de Planude, et que Delambre a déjà signalé (*Hist. de l'astron. ancienne*, t. I, p. 523), mais sans en donner la traduction ni le texte.

«Il ne sera peut-être pas superflu de faire connaître encore une «autre méthode de multiplication. Mais cette méthode est extrême«ment incommode à exécuter sur le papier avec de l'encre, tandis «qu'elle est naturellement propre à être employée dans du sable «répandu sur un tableau. Car il est nécessaire (dans cette méthode) «d'effacer certains nombres, et d'en écrire d'autres à leur place; ce «qui donne lieu, pour l'encre, à des confusions nombreuses et «inextricables, tandis que dans le sable il est facile d'effacer certains «nombres avec le doigt, et d'en écrire d'autres à leur place. Cette «manière d'écrire les nombres sur le sable est employée avec un «très-grand avantage, non-seulement dans la multiplication, mais «aussi dans les autres opérations, tant celles dont nous avons déjà «parlé que celles dont il sera question dans la suite.»

Οὐ περιττὸν δὲ ἴσως καὶ ἑτέραν μέθοδον ἐκθέσθαι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· ἀλλ' αὕτη ἐπὶ μὲν χάρτου διὰ μέλανος γενέσθαι, πάνυ δυσχερεστάτη· ἐν ἄμμῳ δὲ ἐπὶ πίνακος καταπαττομένῃ, γίνεσθαι πεφυκυῖα· διὰ τὸ δεῖν εἶναι, τοὺς μὲν τῶν ἀριθμῶν ἐξαλείφειν, ἑτέρους δὲ ἀντ' αὐτῶν ἐπὶ τοῦ τόπου ἐκείνων γράφειν· ὅπερ ἐν μὲν τῷ μέλανι, πλείστην καὶ ἀδιάκριτον τὴν σύγχυσιν ἐμποιεῖ· ἐν ἄμμῳ δὲ, ῥᾴδιον τοὺς μὲν ἐξαλείφειν τῷ δακτύλῳ, ἑτέρους δὲ τῶν ἀριθμῶν ἀντ' αὐτῶν γράφειν· τὸ δὲ ἐπ' ἄμμου τοὺς ἀριθμοὺς γράφειν, οὐ μόνον ἐπὶ πολ-

recherches de M. Taylor[1], qui établissent que l'usage de calculer sur un tableau couvert de sable a existé dans l'Inde à différentes époques, mais peut-être d'autres circonstances encore, remontant à une antiquité bien plus reculée, et que je ferai connaître dans la suite de ce mémoire.

Il n'est pas douteux que, dès que les Arabes d'Afrique et d'Espagne eurent connaissance des méthodes indiennes, ils durent s'empresser d'abandonner les méthodes incommodes et compliquées du système latin; car les traités composés par des auteurs chrétiens aux x^{e} et xi^{e} siècles nous donnent de ces dernières méthodes une idée peu avantageuse. Mais lorsque cette transition s'opéra, un usage de cent, peut-être de deux cents ans, avait habitué les Arabes de l'Occident aux chiffres des Néopythagoriciens. En même temps, l'avantage des nouvelles méthodes qui employaient, comme les anciennes, neuf chiffres avec valeur de position, en remplaçant seulement par un dixième signe l'emploi du tableau à colonnes, était entièrement indépendant de la forme des chiffres. Il fut donc bien naturel que les Arabes de l'Occident conservassent, avec les méthodes nou-

λαπλασιασμοῦ, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων μεθόδων τῶν τε ἤδη λεχθεισῶν καὶ τῶν ἔπειτα ῥηθησομένων, χρησιμώτατον πάντη καθίσταται.

(Ancien fonds grec de la Bibliothèque impériale de Paris, mss. n° 2381, fol. 5 v°, lig. 30 à 35; n° 2382, fol. 9 r°, lig. 13 à 25; n° 2509, fol. 105 v°, lig. 2 à 10.)

[1] *Lilawati, or a Treatise on arithmetic and geometry, by Bhascara Acharya*, translated from the original sanscrit by John Taylor. Bombay, 1816, in-4°, p. 6. (Comparer Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, t. I, p. 540.)

velles, les anciens chiffres, et les désignassent bientôt par le nom des chiffres du gobâr[1], parce qu'ils les employaient dans les calculs faits d'après la méthode du gobâr, désormais la seule en usage. Que cette méthode soit réellement la méthode indienne, c'est ce qui est mis hors de doute par les traités relatifs au calcul gobâr que nous possédons actuellement dans des manuscrits arabes[2]. Le souvenir de l'origine indienne du calcul gobâr se maintint d'ailleurs, et nous le retrouvons, sous une forme un peu légendaire, dans les passages ci-dessus traduits. Les chiffres anciens et les nouvelles méthodes s'identifiant de plus en plus, on finit, dans la suite des temps, et avec le manque de précision historique qui caractérise les savants arabes[3], par croire que les chiffres gobâr devaient être, de même que le calcul gobâr, d'origine indienne, et beaucoup d'arithméticiens l'affirmèrent, arrivant ainsi à la vérité par l'erreur. D'autres, au contraire, voulurent que le nom de chiffres indiens fût réservé à ceux que les Arabes orientaux employaient avec les nouvelles

[1] حروف الغبار *houroûf al-gobâr*, par opposition aux حروف الجمل *houroûf al-djoumal*, c'est-à-dire aux lettres de l'alphabet arabe employées comme signes numériques, notation également en usage chez les Arabes, et dont j'aurai encore à m'occuper dans un des paragraphes suivants de ce mémoire.

[2] J'ai traduit un de ces traités. (Voir les *Actes de l'Académie pontificale de' Nuovi Lincei*, XII[e] année, p. 230 à 275 et 399 à 438.)

[3] On pourra se faire une idée de cette absence de précision historique en lisant, par exemple, les récits étrangement confus et erronés que l'ouvrage de Hadji Khalfa contient au sujet d'Euclide et d'Apollonius; édition de Fluegel, t. I, p. 380 et 381, et t. V, p. 148.

méthodes qui eurent cours en Orient sous le nom de calcul indien[1]. De tout cela il résulta, au sujet de l'origine indienne ou non indienne des chiffres gobâr, l'incertitude dont nous trouvons l'expression dans les passages ci-dessus traduits.

J'ai encore une observation à ajouter. Je viens de dire que les nouvelles méthodes remplacèrent, chez les Arabes occidentaux, le tableau à colonnes par l'emploi d'un dixième signe, c'est-à-dire du zéro. Il ne faudrait pas croire cependant que ce signe fut inconnu aux Néopythagoriciens, car il se trouve dans le tableau que contiennent, comme nous l'avons vu, certains manuscrits de la Géométrie de Boèce, accompagné d'un nom dont la forme indique une origine grecque ou sémitique[2]. Mais l'emploi du

[1] Que les mêmes méthodes aient été désignées sous le nom de *calcul indien* par les Arabes de l'Orient, et sous le nom de *calcul de poussière* par ceux de l'Occident, cela ne peut pas plus nous surprendre que de voir, à une époque plus récente, une même partie de l'analyse infinitésimale s'appeler *calcul de fluxions* en Angleterre et *calcul différentiel* sur le continent.

[2] Voir ci-dessus, p. 52, l. 22. On a proposé aussi de dériver le nom Sipos de l'arabe صِفْرٌ *çifron*. Mais cette étymologie me paraît inadmissible. Elle suppose d'abord la suppression du *r*, c'est-à-dire d'une radicale essentielle, suppression dont les autres noms d'origine sémitique certaine, Arbas, Quimas, Temenias, ne nous offrent point d'exemple; car pour Quimas le س se conserve dans le *s*, et pour Arbas le ع dans le *a* de la terminaison *as*. Ensuite le *s* ne correspond point au son du ص arabe, car nous voyons plus tard les Grecs byzantins rendre صِفْرٌ par *τζίφρα* ou *τζύφρα*. Enfin et surtout cette étymologie est contraire aux faits historiques; car, ou bien les Néopythagoriciens ont eu le zéro avec le nom Sipos, et alors ce nom appartient à une époque où il serait impossible de songer à une in-

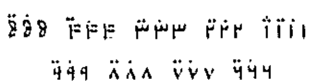
tableau à colonnes, dont l'usage se rattachait directement aux abacus manuels, familiers aux Grecs et aux Romains, comme le souanpan aux peuples de l'Asie centrale, ne permit pas au zéro d'obtenir sa véritable signification, qu'il reprit aussitôt qu'eut lieu l'introduction des méthodes indiennes[1]. Nous

fluence arabe quelconque en matière scientifique; ou bien la liste des noms Igin, Andras, etc. jusqu'à Sipos inclusivement appartient à l'époque de Gerbert, où les recherches de M. Martin rendent encore une influence arabe très-difficilement admissible; ou bien cette liste appartient aux temps postérieurs à l'introduction bien constatée des traités arabes chez les chrétiens de l'Occident, qui commence environ au milieu du XIIe siècle, peut-être un peu avant. Mais, en ce cas, si on formait ces noms sous l'influence de la doctrine arabe nouvellement importée, pourquoi aurait-on tiré de l'arabe seulement quelques-uns de ces noms, et rattaché les autres à des spéculations qui n'avaient plus aucun rapport avec les idées reçues et dominantes à cette époque?

[1] Je voudrais dire ici un mot d'une notation que l'on a crue inhérente aux chiffres gobâr, parce que la première fois qu'on l'avait remarquée, on l'avait trouvée appliquée à des chiffres gobâr. Cette notation consiste à superposer aux neuf chiffres des unités respectivement un, deux, trois ou quatre zéros ou points pour désigner les dizaines, centaines, mille et dix mille; par exemple $\overset{\vdots}{5} = 5000$. Mais j'ai déjà montré (*Journal asiatique*, cahier de septembre-octobre 1854, p. 358) que cette notation se pratiquait aussi avec les chiffres indiens des Arabes orientaux, et c'est avec ces mêmes chiffres qu'elle est employée dans le scolie de Néophytos qui se trouve dans les mss. n[os] 1928 et 2350 de l'ancien fonds grec de la Bibliothèque impériale, et qu'ont cité M. de Humboldt dans son mémoire sur les systèmes de chiffres (*Journal de Crelle*, t. IV, p. 227) et M. Boeckh dans le programme ci-dessus mentionné des cours de l'Université de Berlin, pour le semestre d'été 1841 (p. VIII et IX). Enfin dans le manuscrit 1912 suppl. arabe, dont il a été question précédemment, la notation des points superposés est employée (voir fol. 21 v° et 22 r°) simultanément avec les chiffres indiens des Arabes orientaux et avec les chiffres gobâr, dans des tableaux juxtaposés; et, fol. 17 v° du même

voyons de même le zéro, dans le traité ci-dessus cité de Radulphe de Laon, écrit environ au commencement du XII^e siècle, servir à marquer successivement les chiffres d'un multiplicateur et d'un multiplicande, pendant qu'on exécute l'opération partielle qui les concerne, afin que l'on ne se trompe pas de

manuscrit, cette notation est appliquée encore une fois aux chiffres indiens des Arabes orientaux exclusivement. Je suis fort peu disposé à croire que cette notation représente pour ainsi dire un état intermédiaire par lequel passèrent la notation numérique et l'invention du zéro, avant d'arriver à la perfection dans la valeur de position et dans l'emploi du zéro pour désigner les places vides. Les deux notations sont au contraire coexistantes; car autrement, comment la notation qui emploie les points ou les zéros superposés pourrait-elle se trouver dans des manuscrits arabes du XVI^e siècle, et dans le scolie d'un moine byzantin du XIV^e siècle qui doit avoir reçu la connaissance de cette notation des Arabes, puisqu'il désigne le zéro par le mot τζύφρα, transcription de l'arabe صفر ? C'était sans doute une de ces notations comme le chiffre diwâni, le chiffre copte, le chiffre siyâk, qui se sont conservées en Orient à côté des chiffres indiens pour toutes les occasions où il s'agissait seulement de noter des valeurs numériques et non d'exécuter des calculs. D'une manière semblable nous employons nous-mêmes le chiffre romain, notation très-imparfaite, concurremment avec nos chiffres modernes. J'irai même jusqu'à dire que peut-être cette notation des points ou zéros superposés n'a été jamais employée que lorsqu'il s'agissait de présenter en forme de tableau la notation indienne. C'est ainsi qu'au fol. 17 v° du ms. 1912 du suppl. arabe, un chapitre d'un traité d'arithmétique pratique commence par présenter les chiffres indiens en forme de tableau avec les points superposés, comme il suit :



tandis qu'immédiatement après, lorsqu'on explique comment doivent s'écrire avec ces chiffres les nombres dix, cent, mille, vingt, chiffre[1]; tandis que, aussitôt que les vraies méthodes indiennes sont introduites dans l'Occident chrétien,

trente, quarante, cent dix, mille cent, mille cent dix, cent vingt, trois cent trente, quatre cent dix, huit cent cinquante, sept cent millions dix mille cent quinze, ces nombres sont écrits au moyen du zéro sous la forme d'un petit cercle placé à côté ou au milieu des autres chiffres, comme il suit : ١o, ١oo, ١ooo, ٢o, ٣o, ۴o, ١١o, ١١oo, ١١١o, ١٢o, ٣٣o, ۴١o, ٨۵o, ٧oo١o١١۵. Il se pourrait bien que le scolie de Néophytos ne fût que la reproduction légèrement modifiée, et accompagnée des éclaircissements les plus nécessaires, d'un de ces *tableaux* que l'auteur byzantin avait trouvé dans un manuscrit arabe.

[1] Manuscrit 534 du fonds Saint-Victor latin de la Bibliothèque impériale de Paris, fol. 11 v°, lig. 4, à fol. 12 r°, lig. 6. « Meminisse « ergo debes quia, cum superius de descriptione tabulæ loqueremur, « in ultima ternorum arcuum superductione quandam figuram cui « sipos nomen est, ⊙ in modum rotulæ formatam, nullius numeri « significativam, inscribi solere prædiximus, cujus operam insequen- « tibus profuturam præmittebamus. Si quidem figuram hujusmodi « providus abacista in calculis effigiabit, et ad eum quo de agitur « usum inter alios caracteres reservabit. Cumque aliquam talem mul- « tiplicationem facere necesse fuerit, ut metuendum sit, ne dispo- « sitorum caracterum multitudo in errorem inducat, unam ex his « rotulis multiplicatoribus, alteram multiplicandis, ad eliminandum « errorem, pro signo superponet, ita ut, dum primus multiplicator « multiplicandos caracteres sua quantitate percurret, ipse super ver- « ticem, donec omnes multiplicandos mensus fuerit, inmobilem « rotulam gerat. Quum vero multiplicandis rotula superponetur, per « singulos eorum a primo usque ad postremum, prout cum eis pri- « mus multiplicator rationem habebit, transportabitur. Sicque per « primum multiplicatorem opera expleta, super secundum multipli- « catorem rotula ponetur, ab ultimo autem multiplicandorum ad « primum rotula reportabitur, dum eum secundus multiplicator sua « quantitate metietur; et dum singulos eorum multiplicando proce- « det, per singulos rotula usque ad ultimum, eo quo prædiximus or- « dine, transfertur. Quæ vero, ut dictum est, super multiplicatorem « rotula posita fuerat, inmobilis permanebit, donec omnes superiores « metiendo operam suam expleverit, et sic ad alium multiplicatorem

par les traductions des traités arabes, le zéro reprend sa véritable signification et fait disparaître le tableau à colonnes.

Cette circonstance nous permet en même temps de nous faire une idée plus exacte de la manière dont les Néopythagoriciens reçurent de l'Inde la forme de leurs chiffres, fait que nous révèlent les figures de ces chiffres, d'après les documents placés ci-dessus sous les yeux du lecteur. Si les Néopythagoriciens avaient reçu les méthodes indiennes de l'arithmétique pratique, telles que nous les trouvons dans l'ouvrage d'Alkhârizmî et dans les traités arabes postérieurs à cet auteur, ils auraient très-probablement adopté ces méthodes, dont la simplicité et l'élégance sont trop frappantes pour ne pas séduire des savants obligés d'exécuter des calculs numériques. Il faut en conclure qu'il n'arriva à Alexandrie que des rapports plus ou moins vagues, touchant le fait d'une existence de dix signes employés dans l'Inde, et propres à exprimer tous les nombres imaginables, en prenant une valeur de position; et que ces rapports étaient accompagnés de listes représentant les figures des signes au moyen desquels on pouvait réaliser un effet si extraordinaire. Les Néopythagoriciens cependant, familia-

« transibit. Quod tamdiu faciendum erit donec per omnes multipli« catores rotula promota, per singulos eorum tota multiplicandorum « decursa fuerit summa. »

Les premières lignes de ce passage jusqu'aux mots « nullius numeri » ont été publiées déjà par M. Chasles (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XVI, p. 1407).

risés avec l'étude des nombres, devaient reconnaître aisément que la même idée se pratiquait au fond sur les machines à compter, en usage depuis longtemps[1] chez les Grecs et les Romains. Ils ne pouvaient pas manquer de comprendre que les signes merveilleux de l'Inde étaient le moyen de transformer l'abacus manuel en un abacus écrit, et le syncrétisme alexandrin, amoureux du prestige mystérieux qui entourait les idées et les symboles venus de loin, et surtout de l'Orient, amalgama les figures indiennes avec les pratiques grecques et romaines dans le système de numération et de calcul dont nous trouvons l'exposé dans le passage de Boèce.

Mais il faut prouver encore que rien ne nous empêche d'admettre que l'emploi de dix signes, avec valeur de position, ait existé dans l'Inde, et ait pu être transporté de là à Alexandrie, centre de la civilisation néo-hellénique, dans les premiers siècles de notre ère. Je devrai pour cela examiner plus à fond qu'il n'a été fait jusqu'à présent le développement de l'arithmétique pratique dans l'Inde pendant les âges antérieurs au commencement de notre ère.

UN PASSAGE DU *LALITAVISTARA*.

Lorsque nous consultons l'histoire des sciences, nous trouvons chez les Indiens une prédisposition particulière pour les spéculations mathématiques

[1] Comparer *Revue archéologique*, 3e année (1846), p. 308.

qui se rapportent au nombre entier. L'astronomie, la théorie des quantités irrationnelles, l'algèbre, qui sont, chez les Grecs, essentiellement ou exclusivement fondées sur des considérations géométriques, deviennent, entre les mains des Indiens, des sciences purement calculatrices. C'est de là même que résulte chez les Arabes, qui recueillent les travaux des uns et des autres [1], une combinaison toute nouvelle de la démonstration géométrique des problèmes avec leur résolution numérique, combinaison dans laquelle il faut chercher l'origine des applications modernes de l'algèbre à la géométrie et de la géométrie à l'algèbre. Dans la résolution des équations indéterminées, qui dépend entièrement de la connaissance des propriétés des nombres entiers, et qui est la source de la théorie moderne des nombres, les Indiens sont parvenus à des découvertes qui dépassent de beaucoup tout ce qu'ont fait les autres peuples de l'antiquité ou du moyen âge, et auxquelles la

[1] Dans l'histoire des sciences un des indices les plus sûrs des emprunts et de leurs origines consiste dans les termes techniques, surtout lorsque ces termes n'expriment pas simplement ou nécessairement la chose ou l'opération qu'ils désignent. C'est ainsi que l'origine indienne de l'arithmétique arabe est révélée, entre autres, par le nom de la multiplication ضرب, imité des expressions sanscrites pour la multiplication, qui signifient *frapper, détruire* (par exemple, *Soûrya-siddhânta*, I, v. 70; comparer Colebrooke, *Algebra, with arithmetic, etc.* p. 5, note 6), et par le nom de la racine carrée جذر, traduction du mot sanscrit *moûla;* tandis que l'influence grecque se montre d'autre part dans l'emploi du terme ضلع, traduction de πλευρά, dont on se sert pour désigner les racines des degrés supérieurs.

science moderne elle-même ne s'est élevée que par les efforts d'Euler[1].

Mais ce n'est pas seulement sur le terrain de la science proprement dite que l'on rencontre cette aptitude spéciale pour l'étude et le maniement des nombres[2] qui forme, avec la tendance aux abstrac-

[1] Colebrooke, *Algebra, with arithmetic, etc. Vidja-Ganita* de Bhâskara, 3ᵉ chapitre, et *Kouttaka* de Brahmagoupta, 7ᵉ section.

[2] L'hypothèse qui sert de base aux systèmes astronomiques des Indiens, et qui consiste à prendre pour époque des mouvements des planètes le moment d'une conjonction générale, est également une preuve de cette disposition particulière de l'esprit indien. La conception d'une pareille époque, comme base des calculs astronomiques, ne se présentera guère qu'à des savants intimement familiarisés avec les spéculations de l'analyse indéterminée; car la détermination d'une telle époque, qui, naturellement, ne peut être que fictive, dépend d'un problème d'analyse indéterminée du premier degré.

En effet, soient l, l', l'', l''', etc. les longitudes moyennes des planètes à un moment donné, et μ, μ', μ'', μ''', etc. leurs moyens mouvements respectivement; pour déterminer le moment d'une conjonction générale en longitude moyenne, on aura à résoudre les équations simultanées :

$$\begin{aligned} l + t\mu &= x\,360^\circ + \lambda \\ l' + t\mu' &= x'\,360^\circ + \lambda \\ l'' + t\mu'' &= x''\,360^\circ + \lambda \\ l''' + t\mu''' &= x'''\,360^\circ + \lambda \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } (l-l') + t(\mu-\mu') &= (x-x')\,360^\circ \\ (l-l'') + t(\mu-\mu'') &= (x-x'')\,360^\circ \\ (l-l''') + t(\mu-\mu''') &= (x-x''')\,360^\circ \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

ou, en désignant les différences $x-x'$, $x-x''$, $x-x'''$, etc. qui sont des nombres entiers, par y', y'', y''', etc. respectivement,

$$\frac{y'\,360^\circ - (l-l')}{\mu-\mu'} = \frac{y''\,360^\circ - (l-l'')}{\mu-\mu''} = \frac{y'''\,360^\circ - (l-l''')}{\mu-\mu'''} = \text{etc.}$$

ce qui est un système de $n-1$ équations simultanées du premier degré entre les n inconnues $y', y'', y''' \ldots\ldots y^{(n)}$.

tions métaphysiques, un des traits les plus caractéristiques de l'esprit indien. Cette aptitude est tellement inhérente à la nature même de la nation, qu'on la retrouve dans les créations du génie indien les plus étrangères aux mathématiques.

Une des meilleures preuves de cette assertion consiste dans les mots propres que possède la langue sanscrite pour désigner des puissances très-élevées du nombre dix, et que l'on ne doit pas chercher dans des traités mathématiques, mais dans des ouvrages religieux et poétiques. M. Weber a publié[1] une notice fort intéressante sur l'emploi de ces mots dans la littérature védique. Il fait connaître un passage de la *Vâdjasanéya Sanhitâ* du *Yadjourvéda*, où l'on énumère les pierres nécessaires à la construction de l'autel du feu sacré, en faisant usage des mots suivants :

Ayouta = 10.000.
Niyouta = 100.000.
Prayouta = 1.000.000.
Arbouda = 10.000.000.
Nyarbouda = 100.000.000.
Samoudra = 1.000.000.000.
Madhya = 10.000.000.000.
Anta = 100.000.000.000.
Parârdha = 1.000.000.000.000.

Il signale un passage du *Mahâbhârata* où, dans l'énumération des richesses de Youdhichthira, se trouvent employés les noms :

[1] *Journal de la Société orientale d'Allemagne*, t. XV, p. 132 à 140.

Ayouta = 10.000.
Prayouta = 100.000.
Padma = 1.000.000.
Kharva = 10.000.000.
Arvouda = 100.000.000.
Çankha = 1.000.000.000.
Mahâpadma = 10.000.000.000.
Nikharva = 100.000.000.000.
Kôti = 1.000.000.000.000.
Madhya = 10.000.000.000.000.
Parârdha = 100.000.000.000.000.
Sapara = 1.000.000.000.000.000.

Enfin, M. Weber cite un passage du *Râmâyana* de Vâlmiki où le poëte, pour exprimer le nombre des singes qui composent l'armée de Sougrîva, établit l'échelle suivante :

1 kôti = 10.000.000.
1 çankha = 100.000 kôtis.
1 vrinda = 100.000 çankhas.
1 mahâvrinda = 100.000 vrindas.
1 padma = 100.000 mahâvrindas.
1 mahâpadma = 100.000 padmas.
1 kharba = 100.000 mahâpadmas.

Les exemples que je viens d'emprunter à la notice de M. Weber appartiennent à des ouvrages brahmaniques. Jetons maintenant un coup d'œil sur un des livres sacrés de la doctrine bouddhiste, le *Lalitavistara*, qui contient la biographie fabuleuse du « Saint de la famille des Çâkyas. » Choisissant les exemples au hasard, nous y trouvons des réunions de dix mille religieux, de quatre-vingt-quatre millions d'Apsarases, de trente-deux mille Bôdhisattvas, de soixante-huit mille Brahmas, d'un million de Çakras, de cent mille dieux, de centaines de millions de divinités, de cinq cents Pratyêka-Bouddhas, de quatre-vingt-quatre mille fils de dieux, puis de trente-deux mille et de trente-six millions d'autres fils de dieux, de soixante-huit mille kôtis de fils de dieux et de Bôdhisattvas, de quatre-vingt-quatre centaines de mille de niyoutas de kôtis de divinités. Les signes principaux du Bouddha sont au nombre de trente-deux, ses signes secondaires au nombre de quatre-vingts, les signes de sa mère au nombre de trente-deux, ceux de la demeure et de la famille où il doit naître, au nombre de huit et de soixante-quatre. La reine Mâyâ-Dêvî est servie par dix mille femmes; les ornements du trône du Bouddha sont énumérés par centaines de mille; des centaines de mille de divinités et cent mille millions de Bôdhisattvas et de Bouddhas rendent hommage à ce trône qui est le produit de mérites accumulés pendant cent mille millions de kalpas[1]. Le grand lotus qui éclôt la nuit de la conception du Bouddha a une étendue de soixante-huit millions de yôdjanas. Deux cent mille trésors paraissent à la naissance du Bouddha; cet événement remplit de joie les trois mille grands milliers de mondes, et les êtres viennent rendre hommage à sa mère, la reine Mâyâ-Dêvî, par troupes de quatre-vingt-quatre mille et de soixante mille. En fait de nombres plus petits,

[1] Un kalpa est une période de 4,320,000,000 d'ans.

on remarque encore les quatre grandes méditations, les sept pas faits de chaque côté par le Bouddha qui vient de naître, les sept choses précieuses, les huit membres du corps, les vingt-huit chefs des Yakchas, les trente-trois dieux du ciel d'Indra, les cent vertus, les cent huit portes de la loi, etc. D'autres nombres qui se présentent très-souvent sont : quatre cents, cinq cents, huit cents, trois mille, cinq mille, huit mille, vingt mille, trente-deux mille, quarante mille, quatre-vingt mille, dix millions, cent mille kôtis, cent mille millions de kôtis.

Si l'on place en regard de l'exubérance de ces fantaisies arithmétiques la sobriété comparativement extrême des prophètes de l'Ancien Testament et même de l'Apocalypse[1], ou de la mythologie grecque, on ne peut pas s'empêcher de reconnaître que le génie indien a pour les conceptions numériques un penchant, une facilité et une puissance

[1] On dirait que pour le génie sémitique pur le nombre ne sert qu'à représenter une réalité précise et ne devient presque jamais un instrument de l'imagination. L'Apocalypse est conçue dans un esprit tout différent. Les nombres y sont pour la plupart symboliques, et certains grands nombres y révèlent déjà une tendance à l'énorme, et comme un souffle venu d'un Orient plus éloigné.

Voici les nombres supérieurs à cent que j'ai remarqués dans l'Apocalypse : deux cents millions (*δύο μυριάδες μυριάδων*, ch. IX, v. 16), des myriades de myriades et des milliers de milliers (ch. V, v. 11), cent quarante-quatre mille (ch. VII, v. 4, et ch. XIV, v. 1), douze mille (ch. VII, v. 5 à 8, et ch. XXI, v. 16), sept mille (ch. XI, v. 13), seize cents (ch. XIV, v. 20), douze cent soixante (ch. XI, v. 3, et ch. XII, v. 6), mille (ch. XX, v. 2), six cent soixante-six (χξϛ', le célèbre nombre apocalyptique, ch. XIII, v. 18), cent quarante-quatre (ch. XXI, v. 17).

qu'aucune autre nation n'a jamais possédés au même degré.

Mais le *Lalitavistara* contient un document encore bien plus précieux pour l'objet qui nous occupe ici, document qui mérite un examen tout spécial.

Lorsque le Bôdhisattva est d'âge à se marier, Gôpâ, fille du Çâkya Dandapâni, est destinée à être sa femme. Mais Dandapâni refuse de lui accorder sa fille, à moins que le fils du roi Çouddhôdana ne fasse publiquement preuve de son habileté dans les arts. Par conséquent, une espèce de concours, dont le prix sera la possession de Gôpâ, a lieu entre le Bôdhisattva et cinq cents autres jeunes Çâkyas. Les objets de cet examen sont l'écriture, l'arithmétique, la lutte et l'art de lancer des flèches. Entre l'arithmétique et la lutte, le texte fait une mention très-passagère du saut, de la natation et de la course[1]. Il est vrai qu'à la fin du récit il se trouve encore[2] une longue liste de toutes les sciences et de tous les arts de l'Inde, dans lesquels le Bôdhisattva aurait également montré sa supériorité. Mais cette énumération n'est évidemment qu'une addition postérieure, car lorsque les concurrents ont fini de tirer de l'arc, les fils des dieux qui avaient assisté à l'examen, chantant des hymnes à la louange du Bôdhisattva et jetant sur lui des fleurs, *s'en vont*[3].

[1] Page 173, ligne 2, du texte sanscrit imprimé à Calcutta.
[2] Page 178, lig. 13, à p. 179, lig. 9.
[3] प्राक्रामन्.

Remarquons d'abord que, sur quatorze pages du texte sanscrit qu'occupe la description de ce concours, l'examen concernant l'arithmétique en remplit six et demie à lui seul, et passons maintenant aux détails fort intéressants de cet examen.

Après avoir vaincu sans difficulté les autres jeunes Çâkyas, le Bôdhisattva est invité par son père à se mesurer avec le grand arithméticien Ardjouna, qui avait été établi juge du concours. Interrogé par celui-ci sur les moyens d'exprimer des nombres supérieurs à cent kôtis[1], il répond par l'exposé de l'échelle suivante[2]:

1 ayouta = 100 kôtis = 10^{9}.
1 niyouta = 100 ayoutas = 10^{11}.
1 kangkara = 100 niyoutas = 10^{13}.
1 vivara = 100 kangkaras = 10^{15}.
1 akchôbhya = 100 vivaras = 10^{17}.
1 vivâha = 100 akchôbhyas = 10^{19}.
1 outsanga = 100 vivâhas = 10^{21}.
1 bahoula = 100 outsangas = 10^{23}.
1 nâgabala = 100 bahoulas = 10^{25}.
1 titilambha = 100 nâgabalas = 10^{27}.
1 vyavasthânapradjñapti = 100 titilambhas = 10^{29}.
1 hêtouhila = 100 vyavasthânapradjñaptis = 10^{31}.
1 karahou = 100 hêtouhilas 10^{33}.

[1] Un kôti est égal à dix millions ou 10^7; je me servirai, dans l'échelle ci-après, de la notation des exposants, pour ne pas avoir à écrire des séries de zéros qui occuperaient trop de place et mettraient seulement de la confusion dans l'esprit du lecteur; 10^7 signifie 1 suivi de sept zéros, 10^9 signifie 1 suivi de neuf zéros, et ainsi de suite.

[2] Texte sanscrit imprimé à Calcutta, p. 168, lig. 12, à p. 169, lig. 18.

1 hêtvindriya = 100 karahous = 10^{35}.
1 samâptalambha = 100 hêtvindriyas = 10^{37}.
1 gananâgati = 100 samâptalambhas = 10^{39}.
1 niravadya = 100 gananâgatis = 10^{41}.
1 moudrâbala = 100 niravadyas = 10^{43}.
1 sarvabala = 100 moudrâbalas = 10^{45}.
1 visandjñâgati = 100 sarvabalas = 10^{47}.
1 sarvasandjñâ = 100 visandjñâgatis = 10^{49}.
1 vibhoûtangamâ = 100 sarvasandjñâs = 10^{51}.
1 tallakchana = 100 vibhoûtangamâs = 10^{53}.

Arrivé ainsi au tallakchana, qui est le nombre que nous écririons par une unité suivie de cinquante-trois zéros, le Bôdhisattva ajoute que toute cette échelle ne forme qu'une seule numération, la numération tallakchana[1]; mais qu'il se trouve, au-dessus de celle-ci, la numération dhvadjâgravatî; au-dessus de celle-ci, la numération dhvadjâgranicâmani, et au-dessus de celle-ci encore, cinq ou (d'après la version tibétaine, traduite par M. Foucaux[2]) six autres numérations[3] dont il donne les noms. Si nous supposons à chacune de ces numérations un nombre de termes égal à celui de la numération tallakchana, et formant également une progression dont la raison est 100, on arrive de

[1] Ainsi appelée évidemment du nom du dernier terme auquel elle parvient.

[2] *Rgya tch'er rol pa*, traduit par Éd. Foucaux, IIe partie, Paris, 1848, in-4°, p. 141.

[3] Le texte tibétain intercale même encore au milieu de ces six numérations une septième, que M. Foucaux cependant n'a pas reçue dans le texte de sa traduction, en faisant observer que le nom de cette numération manque aux deux manuscrits sanscrits du *Lalitavistara* que possède la Bibliothèque impériale de Paris.

cette manière jusqu'à $10^{(7+9 \cdot 46)}$, ou à un nombre qui s'écrirait par une unité suivie de 421 zéros.

Ardjouna, qui ne désire plus désormais que de s'instruire par la science supérieure du Bôdhisattva, le prie alors de lui expliquer comment on peut entrer « dans la numération qui pénètre jusqu'à la poussière des premiers atomes[1], » et de daigner leur apprendre, à lui et aux jeunes Çâkyas, combien il y a d'atomes premiers dans un yôdjana.

Le Bôdhisattva commence par établir l'échelle suivante[2], sur laquelle j'appelle l'attention du lecteur, parce que j'aurai à en faire usage ci-après :

1 grain de poussière très-fine = 7 grains de poussière des atomes premiers = $7a$.
1 grain de poussière fine = 7 grains de poussière très-fine = $7 \times 7\,a$ ou $7^2\,a$.
1 grain de poussière emportée par le vent = 7 grains de poussière fine = $7 \times 7 \times 7\,a$ ou $7^3\,a$.
1 grain de poussière de lièvre[3] = 7 grains de poussière emportée par le vent = $7^4\,a$.
1 grain de poussière de bélier = 7 grains de poussière de lièvre = $7^5\,a$.
1 grain de poussière de taureau = 7 grains de poussière de bélier = $7^6\,a$.
1 grain de pavot[4] = 7 grains de poussière de taureau = $7^7\,a$.

[1] परमाणुरजःप्रवेशगणना littéralement : premier-atome-poussière-pénétration-énumération.

[2] Texte sanscrit, p. 169, lig. 21, à p. 170, lig. 5. Je désignerai ici, pour abréger, par a un des atomes premiers, et je me servirai comme ci-dessus de la notation des exposants.

[3] Probablement il faut entendre : soulevée par le pied d'un lièvre.

[4] लिक्षा « a poppy seed, » Wilson.

1 grain de moutarde = 7 grains de pavot = 7^8 *a*.
1 grain d'orge = 7 grains de moutarde = 7^9 *a*.
1 phalange d'un doigt = 7 grains d'orge = 7^{10} *a*.
1 empan = 12 phalanges d'un doigt = 12×7^{10} *a*.
1 coudée = 2 empans = $2 \times 12 \times 7^{10}$ *a*.
1 arc = 4 coudées = $4 \times 2 \times 12 \times 7^{10}$ *a*.
1 krôça du pays de Mâgadha = 1000 arcs = $1000 \times 4 \times 2 \times 12 \times 7^{10}$ *a*.
1 yôdjana = 4 krôças = $4 \times 1000 \times 4 \times 2 \times 12 \times 7^{10}$ *a*.

Il énonce ensuite le résultat en ces termes :

तत्र योजनपिण्ड: परमाणुरजसां परिपूर्णमक्षोभ्यं नियुतमेकं त्रिंशच्च कोटिनियुतं शतसहस्राणि षष्टिश्च कोटिशतानि द्वाविंशतिश्च कोट्य: पञ्च च दशशतसहस्राणि द्वादश च सहस्राणि एतावान्योजनपिण्ड: परमाणुरजोनिक्षेपस्य

C'est-à-dire : « Alors la longueur complète d'un « yôdjana étant entièrement remplie de grains de « poussière des atomes premiers : un niyouta d'a- « kchôbhyas et trente centaines de mille de kôtis de « niyoutas et soixante centaines de kôtis et vingt- « deux kôtis et cinq dizaines de centaines de mille « et douze mille, telle est la somme d'un yôdjana « de grains de poussière des atomes premiers pro- « posés pour être comptés. »

D'après l'échelle ci-dessus[1], préalablement donnée par le Bôdhisattva, ce nombre des atomes se compose des parties suivantes :

[1] Page 256, lig. 13 et suiv.

$$
\begin{array}{lr}
 & 10.000.000.000\ 000.000.000.000\ 000.000 \\
+ & 3.000.000.000.000.000.000.000.000 \\
+ & 60.000.000\ 000 \\
+ & 220.000.000 \\
+ & 5.000.000 \\
+ & 12.000
\end{array}
$$

dont la somme est[1] :

$$10.003.000.000.000.000.060.225.012.000 = A.$$

Si l'on exécute d'autre part la multiplication $4 \times 1000 \times 4 \times 2 \times 12 \times 7^{10}$ indiquée au dernier terme de la seconde échelle ci-dessus[2], le nombre des atomes contenus dans la longueur d'un yôdjana serait, d'après cette échelle, établie par le Bôdhisattva lui-même, le suivant[3] :

$$108.470.495.616.000 = B$$

lequel ne présente pas la moindre ressemblance avec le nombre A.

Faut-il pour cela considérer le nombre A, énoncé dans le texte sanscrit, comme complétement fantastique, ou devons-nous croire que la divergence entre les deux nombres A et B provient seulement d'altérations du texte que peut-être il ne serait pas impossible de découvrir et de préciser?

Quelques considérations fondées sur les proprié-

[1] J'appellerai A le nombre qui exprime cette somme, pour pouvoir le citer sans être obligé de l'écrire de nouveau.

[2] Page 259, l. 9.

[3] Je désignerai pareillement ce nombre par la lettre B pour pouvoir le citer plus facilement.

tés les plus simples des nombres entiers vont nous fournir le moyen de décider cette question.

Le nombre B qui résulte de la multiplication de tous les nombres partiels contenus dans la seconde échelle[1] :

$$4 \times 1000 \times 4 \times 2 \times 12 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

contient d'abord le facteur 1000, puis (dans les nombres 4, 4, 2, 12) sept fois le facteur 2, puis (dans le nombre 12) le facteur 3, puis dix fois le facteur 7. Si nous trouvons, en premier lieu, que beaucoup de ces facteurs sont contenus aussi dans le nombre A, nous pourrons déjà admettre avec une certaine probabilité que les deux nombres A et B ne sont pas complétement étrangers l'un à l'autre, et qu'il y a lieu de chercher à déterminer les altérations du texte auxquelles leur différence est due.

Le facteur 1000 est effectivement contenu dans le nombre A, comme le font voir les trois zéros qui terminent ce nombre à droite.

Quant aux facteurs 2, je rappelle une vérité arithmétique d'après laquelle le premier chiffre à droite d'un nombre est divisible par 2, si le nombre est divisible par 2; le nombre formé par les deux premiers chiffres à droite est divisible par 4, si le nombre entier est divisible par 4; le nombre formé par les trois premiers chiffres à droite est divisible par 8, si le nombre entier est divisible par 8, et ainsi de suite.

[1] Page 258, l. 13, à p. 259, l. 9.

Appliquant cela au nombre A, abstraction faite du facteur 1000, le nombre A contiendra le facteur 2,

une fois si le nombre 2 est divisible par 2,

deux fois si le nombre 12 est divisible par 4,

trois fois si le nombre 012 est divisible par 8,

quatre fois si le nombre 5012 est divisible par 16,

cinq fois si le nombre 25012 est divisible par 32,

six fois si le nombre 225012 est divisible par 64,

sept fois si le nombre 0225012 est divisible par 128.

On voit que les deux premières conditions sont remplies. Les trois suivantes le seront également si, au lieu de 25012, nous écrivons 20512; et le texte de la version tibétaine, que M. Foucaux a eu la bonté de consulter à ma prière, est favorable à ce changement, car il porte un mot qui signifie 500.000 à la place des « cinq dizaines de centaines de mille » = 5.000.000 du texte sanscrit imprimé à Calcutta. Au lieu de remplacer 5.000.000 par 500.000, nous remplaçons ici 5000 par 500, parce que nous faisons abstraction, comme je l'ai déjà dit, du facteur 1000. Cependant nous sommes de nouveau arrêté à la sixième condition, car, tout en adoptant le changement indiqué, nous trouvons que le nombre 220512 n'est pas divisible par 64, mais seulement par 32.

Or, laissant un instant les facteurs 2, examinons si le nombre A contient le facteur 3 que nous avions trouvé dans le nombre B. On sait que A contiendra le facteur 3, si la somme de tous ses chiffres est divisible par 3. La somme des chiffres du nombre A est 22; elle n'est donc pas divisible par 3, mais elle le serait si on l'augmentait de 2, ou de 5, ou de 8, etc. On peut donc supposer qu'une altération du texte a eu lieu. Faisons, par conséquent, le changement le plus simple pour rendre le nombre A divisible par 3; augmentons la somme de ses chiffres de 2, en écrivant les sept chiffres qui précèdent les trois zéros à droite 0240512 au lieu de 0225012, et nous satisferons par ce seul changement non-seulement à la condition de la divisibilité du nombre A par le facteur 3, mais aussi à toutes les sept conditions relatives à la divisibilité de A par les sept facteurs 2.

Tout ceci ne prouve rien encore, mais suffit pour établir une forte présomption en faveur de la supposition que le nombre A n'est pas le résultat d'une simple fantaisie, mais qu'il a un rapport réel avec l'échelle dont le Bôdhisattva, dans le texte sanscrit, l'a fait précéder.

Maintenant, quant aux dix facteurs 7, il faut peut-être un peu de divination mathématique pour prévoir que, si l'on en supprime trois, c'est-à-dire si, dans l'échelle ci-dessus[1], on raye trois degrés[2], et

[1] Page 258, l. 13, à p. 259, l. 9.
[2] Par exemple, les trois degrés qui introduisent la poussière de lièvre, de bélier et de taureau.

si, par conséquent, on effectue seulement le produit $4 \times 1000 \times 4 \times 2 \times 12 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$, on obtient, au lieu du nombre B, le nombre suivant[1] :

$$316.240.512.000 = C$$

qui s'écrit, abstraction faite des zéros, *avec les mêmes chiffres* que le nombre A, si l'on change dans celui-ci un 2 en 4, changement dont nous venons de reconnaître la nécessité déjà d'une autre manière. En adoptant les expressions du *Lalitavistara*, le nombre C s'énoncera de la manière suivante :

« Trente et un mille kôtis et six centaines de kôtis « et vingt-quatre kôtis et cinq centaines de mille et « douze mille ; »

de sorte que le texte sanscrit reproduit ci-dessus devient :

तत्र योजनपिण्डः परमाणुरजसां परिपूर्णमेकत्रिंशत्
कोटिसहस्राणि षट्च कोटिशतानि चतुर्विंशतिश्च
कोट्यः पञ्च च शतसहस्राणि द्वादश च सहस्राणि
एतावान्योजनपिण्डः परमाणुरजोनिक्षेपस्य

Lorsqu'on compare ce texte corrigé à celui de l'édition de Calcutta, on voit si bien comment, pour enfler le mérite du Bôdhisattva[2], des rédactions

[1] J'appellerai ce nombre le nombre C, toujours pour pouvoir le citer plus facilement.

[2] Il est vrai que le nombre C est plus modeste que le nombre A;

postérieures ont introduit d'abord le niyouta d'akchôbhyas, puis les mots niyouta et cent, puis soixante au lieu de six, puis enfin dix avant les dernières centaines de mille; en outre, la succession des différents ordres de nombres, qui est, même grammaticalement, tout à fait irrégulière dans le texte de Calcutta, se change dans une régularité si parfaite dans la leçon que je propose, qu'il me semble difficile de se refuser à la conviction que cette dernière leçon est la vraie.

Si le lecteur a trouvé les considérations qui précèdent quelque peu longues ou difficiles, j'espère qu'il m'excusera en ayant égard à l'importance du résultat obtenu. Ce résultat nous met en possession d'un exemple authentique, précis et détaillé d'un calcul effectué avec d'assez grands nombres, et exécuté dans l'Inde il y a deux mille ans *au moins*. En effet, dans la savante préface dont M. Foucaux a fait précéder sa traduction de la version tibétaine du *Lalitavistara*, on lit ce qui suit[1] :

« D'après ce qui précède, et puisque le *Lalitavi-*
« *stara*, dont la traduction tibétaine insérée dans le
« *Kah gyour* est la copie fidèle, présente tous les
« caractères qui distinguent les Soûtras développés,
« il s'ensuit qu'il faut attribuer la rédaction que nous
« avons entre les mains au troisième concile, qui eut

mais si on fait la supposition, assez naturelle eu égard aux habitudes des Indiens, que les multiplications dont le nombre C est le résultat devaient être effectuées de tête, cet exercice demandait encore une bonne mémoire et une certaine tension d'esprit.

[1] *Rgya tch'er rol pa*, II° partie, p. XVI.

« lieu quatre cents ans environ après la mort du « Bouddha [1]; ce qui assigne à ce livre la date de deux « mille ans, et cela en choisissant, comme je l'ai fait, « l'époque la plus rapprochée entre celles que four- « nit la chronologie bouddhique. »

Les altérations mêmes que je viens de relever ont leur prix, car elles proviennent évidemment des rédactions successives que l'ouvrage a subies, et font remonter, par conséquent, à un âge plus reculé la leçon exacte que j'ai peut-être réussi à restituer [2]; elles prouvent, en quelque sorte, l'authenticité de cette dernière, comme la rouille prouve l'antiquité des objets trouvés dans des fouilles. On peut donc assigner avec beaucoup de vraisemblance le III^e siècle avant notre ère comme l'époque de la première rédaction du passage qui contient le calcul du nombre des grains de poussière contenus dans un yôdjana.

LE CALCUL DU BÔDHISATTVA ET L'ARÉNAIRE D'ARCHIMÈDE.

En examinant attentivement le calcul que je viens

[1] Je fais observer que d'après les annales de Ceylan, le troisième concile eut lieu dans la 17^e année du règne d'Açôka, en 246 avant J. C. (Voir Lassen, *Indische Altertumskunde*, t. II, p. 62 et 229.)

[2] La version tibétaine s'accorde, d'après la traduction de M. Foucaux, avec le texte sanscrit de Calcutta pour l'intercalation du niyouta d'akchôbhyas et des mots niyouta et cent, et pour le changement de six en soixante; elle présente en outre quelques autres variantes. La leçon que je propose est donc antérieure à l'époque où le texte du *Lalitavistara* reçut les altérations avec lesquelles il servit de base à la version tibétaine.

d'analyser, en remarquant qu'il a pour objet la détermination d'un nombre de grains de poussière, et qu'il établit, en outre, une succession d'espèces de grains de poussière de petitesses différentes, en songeant à la place éminente donnée à ce calcul dans l'examen du Bôdhisattva, c'est-à-dire à une occasion où l'on veut montrer que l'être le plus parfait possède aussi au suprême degré toutes les connaissances humaines: on se demande si ce calcul de poussière n'a pas été, dans l'Inde, le type et le représentant par excellence de tous les problèmes d'arithmétique pratique, déjà longtemps avant la rédaction du *Lalitavistara;* s'il n'a pas dû continuer de l'être longtemps et à plus forte raison après, depuis qu'il figurait dans un des livres sacrés d'une religion fort répandue, et si ce n'est pas de là que vient le nom de *calcul de poussière* que les Arabes occidentaux donnent aux méthodes d'arithmétique pratique venues de l'Inde.

Je ne voudrais pas, à défaut d'autres preuves, décider cette question que je me borne à avoir posée; j'ai cité moi-même ci-dessus des passages, et j'en citerai encore, qui montrent que l'usage de calculer sur un tableau couvert de sable, ou sur le sol même, a existé dans l'Inde; ce qui peut avoir donné lieu à appeler l'arithmétique pratique calcul de poussière. Mais si les passages arabes ci-dessus traduits se déclarent également pour la même origine de ce nom, je fais observer que l'on connaît trop les naïvetés étymologiques des auteurs arabes et leur habitude de se copier servilement les uns les autres, pour que leur témoignage même unanime puisse, en pareille matière, avoir la valeur d'un argument décisif.

Une autre question, bien plus importante, s'est sans doute déjà présentée à l'esprit du lecteur, la question s'il faut attribuer à un pur hasard l'analogie frappante que l'on remarque entre le calcul de poussière du Bôdhisattva et l'Arénaire d'Archimède.

Le but même du calcul d'Archimède, de démontrer que le nombre des grains de sable contenus dans la sphère des étoiles fixes est inférieur à un nombre parfaitement assignable, est tout à fait analogue à l'objet qu'a en vue le calcul du *Lalitavistara*. Car, après avoir terminé le calcul des atomes contenus dans un yôdjana, le Bôdhisattva ajoute qu'au moyen de la numération dont il vient d'expliquer les principes, on peut calculer de même le nombre des atomes contenus dans toutes les régions, réelles ou fabuleuses, du monde, ou plutôt des trois mille grands milliers de mondes.

Pour que l'on puisse mieux se rendre compte de la ressemblance du calcul grec et du calcul indien, je donnerai une courte analyse des procédés du géomètre de Syracuse.

Archimède prend pour point de départ les hypothèses suivantes :

1° 1 grain de pavot est égal à 10.000 grains de sable;
2° 1 doigt est égal à 40 fois le diamètre d'un grain de pavot;
3° 1 stade est plus petit que 10.000 doigts;
4° Le diamètre de la sphère du monde (subsolaire) est plus petit que 10.000.000.000 de stades;

5° Le diamètre de la sphère des étoiles fixes est, d'après Aristarque, plus petit que 10.000 diamètres de la sphère du monde.

Cela posé, Archimède établit aisément la série des conclusions suivantes, que je reproduirai en me servant, pour abréger, de la notation des exposants et des signes $=$ et $<$ pour *égal* et *plus petit*.

1° 1 grain de pavot $=$ 10.000 grains de sable;

2° 1 sphère de 1 doigt de diamètre $= 40^3$ ou 64000 grains de pavot $=$ 640.000.000 grains de sable $< 10^9$ grains de sable;

3° 1 sphère de 100 doigts de diamètre $=$ 1000.000 sphères de 1 doigt de diamètre $< 10^{15}$ grains de sable;

4° 1 sphère de 10.000 doigts de diamètre $=$ 1000.000 sphères de 100 doigts de diamètre $< 10^{21}$ grains de sable;

5° 1 sphère de 1 stade de diamètre $<$ 1 sphère de 10.000 doigts de diamètre $< 10^{21}$ grains de sable;

6° 1 sphère de 100 stades de diamètre $=$ 1000.000 sphères de 1 stade de diamètre $< 10^{27}$ grains de sable;

7° 1 sphère de 10.000 stades de diamètre $=$ 1000.000 sphères de 100 stades de diamètre $< 10^{33}$ grains de sable;

8° 1 sphère de 1000.000 stades de diamètre $=$ 1000.000 sphères de 10.000 stades de diamètre $< 10^{39}$ grains de sable;

9° 1 sphère de 100.000.000 stades de diamètre $=$ 1000.000 sphères de 1000.000 stades de diamètre $< 10^{45}$ grains de sable;

10° 1 sphère de 10.000.000.000 stades de diamètre $=$ 1000.000 sphères de 100.000.000 stades de diamètre $< 10^{51}$ grains de sable;

11° 1 sphère dont le diamètre est plus petit que 10.000 fois le diamètre de la sphère précédente (ce qui a lieu, en vertu de la 4° et de la 5° hypothèse, pour la sphère des étoiles fixes) est plus petite que 1000.000.000.000 fois la sphère précédente, donc $< 10^{63}$ grains de sable.

Pour pouvoir énoncer ces conclusions, Archimède établit, tout comme les Indiens, une échelle de noms de nombres. Il appelle les nombres ordinaires nombres premiers, et il pose :

1 unité des seconds nombres = 100.000.000 = 10^{8};
1 unité des troisièmes nombres = 100.000.000 unités des seconds nombres = 10^{16};
1 unité des quatrièmes nombres = 100.000.000 unités des troisièmes nombres = 10^{24};
1 unité des cinquièmes nombres = 100.000.000 unités des quatrièmes nombres = 10^{32};
1 unité des sixièmes nombres = 100.000.000 unités des cinquièmes nombres = 10^{40};
1 unité des septièmes nombres = 100.000.000 unités des sixièmes nombres = 10^{48};
1 unité des huitièmes nombres = 100.000.000 unités des septièmes nombres = 10^{56}.

Il peut, de cette manière, énoncer le résultat des conclusions ci-dessus, en disant que le nombre des grains de sable contenus dans un globe égal à la sphère des étoiles fixes est inférieur à mille myriades des huitièmes nombres.

Mais, de même que, dans l'échelle du Bôdhisattva, la numération tallakchana est suivie encore d'autres numérations d'un ordre plus élevé, de même Archimède fait observer que l'échelle des premiers, seconds, troisièmes nombres, etc. peut se continuer jusqu'aux nombres 100.000.000$^{\text{ièmes}}$; que l'on peut considérer le dernier terme auquel cette échelle arrive comme une unité d'un nouvel ordre de nombres que l'on appellera nombres premiers de la seconde période, et que l'on peut alors, en suivant la même progression, opérer, si l'on en a besoin, avec des nombres seconds, troisièmes et enfin 100.000.000$^{\text{ièmes}}$ de la seconde, de la troisième, de la quatrième période, et ainsi de suite, jusqu'à 100.000.000 unités des nombres 100.000.000$^{\text{ièmes}}$ de la 100.000.000$^{\text{ième}}$ période[1].

En résumé, le calcul d'Archimède comme celui du *Lalitavistara* ont pour objet d'arriver à la détermination du nombre des grains de poussière que peut contenir le monde considéré comme un espace limité; l'un et l'autre établissent une nomenclature de nombres propres à servir à cette détermination; chez l'un et l'autre cette nomenclature se compose de deux degrés, dont le premier comprend, dans le *Lalitavistara*, l'échelle des nombres qui forment la numération tallakchana, et dans l'Arénaire, les

[1] Il est vrai que ces nombres sont énormes; mais on se tromperait si l'on croyait que c'est la limite du possible en fait de notations. On peut exprimer des nombres déterminés et incomparablement plus grands encore que ceux d'Archimède, au moyen de notations dont j'ai fait usage dans un mémoire de mathématiques pures inséré dans le tome XLII du Journal de Crelle. Ces notations se rattachent à des fonctions analytiques d'un genre particulier dont j'ai développé les propriétés fondamentales dans le mémoire que je viens de mentionner.

18.

nombres premiers, seconds, etc. de la première période; le second degré se compose, dans le *Lalitavistara*, des différentes numérations successives, dans l'Arénaire, de la suite des périodes des nombres.

Il y a dans tout cela une telle conformité du but et des moyens, de l'ensemble et des détails[1], qu'il est bien difficile de n'y voir que l'effet d'un simple hasard.

Il est vrai qu'Archimède, né en 287 et mort en 212 avant Jésus-Christ, est à peu près contemporain de l'époque où il faut placer la rédaction du *Lalitavistara;* mais nous avons remarqué ci-dessus que probablement le problème du calcul de poussière existait dans l'Inde avant la rédaction du *Lalitavistara.* Je fais observer aussi que les conquêtes d'Alexandre avaient déjà mis le monde grec en contact immédiat avec l'Inde, et il suffit de nous rappeler les noms de Platon, de Denys et de Dion pour être persuadés que des idées connues à Athènes ne pouvaient pas rester longtemps ignorées à Syracuse.

En même temps, si nous considérons une invention double et indépendante du problème, une fois à Syracuse, une autre fois dans l'Inde, comme inadmissible, la probabilité de l'invention originale et première est infiniment plus grande pour les Indiens, parce que chez eux l'habitude de former ces échelles de noms de nombres, qui constituent en quelque

[1] Il n'y a pas jusqu'au grain de pavot, au doigt et à la lieue (*yódjana*, *stade*) qui ne se retrouvent de part et d'autre comme mesures intermédiaires entre l'atome et le monde.

sorte le fond et l'essence du problème, est inhérente au génie même de leur langue et de leur littérature, et remonte, d'après la notice de M. Weber ci-dessus citée, jusqu'à l'époque des Brâhmanas, c'est-à-dire des plus anciens ouvrages de la période védique, après les hymnes eux-mêmes. Chez les Grecs, au contraire, cette nomenclature des grands nombres, complétement étrangère aux habitudes de leur langue, ne paraît que comme l'œuvre isolée du plus grand de leurs géomètres. Archimède, frappé, sans doute, de la profondeur et de la beauté de cette conception indienne, dont les circonstances auxquelles j'ai fait allusion pouvaient lui avoir procuré la connaissance, avait exposé les principes de cette nomenclature déjà dans un autre ouvrage qu'il cite dans l'Arénaire, et les établit avec toute la précision de son esprit éminemment mathématique. Il développe surtout le côté philosophique de cette idée neuve, et n'exécute point de calcul proprement dit. Mais dans l'ouvrage indien, s'adressant à une nation à laquelle des noms et des moyens pour désigner des nombres énormes étaient naturellement familiers, l'échelle des noms de nombres et des numérations est présentée d'une façon plus nonchalante, et le calcul réellement effectué, dont le résultat s'énonce non par une limite supérieure, mais par un nombre déterminé, joue un rôle important.

LE TÉMOIGNAGE D'ALBÎROÛNÎ.

On voit que l'existence, dans la langue sanscrite, de noms spéciaux pour des nombres très-élevés, est un argument puissant en faveur de l'opinion qu'il faut chercher dans l'Inde l'origine première de certaines notations numériques et de certaines méthodes arithmétiques que nous trouvons chez d'autres nations, et qui se distinguent par une perfection particulière.

Il ne sera donc pas inutile de montrer que ces noms n'ont pas cessé d'être connus et employés dans l'Inde. Un géomètre arabe, qui a visité ce pays, et a recueilli avec autant de zèle que de jugement tout ce qu'il a pu apprendre touchant les mœurs, les doctrines religieuses et philosophiques et les sciences des Indiens, mentionne ces noms d'une manière fort détaillée dans un ouvrage qu'il termina en 1031 de notre ère.

L'auteur dont je veux parler est Albîroûnî, le contemporain et l'ami d'Avicenne, et un des ornements de la cour du sultan Mahmoûd de Gazna, dont les conquêtes lui permirent de séjourner dans l'Inde et d'avoir des rapports directs et personnels avec les savants du pays. C'est dans l'ouvrage d'Albîroûnî sur l'Inde que se trouve le passage que je traduis ci-après[1], et qui contient, outre les noms

[1] La Société asiatique étant sur le point de faire publier l'ouvrage entier d'Albiroûnî, je peux me dispenser de reproduire le texte du passage que j'ai à citer en ce moment. Le commencement de ce passage a été traduit déjà par M. Reinaud dans son Mémoire sur l'Inde, *Mémoires de l'Académie des inscriptions et belles-lettres*, t. XVIII, p. 298, ligne 22, à p. 299, ligne 11, et p. 302, lignes 16 à 24.

dont il s'agit, d'autres détails intéressants pour l'étude qui nous occupe.

« Les Indiens, dit Albîroûnî, n'ont pas l'usage « d'assigner à leurs lettres un emploi quelconque « dans le calcul, comme nous[1] en assignons un à « nos lettres en les classant suivant l'ordre de leurs « valeurs numérales[2]. Et de même que les figures « des lettres sont différentes dans (les différentes par- « ties de) leur pays, de même aussi les signes du « calcul (varient). Ceux-ci sont appelés *aṅka* (أَنْكَ)[3].

[1] C'est-à-dire, les Arabes.

[2] Voir De Sacy, *Grammaire arabe*, deuxième édition, t. I, p. 89 à 91. Il sera encore question, dans la suite du présent mémoire, de cette notation alphabétique employée par les Arabes pour écrire des nombres, et réservée chez eux, en fait de calcul, au calcul sexagésimal. — L'assertion d'Albîroûnî prouve qu'au commencement du XI[e] siècle la notation alphabétique d'Âryabhatta, décrite pages 118 à 121 du cahier d'août 1835 du *Journal asiatique*, était tombée en désuétude; qu'une autre notation alphabétique exposée au même endroit, p. 122 à 128, et employée, d'après M. Whish, dans les parties méridionales de l'Inde, était inconnue dans les contrées visitées par Albîroûnî, et qu'on s'y servait *pour les calculs* exclusivement des chiffres. Quant à ceux-ci, il est tout naturel que leur origine première, comme lettres de l'alphabet et initiales de noms de nombre, ait été depuis longtemps oubliée à l'époque d'Albîroûnî.

[3] Il se trouve, dans le courant et surtout vers la fin de ce passage, un nombre considérable de termes sanscrits que le texte manuscrit transcrit au moyen des lettres arabes, si peu propres à cet usage. Comme la restitution de quelques-uns de ces termes peut être douteuse, il faut que le lecteur ait tous les moyens de contrôle. J'ai donc, d'une part, reproduit entre parenthèses les transcriptions arabes; d'autre part, je donne ci-après l'alphabet romain par lequel je remplace l'alphabet dêvanâgari pour écrire les mots sanscrits rétablis :

Voyelles : *a, â, i, î, ou, oû, ṛi, ṛî, (ḷi, ḷî), ê, aï, ô, aou.*

Gutturales : *k, k', g, g', ṅ.*

« Ce que nous employons (en fait de chiffres) est « choisi parmi ce qu'il y en a de mieux chez les In- « diens; et peu importent les formes, pourvu que « l'on connaisse les significations qu'elles renferment. « Les Cachemiriens numérotent les feuillets au moyen « de chiffres qui ressemblent à des dessins d'orne- « ments ou aux lettres des Chinois, que l'on n'ap- « prend à connaître que par une longue habitude et « par des efforts constants, et que l'on n'emploie pas « dans le calcul (exécuté) sur la poussière [1].

« Un point sur lequel toutes les nations sont d'ac- « cord dans le calcul, c'est la proportionnalité des « nœuds du calcul [2] suivant le rapport de dix; de « sorte qu'il n'y a point de rang dans lequel l'unité

Palatales : *c, c', j, j', ñ.*
Cérébrales : *ṭ, ṭ', ḍ, ḍ', ṇ.*
Dentales : *t, t', d, d', n.*
Labiales : *p, p', b, b', m.*
Demi-voyelles : *y, r, l, v.*
Sibilantes : *ç, ṣ, s, h.*
Visarga : *ḥ*, anousvâra : *ṅ.*

[1] Le mot arabe est تراب (*tourâb*), terra, pulvis, humus, regio d'après Freytag; et ground, earth, dust, powder d'après Richardson. Cette phrase d'Albîroûni prouve que de son temps il existait dans l'Inde l'habitude de calculer sur le sol, ou sur le sable, ou bien sur un tableau couvert de poussière ou de sable fin.

[2] Les « nœuds » des unités sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; les nœuds des dizaines, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90; les nœuds des centaines, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900; et ainsi de suite. C'est ce qui résulte pour moi d'un examen de nombreux traités d'arithmétique arabe, quoique ce ne soit pas tout à fait conforme à ce qu'on trouve dans la *Grammaire arabe* de M. de Sacy, deuxième édition, t. I, p. 417. On peut aussi consulter le mémoire ci-dessus cité, *Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident*, p. 67.

« ne signifie un dixième de l'unité qui se trouve au « rang suivant, et dix fois l'unité qui se trouve au « rang précédent. J'ai recherché avec soin tout ce « qui concerne les noms des différents ordres des « nombres en usage chez les peuples qui possèdent « des langues particulières, autant que j'ai pu en con- « naître. J'ai trouvé qu'ils répètent les mêmes noms « à partir des mille, comme le font les Arabes, ce « qui est la manière la plus convenable et la plus « conforme à la nature de la chose. J'ai aussi con- « sacré à ce sujet une dissertation spéciale. Cependant « les Indiens dépassent l'ordre des mille dans leur « nomenclature, mais non d'une manière uniforme; « car les uns se servent de noms improvisés, les « autres de noms fondés sur certaines étymologies; « d'autres encore mêlent les deux sortes de noms. « Ces noms s'étendent jusqu'au dix-huitième ordre, « à cause de certaines subtilités qui ont été suggérées « aux personnes qui font usage de ces noms, par les « lexicographes, au moyen des étymologies de ces « noms. Le nom du dix-huitième ordre est *parârdd'a* « (پَرَارْدْ), c'est-à-dire la moitié du ciel, ou plus exac- « tement, la moitié de ce qui est au-dessus. La raison « de cela est que, si l'on compose de *kalpas* (كَلْپْ) « une période de temps, une unité de cet ordre est « un jour de l'Être suprême [1]; et comme il n'y a

[1] Dans le 33e chapitre de son ouvrage, Albîroûnî revient à ce point et dit que, d'après certaines opinions, le jour du *pouroușa*, d'après certaines autres le jour du *k'a*, se compose d'un *parârdd'a* de *kalpas*,

« rien au delà du ciel, celui-ci est le plus grand des « corps. Or, une moitié du plus grand des nychthé- « mères est semblable à l'autre ; en la doublant, on « compose une nuit avec un jour, et l'on complète « le plus grand des nychthémères. Il est certain qu'en « supprimant une partie du mot *parârdd'a*, on en fait « *parâr* (پرار), ce qui signifie le ciel entier. Les noms « des ordres (des nombres) jusqu'au dix-huitième « sont ceux qui se trouvent dans le tableau ci-con- « tre [1] :

c'est-à-dire de 432 millions de millions de millions de millions de millions d'années.

[1] Les dix-huit cases contiennent, suivant l'ordre, les noms des nombres suivants :

1	10	100
1.000	10.000	100.000
1.000.000	10.000.000	100.000.000
1.000.000.000	10.000.000.000	100.000.000.000
1.000.000.000.000	10.000.000.000.000	100.000.000.000.000
1.000.000.000.000.000	10.000.000.000.000.000	100.000.000.000.000.000

1.	2.	3.
éka (اِيكَنْ)	*daçan* (دَشَنْ)	*çata* (شَتَنْ)
4.	5.	6.
sahasra (سَهَسْرَنْ)	*ayouta* (آجُوتْ)	*lakṣa* (لَكْشْ)
7.	8.	9.
prayouta (پَرْجُتْ)	*kôṭi* (كُوْتِي)	*nyarbouda* (نَرْبُدْ)
10.	11.	12.
padma (پَدْمْ)	*k'arva* (خَرْبْ)	*nik'arva* (نَخَرْبْ)
13.	14.	15.
mahâpadma (مَهَاپَدْم)	*çañk'a* (شَنْكْ)	*samoudra* (سَمُدْرْ)
16.	17.	18.
mad'ya (مَدْهْ)	*antya* (آنْتْ)	*parârdd'a* (پَرَارْدْ)

« Je vais maintenant décrire les divergences (qui « ont lieu dans l'emploi de ces noms) par les (In-

« diens). Une de ces divergences consiste en ce que « quelques personnes prétendent qu'à la suite du *pa-« rârdd'a* il y a un dix-neuvième ordre, qui s'appelle « *b'oûri* (بهوری), et qu'après cela il n'y a plus lieu à « calcul[1]. Mais si le calcul s'arrête quelque part, de « sorte qu'il y a pareillement un terme aux ordres « des nombres qu'il emploie, c'est seulement une « convention; car autrement ce serait comme si l'on « n'entendait par le calcul que ces noms. On sait aussi « (selon les mêmes personnes) qu'une unité de cet « ordre[2] est un cinquième du plus grand des nycht-« hémères. Cependant on ne cite pas, relativement à « cette matière, une tradition quelconque, emprun-« tée aux ouvrages des partisans de cette opinion. « Mais il existe des traditions qui mentionnent des « périodes composées du plus grand des nychthé-« mères, ainsi que nous ne manquerons pas de l'ex-« poser. Cette (addition d'un 19e ordre) n'est donc « qu'une exagération de pédants. »

« Une autre divergence consiste en ce que quel-« ques personnes prétendent que la limite extrême « du calcul est le *kôṭi*, et qu'à partir de cet ordre « on revient à ses multiples par dix, par cent et par « mille, parce que le nombre des divinités (*dêva*, « ديو) est compris dans cet ordre. Ces personnes di-

[1] Je fais observer que la notation alphabétique d'Âryabhatta, expliquée p. 118 à 121 du cahier d'août 1835 du *Journal asiatique*, s'arrête également au dix-neuvième ordre, c'est-à-dire au nombre qui s'écrit par une unité suivie de 18 zéros.

[2] Du 19e ordre.

« sent que le nombre des divinités est de trente-trois « *kôṭis*, et qu'à chacun des trois (dieux) *Brahmâ* « (براهم), *Nârâyaṇa* (نارَاين) et *Mahâdéva* (مهاديو), il « en appartient onze *kôṭis*. Quant aux noms qui vien- « nent après le huitième ordre, ils ont été formés « par les grammairiens pour les raisons que nous « avons mentionnées ci-dessus. »

« Une autre divergence consiste en ce que l'usage « vulgaire, chez les Indiens, est d'employer *daça sa-* « *hasra* (دَش سَهَسْر) pour le cinquième ordre, et « *daça lakṣa* (دَش لَكش) pour le septième, parce que « les noms de ces deux ordres dont nous avons fait « mention ci-dessus ne sont que rarement employés. « Dans l'ouvrage d'*Âryab'aṭṭa* (l'astronome) de la « ville de *Kousoumapoura* (آرجَبهد الكُسْمَپورى), les « noms des ordres, depuis les dizaines de mille jus- « qu'aux dizaines de *koṭis*, sont les suivants : *ayouta* « (اَجُوتَم), *niyouta* (نَجُوتَم), *prayouta* (پَرجُوتَم), *kôṭi* « (كُوتَر), *padma* (بَدُم), *parapadma* (پَرپَدُم)[1]. »

« Une autre divergence consiste en ce que quel- « ques personnes forment beaucoup de ces noms « par couples. Ils appellent donc le sixième ordre « *niyouta* (نَجُوت), pour faire suite au nom du cin- « quième, et ils appellent le huitième *arbouda* (اَربُد), « pour que le neuvième ordre y fasse suite, comme

[1] Il y a ici un nom de trop, car il y en a six, tandis que depuis les dizaines de mille jusqu'aux dizaines de *kôṭis*, y compris les deux limites, il n'y a que cinq ordres de nombres.

« le douzième fait suite au onzième. Ils appellent « aussi le treizième ordre *çañk'a* (سَنك), et le qua- « torzième *mahâçañk'a* (مهاشنك); et la règle aurait « exigé que le *padma* fût pareillement suivi du *ma-* « *hâpadma.* »

« Les divergences dont l'énumération précède sont « du nombre de celles qu'il est utile de connaître; « mais il y en a beaucoup d'autres encore dont la « connaissance n'offre aucune utilité, et qui pro- « viennent seulement de ce que dans l'enseignement « scolaire on énonce ces noms sans avoir égard à leur « suite ordonnée, ou de ce que certaines personnes « (en font usage, mais) avouent qu'elles (n'en) con- « naissent pas (la signification précise. La connais- « sance exacte de ces noms) serait en effet une chose « difficile pour tous les commerçants. D'après ce qui « a été extrait pour nous du *Pouliça-Sidd'ânta* (بلس « سدّهاند), après *sahasra* (شَهَسْرَ), qui est le qua- « trième ordre, le cinquième est *ayouta* (أَيُوتَن), le « sixième *niyouta* (نيُوتَن), le septième *prayouta* (پريُوتَن), « le huitième *kôṭi* (كُوتَن), le neuvième *arbouda* (أَرْبُدن), « le dixième *k'arva* (خَرْب); les noms suivants sont les « mêmes que dans le tableau ci-dessus[1]. »

[1] Il faut qu'il y ait ici une confusion; probablement un ordre a été omis, car si dans le *Pouliça-Sidd'ânta* le nom du dixième ordre est *k'arva*, les noms suivants ne peuvent pas être tous conformes à ceux du tableau, parce que dans celui-ci le nom du onzième ordre est encore une fois *k'arva*.

« Quant à l'emploi des chiffres (ارقام) dans le calcul, « ceux-ci présentent les figures qu'ils ont aussi chez « nous. J'ai écrit une dissertation sur ce qu'il peut y « en avoir de surabondant[1] chez les Indiens. »

« Nous avons déjà raconté que les Indiens com- « posent leurs ouvrages en vers *çlôkas* (شلوكات). Lors « donc qu'ils ont besoin, dans leurs tables astronomi- « ques, d'exprimer un nombre composé de plusieurs « ordres, ils l'expriment au moyen de mots déter- « minés à cet usage pour chaque nombre formé « d'un ordre ou de deux ordres[2]. Mais ils ont choisi « pour chaque nombre un certain nombre de mots, « afin que, s'il est difficile de placer un de ces mots « à un endroit, on puisse y substituer un mot plus « facile, pris parmi ceux qui ont la même significa- « tion[3]. *Brahmagoupta* (برهمكوبت) dit : Si vous vou- « lez écrire un, exprimez-le au moyen d'une chose « quelconque qui est unique, comme la terre et la « lune; de même vous exprimerez deux au moyen

[1] Ou peut-être : de plus que chez nous. Le texte porte : وقد عملت مقالة فيما عسى يكون عندهم فيها من زيادة. Albiroûni fait évidemment allusion à la multiplicité des formes des chiffres dont il a parlé déjà ci-dessus. Qu'une grande variété des formes des chiffres existe encore actuellement dans l'Inde, c'est ce dont on peut s'assurer par un examen des pages 66 à 144 de l'ouvrage de M. Pihan, ci-dessus cité.

[2] Il existe en effet de ces mots pour tous les nombres formés d'un seul ordre, c'est-à-dire pour zéro et toutes les unités, mais non pour tous les nombres composés de deux ordres, c'est-à-dire pour tous les nombres depuis 10 jusqu'à 99.

[3] Textuellement : parmi ses sœurs.

« de tout ce qui existe au nombre de deux, comme « le noir et le blanc[1], trois au moyen de tout ce qui « forme un assemblage de trois, le zéro au moyen « des noms du ciel, et douze au moyen des noms du « soleil. J'ai placé dans le tableau suivant tout ce « que j'ai entendu de la part des (Indiens en fait de « ces noms). C'est un élément important pour l'ana- « lyse de leurs tables astronomiques. Toutes les fois « que j'aurai appris l'explication de ces noms, je l'y « ajouterai, si Dieu le permet. »

Le zéro...	*çoûnya* (شُون), *k'a* (كَا); ces deux mots signifient le point.	*âkâça* (آكَاش), c'est-à-dire le ciel.
	gagaṇa (كَكَن), le ciel.	*ambara* (أنبَر), le ciel.
	viyat (بَيت), le ciel.	*ab'ra* (آبْر), le ciel.
	.....[2] (بُنَرَ بشُورَن).	

[1] Brahmagoupta fait probablement allusion à la moitié noire et à la moitié blanche du mois, division en usage chez les Indiens.

[2] Il faut peut-être lire بُنَرَبَشُوزَن *pounarvasuvayana* « route de *Pounarvasou*, » c'est-à-dire de *Viṣṇou*, ce qui pourrait, comme *viṣṇoupada*, signifier « ciel, atmosphère, » et par conséquent représenter le zéro. Je ne donne cette explication que comme purement conjecturale.

L'unité...	*âdi* (آذ), c'est-à-dire le commencement. *çaçin* (شَسّ), la lune. *indou* (إنْدُ), la lune. *kşiti* (شِيت). *ourvarâ*, *d'arâ*[1] (أُورْبادا دَهن).	*pitâmaha* (پِتامَهْ), le premier père. *candra* (جَنْدَرْ), la lune. *çitâñçou* (سِيتانْش), la lune. *roûpa* (رُوپ). *raçmi*[2] (رَشْمِي).
Le deux...	*yama* (زَمْ). *açvin* (أشْفِي). *ravicandrau* (رب جَنْدَرْ). *lôcana* (لُوژَن), les deux yeux. *akşi* (آكش).	*dasra* (دَشْرَ). *yamala* (جَمَل). *pakşa* (بَكْش), les deux moitiés du mois. *nêtra* (نِيتْرَ), les deux yeux.
Le trois...	*trikâla* (تِرْكال), les trois divisions du temps. *trijagat* (تِرْجَكَت). *triņi* (تِرين).	[3] les trois premières forces. *lôka* (لُوك), les trois mondes et les trois assemblées. *trigata* (تِرْكَت).
	Puis les noms du feu, à savoir : *pâvaka* (باقك), *vaiçvânara* (بَيْشْفانَر), *dahana* (دَهَن), *tapana* (تَپَن), *houtâçana* (هُتاشَن), *jvalana* (جَلَن), *agni* (اكَن).	

[1] Je ne donne la restitution de ces deux mots qu'à titre de conjecture. Le premier mot est défiguré dans le texte manuscrit par une correction. — [2] *Himaraçmi* et *çitaraçmi* sont des noms de la lune. — [3] Il se trouve ici un blanc dans le texte manuscrit. Le mot omis est probablement *gouņa* ou *trigouņa*.

1. 19

Le quatre.	*véda* (بيذ), leur livre (sacré), parce qu'il est divisé en quatre parties. *samoudra* (سمدر), *sâgara* (ساكر), ces deux mots signifient l'Océan. *abd'i* (آبذ). *dad'i*[1] (دذ).	*diç* (دش), les quatre directions. *julâçaya* (جلاشى). *krita* (كرت).
Le cinq...	*çara* (شر). *art'a* (ارث). *indriya* (اندرى), les cinq sens. *sâyaka* (سايك). ....[2] (اخون).	*vâṇa* (بان). *b'oûta* (بهوت). *içou* (اش). *pâṇḍava* (پاندو), les cinq rois frères[3]. *tata* (تت). .....[4] (ترى). *b'âgana*[5] (بهاكن).

[1] Probablement parce que, d'après les *Pourâṇas*, il existe un océan de lait caillé, si ce n'est une erreur de copiste pour دبر, *dab'ra* « océan. »

[2] Le mot sanscrit qu'Albiroûni a voulu indiquer ici est peut-être *ikṣoura*, ce qui pourrait, comme *çara*, signifier « flèche. »

[3] Le texte porte الخمسة الاخر الملوك. Je pense qu'au lieu de الاخر il faut lire الأخوة.

[4] Il faut, sans aucun doute, lire بزى *viṣaya* « objet des sens, » mot employé pour représenter le cinq, par exemple *Soûrya-Sid-dhânta*, chap. II, v. 19, chap. VIII, v. 6, chap. XII, v. 88.

[5] Ce mot pourrait signifier comme *b'âjana* « partie, division, » et de là « élément ou objet, » et servir de cette manière à représenter

Le six...	*rasa* (رَش), les six saveurs[1]. *añga* (آناڭ). *sat*[2] (شَت).	*ritu* (خَرْت). *mâsârdh'a* (ماسارْدَن).
Le sept...	*aga* (آاڭ). *mahîd'ara* (مَهِيدَر). *parvata* (پَرِبَت), les montagnes. *saptan* (سَبْتَ), sept.	*naga* (نَاڭ), les montagnes. *abd'i*[3] (أَبَدَ). *mouni* (مَنِي).
Le huit...	*vasou* (بَسُو). *ahi* (?) (دَهِي). *gaja*[4] (كَج). *dantin* (دَنْتِن).	*astan*[5] (آرْت). *mañgala* (مَنْكَل). *nâga* (ناڭ).

le cinq. Mais peut-être بهاكن n'est qu'une erreur de copiste pour مَارْكَن *mârgana* «flèche.»

[1] Le texte manuscrit porte البرم السنه (*sic*).

[2] Pour *sas*.

[3] Peut-être أبَدَ est une erreur de copiste pour أَدْر *adri* «montagne,» mot employé pour représenter le sept, par exemple *Soûrya-Siddhânta*, chap. 1, v. 24, 31, 34, 37.

[4] كج est probablement une erreur du copiste pour كج.

[5] Je pense que le copiste a écrit آرْت au lieu de آڑت.

19.

Le neuf..	*gô* (گو). *nanda* (نند). *rand'ra* (رند). *navan* (نو), neuf.	*c'idra* (چهدر). *pavana* [1] (پون). *antara* (انتر).
Le dix....	*dik* [2] (دك). *âça* (آش).	*k'êndou* (كهيند). *râvaṇaçara* (راون شر).
Le onze...	*roudra* (ردر), le destructeur du monde. *îçvara* (ايشفر).	*mahâdêva* (مهاديو), le chef des démons. *akṣaouhiṇî* (اكشوهنى), (les armées) qui accompagnaient les *Kaouravas* (كورو).
Le douze.	*soûrya* (سورج), le soleil, parcequ'il y en a douze. *arka* (ارك), le soleil. *b'ânou* (بهانو).	*âditya* (آدت), le soleil. *mâsa* (ماس), les mois. *sahasrânçou* (سهسترانش).
Le treize..	*viçnu* (بشن).	
Le quatorze.	*manou* (من), les régents des quatorze périodes.	

[1] Peut-être ce mot ne se trouve ici que par erreur, au lieu d'être placé parmi les mots qui représentent le cinq; à moins que ce ne soit une erreur de copiste, au lieu de بوك *b'oûka*. — [2] Pour *diç*.

Le quinze...	*tit'i* (تِتِيِن), les jours lunaires de chacune des deux moitiés du mois.
Le seize....	*aṣṭi*[1] (أَرْتَ). *nripa* (نِرْپ). *b'oûpa* (بْهُوپ *sic*).
Le dix-sept..	*atyaṣṭi* (آتَ / أرْتِ *sic*).
Le dix-huit.	*d'riti* (تَرْتَ).
Le dix-neuf.	*atid'riti* (آتَتَرْتَ).
Le vingt....	*nak'a* (تَكْ *sic*). *kriti* (كَرِتِ).
Le vingt et un.	*outkriti* (اوتَكَرِتِ).
Le vingt-deux.	[2].
Le vingt-trois.	
Le vingt-quatre.	

[1] أرْتَ au lieu de أژْتَ.

[2] Cette case et les deux suivantes sont vides dans le texte manuscrit.

Le vingt-cinq...	*tattva* (تتو), les vingt-cinq choses par la connaissance desquelles on obtient la délivrance finale.

« Il n'existe pas chez les Indiens l'usage de dépasser ce nombre « dans cette matière, d'après ce que j'ai vu et entendu de leur « part. »

(La suite à un prochain cahier.)

MÉMOIRE

SUR

LA PROPAGATION DES CHIFFRES INDIENS,

PAR M. F. WOEPCKE.

(Suite et fin.)

LES CHIFFRES INDIENS ET LEUR TRANSMISSION A ALEXANDRIE.

Je n'avais d'abord cité le passage d'Albîroûnî qu'au sujet des noms particuliers employés dans l'Inde pour désigner des puissances très-élevées de dix, et je n'ai jusqu'à présent considéré ces noms que comme un des faits généraux qui prouvent chez les Indiens une aptitude innée aux spéculations arithmétiques, supérieure à celle que l'on trouve chez la plupart des autres nations. Mais on peut envisager ces noms encore sous un autre point de vue.

On sait que, dans la nomenclature des puissances de dix, les Arabes s'arrêtent aux mille, les Grecs aux dix mille, pour superposer, à partir de là, les mille aux mille, les myriades aux myriades, en y mêlant encore les noms des puissances inférieures de dix; nous, nous possédons encore des noms pour quelques-unes des puissances plus élevées de dix, comme le million, le billion, etc. mais pour les combiner, dans l'énonciation des degrés intermédiaires, par deux, par trois, par quatre, etc. avec les autres noms. De toutes ces manières de procéder il résulte une complication qui ne permet pas facilement à l'esprit d'arriver à une conception claire de la valeur de position. Si, au contraire, on possède des noms particuliers *pour chacune des puissances de dix*[1], jusqu'à la limite des nombres les plus élevés employés dans les calculs, ou dans les créations de l'imagination, comme nous en trouvons dans le tableau dressé par Albîroûnî, et dans les deux passages de la Vâdjasanêya Sanhitâ et du Mahâbhârata signalés par M. Weber, la valeur de position se présente tout naturellement et pour ainsi dire d'elle-même.

Un exemple rendra cette vérité plus évidente. Soit proposé le nombre

7356221984436821 55,

et énonçons-le d'après les différents procédés que je viens de mentionner; nous aurons respectivement :

[1] Je ne saurais assez faire ressortir que c'est là la condition essentielle pour arriver à la valeur de position : de pouvoir énoncer les nombres non *par tranches* de quatre, de trois, de huit chiffres, mais en prenant les puissances de dix et les chiffres *un à un*; et cette condition existe chez les Indiens, tandis qu'elle manque chez les Grecs, les Romains et les Arabes. Comparez les judicieuses réflexions de Delambre sur la manière dont les Grecs auraient pu arriver à la valeur de position (*Histoire de l'astronomie ancienne*, t. II, p. 30, lig. 25, à p. 31, lig. 15).

1° Sept cent mille mille mille mille mille et trente-cinq mille mille mille mille mille et six cent mille mille mille mille et vingt-deux mille mille mille mille et cent mille mille mille et quatre-vingt-dix-huit mille mille mille et quatre cent mille mille et quarante-trois mille mille et six cent mille et quatre-vingt-deux mille et cent cinquante-cinq;

2° Soixante et treize myriades de myriades de myriades de myriades et cinq mille six cent vingt-deux myriades de myriades de myriades et mille neuf cent quatre-vingt-quatre myriades de myriades et quatre mille trois cent soixante-huit myriades et deux mille cent cinquante-cinq;

3° Sept cent trente-cinq mille six cent vingt-deux billions[1] cent quatre-vingt-dix-huit mille quatre cent quarante-trois millions six cent quatre-vingt-deux mille cent cinquante-cinq;

4° Sept parârddhas[2] et trois antyas et cinq madhyas et six samoudras et deux çankhas et deux mahâpadmas et un nikharva et neuf kharvas et huit padmas et quatre vyarboudas et quatre kôtis et trois prayoutas et six lakchas et huit ayoutas et deux mille et cent et cinquante-cinq.

Il est certain que le dernier de ces quatre modes d'énonciation est celui qui conduit tout droit au principe de la valeur de position, c'est-à-dire à l'idée d'écrire les nombres en supprimant les noms parârddha, antya, madhya, etc. et en se bornant à

[1] J'appelle billion un million de millions.

[2] En adoptant les noms du tableau d'Albiroûni.

écrire suivant l'ordre les unités sept, trois, cinq, etc. qui leur servent de multiplicateurs.

Pour arriver à cette conception il n'est pas nécessaire que les noms des puissances de dix soient toujours invariablement les mêmes. Au contraire, le génie arithmétique des Indiens, s'il était assez puissant pour se jouer des noms en maintenant précise et distincte l'idée de la série des puissances ascendantes de dix, était d'autant plus apte à tirer toutes les conséquences qui découlent de cette idée clairement entrevue.

Il n'est pas nécessaire non plus que l'emploi de ces noms ait été d'un usage vulgaire dans l'Inde. Il suffit qu'il ait été familier à ceux qui étaient capables de développer les idées qu'il contenait en germe, c'est-à-dire à la caste savante; car je suis très-disposé à considérer l'invention première de la valeur de position comme un résultat des spéculations scientifiques des brahmanes.

Nous comprenons aussi cette espèce d'étonnement qu'éprouve Albîroûnî à voir des grammairiens créer ces noms, et presque aussi être seuls à en faire usage; car, dans le développement scientifique de la civilisation arabe, la grammaire, la lexicographie et les belles-lettres d'une part, et les sciences mathématiques, médicales et philosophiques d'autre part, forment deux courants profondément distincts. Mais nous ne partageons pas cet étonnement, parce que nous savons que dans l'Inde la grammaire, Vyâkarana, et l'interprétation, Niroukti, mère de la lexicographie, forment aussi bien une partie intégrante des Vêdângas que le calcul, c'est-à-dire le calcul astronomique, Djyôticha [1], qui emploie précisément ces grands nombres dans les grandes périodes dont font usage les systèmes astronomiques des Indiens. Les études qui se rattachent dans l'Inde aux textes sacrés des Vêdes, et qui remplissent une si grande partie de la vie des brahmanes, les initiaient donc aussi bien au calcul qu'à la grammaire, et rendaient par conséquent les grammairiens compétents en matière d'arithmétique.

J'appelle maintenant l'attention du lecteur sur la méthode d'exprimer les nombres au moyen de mots symboliques, dont Albîroûnî nous donne un exposé si remarquable et si détaillé.

Cette méthode implique la valeur de position et l'emploi du zéro, et pour que le lecteur puisse s'en faire une idée bien nette, je vais d'abord donner, en guise d'exemple, la traduction littérale d'un vers du Soûrya-Siddhânta [2], le plus ancien des textes actuellement publiés où cette méthode soit employée.

चन्द्रोच्चस्याग्निशून्याश्विवसुसर्पार्णवा युगे
वामं पातस्य वस्वग्नियमाश्विशिखिदस्रकाः

[1] Comparer *Soûrya-Siddhânta*, chap. 1, v. 3; et Lancelot Wilkinson, *Translation of the Siddhânta Siromani* (Calcutta, 1861, in-8°), chap. 1, v. 8, p. 107. Dans le Djyôticha même, par la publication duquel M. Weber a rendu un service précieux à la science, on nomme directement le calcul *ganita*, comme le premier des vêdângas (vers 4 de la recension du Yadjour-vêda, d'après M. Weber, *Actes de l'Académie des Sciences de Berlin*, année 1862 de la classe philos.-histor. p. 21).

[2] Chap. 1, vers 33, p. 26 de l'édition de Calcutta.

« De l'apogée de la lune feu-vide-Açvin-Vasou-serpent-
« océan dans un youga, dans une direction contraire du nœud
« Vasou-feu-couple-Açvin-feu-Açvin. »

Ce qui signifie, si nous remarquons que les nombres sont énoncés dans cette méthode en commençant par les unités, et en suivant les puissances ascendantes de dix, et si nous nous rappelons que vide = 0, Açvin et couple = 2, feu = 3, océan = 4, Vasou et serpent = 8 : « Les révolutions de l'apogée de la « lune dans l'espace d'un youga [1] sont au nombre de « 488203, et les révolutions rétrogrades du nœud « au nombre de 232238. »

On voit là la valeur de position la plus parfaite; et s'il existe des mots symboliques pour désigner des nombres de deux chiffres, cette circonstance, loin d'être une exception à l'emploi de la valeur de position, en est, au contraire, une nouvelle confirmation. Car si nous lisons, par exemple, dans le 29e vers du 1er chapitre du Soûrya-Siddhânta खचतुष्करदार्णवाः (littéralement : « quatre vides-dent-océan ») pour exprimer le nombre 4320000, le mot « dent, » qui désigne isolément trente-deux, n'acquiert que par la position où il se trouve la valeur de trois cent vingt mille qu'il a ici.

L'idée de la valeur de position et du zéro est donc dans l'Inde aussi ancienne, *au moins*, que cette méthode d'exprimer des nombres au moyen de mots symboliques [2].

[1] 4,320,000 années solaires.

D'après Whish, la notation alphabétique décrite p. 122 à 128

Mais il y a plus. Dans les vers 30, 31, 37, 38, 43 du Ier chapitre, 17, 20, 25, du IIe chapitre, 43 du IIIe chapitre, et 85, 87, 89 du XIIe chapitre du Soûrya-Siddhânta, le mot symbolique pour désigner le nombre *neuf* est *añka*. Le mot *añka* signifie, en premier lieu, une marque, un signe, et de là un chiffre, tandis qu'il n'existe aucun rapport entre ses autres significations et le nombre neuf. Si donc nous trouvons dans le Soûrya-Siddhânta le mot *añka* employé couramment pour représenter le neuf, ce fait me paraît prouver, de la manière la plus concluante, que l'usage d'employer neuf signes particuliers pour écrire les nombres, donc l'usage des neuf chiffres, était déjà parfaitement établi dans l'Inde à l'époque où fut rédigé le Soûrya-Siddhânta[1].

du cahier d'août 1835 du *Journal asiatique*, notation qui est également fondée sur la valeur de position et l'emploi du zéro, «a été «admise *depuis un temps immémorial* par les savants des contrées mé«ridionales de la péninsule.» Mais cette expression «depuis un temps immémorial» est trop vague pour avoir un sens utile dans des recherches historiques, et je m'abstiens de tirer une conséquence quelconque de l'assertion de Whish.

[1] On peut faire ici l'objection, si facile en pareil cas, de changements postérieurs du texte primitif. On conçoit, il est vrai, que des changements aient pu être introduits dans une partie des vers ci-dessus cités du Ier et du XIIe chapitre du Soûrya-Siddhânta, dont les nombres se rapportent aux moyens mouvements des planètes ou en dépendent; car on pouvait, par des observations longtemps continuées, arriver à connaître des valeurs de plus en plus exactes de ces mouvements. Mais une semblable supposition me paraît tout à fait gratuite pour les passages du IIe chapitre qui se rapportent à la table des sinus, table qui d'une part est tout à fait primitive, donnant les sinus seulement de 225 minutes en 225 minutes, et qui d'autre part, dans les limites d'exactitude qu'elle se pose (c'est-à-dire

Or, dans un passage du xiv^e chapitre de l'ouvrage d'Albiroûnî sur l'Inde, où cet auteur mentionne différents Siddhântas et en outre le *Pañcasidd'ântika* (بنج سِدّهاندك) de Varâha Mihira, il s'exprime d'une façon qui montre clairement qu'il considère Varâha Mihira comme postérieur à la rédaction du

aux minutes près), est définitive, et n'admet pas des corrections successives à la manière des moyens mouvements. M. Weber distingue le Soûrya-Siddhânta qui vient d'être publié d'un Soûrya-Siddhânta *ancien*, «avec lequel il ne faut pas le confondre.» (Voir *Actes de l'Académie des Sciences de Berlin*, année 1862 de la classe philos.-histor. p. 9, note 2; et comparer *Akadem. Vorles. ueb. ind. Literaturgesch.* p. 229.) Mais sa critique, ne paraissant être que négative, affirme un fait très-positif, c'est-à-dire l'existence de (au moins) deux Soûrya-Siddhântas entièrement distincts, à ce point qu'il ne faut pas les confondre l'un avec l'autre. Comment tenir compte de cette assertion tant qu'il n'est pas démontré, par la publication de cet ancien texte présumé, qu'il est complétement différent de celui que nous connaissons, qu'aucun vers, aucune partie de l'un ne se retrouve dans l'autre? Si des passages cités par certains scholiastes manquent dans le texte actuellement publié, cela prouve seulement que des modifications du texte ont eu lieu. Que certaines additions, que certains changements aient été faits au texte primitif, c'est ce qu'il faut admettre sans aucun doute; mais c'est aussi ce que se borne à affirmer l'auteur des notes de la traduction du Soûrya-Siddhânta publiée en Amérique (M. Whitney, je pense), dont les appréciations aussi calmes que claires sont de nature à inspirer une parfaite confiance. (Voir *Translation of the Sûrya-Siddhânta*, Newhaven, 1860, in-8°, p. 326 et 102, 103.) Je viens déjà de dire quelles sont mes raisons pour croire que la table des sinus n'est pas une addition postérieure. Mais, en outre, on trouve dans les notes de la traduction citée (p. 254, lignes 25 à 38; comparer p. 103, lignes 5 à 13, où il faut lire v. 89 au lieu de v. 88) des réflexions qui tendent précisément à prouver que le vers xii, 89 où le mot *añka* est aussi employé pour désigner neuf, fait partie du texte primitif, parce qu'il contient un élément théorique qui est en contradiction avec certaines interpolations évidentes intercalées dans un chapitre précédent.

Soûrya-Siddhânta[1]. Mais, d'après un autre passage de l'ouvrage d'Albîroûnî qu'a fait déjà connaître M. Reinaud[2], et dont il a signalé l'importance, le Pantchasiddhântika de Varâha Mihira fut composé vers l'an 504 de J.-C., ce qui s'accorde avec les recherches de Colebrooke et de William Jones sur l'âge de Varâha Mihira. Il résulte de là qu'à une époque antérieure à la fin du ve siècle de notre ère, l'emploi de neuf chiffres pour désigner les neuf unités, du zéro et de la valeur de position, fut déjà d'un usage tellement habituel dans l'Inde que l'on put prendre le mot chiffre pour représentant symbolique du nombre neuf[3].

[1] M. Reinaud confirme la même opinion encore par un autre rapprochement. (Voir *Mémoires de l'Académie des Inscriptions*, t. XVIII, p. 333.)

[2] *Fragments arabes et persans inédits relatifs à l'Inde*, recueillis par M. Reinaud. Paris, 1845, in-8°, p. 144.

[3] Il ne faudrait pas conclure de l'existence d'une notation alphabétique inventée par Âryabhatta, que cette invention est nécessairement antérieure à celle des chiffres. Âryabhatta, qui écrivait aussi en vers, avait besoin d'une notation qui se laissât mettre en çlôkas, et trouvait peut-être que la méthode des mots symboliques, très-probablement antérieure à Âryabhatta, manquait de brièveté et de précision. D'ailleurs la coexistence de différentes méthodes pour obtenir le même but est un des traits particuliers au génie puissamment inventif des Indiens, se plaisant à la fois dans les distinctions et les déterminations les plus fines, et dans le vague flottant d'une productivité abondante, et peu enclin à cette sobriété précise et un peu sèche qui est propre aux peuples sémitiques. C'est ainsi que l'on trouve, pour rester dans l'ordre de faits qui nous occupe ici, dans les noms sanscrits des puissances très-élevées de dix, cette variété que nous avons remarquée dans les listes ci-dessus proposées et dont se plaint Albîroûnî; c'est ainsi qu'en arithmétique pratique nous rencontrons,

Les faits dont j'ai successivement placé les preuves sous les yeux du lecteur : l'existence dans la littérature védique de noms particuliers pour désigner chacune des puissances de dix jusqu'à un million de millions, l'emploi constant[1] de ces noms jusqu'à l'é-

par exemple chez Bhâskara Atchârya, Brahmagoupta et leurs commentateurs (Colebrooke, *Algebra, etc. from the sanscrit*, p. 5 à 7 et 319, 320), un grand nombre de méthodes de multiplication, les unes fort belles, les autres moins parfaites, mais placées les unes à côté des autres dans une complète égalité. Quant enfin aux chiffres, je ne doute pas que pareillement il n'y en ait eu dans l'Inde de très-bonne heure des espèces différentes, comme il en existait à l'époque d'Albîroûnî, d'après le témoignage de cet auteur, et comme il en existe actuellement. — Je dois encore dire, à cet endroit, un mot d'un fait qui viendrait singulièrement à l'appui de l'opinion que je tâche d'établir ici, si les conclusions qu'on a voulu en tirer ne reposaient pas sur un malentendu. Dans une inscription en langue et en caractères sanscrits, découverte à Monguir et traduite, en 1781, par Charles Wilkins (voir *Asiatic Researches*, vol. I, Calcutta, 1788, in-4°, p. 123 à 130, et les deux planches placées en regard, p. 123), on trouve exprimée en chiffres la date du 21e jour du mois de Mârga de l'année 33. Rapportant cette année à l'ère de Vikramâditya, Wilkins crut pouvoir indiquer l'année 23 avant Jésus-Christ comme la date de l'inscription. Mais en comparant celle-ci à la liste chronologique d'alphabets sanscrits due à Prinsep et citée déjà ci-dessus (p. 73), on reconnaît sur-le-champ que les caractères de l'inscription sont du genre de ceux que Prinsep attribue au IXe siècle de notre ère. Il est donc à peu près certain que l'année 33 mentionnée dans l'inscription doit être rapportée à une ère considérablement postérieure à celle de Vikramâditya.

[1] Je ne veux pas dire par là que ces noms aient été d'un emploi *très-fréquent*. Leur nature même le rendrait impossible, parce que les nombres que ces noms expriment sont tellement grands qu'ils ne peuvent plus s'appliquer à des objets réels, mais seulement à des choses créées par l'imagination. La plus remarquable de ces applications est peut-être celle que ces noms trouvent dans les immenses périodes de temps dont la mythologie et l'astronomie de l'Inde font

poque d'Albîroûni[1], l'extension remarquable qu'ils ont reçue dans le Lalitavistara, au IIIe siècle avant notre ère, l'exposé, donné dans cet ouvrage, d'un calcul qui a pour objet d'effectuer la multiplication $7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times12\times2\times4\times1000\times4=316.240.512.000$, l'usage fait dans le Soûrya-Siddhânta de la valeur de position, du zéro, et du mot « chiffre » comme représentant du nombre neuf, enfin l'habitude et la facilité du maniement des nombres entiers, et particulièrement des grands nombres, que nous trouvons chez les Indiens; tout cela me semble rendre plus que probable que c'est à l'Inde qu'appartient l'invention des neuf chiffres et de leur emploi avec valeur de position au moyen du zéro, et que cet emploi existait dans l'Inde dès les premiers siècles de notre ère.

D'autres faits, discutés dans les parties précédentes de ce mémoire, nous ont disposé à croire

usage, et dont nous avons vu ci-dessus un exemple; d'autre part les brahmanes descendent, dans la division du temps, à des fractions tellement petites d'une seconde que le Soûrya-Siddhânta distingue déjà le temps réel et le temps imaginaire. Ces grandes périodes et ces divisions du temps sont encore une preuve de cette disposition prédominante pour les spéculations relatives aux nombres qui est particulière à l'esprit indien.

[1] On en trouve encore deux listes, également de dix-huit degrés, et très-semblables à celle d'Albîroûni, l'une dans les Instituts de l'empereur Akbar, mort en 1605 de J. C. (voir *Ayeen Akbery*, transl. by Francis Gladwin, London, 1800, in-4°, t. II, p. 391); l'autre dans la Lilâvati de Bhâskara (voir Colebrooke, *Algebra, etc.* p. 4, l. 23 et 24). Wilkins (*a Grammar of the Sanskrita Language*. London, 1808, in-4°, p. 522) donne une liste de ces noms, qui va jusqu'à l'unité suivie de vingt et un zéros.

que c'est aussi dans les premiers siècles de notre ère que les chiffres indiens et leur emploi commencèrent à être connus à Alexandrie. Il nous reste donc à examiner si les circonstances générales de cette époque rendent la supposition d'une pareille transmission possible ou vraisemblable.

Cette tâche est facile; je n'aurai qu'à rappeler des faits connus; et afin de ne pas paraître les arranger pour le besoin de ma cause, je me bornerai à reproduire textuellement les passages que j'ai à citer.

« L'invasion d'Alexandre dans le Pendjab, dit « M. Weber [1], fut suivie de l'établissement des « royaumes grecs de la Bactriane qui étendirent leur « domination, à l'époque de leur plus grande puis- « sance, du moins passagèrement, sur le Pendjab jus- « qu'à Gouzerate. En même temps, les premiers Sé- « leucides, de même que les Ptolémées, entretinrent « par des ambassades des relations directes avec la « cour de Pâtalipoutra. De là vient que, dans les ins- « criptions de Priyadarçin, nous trouvons mentionnés « les noms d'Antigonus, Magas, Antiochus, Ptolémée, « et peut-être d'Alexandre lui-même. Ils y figurent « comme vassaux du roi, ce qui n'est évidemment « qu'une vaine forfanterie. C'est ainsi que Mégasthènes « fut envoyé par Seleucus à Tchandragoupta (mort « en 291 avant J.-C.), Deïmaque par Antiochus, et « Denis, de même que probablement Basilis, par « Ptolémée II à Ἀμιτροχάτης, c'est-à-dire Amitraghâta,

[1] *Akademische Vorlesungen ueber indische Literaturgeschichte*, p. 224.

« fils de Tchandragoupta. Ces ambassades contri« buèrent tout particulièrement à rendre florissantes « les relations commerciales entre Alexandrie et la « côte occidentale de l'Inde, où Oudjdjayinî, Ὀζήνη, « parvint, par suite de ce commerce, à un haut de« gré de puissance et de richesse. »

M. Gildemeister, dans son ouvrage intitulé *Scriptorum Arabum de rebus Indicis loci*[1], s'exprime comme il suit : « Les Arabes qui avaient, d'après ce que nous « en savons, fait le commerce de l'Inde depuis la plus « haute antiquité en longeant la côte avec leurs na« vires, en furent chassés[2], depuis que Hippalus avait « le premier fait connaître le parti qu'on pouvait « tirer des moussons pour la navigation de la mer « Érythrée. Faisant usage de petits bâtiments cou« sus de peaux, les Arabes ne purent rivaliser avec « les Grecs, et il arriva ce que les Ptolémées avaient « tâché d'amener déjà antérieurement par des efforts « incessants, c'est-à-dire que les marchandises in« diennes furent transportées en Occident presque « exclusivement par l'Égypte, et que les marchands « furent des Grecs et plus tard des Byzantins. »

Un tableau complet et détaillé de ce commerce, qui reliait dans les premiers siècles de notre ère l'Inde à l'Égypte, nous est présenté dans les belles recherches qui forment le commencement du troisième volume du célèbre et classique ouvrage que

[1] Bonn, 1838, in-8°, p. 34.

[2] Le passage cité porte « eo pulsi sunt, » mais le contexte paraît exiger « inde pulsi sunt. »

M. Lassen a consacré à l'exposé systématique de l'archéologie indienne.

Écoutons maintenant M. Wilson [1], amené, par ses profondes études sur les doctrines pouraniques, à examiner les rapports qui existèrent entre le monde grec et la civilisation indienne :

« L'identité de Dieu avec la nature n'est pas une « idée neuve. Elle était très-commune dans les « spéculations de l'antiquité, mais elle prit une « nouvelle force dans les premiers temps du chris- « tianisme, et elle fut portée au même degré d'extra- « vagance par les chrétiens platoniciens que par les « Saïvas ou les Vaïshnavas de l'Inde. Il ne paraît pas « impossible qu'entre les uns et les autres aient eu « lieu quelques communications. Nous savons qu'une « communication active existait entre l'Inde et la « mer Rouge, dans les premiers temps de l'ère « chrétienne, et que des doctrines, aussi bien que « des articles de marchandise, furent transportées « de l'Inde à Alexandrie. Épiphane (*Adv. Manichæos*) « et Eusèbe (*Hist. Evang.*) accusent Scythien d'avoir « importé de l'Inde, au IIe siècle, des livres de « magie et des idées hérétiques conduisant au ma- « nichéisme; c'est à la même époque aussi qu'Am- « monius fonda, à Alexandrie, l'école des Néoplato- « niciens. La base de cette hérésie (*sic*) fut que la « vraie philosophie devait son origine aux peuples « de l'Orient : sa doctrine de l'identité de Dieu avec « l'univers est celle des Védas et des Pouranas; et

[1] *Vishnu Purana*, London, 1840, in-4°, p. VIII et IX.

« les pratiques dont il recommanda l'exercice, de « même que leur but, furent précisément celles qui « sont décrites dans plusieurs Pouranas sous le nom « de Yoga. Il enseigna à ses disciples « d'affaiblir, « par des mortifications et par la contemplation, les « chaînes que le corps impose à l'âme immortelle, « de façon à pouvoir jouir, dès cette vie, de la com- « munion avec l'Être suprême et s'élever, après la « mort, au Père universel. » (Mosheim, vol. I, p. 173.) « Que ce soient là des maximes indiennes, c'est ce « que prouveront les pages suivantes; et le maître « lui-même, qui les professait à Alexandrie, avouait « qu'elles étaient d'origine indienne. »

La concision avec laquelle M. Wilson a formulé ce jugement m'a permis de le reproduire ici; mais pour une démonstration rigoureuse du résultat ainsi énoncé, je dois de nouveau renvoyer à l'Archéologie indienne de M. Lassen[1], qui a discuté l'influence de l'Inde sur la philosophie néoplatonicienne avec cette exactitude sévère et cette haute érudition qui le distinguent.

Après avoir entendu l'opinion de la science moderne, consultons encore deux auteurs contemporains ou presque contemporains de l'époque dont il s'agit. Porphyre, dans la Vie de Plotin[2], raconte

[1] Vol. III, p. 415 à 441.

[2] *Plotini vita Porphyrio authore*, cap. III, dans *Plotini opera*, ed. Creuzer, Oxonii, 1835, in-4°, vol. I, p. LI, LII : . . . . . *καὶ ἀπ' ἐκείνης τῆς ἡμέρας συνεχῶς τῷ Ἀμμωνίῳ παραμένοντα τοσαύτην ἕξιν ἐν φιλοσοφίᾳ κτήσασθαι, ὡς καὶ τῆς παρὰ τοῖς Πέρσαις ἐπιτηδευομένης πεῖραν λαβεῖν σπεῦσαι, καὶ τῆς παρ' Ἰνδοῖς κατορθουμένης. Γορδιανοῦ δὲ*

que, lorsque ce philosophe eut fait la connaissance d'Ammonius, «il resta, à partir de ce jour, continuellement attaché à Ammonius, et acquit une «telle perfection comme philosophe, qu'il désira «ardemment de s'initier aussi à la philosophie cul-«tivée par les Perses, et à celle qui florissait chez «les Indiens. Lors donc que l'empereur Gordien se «proposa d'attaquer les Perses, Plotin se joignit à «l'armée et entra avec elle en campagne, étant âgé «déjà de trente-neuf ans.»

Enfin le passage suivant d'Eusèbe[1], ou plutôt de Nouménios reproduit par Eusèbe, montre clairement la disposition des Néopythagoriciens à approprier à leurs théories des éléments empruntés aux doctrines des brahmanes :

«Je citerai aussi les paroles suivantes du même «philosophe pythagoricien, je veux dire de Noumé-«nios, tirées du premier livre de son ouvrage sur le «bien : C'est à cela que celui qui parle sur ces ma-«tières, et a foi dans le témoignage de Platon, devra «revenir, en se rattachant aux préceptes de Pytha-

τοῦ βασιλέως ἐπὶ τοὺς Πέρσας παριέναι μέλλοντος, δοὺς ἑαυτὸν τῷ σΊρατοπέδῳ, συνεισῄει, ἔτος ἤδη τριακοστὸν ἄγων καὶ ἔνατον.

[1] Eusebii *Præparatio Evangelica*, Paris, 1628, in-folio. Lib. IX, cap. VII, p. 411. Καὶ αὐτοῦ δὲ τοῦ Πυθαγορικοῦ φιλοσόφου, τοῦ Νουμηνίου λέγω, ἀπὸ τοῦ πρώτου περὶ τἀγαθοῦ τάδε παραθήσομαι. «Εἰς «δὲ τοῦτο δεήσει εἰπόντα, καὶ σημηνάμενον ταῖς μαρτυρίαις τοῦ Πλά-«τωνος, ἀναχωρήσασθαι καὶ ξυνδήσασθαι τοῖς λόγοις τοῦ Πυθαγόρου· «ἐπικαλέσασθαι δὲ τὰ ἔθνη τὰ εὐδοκιμοῦντα, προσφερόμενον αὐτῶν τὰς «τελετὰς, καὶ τὰ δόγματα, τάς τε ἱδρύσεις συντελουμένας Πλάτωνι «ὁμολογουμένως, ὁπόσας Βραχμᾶνες, καὶ Ἰουδαῖοι, καὶ Μάγοι, καὶ «ΑἰγύπΊιοι διέθεντο.»

« gore. Il devra s'adresser aussi aux nations illustres « et adopter leurs cérémonies religieuses, leurs doc- « trines et leurs rites, lorsqu'ils sont célébrés d'une « manière conforme à la philosophie de Platon, tant « qu'il en a été établi par les Brahmanes, les Juifs, « les Mages et les Égyptiens. »

Les citations que l'on vient de lire me semblent plus que suffisantes pour démontrer la possibilité et même la probabilité d'une transmission des chiffres indiens à Alexandrie. Il n'est pas vraisemblable que des philosophes aussi désireux que les Néopythagoriciens de connaître et de s'approprier les doctrines des brahmanes [1], jusqu'à vouloir se rendre de leur personne, et au risque de leur vie, aussi près de l'Inde que possible, il n'est pas vraisemblable, dis-je, que ces philosophes aient pu ignorer l'existence des chiffres indiens, lorsqu'un commerce florissant

[1] Porphyrius nous a conservé aussi les données relatives à l'Inde que le gnostique Bardésanès tenait d'une ambassade indienne envoyée à la cour de l'empereur Antonin le Pieux. (Voir *Porphyrii de abstinentia ab esu animalium libb. IV.* Trajecti ad Rhenum, 1767, in-4°, p. 356 et suiv.) On sait que des ambassades indiennes furent envoyées pareillement aux empereurs Auguste, Claude, Trajan et Julien l'Apostat. (Voir Strabon, XV, p. 686 et 719; Dion-Cassius, LIV, 9, et LXVIII, 15; Pline, *Hist. nat.* VI, 22; Ammien Marcellin, XXII, 7.) On trouve encore dans l'ouvrage intitulé *Palladius de gentibus Indiæ et Bragmanibus, etc. Edidit Ed. Bissæus Clarenceux*, Londini, 1665, in-fol. un grand nombre de passages extraits d'auteurs grecs et latins appartenant presque tous aux premiers siècles de notre ère, passages qui prouvent également qu'à cette époque les doctrines des brahmanes n'étaient ni inconnues au monde classique, ni étrangères aux préoccupations philosophiques de l'antiquité. (Comparer Lassen, *Indische Alterthumskunde*, vol. III, p. 353 et suiv.)

établissait des relations continues entre Alexandrie et Odjeïn, un des centres de la civilisation indienne, et lorsque tout ce qui touchait de près ou de loin aux propriétés réelles ou imaginaires des nombres formait la préoccupation principale de ces philosophes et le but constant et suprême de leurs spéculations.

Je pense donc que, tant que le contraire ne sera pas prouvé par des faits positifs et bien établis, l'existence des chiffres dans l'Inde aux premiers siècles de notre ère, et leur transmission aux Néo-pythagoriciens d'Alexandrie, devront être considérées comme extrêmement probables en elles-mêmes, et comme s'accordant, en outre, parfaitement avec toutes les autres données connues jusqu'à présent relativement à la propagation des chiffres chez les peuples de l'Asie et de l'Europe.

INTRODUCTION DES CHIFFRES INDIENS CHEZ LES ARABES D'ORIENT.

Les recherches qui précèdent ont eu pour but de faire connaître des faits et d'établir des probabilités qui nous permettent d'observer sans interruption la marche que les chiffres ont suivie depuis leur invention dans l'Inde jusqu'à leur emploi actuel en Europe, de tracer pour la première fois un tableau d'ensemble du chemin qu'ils ont pris à travers les temps et les nations, et dont on n'avait examiné jusqu'à présent que des parties isolées.

Nous avons vu que l'idée de la valeur de position et du zéro doit être, dans l'Inde, aussi ancienne

30.

au moins que la notation numérique qui emploie des mots symboliques et dont il est fait usage dans le Soûrya-Siddhânta. Mais cette notation elle-même peut être antérieure de beaucoup à la rédaction du Soûrya-Siddhânta, elle peut même être antérieure à l'usage de l'écriture, de laquelle elle est complétement indépendante, et qui ne paraît guère avoir existé dans l'Inde avant les commencements du bouddhisme [1]. L'existence des chiffres, au contraire, suppose celle de l'écriture, et la comparaison des chiffres gobâr et des chiffres employés dans les manuscrits latins du moyen âge avec les alphabets recueillis par Prinsep paraît indiquer à peu près les premiers temps de notre ère comme l'époque de l'invention des chiffres ; je veux dire qu'à cette époque probablement on commençait à se servir, dans l'Inde, des initiales des numératifs sanscrits qui désignent les neuf unités, et de l'initiale du mot çoûnya, comme de signes particuliers auxquels on donnait la valeur de position avec l'idée de laquelle on était familiarisé depuis longtemps.

Les relations suivies qu'un commerce florissant établissait entre la ville d'Alexandrie et la côte occidentale de l'Inde favorisaient, entre les Grecs et les Indiens, un échange de leurs connaissances scientifiques. Il paraît donc tout naturel que les Grecs, observateurs originaux en astronomie et excellents géomètres, aient communiqué aux Indiens leurs

[1] Comparez Mueller, *History of ancient sanskrit literature*. London, 1860, in-8°, p. 497 à 524.

théories astronomiques[1], ainsi que le calcul sexagésimal dont ils faisaient usage en astronomie, tandis que les Indiens, spécialement doués pour la spéculation métaphysique et pour l'étude des propriétés des nombres, donnèrent une partie de leurs doctrines philosophiques et leurs chiffres aux Néopythagoriciens d'Alexandrie.

Ceux-ci ne manquèrent pas d'enrichir la masse de leurs découvertes pratiques ou abstraites sur la nature des nombres, d'un élément aussi précieux, et donnèrent aux chiffres des noms dont les étymologies gréco-sémitiques révèlent l'époque de syncrétisme à laquelle ces noms durent leur origine. En même temps, les Néopythagoriciens reconnurent, dans les chiffres indiens, le moyen de transformer l'abacus manuel des Grecs et des Romains en un abacus écrit; mais, n'osant pas s'affranchir entièrement de la forme de l'abacus, familière aux peuples auxquels s'adressaient leurs doctrines, ils ne purent assigner son usage propre au zéro, qui resta

[1] Tel est le résultat, entrevu déjà par Delambre dans son *Histoire de l'astronomie ancienne*, auquel sont arrivés Colebrooke dans la préface de son *Algebra, etc. from the sanscrit*, et Biot dans ses *Études d'astronomie indienne*. (Comparer *Translation of the Sûrya-Siddhânta*, by E. Burgess assisted by the committee of publ. of the amer. orient. Soc. Newhaven, 1860, in-8°, p. 329 à 331.) On a été enclin aussi à songer à une influence grecque pour l'algèbre indienne; mais je pense que ce point demande encore à être mieux approfondi avant qu'on puisse espérer d'arriver à un résultat un peu sûr. Avec les données historiques que nous possédons jusqu'à présent, rien ne nous empêcherait peut-être d'admettre aussi bien une influence indienne sur l'algèbre grecque.

remplacé par le tableau à colonnes. C'est sous cette forme que les Néopythagoriciens répandirent l'arithmétique pratique, fondée sur le principe de la valeur de position décimale, chez les nations latines, et c'est sous cette forme que nous la trouvons dans le passage de Boèce (que Boèce en soit réellement l'auteur ou non), chez Gerbert et ses prédécesseurs, et dans les traités latins du moyen âge, jusqu'au commencement du XII^e siècle.

Au VII^e siècle, les Arabes commencèrent la suite de conquêtes qui aboutirent à la formation de l'empire des khalifes. J'ai déjà montré qu'ils adoptèrent les lettres numérales grecques et coptes en Syrie et en Égypte, et très-probablement, en Espagne, les chiffres indiens et le système de l'abacus, que les Néopythagoriciens avaient introduit dans l'occident de l'empire romain. Les Arabes avaient, en outre, la ressource d'écrire les numératifs tout au long; usage qu'ils ont conservé concurremment avec celui des chiffres, quelquefois même dans l'exécution de calculs, encore longtemps après que les chiffres et leur emploi leur furent parfaitement connus.

Une autre notation que les Arabes paraissent avoir adoptée de bonne heure, probablement à l'imitation des Syriens ou des Juifs [1], est celle des lettres de leur

[1] Je fais observer du moins que la valeur numérale des lettres arabes s'accorde avec l'alphabet numéral syriaque et hébreu, mais non avec l'alphabet numéral grec. Dans une notice sur les *Anecdota Syriaca* de M. Land, M. Wright donne (p. 16 à 18 du tirage à part) des détails intéressants sur d'anciens chiffres syriaques qui se trouvent dans des manuscrits appartenant principalement à l'espace

propre alphabet, en donnant à celles-ci des valeurs numériques. C'est même le mode de notation que les Arabes paraissent avoir considéré comme leur appartenant essentiellement et de préférence, car ils l'appellent l'*arabe* العربي.

Une circonstance qui peut-être n'a pas été suffisamment remarquée, me paraît indiquer que cette notation ne fut introduite, chez les Arabes, que vers la fin du Ier siècle de l'hégire, au plus tôt. En effet, les lettres numérales servant à désigner les dizaines supérieures à 50, les centaines et mille, ne sont pas tout à fait les mêmes dans l'écriture africaine et dans l'écriture asiatique[1]; et il me semble

compris entre le VIe et le IXe siècle de l'ère chrétienne. Ces chiffres, dont la formation repose sur le principe de la juxtaposition, sont étrangers à la question qui fait l'objet du présent mémoire. Mais ce qui n'est pas sans importance pour le point que je discute en ce moment, c'est une observation de M. Wright (*loc. cit.* p. 16, lignes 22 et 23), d'après laquelle, dans un grand nombre des plus anciens manuscrits syriaques du *British Museum* (ce qui nous reporte, au moins, au VIe siècle de notre ère), on trouve employées, conjointement avec ces chiffres, les lettres de l'alphabet pour numéroter les cahiers des manuscrits. Je remarque aussi que le tableau de ces chiffres que M. Wright reproduit (*loc. cit.* p. 16) d'après le manuscrit n° 14620, donne précisément les signes pour les nombres qui correspondent aux lettres de l'alphabet numéral, et s'arrête, comme l'alphabet numéral, au nombre 400. On doit peut-être conclure de ce fait qu'à l'époque où les chiffres dont il s'agit étaient en usage l'alphabet numéral était, non-seulement employé, comme le prouve déjà M. Wright, mais aussi considéré en quelque sorte comme la notation normale et plus autorisée.

[1] Chez les Arabes d'Orient, le س vaut 60, le ص 90, le ش 300, le ض 800, le ظ 900 et le غ 1000; au contraire chez les Arabes d'Afrique, le ص vaut 60, le ض 90, le س 300, le ظ 800, le غ 900 et le ش 1000.

que l'on peut conclure de là que l'usage de l'alphabet numéral chez les Arabes est très-probablement postérieur d'un certain temps, peut-être même de beaucoup, à la conquête du nord de l'Afrique et de l'Espagne. D'autre part, l'introduction de cette notation doit être antérieure au milieu du IVe siècle de l'hégire, car dans un manuscrit de la Bibliothèque impériale de Paris[1], écrit à Chîrâz, entre 358 et 361 de l'hégire, j'ai trouvé deux tables de triangles rectangles numériques[2] dans lesquelles toutes les lettres numérales, jusqu'à غ = 1000 inclusivement, sont employées (selon la manière de l'écriture orientale).

J'ai montré aussi, par la traduction de la préface d'un traité de Mohammed Sibth Almâridînî, sur le calcul sexagésimal[3], que les Arabes se sont servis, pour les tables astronomiques, de la notation alpha-

[1] N° 952² du Supplément arabe. J'ai donné une description détaillée de ce manuscrit dans un mémoire intitulé *Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles*, t. XIV des Mémoires des savants étrangers de l'Académie des Sciences, p. 663 à 671.

[2] J'ai traduit et commenté le traité dont ces deux tables font partie, dans un mémoire intitulé *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, etc. III. Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, et d'un traité sur le même sujet par Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn* (Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, anno 1861, vol. XIV, p. 211 à 227, 241 à 269, 301 à 324, et 343 à 356). Les deux tables dont il s'agit se trouvent *loc. cit.* p. 355.

[3] Voir le mémoire ci-dessus cité *Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident*, pages 66 à 70, et particulièrement page 68, lignes 25 et 26.

bétique préférablement aux chiffres. Il paraît qu'ils trouvaient, pour cet emploi, la notation alphabétique plus expéditive. Outre que les paroles de l'auteur que je viens de citer le confirment, cet usage est constaté par les manuscrits arabes qui contiennent des tables astronomiques, et dans lesquels on ne rencontre que rarement des chiffres. Les Arabes se servaient quelquefois de ceux-ci, dans les quantités astronomiques, lorsqu'il s'agissait d'exprimer de grands nombres, par exemple des nombres de degrés supérieurs à celui de la circonférence[1]. Cependant il n'eût pas été nécessaire de faire cette exception à la règle; car le calcul sexagésimal, de même qu'il avait subdivisé le degré en minutes, secondes, tierces, etc. avait conçu des ordres ascendants, supérieurs au degré, de sorte que, si on voulait, on n'était jamais obligé de dépasser, dans la notation, le nombre 59. Une circonstance qui me paraît indiquer aussi une relation toute particulière entre le calcul sexagésimal et la notation alphabétique, c'est que c'est précisément à partir du nombre 60, inutile, de même que les nombres supérieurs à 60, dans le calcul sexagésimal rigoureusement entendu, que commence la divergence entre les notations alphabétiques africaine et asiatique.

C'est ici le lieu de faire observer qu'il faut distinguer le zéro de la notation alphabétique, c'est-à-dire le signe destiné à indiquer l'absence d'un ordre dans

[1] Comparer *Journ. asiat.* cahier d'avril-mai 1860, p. 287, 288 et 319, 320.

les tables astronomiques et dans d'autres tables semblables, du chiffre zéro. Le zéro alphabétique des tables arabes, de même que le zéro des Juifs [1], me paraissent être une imitation du zéro des tables astronomiques grecques, lequel était un omicron surmonté d'un trait, probablement comme abréviation du mot *οὐδέν* [2].

Je fonde cette opinion sur une comparaison attentive du zéro de la notation alphabétique sexagésimale des Arabes, tel qu'il se trouve dans des manuscrits arabes appartenant à différentes époques, avec le signe qui indique l'absence d'un ordre dans les manuscrits de la Grande Syntaxe de Ptolémée

[1] Voir le mémoire de M. Vincent *Sur les notations scientifiques à l'école d'Alexandrie*, Revue archéologique du 15 janvier 1846, p. 607.

[2] D'après une autre opinion, on aurait choisi l'omicron pour désigner les places vides, parce que c'était la première lettre de l'alphabet après celles qui trouvaient un emploi dans la notation sexagésimale rigoureusement entendue. Mais cette opinion repose sur une double erreur. D'abord, si nous avons égard à ce qui a lieu dans la notation sexagésimale rigoureusement entendue, c'est le $\xi = 60$, et non le $o = 70$, qui est la première lettre qui n'y trouve plus d'emploi. Car la notation sexagésimale rigoureuse, aussitôt qu'elle arrive à 60 unités d'un ordre quelconque, les remplace par l'unité de l'ordre immédiatement supérieur. Ensuite, si nous avons égard à ce qui se pratiquait réellement, nous n'avons qu'à ouvrir l'Almageste pour y voir l'omicron parfaitement employé avec sa propre valeur de 70 dans les tables de quantités sexagésimales, par exemple pour marquer 70 degrés dans les latitudes des étoiles. L'extension des ordres sexagésimaux dans la direction ascendante, la création des sexagènes, n'est qu'un perfectionnement postérieur dont les commencements se trouvent chez Théon. (Voir *Encyclopædia Metropolitana*, vol. I. London, 1845, in-4°, p. 405, col. 1re. Theonis Alexandrini *in Claudii Ptolemæi Magnam Constructionem commentariorum libb. XI.* Basileæ, 1538, in-fol. p. 217.)

que possède la Bibliothèque impériale de Paris, et particulièrement dans un de ces manuscrits, écrit en lettres onciales, datant du IXe siècle de notre ère[1], et coté ancien fonds grec n° 2389.

Cet admirable et précieux document nous place au milieu des temps mêmes où les Arabes apprirent à connaître l'Almageste dans des manuscrits originaux. Car, si les premières versions de cet ouvrage, faites sous les auspices des Barmequides, n'eurent pour base peut-être que des versions syriaques, la traduction arabe définitive, corrigée par Thâbit Ben Korrah (mort en 288 de l'hégire, 901 de J. C.), fut faite et revue sans doute sur des manuscrits grecs[2]. C'est en effet le IXe siècle et déjà la dernière partie du VIIIe siècle qui forment principalement l'époque où, sous l'impulsion des plus puissants et des plus éclairés des khalifes abbassides, notamment d'Almâmoûn, les manuscrits grecs furent, en grand nombre et à grands frais, d'abord apportés à Bagdâd, puis traduits et commentés avec un zèle extraordinaire.

Dans le manuscrit 2389 a. f. grec, le zéro sexa-

[1] Voici le passage du Catalogue relatif à ce manuscrit : « MMCCCLXXXIX. Codex membranaceus, quo continentur *Claudii* « *Ptolemæi* magnæ constructionis libri tredecim. Is codex litteris un- « cialibus nono sæculo exaratus videtur. » (*Catalogus codicum manuscriptorum Bibliothecæ regiæ*. Tomus secundus. Parisiis, 1740, in-fol. p. 493, 2e col.) D'après Halma, t. I, p. XLVI de son édition de l'Almageste, ce manuscrit appartiendrait même au VIIe ou VIIIe, sinon au VIe siècle.

[2] Voir Wenrich, *De auctorum Græcorum versionibus et commentariis Syriacis, Arabicis, Armeniacis, Persicisque*. Lipsiæ, 1842, in-8°, p. 24 à 30, et 227, 228.

gésimal a constamment[1] la forme d'un omicron surmonté d'un trait fin, terminé à droite et à gauche par deux points plus forts et tournés vers le bas. Ce trait est tantôt plus court $\overline{o}$, tantôt plus long $\overline{o}$; quelquefois le point à gauche est tourné en haut $\overline{o}$, ce qui s'explique par la direction du trait de la plume; on remarque aussi des cas où le trait superposé s'est tellement rapproché de l'omicron, qu'il a fini par le toucher $\overline{o}$, $\overline{o}$.

Ces formes[2] sont les prototypes les plus parfaits de celles que nous rencontrons dans les manuscrits arabes.

[1] Il va sans dire que, dans un manuscrit où un même signe se trouve répété des milliers de fois, de quelque façon que l'on précise la manière dont ce signe est formé, on pourra signaler quelques exceptions. Ainsi dans le catalogue d'étoiles, lorsque les degrés et les fractions de degrés manquent à la fois, les deux omicrons qui marquent cette absence sont surmontés quelquefois d'un seul trait placé au milieu au-dessus; j'ai remarqué aussi l'omicron surmonté d'un signe qui ressemble au signe du bélier de nos calendriers, ou d'un simple trait non terminé par des points plus forts, ou sans aucun trait, ce qui est un véritable oubli du copiste, eu égard à la signification de l'omicron comme 70. Mais ces exceptions sont très-rares.

[2] Les autres manuscrits de l'Almageste que possède la Bibliothèque impériale, cotés ancien fonds grec 2390 à 2395, appartiennent à des époques plus modernes, depuis le XIII[e] jusqu'au XVI[e] siècle, et ne peuvent, par conséquent, fournir des arguments décisifs pour la question que je discute en ce moment. Voici cependant les résultats de l'examen auquel j'ai soumis ces manuscrits. Dans le n° 2390 (du commencement du XIII[e] siècle), le zéro sexagésimal est un omicron surmonté d'un trait ondulé ou d'un trait droit; dans le n° 2391 (du XIV[e] siècle), c'est un omicron surmonté d'un trait très-légèrement ondulé. Dans le n° 2392 (du XIV[e] siècle), c'est au commencement un omicron surmonté d'un trait légèrement ondulé ou droit; mais dans la majeure partie du manuscrit, environ à partir du

Dans le manuscrit ci-dessus mentionné, écrit à Chîrâz environ en 970 de notre ère, le zéro alphabétique est formé comme il suit $\bar{o}$, ce qui n'est autre chose que l'omicron surmonté de la ligne droite, formé d'une manière cursive de façon à pouvoir être écrit d'un seul trait. Ce signe figure, dans ce manuscrit, un grand nombre de fois dans des tableaux relatifs à la composition des rapports, pour indiquer que certaines combinaisons n'ont pas lieu. Ces tableaux font partie d'un traité de Thâbit Ben Korrah, dans lequel cet auteur désigne le zéro alphabétique dont il s'agit par le mot صِفْرٌ (*vide*)[1], qui sert aussi, comme on sait, à désigner le chiffre zéro.

Dans une copie en caractère africain de la traduction de l'Almageste faite par Honaïn Ben Ishâk et revue par Thâbit Ben Korrah, copie contenue dans le n° 1107 de l'ancien fonds arabe de la Bibliothèque impériale et datée du mercredi 28 chawwâl de l'année 618 de l'hégire (15 décembre 1221 de

III^e livre, c'est presque constamment ȣ, l'abréviation bien connue de la combinaison *ου*, circonstance qui paraît corroborer l'opinion que le signe sexagésimal dont il s'agit est lui-même une abréviation du mot *οὐδέν*. Dans le n° 2393 (copié en 1518), le signe qui indique les ordres absents est un omicron surmonté d'un trait droit ou ondulé; dans le n° 2394 (de la fin du XVI^e siècle), c'est un omicron surmonté d'un trait droit, qui souvent s'en rapproche jusqu'à le toucher, ce qui produit non rarement la figure $\bar{o}$; enfin dans le n° 2395 (du XVI^e siècle), c'est un omicron surmonté d'un trait droit, rarement d'un trait ondulé; du reste, dans ce manuscrit, presque toutes les tables sont laissées en blanc.

[1] Voir, par exemple, ms. 952^2 suppl. ar. de la Bibliothèque impériale, fol. 63 v°, 64 r°, 65 r°, 67 r°. Comparer aussi fol. 168 v°.

J. C.), le zéro sexagésimal est formé comme il suit , forme qui dévie quelquefois en . La première de ces figures[1] est tout à fait celle de l'omicron dont le trait superposé s'est rapproché jusqu'à le toucher; la seconde figure forme la transition à celle qui a été reproduite dans le *Journal asiatique*, cahier d'avril-mai 1860, p. 287, lignes 7, 12, 13, 18, et p. 288, ligne 5, d'après un manuscrit arabe, copié à Soultâniyeh en 1322 de notre ère, et appartenant à M. Scheffer.

Une donnée particulièrement intéressante se trouve dans le manuscrit 967[2] du supplément arabe de la Bibliothèque impériale, qui est écrit en caractère oriental. Ce manuscrit renferme une copie, faite en 1546 de notre ère[2], du traité de Mohammed Sibth Almâridînî[3] sur le calcul sexagésimal, et la préface de ce traité contient[4] un passage conçu

[1] La première de ces deux figures est aussi la forme du zéro sexagésimal employée dans une copie de l'Uranographie d'Abdourrahmân Alsoûfi (contemporain du célèbre Adhad Aldaoulah), copie écrite en caractère africain, paraissant fort ancienne et contenue dans le manuscrit 1111 ancien fonds arabe.

[2] Au verso du feuillet dont le recto est numéroté ٢٧٢, près de la fin du traité dont il est ici question, on trouve comme date de copie la fin du ramadhân de l'année 953 de l'hégire (24 novembre 1546 de notre ère).

[3] Bedr Eddin Mohammed Sibth Almâridînî florissait au commencement du x^e siècle de l'hégire; il termina un de ses nombreux ouvrages en 880, et mourut probablement en 934 de l'hégire.

[4] Ligne avant-dernière de la page du manuscrit qui forme le verso du feuillet numéroté ٢٥٥, jusqu'à la ligne 1 de la page numérotée ٢٥٩.

comme il suit[1] : « Si dans quelques-uns de ces ordres « il ne se trouve pas de nombre, posez à sa place « un zéro qui maintiendra les nombres dans leurs « ordres, de manière à empêcher que l'espèce d'un « nombre ne soit changée. La forme du zéro est « comme il suit ɯ, ou ainsi Ϭ, ou ainsi ɣ̇. » Une glose marginale ajoute encore « ou ainsi ϖ, ou ainsi « m. » La quatrième de ces cinq formes est celle que je viens déjà de signaler dans les manuscrits 1107 et 1111 de l'ancien fonds arabe. La cinquième est celle de l'ancien manuscrit grec n° 2389, le trait superposé à l'omicron s'étant tout à fait rapproché de celui-ci, et les deux points plus forts qui terminent ce trait ayant pris plus d'extension. De cette forme est résultée la première des cinq formes, l'omicron suspendu au trait horizontal s'étant réduit à un simple trait. La deuxième des cinq formes est celle que nous avons déjà remarquée dans le manuscrit de M. Scheffer, écrit à Soultâniyeh, et dans les manuscrits ancien fonds arabe 1107, et ancien fonds grec 2394. Enfin, la troisième des cinq formes est une modification de la première, et le manuscrit même nous laisse voir comment ce changement s'est fait ; car le copiste emploie dans le courant du traité très-souvent les deux formes m et ɣ̇, ainsi qu'une troi-

[1] فان خلا بعض هذه المراتب من عدد فضع مكانه صفرا يحفظ الاعداد فى مراتبها احترازا من تغيير جنس العدد وصورة الصفر هكذا m او هكذا Ϭ او هكذا ɣ̇

sième qui leur sert de transition, à savoir ɷ. La forme ɤ ne s'y trouve que rarement employée.

Ce qui confirme l'opinion que je viens d'émettre, à savoir que toutes ces formes arabes du zéro sexagésimal dérivent de celle que les Arabes avaient trouvée primitivement dans les manuscrits astronomiques grecs, c'est que les formes arabes s'écartent de la forme originale grecque et se diversifient, au fur et à mesure qu'elles appartiennent à des époques plus récentes.

La plus importante des notations numériques employées par les Arabes fut celle des chiffres indiens. Il est possible que les Arabes aient appris à connaître ces chiffres dès le commencement du VIII[e] siècle de notre ère, époque à laquelle une armée arabe, envoyée par le célèbre Hadjâdj, et commandée par Mohammed Ben Alkâcim, soumit toute la vallée de l'Indus[1]. Mais il est plus probable que cette communication des chiffres indiens aux Arabes n'eut lieu qu'en 773 de notre ère, lorsqu'une ambassade indienne apporta à la cour du khalife Almançoûr un traité d'astronomie indienne. Cet événement est raconté par l'auteur du Târîkh al-Hoqamâ, dans les termes suivants[2] :

وقد ذكر الحسين بن محمد بن حميد المعروف بابن الادمى

فى زيجه الكبير المعروف بنظم العقد انّه قدم على الخليفة

[1] Voir Reinaud, *Fragments inédits relatifs à l'Inde*, p. 191 et suiv.

[2] Manuscrit 672 du supplément arabe de la Bibliothèque impériale, p. 222, l. 11, à p. 223, l. 6.

المنصور فى سنة ست وخمسين ومائة رجل من الهند قيّم بالحساب المعروف بالسندهند فى حركات النجوم مع تعاديل معمولة على كردجات محسوبة لنصف نصف درجة مع ضروب من اعمال الفلك من الكسوفيّن ومطالع البروج وغير ذلك فى كتاب يحتوى على عدة ابواب وذكر انه اختصره من [1] كردجات منسوبة الى ملك من ملوك الهند يسمى فيغر وكانت محسوبة لدقيقة فامر المنصور بترجمة ذلك الكتاب الى اللغة العربية وان [2] يؤلف منه كتاب تتخذه العرب اصلاً فى حركات الكواكب فتولى ذلك محمد بن ابراهيم الفزارى وعمل منه كتابًا يسميه المنجمون [السند] هند الكبير وتفسير السندهند باللغة الهندية الدهر الداهر وكان اهل ذلك الزمان اكثر من يعملون به الى ايام الخليفة المامون فاختصره له ابو جعفر محمد بن موسى الخوارزمى وعمل منه زيجه المشهور ببلاد الاسلام وعول فيه على اوساط السندهند وخالفه فى التعاديل والميل فجعل تعاديله على مذاهب الفرس وميل الشمس فيه على مذهب بطلميوس واخترع فيه من انواع التقريب ابوابًا حسنة لا تفى بما احتوى

[1] Le texte manuscrit porte فى, mais Casiri (t. I, p. 429, lig. 9 en remontant) a من, leçon qui me paraît préférable.

[2] Le texte manuscrit porte وكان. J'emprunte la leçon وان, qui me paraît meilleure, à Casiri, *loc. laud.*

عليه من الخطا البين الدال على ضعفه فى الهندسة فاستحسنه اهل ذلك الزمان من اصحاب السندهند وطاروا به فى الافاق وما زال نافقًا عند اهل العناية بالتعديل الى زماننا هذا.

« Alhoçaïn Ben Mohammed Ben Hamid, connu « sous le nom d'Ibn Aladamî, rapporte dans sa « Grande Table, connue sous le nom du *Collier de* « *perles*, qu'il se présenta devant le khalife Alman« çoûr, dans l'année cent cinquante-six, un person« nage venu de l'Inde, très-versé dans le calcul « connu sous le nom du *Sindhind* (Siddhânta) et « relatif aux mouvements des astres, possédant des « méthodes pour calculer les équations, fondées sur « des cardadja[1] (sinus) calculés de demi-degré en « demi-degré, et en outre diverses espèces de pro« cédés astronomiques pour déterminer les éclipses « du soleil et de la lune, les coascendants des signes « de l'écliptique, et d'autres choses semblables. (Tout « cela était contenu) dans un ouvrage composé d'un « certain nombre de chapitres, ouvrage qu'il disait « avoir extrait des Cardadja portant le nom d'un des

[1] Le mot *cardadja* (*cardagia*, *cardaga*), altération du sanscrit *kramajyâ*, s'est conservé dans les traités latins du moyen âge, écrits sous l'influence de la tradition indienne, transmise par les Arabes (par exemple a. f. lat. de la Bibliothèque impériale, n° 7374 A, fol. 102 et suiv.). Du moyen âge il a passé aux modernes où on le trouve encore chez des auteurs assez récents. On l'a employé pour désigner certains arcs fondamentaux dans la construction des tables de sinus.

« rois indiens appelé Figar, et qui étaient calculés « pour une minute[1]. Almançoûr ordonna que cet

[1] Jusqu'à présent aucun des auteurs qui ont cité ce passage n'a songé à restituer la forme sanscrite du nom que le texte arabe rend par فيغر. Je considère comme certain que ce nom est *Vyâg'ra*, et qu'il s'agit du roi *Vyâg'ramouk'a*, sous le règne duquel Brahmagoupta, âgé alors de trente ans, composa (et auquel peut-être il dédia) son *Brahma-sp'ouṭa-sidd'ânta* en 628 de notre ère. Ce fait est établi par Bhâo Dâji dans un article récemment publié que cite M. Weber (*Actes de l'Académie de Berlin*, 1862, p. 9), mais que je n'ai pas pu me procurer. L'astronome indien qui arriva à Bagdâd en 773 de J. C. avait donc très-probablement extrait son ouvrage de celui de Brahmagoupta. Cette circonstance donne une nouvelle confirmation à l'opinion de Colebrooke (*Algebra*, etc. p. LXV, lig. 4 à 25), d'après laquelle le système astronomique désigné par les Arabes sous le nom de *Sindhind* est celui qui est exposé dans l'ouvrage de Brahmagoupta, dont Colebrooke nous a fait connaître, par sa belle traduction, des parties importantes. Si cet ouvrage est appelé ici « les *Cardadja* du roi Vyâghra, » c'est probablement une désignation non indienne, mais arabe, qui s'explique par l'importance fondamentale des sinus pour le système. La table des sinus est en effet la base de tout calcul trigonométrique et partant de tout calcul astronomique. L'identité du mot *Sindhind* avec *sidd'ânta*, que Colebrooke a été également le premier à soupçonner, n'est plus, je pense, révoquée en doute par personne; au surplus, elle est explicitement constatée par Albiroûnî dans le XIVe chapitre de son ouvrage sur l'Inde. Au même endroit, Albiroûnî donne la table suivante des titres des chapitres du Brahma-Siddhânta de Brahmagoupta: « 1° De ce qui concerne la sphère, et de la configuration du ciel et « de la terre. 2° Des révolutions des planètes, de l'emploi des pé« riodes de temps, de la détermination des longitudes moyennes des « planètes, et de la construction des sinus des arcs. 3° Des longitudes « vraies des planètes. 4° Des trois quantités demandées, à savoir, de « l'ombre, de la partie passée du jour, et du point ascendant, et de « la manière de les déterminer les unes au moyen des autres. 5° De « l'émersion et de l'immersion des planètes par rapport aux rayons « du soleil. 6° De l'apparition de la nouvelle lune et de l'état de ses « deux cornes. 7° De l'éclipse de la lune. 8° De l'éclipse du soleil. « 9° De l'ombre de la lune. 10° Du passage des planètes auprès des

« ouvrage fût traduit en arabe, et que l'on composât, « d'après (cette traduction), un ouvrage que les « étoiles, et de leurs conjonctions. 11° Des latitudes des planètes. « 12° De la critique du contenu des traités et des tables astronomiques, et de la manière de distinguer ce qui est juste de ce qui « est défectueux. 13° Du calcul et de son application à la géométrie « pratique et à d'autres usages. 14° De la rectification[1] des longitudes « moyennes des planètes. 15° De la rectification des longitudes vraies « des planètes. 16° De la rectification des trois quantités demandées. « 17° Des déflexions [انحرافات] évidemment traduction du terme « sanscrit *valana*] des éclipses. 18° De la rectification de l'apparition « de la nouvelle lune et de ses deux cornes. 19° Du *kouṭṭaka* (كُتّك), « ce qui signifie l'action de broyer, expression par laquelle on en- « tend assimiler l'effort dans la recherche à une action de broyer de « laquelle résulte l'intelligence; cela veut dire : de l'algèbre, y com- « pris les équations renfermant plus de deux termes, et d'autres « problèmes concernant les nombres. 20° De ce qui concerne l'ombre. « 21° Des calculs des mesures des vers et des mètres. 22° Des cercles « et des instruments. 23° Des saisons et des quatre modes de me- « surer le temps, à savoir le solaire, le sidéral, le lunaire, et celui « qui se rapporte aux mansions lunaires. 24° Des notations employées « pour les nombres et les chiffres dans le contexte d'ouvrages écrits « en vers. Ce sont vingt-quatre chapitres. L'auteur dit : Et le « vingt-cinquième est le *D'ydnagrahâd'yâya* [je pense du moins « que c'est le mot sanscrit qu'Albiroûni a voulu rendre en écrivant « دِهانكُرهادّها], et ce qui en résulte est la résolution des pro- « blèmes par le raisonnement, sans emploi du calcul. Je n'en ai pas « fait mention ici, parce que les raisons sont inhérentes au calcul, « et je crois que ce que l'auteur veut indiquer sont les démonstrations « des opérations; car sinon, quand donc arriverait-on à un résultat « quelconque dans cet art, sans l'aide du calcul? » (Comparez Colebrooke, *Algebra, etc.* p. XXVIII, note B.)

Il faut examiner encore ce qu'Ibn Aladami a voulu dire par l'expression : « calculés pour une minute. » S'il avait voulu exprimer que

[1] Ou « vérification ». Le mot arabe est *taḥḳîḳ*. Il faudrait pouvoir examiner le texte du Brahma-Siddhânta pour décider d'une manière sûre, laquelle des deux significations doit être adoptée ici. La même remarque s'applique aux titres des chapitres 15, 16 et 18.

« Arabes pussent prendre pour base (de leurs cal- « culs) des mouvements des planètes. Ce travail fut

les sinus étaient calculés *de minute en minute*, il aurait probablement dit محسوبة لدقيقة دقيقة. En même temps, il est peu vraisemblable qu'un ouvrage indien ait contenu une table de sinus calculés de minute en minute; car dans la table du Soûrya-Siddhânta, les sinus sont calculés de 225 minutes en 225 minutes; et dans l'appendice du Siddhânta-Cirômani, achevé en 1150 de J. C., des deux méthodes enseignées pour la construction d'une table de sinus, l'une donne les sinus de degré en degré, et l'autre encore de 225 minutes en 225 minutes. Je crois donc que l'expression du texte veut dire que, dans l'ouvrage dont il s'agit, les sinus étaient calculés à une minute près, ou en négligeant les fractions de minute. Tel est en effet le caractère des méthodes indiennes, aussi bien dans le Soûrya-Siddhânta que dans le Siddhânta-Cirômani. On fait le rayon égal à 3438, ce qui est le nombre des minutes contenues dans un arc égal au rayon. La valeur plus exacte serait 3437,7468. L'unité du calcul est alors la minute, et c'est ce que, je pense, l'auteur a voulu dire. S'il mentionne plus haut des sinus calculés de demi-degré en demi-degré, cela paraît indiquer que l'Indien, arrivé à Bagdâd, avait complété sa table par des interpolations, probablement afin qu'elle ne parût pas inférieure à la table des cordes de Ptolémée, qui est également calculée de demi-degré en demi-degré. Mais en réalité cela était inutile, parce que, si l'on se borne à une exactitude aux minutes près, les interpolations se font très-aisément, au moyen d'une simple proportion. Delambre (*Hist. de l'ast. anc.* t. I, p. 460) remarque que Playfair (*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, t. IV, partie II, p. 83 et suiv.) « ne dit pas pour quelle « raison les Indiens se seraient bornés aux arcs multiples de $3°\frac{3}{4}$, » sans cependant répondre lui-même à la question qu'il pose. Dans une note publiée en 1854 dans le t. XIII des *Nouvelles annales de mathématiques*, j'ai cru pouvoir indiquer cette raison de la manière suivante (page 390) : « Les Indiens connaissent les formules « $\sin 30° = \frac{1}{2}\text{ rayon} = 1719'$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $r^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$; « conséquemment ils peuvent déterminer, par des bissections suc- « cessives, les sinus de 15°, de 7° 30′, de 3° 45′, toujours exprimés « en minutes. Or, dans cette succession de sinus, celui de 3° 45′ est « *le premier qui contient le même nombre de minutes que l'arc auquel il*

« confié à Mohammed Ben Ibrâhîm Alfazâri, qui « rédigea, d'après le (traité indien), un ouvrage « que les astronomes appellent *le Grand Sindhind.* « Le mot *Sindhind* signifie, en langue indienne, la « durée éternelle. Ce furent surtout les savants de « ce temps-là qui opérèrent d'après (les théories ex- « posées dans) cet (ouvrage) jusqu'à l'époque du « khalife Almâmoûn. Pour celui-ci un abrégé de « cet (ouvrage) fut rédigé par Aboû Dja'far Moham- « med Ben Moûçâ Alkhârizmi, qui s'en servit aussi « pour composer ses tables, célèbres dans les pays « de l'islâm. Dans ces tables, il se fonda sur les « moyens mouvements du Sindhind, et s'en écarta « pour les équations et la déclinaison. Il établit ses « équations d'après les méthodes des Persans, et la « déclinaison du soleil à la manière de Ptolémée. « Il proposa aussi, dans cet ouvrage, de belles règles « inventées par lui pour diverses espèces d'approxi-

« *correspond;* donc, si l'on ne demande qu'une exactitude aux mi- « nutes près, on s'arrêtera naturellement au sinus de 3° 45', parce « que les sinus des arcs plus petits seront à plus forte raison égaux à « ces arcs, et s'obtiennent par conséquent sans calcul. » J'ajouterai encore que le terme technique arabe pour sinus, جيب, a été évidemment, dans l'origine, la transcription جِيْبَ du mot sanscrit *jivâ*, signifiant proprement la corde d'un arc avec lequel on tire, et employé ensuite, comme synonyme de *jyâ*, pour désigner en trigonométrie le sinus. Cette identité de جيب avec *jivâ*, reconnue déjà par M. Munk, est une preuve de plus que les Arabes ont dû aux Indiens la connaissance des sinus. Le latin du moyen âge a ensuite rendu جيب par *sinus*, comme si le mot était جَيْبٌ (racine جاب *secuit*), qui signifie en effet la poche formée sur la poitrine par l'ouverture d'un vêtement.

« mations, mais qui sont insuffisantes à cause de cer-
« taines erreurs évidentes que l'ouvrage renferme, et
« qui montrent la faiblesse de l'auteur en géométrie.
« Ceux des astronomes de ce temps-là qui suivaient
« les méthodes du Sindhind apprécièrent beaucoup
« cet ouvrage et le répandirent rapidement au loin;
« et il est encore aujourd'hui très-recherché par les
« personnes qui s'occupent du calcul des équations
« des planètes. »

C'est probablement à la même époque, et peut-être à la même occasion, que les Arabes reçurent un traité indien d'arithmétique, relativement auquel l'auteur du Târîkh al-Hoqamâ s'exprime comme il suit[1] :

ومما وصل الينا من علومهم حساب العدد الذى بسطه ابو جعفر محمد بن موسى الخوارزى وهو اوجز حساب واحضره واقربه تناولا واسهله ماخذا يشهد للهند بذكاء الخواطر وحسن التوليد وبراعة الاختيار والاختراع

« Parmi ce qui nous est parvenu, en fait de leurs « sciences[2], (il faut mentionner aussi) le (traité « de[3]) calcul numérique reproduit sous une forme « plus développée par Aboû Dja'far Mohammed Ben

[1] Manuscrit 672, supplément arabe de la Bibliothèque impériale, p. 220, l. 7 à 10.

[2] C'est-à-dire des sciences des Indiens.

[3] Casiri (t. I, p. 427, lig. 8 en remontant) a كتاب حساب العدد au lieu de حساب العدد simplement.

« Moûçâ Alkhârizmi; c'est la méthode de calcul la « plus compendieuse et la plus expéditive, la plus « facile à saisir et la plus aisée à apprendre; elle at- « teste chez les Indiens un esprit pénétrant, un beau « talent de création, et de la supériorité de discer- « nement [1] et de génie inventif. »

Nous venons de voir que Mohammed Ben Moûçâ rédigea pour le khalife Almâmoûn un abrégé des tables indiennes, apportées à Bagdâd en 773 de notre ère; c'est à la prière du même prince qu'il avait écrit son célèbre Traité d'algèbre. La rédaction de son Traité de calcul indien doit être postérieure à celle du Traité d'algèbre, parce que celui-ci est cité dans le premier. Mais nous ne pouvons pas être loin de la vérité, en supposant que le Traité de Mohammed Ben Moûçâ Alkhârizmî, qui répandit chez les Arabes la connaissance de l'arithmétique indienne, fut composé vers le milieu du IXe siècle [2].

[1] Casiri (t. I, p. 427, lig. 6 en remontant) a اختبار « expérience, habileté. »

[2] Néanmoins l'événement scientifique dont j'ai reproduit le récit d'après le *Târîkh al-Hoqamâ*, et qui arriva en 773, rend très-vraisemblable que dès cette époque il existait, pour les savants qui vivaient à la cour de Bagdâd, des moyens de s'initier à l'arithmétique indienne. Je tiens à faire ressortir cette probabilité, parce que je viens d'apprendre que M. Bethmann, bibliothécaire à Wolfenbuttel, a fait connaître, dans un mémoire lu à l'Académie de Berlin, mais dont il n'a pas laissé copie, certaines données d'après lesquelles Charlemagne aurait proposé aux personnes de sa cour des problèmes d'arithmétique fondés sur l'emploi des neuf chiffres et du zéro. On sait que Charlemagne reçut en 807, à Aix-la-Chapelle, une ambassade du khalife Haroûn Al-Rachid, qui apporta de nombreux et magnifiques présents, et entre autres une horloge mécanique en

J'ai mentionné déjà ci-dessus que, grâce au zèle de M. le prince Boncompagni, nous possédons maintenant un fragment considérable d'une traduction latine, faite au moyen âge, du traité d'Alkhârizmî, sous le titre de « *Algoritmi de numero Indorum.* » J'en extrais le passage suivant[1], relatif à la forme des chiffres :

laiton. C'était une clepsydre marquant les fins des heures par la chute de douze petits globes d'airain, qui faisaient résonner une timbale placée au-dessous, et par douze cavaliers qui sortaient de douze portes et fermaient douze autres portes. « Cette horloge, » ajoute une chronique, « contenait encore beaucoup d'autres choses « dont l'énumération serait trop longue en ce moment. » (Voir Pertz, *Monumenta Germaniæ historica.* Scriptorum tomus I. Hannoveræ, 1826, in-fol. p. 194, lignes 1 et 14 à 33. Comparer Bouquet, *Recueil des historiens des Gaules et de la France*, t. V. Paris, 1744, in-fol. p. 333, lig. 13 à 22.) Un tel instrument suppose la présence, parmi le personnel de l'ambassade, d'un homme possédant des connaissances savantes et techniques pour monter l'horloge après l'arrivée, et la mettre en état de fonctionner. Il est assez naturel de croire qu'une telle personne était au courant de l'arithmétique indienne, si, comme il est probable, celle-ci était, dès le commencement du IXe siècle, connue aux mathématiciens et astronomes de Bagdâd. Charlemagne retint l'ambassade pendant quelque temps à sa résidence (voir Pertz, *loc. cit.*), et, avec le désir ardent de s'instruire que ce monarque conserva jusqu'à la fin de sa vie, cette circonstance devait facilement amener pour lui une occasion de prendre quelque connaissance de l'arithmétique indienne et de l'emploi du zéro; d'autre part, un Arabe venant en Occident devait être porté à produire devant un prince, juste appréciateur de la supériorité intellectuelle, ce qu'il pouvait montrer de plus ingénieux et de plus neuf en fait de connaissances scientifiques. Si, dans les documents découverts par M. Bethmann, il ne s'agissait que d'un emploi de neuf chiffres *sans zéro*, ce fait serait simplement conforme aux vues développées dans les parties précédentes du présent mémoire, et en offrirait une nouvelle confirmation.

[1] *Trattati d'aritmetica*, p. 1, l. 25 et suiv.

« Fecerunt igitur (Indi) IX literas [1], quarum figu-« ræ sunt hæ..... [2] Est quoque diversitas inter ho-« mines in figuris earum : fit autem hæc diversitas « in figura quintæ literæ et sextæ, septimæ quoque « et octavæ. Sed in hoc nullum impedimentum est. « Sunt enim notæ signantes numerum, et hæ sunt « figuræ in quibus est illa diversitas..... [3] »

Ce passage est important parce qu'il s'accorde d'une façon remarquable avec une autre donnée que j'ai à faire connaître. Jetons les yeux un instant sur la planche placée ci-dessus, à la page 75. La quatrième ligne de cette planche présente un fac-simile des chiffres employés dans plusieurs tableaux de nombres[4] contenus dans le manuscrit arabe écrit à Chîrâz, environ en 970 de J. C., dont il a été question ci-dessus. Si nous comparons ces chiffres aux chiffres gobâr et aux chiffres des manuscrits latins du moyen âge, nous remarquons qu'une différence des formes a lieu pour les cinquième, sixième, septième et huitième chiffres, pour lesquels précisément une variété des formes est constatée aussi dans le traité d'Alkhârizmi. Or, il est résulté des recherches précédentes que les chiffres gobâr et du

[1] L'original arabe portait évidemment حروف.

[2] Ces figures manquent.

[3] Ces figures manquent pareillement.

[4] Ces nombres forment une suite de triangles rectangles numériques et de nombres congruents. Les tableaux ont été reproduits dans la traduction ci-dessus citée, faisant partie des *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise.* (Voir *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, anno XIV, p. 255 à 257.)

moyen âge nous présentent une forme très-ancienne des chiffres indiens. Rapprochant donc le fait que je viens de signaler de l'observation faite par Albîroûnî d'une multiplicité des formes des chiffres existant dans l'Inde au commencement du XIe siècle de notre ère, nous concluons que les formes ٥, ٦, ٧, ٨ étaient devenues dans l'Inde même, pendant l'espace de temps qui sépare le VIIIe siècle des premiers temps de notre ère, d'un emploi très-fréquent à côté des formes ч, б, ๅ, 8, et que les savants ou les traités indiens qui arrivèrent à Bagdâd dans le courant du VIIIe siècle, apportèrent déjà les formes ٥, ٦, ٧, ٨ aux Arabes de l'Orient, qui les adoptèrent de préférence. Les variantes ٢ et ٣ pour ح et ﺤ paraissent aussi avoir existé chez les Arabes orientaux dès le milieu du Xe siècle au plus tard; du moins nous trouvons des spécimens de la forme ٢ dans certains endroits du manuscrit écrit à Chirâz, différents des tableaux ci-dessus mentionnés. Les chiffres dêvanâgaris du Xe siècle qu'a donnés Prinsep dans le cahier d'avril 1838 du Journal de la Société asiatique du Bengale (pl. XX, placée en regard de la page 348) ressemblent pour les formes des nombres un, deux, trois, quatre, six, huit et zéro, assez à ceux du manuscrit de Chirâz, et confirment ainsi la remarque d'Albîroûnî, d'après laquelle de son temps les chiffres des Indiens étaient les mêmes que ceux des Arabes, sauf une plus grande variété des formes. Pour le cinq et le sept, les chiffres dêvanâgaris du Xe siècle d'après Prinsep ressemblent tout à fait aux chiffres gobâr. Le neuf enfin ne ressemble pas au neuf arabe, mais se rapproche sensiblement de la forme qu'il présente dans les chiffres sanscrits modernes, tels qu'on les trouve par exemple dans les ouvrages imprimés à Calcutta.

Un des derniers changements introduits dans les chiffres des Arabes de l'Orient paraît avoir été le remplacement du 9 par ٥ pour le cinq, et du ο par . pour le zéro. L'usage de désigner le zéro aussi par un point au lieu d'un petit cercle est cependant indien, ainsi qu'il résulte d'un passage de Colebrooke, que je reproduis en note [1]. Il paraît qu'Albîroûni avait

[1] *Algebra, etc. from the sanscrit*, p. 4, l. 17 à 21. «D'après les «Hindous, la numération est d'origine divine, l'invention de neuf «figures (*ancu*), avec l'artifice des places pour les faire suffire à tous «les nombres, étant attribuée au bienfaisant Créateur de l'univers, «dans la *Vásaná* de *Bhâscara* et sa glose, et dans le commentaire de «*Crishna* sur la *Vija-ganita*. Ici neuf figures sont spécifiées, la place, «lorsque aucun chiffre n'y appartient, étant indiquée par un blanc «(*súnya*), lequel, pour prévenir les erreurs, est marqué par un point «[le mot anglais est *dot*] ou un petit cercle.» Le Vidja-ganita est la seconde des quatre parties dont se compose le Siddhânta-Cirômani, ouvrage de Bhâskara achevé en 1150 de J. C. — On trouve aussi au fol. 162 r° et v° du manuscrit écrit à Chirâz, en des endroits différents des tableaux ci-dessus mentionnés, une forme du chiffre zéro qui ressemble à un simple point. Mais il paraît que dans ces endroits, où les chiffres sont très-petits, cette forme provient seulement de ce que le cercle que le copiste voulait tracer est devenu tellement petit qu'il s'est réduit à un point; car on trouve dans le voisinage immédiat de ce zéro formé en point le zéro sous la forme d'un petit cercle. — Dans le scolie de Néophytos, qui puisait, comme nous l'avons vu, à une source arabe, scolie publié dans le Programme déjà cité des cours de l'Université de Berlin pour le semestre d'été 1841 (p. IX), cet auteur byzantin du XIV° siècle appelle le signe qu'il s'agit de placer au-dessus des chiffres, d'abord *ὡς ō μικρόν*, et à la fin *στιγμή*, et dans le courant du scolie, il le désigne plusieurs

connaissance de cet usage, soit pour l'avoir observé chez les Indiens, soit parce que, à l'époque où il écrivit (en 1031 de J. C.), cet usage avait déjà commencé à s'introduire chez les Arabes. Je conclus cela de l'explication dont Albîroûnî, dans le passage ci-dessus traduit (p. 284), fait suivre les mots sanscrits *çoûnya* et *k'a*, en disant qu'ils signifient *le point* [illegible]

fois comme ἢ *στιγμὴν* ἢ ō *μικρόν*. Quant au tableau de la notation qui accompagne le scolie, les signes superposés ont été, dans le n° 2350 ancien fonds grec, d'abord de petits cercles, écrits à l'encre noire comme tout le reste, mais ils ont été chargés ensuite, par une seconde main probablement, d'encre rouge, de manière à en faire des points, ou biffés à l'encre rouge et remplacés par des points faits à l'encre rouge; dans le n° 1928 ancien fonds grec, ce sont de petits cercles pour les dizaines et les centaines, et de petits points pour les mille et pour la myriade. Quant au cinq, il a la forme d'un omicron majuscule, placé d'aplomb dans le n° 2350, et fortement incliné vers la droite dans le n° 1928. On peut conclure de là qu'au XIVe siècle l'usage des formes o pour le cinq et · pour le zéro était déjà parfaitement établi chez les Arabes de l'Orient. — Dans le même programme de M. Bœckh, on trouve (p. VIII) le passage suivant relatif au zéro sexagésimal : « Apud Ptolemæum ciphra ineditis quidem libris comparet, ubi integer ordo sexagesimalis deficit, qui signandus erat : sed in libris scriptis defectum hunc solo puncto notatum esse docuit nos C. B. Hasius. » J'ai soumis, comme on l'a vu dans ce qui précède, à un examen soigneux les manuscrits de la Grande Syntaxe de Ptolémée que possède la Bibliothèque impériale de Paris, mais sans y remarquer aucune trace de cet emploi d'un point pour marquer les places vides. L'observation de M. Hase reposerait-elle sur un malentendu? J'ai trouvé quelquefois dans le texte des manuscrits parisiens de l'Almageste, lorsque Ptolémée énonce des quantités composées de plusieurs ordres de sexagésimales, des points placés entre les lettres numérales qui expriment ces quantités, points destinés seulement à séparer les différents ordres les uns des autres. Serait-ce là peut-être ce qui a donné lieu à l'assertion que je viens de citer?

النقطة. Mais Alkhârizmî ne sait rien encore de l'emploi d'un point pour désigner le zéro; et cependant s'il avait eu connaissance d'une variante pour la figure de ce signe, il est probable qu'il en aurait fait mention d'une manière semblable comme il le fait pour les formes des chiffres cinq, six, sept et huit. Voici le passage de son traité où il explique l'usage du zéro[1].

« Cum autem ponerentur X in loco unius[2], et « fierent in secunda differentia, essetque figura eo« rum figura unius, necesse fuit eis figura deceno« rum, eo quod similis esset figurae unius, ut scirent « per eam, quod essent X. Proposuerunt igitur ei « unam differentiam, et posuerunt in ea circulum « parvulum in similitudine o literæ[3], ut per hoc sci« rent quod differentia unitatum esset vacua, et ni« hil numeri esset in ea præter circulum parvulum, « quem diximus occupare eam. »

Ainsi donc, chez Alkhârizmî, le signe indien pour

[1] *Trattati d'aritmetica*, p. 3, l. 19 et suiv.

[2] On ne comprend ce latin qu'en le retraduisant mentalement en arabe. Voici ce que l'auteur veut dire : « Mais comme on désignait « dix de la même manière que l'unité, le signe se plaçant au second « rang, et sa figure étant la même que celle de l'unité : les Indiens « avaient besoin, pour la figure du dix, puisqu'elle était identique à « celle de l'unité, de (quelque artifice qui leur fît) savoir quand « elle signifiait dix. Ils placèrent donc devant l'unité un rang, etc. » Le commencement du passage, dans l'original arabe, était très-probablement واذ كان يوضع العشرة وضع الواحد, le mot وضع, qui signifie *poser*, étant employé aussi spécialement pour exprimer *écrire, noter, figurer*.

[3] L'original arabe portait ici probablement la lettre *hé* ه.

désigner le zéro est un petit cercle. J'ai déjà dit que ce signe indien est essentiellement différent du zéro de la notation alphabétique sexagésimale dont il a été question ci-dessus, lequel est, comme on l'a vu, d'origine grecque. En effet, quiconque est habitué à la lecture des manuscrits arabes relatifs aux sciences mathématiques, distinguera toujours, à première vue, le zéro indien du zéro de la notation alphabétique. Mais comme ceci ne peut être qu'une raison individuelle, je citerai encore un passage du traité *De numero Indorum*, qui montre clairement la différence entre les deux signes. Il se trouve, dans ce traité, un exposé du calcul sexagésimal, calcul qui forme une partie intégrante de l'arithmétique indienne, ainsi qu'on le voit aussi par la traduction de Colebrooke[1] du douzième chapitre de l'ouvrage de Brahmagoupta, par l'arithmétique indienne de Planude[2], et par un traité arabe de calcul indien dont il sera question tout à l'heure. Dans cet exposé Alkhârizmî écrit les degrés, minutes, etc. les uns au-dessous des autres, et pour indiquer qu'un ordre est vide, il y place *deux zéros indiens*, ce qui est tout le contraire de la notation alphabétique qui n'emploie qu'*un seul signe* pour marquer l'absence d'un ordre. Voici le passage d'Alkhârizmî[3] :

« Cum volueris constituere numerum integrum

[1] *Algebra, etc. from the sanscrit*, p. 322 à 324.

[2] Manuscrit 2381 ancien fonds grec de la Bibliothèque impériale de Paris, fol. 8 r°, lig. 8 et suiv. Manuscrit 2382 du même fonds, fol. 15 v° et suiv.

[3] *Trattati d'aritmetica*, p. 24, lig. 21 et suiv.

« et fractiones, pone numerum integrum in altiori « differentia; deinde pone quicquid fuerit ex differentia prima, quæ sunt minuta, sub numero integro; et secunda sub minutis, et similiter tertia sub « secundis, et cætera quæ volueris ex differentiis. « Cujus rei exemplar est quod, cum vellemus constituere XII gradus et XXX minuta, XL quoque V « secunda, et L quarta : constituimus XII; post hæc « posuimus sub eis XXX in differentia minutorum; « et sub XXX, XLV in differentia secundorum. In « differentia vero tertiorum posuimus circulos [1], « quare carebat tertiis, et ut sciremus quare adhuc

[1] Le passage correspondant du *Liber Algorismi* de Jean de Séville, publié également par M. le prince Boncompagni, et qui n'est à beaucoup d'égards qu'une sorte de paraphrase du traité d'Alkhârizmi, est encore plus explicite (*Trattati d'aritmetica*, page 54, lig. 22 et suiv.) : « Cum autem aggregare vel diminuere, duplare sive « mediare gradus et fractiones volueris, singula quæque per differen- « tias [j'adopte la leçon « singula quæque per differentias » d'après le manuscrit 972 fonds Sorbonne de la Bibliot. imp. fol. 60 r°, lig. 24] « suas sic ordinabis. Pones enim gradus in superiori differentia, et « minuta sub gradibus, et secunda sub minutis, et tertia sub secun- « dis, et ita consequenter descendendo, ut sunt « in ordine. Si autem aliqua vacua interciderit, « ponentur in loco ejus circuli : propter cujus « rei evidentiam talem subjicimus figuram unius « lateris. Ponuntur enim primum in superiori « differentia 12 gradus, et in secunda 30 minuta, « et in tertia 45 secunda. In quarta vero positi « sunt duo circuli, quia erat vacua : nullum enim « tertium erat in ea; et ut [j'adopte la leçon « et ut » d'après les manuscrits ancien fonds latin 7359, fol. 92 r°, 2° col. lig. 32, et fonds Sorbonne 981, fol. 4 v°, 1re col. lig 4] « ostenderetur quod quarta « differentia, quæ continet tertia, esset vacua. Et in quinta sunt 50 « quarta. Quod subjecta figura declarat. »

Gradus	12
Minuta	30
Secunda	45
Tertia	00
Quarta	50

« restabant quarta. Deinde posuimus sub circulis « quinquaginta in differentia quartorum. Et hæc est « figura eorum [1]. »

UN TRAITÉ DE CALCUL INDIEN.

L'ouvrage de Mohammed Ben Moûçâ Alkhârizmî fut très-probablement le premier, ou du moins un des premiers, de ceux qui enseignèrent aux Arabes de l'Orient l'arithmétique indienne. Dès lors le « calcul indien » الحساب الهندى ne cessa d'être l'objet de traités spéciaux composés par des mathématiciens arabes.

Outre les traités de calcul indien dont il sera question tout à l'heure, j'ai remarqué la mention d'un Traité de calcul indien (كتاب الحساب الهندى) par Ahmed Ben Omar Alqarâbîcî (احمد بن عمر الكرابيسى), dans le Târîkh al-Hoqamâ [2]; la mention d'un Livre sur les principes (ou les démonstrations) du calcul indien (مقالة فى علل الحساب الهندى) par le célèbre Ibn Alhaïtham de Baçrah (ابو على محمد بن الحسن بن الهيثم), qui mourut au Caire en 430 de l'hégire, dans les Biographies des médecins d'Ibn Abî Oçaïbiah [3]; la mention d'un Traité de calcul indien (كتاب

[1] Cette figure manque.

[2] Manuscrit 672 du suppl. ar. de la Bibliot. imp. p. 68, lig. 11.

[3] Manuscrit 673 du suppl. ar. de la Bibliot. imp. fol. 211 r°, lig. 16. Dans une autre énumération d'une certaine partie des ouvrages d'Ibn Alhaïtham, contenue dans le même article de l'ouvrage d'Ibn Abî Oçaïbiah, se trouve mentionné un مقالة فى الحساب الهندى (même manuscrit, fol. 208 v°, lig. 12). Je pense que ces deux mentions se rapportent au même traité d'Ibn Alhaïtham. (Comparer ms. 672 du suppl. ar. de la Bibliot. imp. p. 145, lig. 19.)

الحساب الهندى) par Send Ben Alî (سند بن على), un des astronomes du khalife Almâmoûn, dans le Fihrist[1]; et encore dans le même ouvrage[2] la mention d'un Traité de la table relatif au calcul indien (كتاب التخت فى الحساب الهندى) par Sinân Ibn Alfath le Harrânien (سنان ابن الفتح من اهل حرّان).

Il sera utile d'analyser, autant que le permettent les limites de ce mémoire, un de ces traités qui forment, pour ainsi dire, le milieu ambiant dans lequel les chiffres indiens et leur emploi se présentent principalement chez les Arabes de l'Orient. Cette étude, en complétant nos vues d'ensemble sur la question qui nous occupe, ne sera pas étrangère à notre but, de même qu'il n'est pas superflu, lorsqu'on veut connaître à fond un personnage ou un événement historique, de jeter un coup d'œil sur l'entourage au milieu duquel ce personnage a vécu, ou sur les circonstances dans lesquelles cet événement s'est produit.

Le traité analysé ci-après a été composé dans la première moitié du XI[e] siècle de notre ère[3], et est

[1] Manuscrit 1400[2] du suppl. ar. de la Bibliot. imp. fol. 121 r°, lig. 8.

[2] Manuscrit 1400[2] du suppl. ar. de la Bibliot. imp. fol. 128 r°, lig. 7 et 8. Je fais observer que dans ce manuscrit le dernier mot du titre de l'ouvrage de Sinân Ibn Alfath est écrit الهندسى, tandis que le manuscrit du Fihrist que possède la Bibliothèque de Leyde porte الهندى. Ce détail n'est pas tout à fait sans importance, ainsi qu'on le verra dans le paragraphe suivant du présent mémoire.

[3] A la même époque, Avicenne raconte dans son autobiographie que, tout jeune encore, il assista à des conversations entre son père et son frère, dans lesquelles il était souvent question de philosophie,

contenu, avec plusieurs autres morceaux relatifs aux mathématiques, dans le manuscrit n° 556 du legs Warnérien de la Bibliothèque de Leyde[1], dont il occupe les pages fol. 68 v° à 79 v°[2]. Voici la traduction de la préface, et la liste complète des titres des chapitres.

«Au nom de Dieu, clément et miséricordieux, «dont nous implorons le secours. Que la bénédic-«tion divine soit sur notre seigneur Mohammed, sa «famille et ses compagnons. Louange à Dieu pour «sa grâce et ses bienfaits, et salut à ses prophètes «et à ses saints!»

de géométrie et de calcul indien; et qu'à l'âge de dix ans environ (en 990 de J. C.), son père l'envoya chez un marchand très-versé dans le calcul indien pour apprendre de lui cet art.

[1] Je suis heureux de pouvoir remercier publiquement MM. les Conservateurs de la Bibliothèque de Leyde de l'extrême bienveillance et de la haute libéralité avec laquelle ils m'ont communiqué à différentes reprises plusieurs des manuscrits les plus précieux de cette admirable collection. C'est un profond regret pour moi de ne pouvoir plus adresser ces remercîments au vénérable M. Juynboll, qui réunissait à un grand savoir toutes les qualités de caractère qui inspirent le respect et l'attachement.

[2] La page fol. 68 r° est laissée en blanc, mais encadrée d'un filet rouge comme toutes les pages suivantes; elle était probablement destinée à recevoir le titre du traité. La page fol. 79 v° est la dernière du volume. Le premier morceau contenu dans le manuscrit a été composé postérieurement à l'année 1170 de notre ère. Sur le frontispice du volume, on trouve une note relative à un achat du manuscrit dont la date correspond au 25 mai 1287 de notre ère. Mais la copie du traité de calcul indien peut être postérieure à cette date, car il est d'une écriture différente de celle du commencement du volume. Les différentes parties de celui-ci présentent quatre écritures différentes, mais toutes en caractère neskhi.

« Alî Ibn Ahmed Al-naçawî[1] dit : qu'il avait déjà « composé, pour les archives de la comptabilité de « Madjd Al-daoulah[2], un ouvrage sur le calcul indien, « qui passa plus tard à la bibliothèque de notre sei- « gneur Charaf Al-mouloûq. Cependant celui-ci fut « peu satisfait[3] de cet exposé de la matière dont il « s'agit, parce qu'il était écrit en persan, et que Cha- « raf Almouloûq observait que cette langue est peu « concise dans ses expressions, et obscure dans ses « significations. Il ordonna donc que je composasse, « pour sa bibliothèque, en langue arabe, un ouvrage « dont le contenu réalisât le but que j'avais eu en « vue; et j'ai obéi à cet ordre. J'ai aussi examiné les « traités écrits sur cette théorie par les savants an- « ciens et modernes. J'ai trouvé que quelques-uns « de ces traités, comme ceux d'Alqindî[4] et d'Almo-

[1] Aboûl Haçan Alî Ben Ahmed Al-naçawî, kâdhi châféïte, est mentionné par Hadji Khalfa, édition de Fluegel, t. III, p. 564; t. V, p. 144; t. VI, p. 29; t. VII, p. 1084, numéro 3217 de la table. Naçâ est une ville du Khorâçân.

[2] Madjd Al-daoulah, prince bouide, roi de l'Irâk persique, naquit d'après M. Defrémery (*Histoire des Samanides*, Paris, 1845, in-8°, p. 285) en 379 de l'hégire. D'après Aboûl Faradj (*Hist. Dynast.* ed. Pococke, Oxon. 1663, in 4°, p. 219 de la traduction latine) il succéda à son père Fakhr Aldaoulah en 387 de l'hégire, à l'âge de quatre ans. Il fut détrôné par Mahmoûd le Gaznavide, en 420 de l'hégire, après avoir régné pendant vingt-sept ans sous la tutelle de sa mère, qui mourut en 415. Il eut pour vizir, pendant un certain temps, le célèbre Avicenne. (Voir D'Herbelot, *Bibliothèque orientale*, t. II, la Haye, 1777, in-4°, p. 505 à 507; Deguignes, *Histoire générale des Huns*, t. II, Paris, 1756, in-4°, p. 168 à 170; Abulfedæ *Annales muslemici*, op. et stud. J. J. Reiskii, t. III, Hafniæ, 1791, in-4°, p. 74 et 75.)

[3] فلم يقنعه الكلام الخ.

[4] Cet ouvrage est mentionné dans le Fihrist (supplément arabe

« djetabî Alanthâqî Almo'alewî[1], sont confus et d'une « longueur excessive. D'autres, comme celui d'Alî « Ben Abî Naçr, tout en étant extrêmement dévelop-

n° 1400² de la Bibliothèque impériale de Paris, fol. 96 v°, l. 9) sous le titre de كتاب رسالته فى استعمال الحساب الهندى اربع مقالات « Mémoire sur la manière d'employer le calcul indien, en quatre livres. » D'après la monographie sur Alqindi, insérée par M. Fluegel dans les Mémoires publiés par la société orientale d'Allemagne (Leipzig, 1857, in-8°, p. 22, n° 36), cet ouvrage fut dédié par Alqindi à Ahmed, neveu du khalife Almâmoûn.

[1] Le nom المعلوى ne se trouve pas dans le *Loubb al-Loubâb* d'Alousyoûthi; mais on y trouve *Al-mi'wali* (المِعْوَلى), nom qui signifie un descendant d'une des familles de la tribu d'Azd (أزْد). Le Târikh al-Hoqamâ donne sur Alanthâqî la notice suivante (manuscrit 672, supplément arabe de la Bibliothèque impériale, p. 197, ligne 6 à 16). « Ali Ben Ahmed l'Antiochien Aboûl-Kâcim Almodjetabî fut origi« naire d'Antioche, et vécut à Bagdâd jusqu'à sa mort. Il fut un des « familiers préférés d'Adhad Aldaoulah Ibn Bouwaïh. Il était d'une « supériorité incontestée dans la science des nombres et dans la « géométrie, et il a écrit sur ces sciences d'excellents ouvrages. Outre « qu'il avait une teinture élégante des sciences des anciens, il était « disert, et doué d'une éloquence agréable; et lorsqu'on l'interro« geait, il savait donner des éclaircissements et des explications inté« ressantes. Parmi les ouvrages très-estimés qu'il a écrits, nous men« tionnons: Le grand traité de la table relatif au calcul indien (كتاب « التخت الكبير فى الحساب الهندى). Le traité du calcul effectué « sur la table sans rien effacer (كتاب الحساب على التخت بلا محو). « Le traité de l'explication de l'arithmétique (probablement celle de « Nicomaque). Le traité du commentaire d'Euclide. Le traité de la « manière de choisir parmi les traducteurs. Le traité des preuves nu« mériques (كتاب الموازين العددية; telles que la preuve par neuf, « etc). Le traité du calcul manuel sans table (كتاب الحساب بلا « تخت بل باليد). Hilâl Ben Almohsin Ben Ibrâhim le Sâbéen dit « dans son ouvrage : En l'année trois cent soixante-seize, le vendredi, « 13 dzoûl-hidjdjah (15 avril 987 de notre ère), mourut Aboûl Kâcim « Ali Ben Ahmed l'Antiochien, le calculateur et le géomètre ».

« pés, ne parviennent pas à être intelligibles. D'autres « encore sont difficiles, comme celui d'Alqalwâdzâni[1]; « j'ai trouvé aussi, dans ce dernier traité, des règles « dont ont besoin seulement les personnes qui veulent « s'occuper des questions les plus ardues. Quelques « auteurs encore ont rattaché la théorie qu'ils ex-« posaient à une branche spéciale des opérations « du calcul[2], comme Aboû Hanîfah Aldaïnawarî[3], « et Qoûchyâr Aldjîlî[4]. Car Qoûchyâr, malgré sa

[1] Le *Fihrist* contient sur cet auteur la notice suivante (manuscrit 1400[2], supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris, fol. 131 v°, lig. 4 à 7) : « Alqalwadzâni, c'est-à-dire Aboû Naçr Mo-« hammed Ben Abdallah Alqalwadzâni, le calculateur, un des calcu-« lateurs les plus excellents, et notre contemporain [la rédaction du « Fihrist fut terminée en 987 de notre ère]. Il est auteur du Traité « de la table relatif au calcul indien. » Le Târikh al-Hoqamâ spécifie l'époque de la vie d'Alqalwadzâni en disant (manuscrit 672, supplément arabe de la Bibliothèque impériale, p. 235, lig. 10 et 11) qu'il fut contemporain du gouvernement d'Adhad Aldaoulah dans l'Irâk, et qu'il vécut encore après. Le même ouvrage ajoute qu'Alqalwadzâni était aussi savant géomètre et astronome. Qalwâdzâ, son lieu de naissance, est un village près de Bagdâd.

[2] Par ces opérations, il faut entendre l'application du calcul aux transactions commerciales, à l'administration des finances, à la géométrie pratique, etc.

[3] Aboû Hanîfah Ahmed Ben Dâwoud Aldaïnawarî mourut d'après Hadji Khalfa (édition de Fluegel, t. III, p. 558, lig. 8 en remontant) en 281 ou 290 de l'hégire (894 ou 903 de notre ère). En fait d'ouvrages relatifs aux sciences mathématiques, Hadji Khalfa mentionne de cet auteur : un traité d'algèbre (t. V, p. 67), un traité du calcul des héritages (t. V, p. 169, comparer t. III, p. 63), un recueil d'observations astronomiques faites à Ispahan en 235 de l'hégire (t. III, p. 470), des tables astronomiques (t. III, p. 558), et un traité de météorologie (t. V, p. 54). En outre, Hadji Khalfa nomme Aldaïnawarî comme auteur de divers autres ouvrages non mathématiques (t. I, p. 329; t. II, p. 105, 361, 644; t. V, p. 130, 162, 308).

[4] Hadji Khalfa (t. VI, p. 51) mentionne de Qoûchyâr un *Livre sur*

«grande concision, composa, sous prétexte de cal-«cul astronomique, un traité sur les autres opéra-«tions du calcul, et Aboû Hanîfah, sous prétexte «des autres opérations, fit un traité sur le calcul «astronomique. J'ai donc composé un ouvrage dans «lequel je me suis restreint à ce qui appartient stric-«tement à mon sujet, et dans lequel j'ai tâché d'évi-«ter des longueurs ennuyeuses et une brièveté in-«suffisante. J'ai arrangé mon exposé de façon qu'il «pût être utile aux hommes dans leurs différentes «transactions, et aux astronomes dans leur art. J'ai «divisé le discours en quatre livres dont le premier «traite de la manière d'opérer avec les nombres en-«tiers, le second de la manière d'opérer avec les «fractions, le troisième des entiers et des fractions, «et le quatrième des degrés et minutes. Je me suis «abstenu d'accompagner les règles de démonstra-«tions géométriques[1] pour ne pas être trop long. «Dieu est celui qui accorde le succès.»

le calcul (مقالة في الحساب). Ce savant composa, d'après Hadji Khalfa (t. V, p. 475 et t. III, p. 570), une introduction à l'astronomie en 357 de l'hégire (968 de notre ère) et des tables astronomiques en 459 (*sic*) de l'hégire. Un traité de Qoûchyâr sur le calcul sexagésimal, probablement celui dont il s'agit ici, est mentionné aussi dans la préface du traité de Mohâmmed Sibth Almâridini que j'ai traduite dans le mémoire ci-dessus cité sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident (p. 67). Des remarques savantes dues à M. de Jong, et que l'on trouvera p. 84 et 87 du troisième volume du Catalogue de la Bibliothèque de l'Université de Leyde, confirment que Qoûchyâr florissait au IV[e] et non au V[e] siècle de l'hégire.

[1] Comparer l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmi*, par F. Woepcke, Paris, 1851, in-8°, p. VII, lig. 19, à p. IX, lig. 3, et p. 73, lig. 3 en remon-

« PREMIER LIVRE DU TRAITÉ SATISFAISANT[1]. »

« Ce livre traite de la manière d'opérer avec les « nombres entiers, et comprend plusieurs chapitres.

« 1er CHAPITRE. Des formes des neuf signes, de la manière « d'écrire les nombres à la façon indienne[2], et de l'arrange- « ment des différents ordres[3]. »

« Les personnes qui se sont occupées de la science « du calcul n'ont pas été d'accord sur une partie des « formes de ces neuf signes; mais la plupart d'entre « elles sont convenues de les former comme il suit : « ١ ٢ ٣ ۴ ۵ ٦ ٧ ٨ ٩. Le premier est donc la figure de « l'unité, le second celle du deux, et ainsi de suite « jusqu'au neuvième signe, qui est la figure du neuf. « Quant aux ordres (des nombres), ce sont, etc. »

« 2e CHAP. De la manière d'ajouter les nombres les uns « aux autres. »

« 3e CHAP. De la manière de prendre (اخذ) la preuve « (ميزان)[4] pour l'addition, et de la manière de l'effectuer. »

tant, à p. 74, lig 3; et l'*Extrait du Fakhri*, par F. Woepcke; Paris, 1853, in-8°, note de la page 6, p. 61, et p. 65 à 71.

[1] المقالة الاولى من المقنع; c'est le nom que l'auteur a donné à son ouvrage, évidemment par allusion à la circonstance mentionnée ci-dessus, p. 492, lig. 6.

[2] وضع الاعداد بالهندية.

[3] A savoir des unités, dizaines, etc. En d'autres termes : de la valeur de position.

[4] Cette preuve est la preuve par neuf, et je fais observer que dans tout le traité d'Alnaçawi la preuve par *neuf* est la *seule* dont il soit fait usage. L'emploi de la preuve par neuf se trouve aussi déjà dans le traité d'Alkhârizmi, comme moyen de vérification des duplations

« 4ᵉ Chap. De la preuve de la duplation. »

« 5ᵉ Chap. De la manière de retrancher les nombres les « uns des autres. »

« 6ᵉ Chap. De la preuve de la soustraction. »

« 7ᵉ Chap. De la preuve de la médiation. »

« 8ᵉ Chap. De la définition de la multiplication, de ses « espèces, et de la manière de l'effectuer pour des nombres « entiers [1]. »

« 9ᵉ Chap. De la preuve de la multiplication. »

« 10ᵉ Chap. De la définition de la division, de ses espèces, « et de la manière de l'effectuer pour des nombres entiers [2]. »

« 11ᵉ Chap. De la preuve de la division. »

et des multiplications. (Voir *Trattati d'aritmetica*, p. 12, lig. 24, à p. 13, lig. 11.)

[1] Voici un tableau figurant la multiplication de $324 \times 753 = 243972$, telle qu'elle est exécutée par Alnaçawi, qui appelle cette méthode expressément *indienne* طريق الهند et العمل الهندى. Les nombres imprimés en italique sont ceux qui doivent être successivement effacés dans le courant de l'opération pour être remplacés par les nombres placés au-dessus.

	4	3			
	3	*0*	9		
	2	*9*	7	7	
2	*1*	*5*	*9*	*6*	2
			3	2	4
	7	5	3		
		7	5	3	
			7	5	3

Cette méthode, qui nous rappelle les expressions du passage ci-dessus cité de Planude relatif aux calculs exécutés sur le sable (voir p. 240, note 2), est tout à fait identique à celle de Mohammed Ben Mouça. (Voir *Trattati d'aritmetica*, p. 10, lig. 20, à p. 12, lig. 23.)

[2] Voici un tableau figurant la division de $2852 : 12 = 237 \frac{8}{12}$, telle qu'elle est exécutée par Alnaçawi, qui appelle cette méthode expressément *indienne* الهندى :

« 12e Chap. De la définition de la racine (carrée[1]), de ses « espèces, et de la manière de l'extraire des nombres entiers. »

« 13e Chap. De la manière de connaître la preuve de la « racine (carrée). »

« 14e Chap. De la définition de la racine cubique[2], de ses « espèces, et de la manière de l'extraire des nombres entiers. »

« 15e Chap. De la preuve de la racine cubique. »

« DEUXIÈME LIVRE DU TRAITÉ INTITULÉ « LE SATISFAISANT[3]. »
« DE LA MANIÈRE D'OPÉRER AVEC LES FRACTIONS. »

« 1er Chap. De la manière d'écrire les fractions à la façon « indienne[4]. »

$$\begin{array}{cccc@{\qquad}ccc}
 & 1 & 2 & & & & \\
 & 4 & 9 & 8 & & & \\
 & 2 & 3 & 7 & 2 & 3 & 7 \\
2 & 8 & 5 & 2 & & & 8 \\
1 & 2 & & & & 1 & 2 \\
 & 1 & 2 & & & & \\
 & & 1 & 2 & & &
\end{array}$$

Cette méthode est pareillement identique à celle de Mohammed Ben Moûçâ. (Voyez *Trattati d'aritmetica*, p. 13, l. 12, à p. 16, l. 15.) J'ai donné ici ces deux tableaux d'une multiplication et d'une division d'après le traité d'Alnaçawi, parce que les méthodes de multiplication et de division forment ordinairement la partie la plus caractéristique de chaque traité d'arithmétique, et celle qui lui assigne sa place dans le développement historique de l'arithmétique.

[1] الجذر.

[2] كعب. Ce mot signifie ici « racine cubique »; pour désigner « cube », l'auteur se sert du mot مكعب.

[3] المقالة الثانية من كتاب المقنع.

[4] Exemples de cette notation pour les fractions, et pour les nombres complexes traités dans le livre suivant :

$\frac{1}{2}$ s'écrit $\begin{smallmatrix}\text{٠}\\\text{١}\\\text{٢}\end{smallmatrix}$; $\frac{1}{11}$ s'écrit $\begin{smallmatrix}\text{٠}\\\text{١}\\\text{١١}\end{smallmatrix}$; 13 $\frac{1}{3}$ s'écrit $\begin{smallmatrix}\text{١٣}\\\text{١}\\\text{٣}\end{smallmatrix}$; 15 $\frac{7}{19}$ s'écrit $\begin{smallmatrix}\text{١٥}\\\text{٧}\\\text{١٩}\end{smallmatrix}$.

« 2ᵉ Chap. De la manière d'ajouter les fractions les unes « aux autres. »

« 3ᵉ Chap. De la manière de retrancher les fractions les « unes des autres. »

« 4ᵉ Chap. De la multiplication des fractions les unes par « les autres. »

« 5ᵉ Chap. De la division des fractions les unes par les « autres. »

« 6ᵉ Chap. De la racine (carrée) des fractions. »

« 7ᵉ Chap. De la racine cubique des fractions. »

« TROISIÈME LIVRE DU TRAITÉ INTITULÉ « LE SATISFAISANT. »
« DES ENTIERS ET DES FRACTIONS. »

« 1ᵉʳ Chap. De la manière d'écrire les nombres entiers « accompagnés de fractions. »

« 2ᵉ Chap. De l'addition des (nombres composés d') en- « tiers et de fractions. »

« 3ᵉ Chap. De la manière de retrancher des (nombres « composés d') entiers et de fractions les uns des autres. »

« 4ᵉ Chap. De la multiplication des entiers et des fractions « par des entiers et des fractions. »

« 5ᵉ Chap. De la division des entiers et des fractions par « [des entiers et] des fractions. »

« 6ᵉ Chap. De la manière d'extraire la racine (carrée) « d'entiers et de fractions. »

« 7ᵉ Chap. De la manière d'extraire la racine cubique « d'entiers et de fractions. »

« QUATRIÈME LIVRE DU TRAITÉ INTITULÉ « LE SATISFAISANT. »
« DE LA MANIÈRE D'OPÉRER AVEC LES DEGRÉS ET LES MINUTES. »

« 1ᵉʳ Chap. De la manière d'écrire les degrés, les minutes « et les ordres suivants. »

« 2ᵉ Chap. De la manière d'ajouter les degrés et minutes « les uns aux autres. »

« 3e Chap. De la manière de retrancher les degrés et mi-« nutes les uns des autres. »

« 4e Chap. De la multiplication des degrés et minutes les « uns par les autres, et du produit de la multiplication [1]. »

« 5e Chap. De la division des degrés et minutes et d'autres « fractions (sexagésimales), les unes par les autres. »

« 6e Chap. De la racine (carrée) des degrés et minutes et « des fractions (sexagésimales) inférieures à celles-ci. »

« 7e Chap. De la racine cubique des degrés et minutes et « des ordres suivants des fractions (sexagésimales), et du « résultat de (l'extraction de) la racine cubique. »

Les derniers mots du traité sont les suivants (fol. 79 v°, lig. 8 et 9. [2]) :

« La racine cubique (كعب) des degrés sont « des degrés; la racine cubique des tierces sont « des minutes; la racine cubique des (sexagési-« males) sixièmes sont des secondes; et (pour le « reste) suivez cette règle. Ceci est la fin du traité. « Dieu seul connaît la vérité. »

ORIGINE INDIENNE DE LA PREUVE PAR NEUF, DE LA RÈGLE DES DEUX FAUSSES POSITIONS, ET DES COMMENCEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE ARABE.

Plusieurs détails du morceau que l'on vient de lire, de même que quelques-uns des titres des ouvrages d'Alauthâqî mentionnés par le Târîkh al-Hoqamâ, pourraient fournir matière à des remarques utiles. Cependant je les supprime ici, parce que

[1] Il s'agit de déterminer toujours à quel ordre de l'échelle sexagésimale ce produit appartient.

[2] Le reste de la page fol. 79 v° est blanc.

ce n'est pas l'histoire de l'arithmétique indienne, mais celle de la propagation des chiffres indiens qui fait l'objet du présent mémoire. Toutefois je ne peux pas passer sous silence un point qui me paraît donner lieu à des conséquences particulièrement intéressantes pour l'histoire des sciences.

J'ai fait observer (p. 496, note 4) que la preuve dont il est question dans le traité ci-dessus est la preuve par neuf, et que celle-ci se trouve déjà employée dans le traité d'Alkhârizmî [1]. La place qu'elle occupe dans ces traités *de calcul indien* rend très-naturelle la supposition que cet ingénieux moyen de contrôle est d'invention indienne. Cette opinion est confirmée par deux passages que j'ai trouvés dans un traité d'arithmétique spéculative d'Avicenne, contenu dans le manuscrit n° 84 du legs Warnérien de la Bibliothèque de Leyde [2].

[1] Elle est pareillement employée dans le Traité de calcul indien de Planude. (Voir Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, t. I, p. 520, lig. 12 à 23, et p. 523, lig. 22 à 28.)

[2] C'est également à la bienveillante libéralité de MM. les conservateurs de la Bibliothèque de Leyde que je dois la communication de ce précieux volume, qui contient le grand et célèbre ouvrage d'Avicenne intitulé الشفاء « la guérison. » Le traité d'arithmétique spéculative dont il est question fait partie de cet ouvrage; il y est suivi d'un traité de la musique et précédé d'un abrégé des Éléments d'Euclide et de l'Almageste de Ptolémée. La partie du manuscrit de Leyde qui précède ce dernier abrégé, et qui est formée par la section relative à la physique (القسم الطبيعى من الشفاء), est terminée par un post-scriptum daté du 4 cha'bân de l'année 882 de l'hégire (11 novembre 1477 de J. C.). Le traité d'arithmétique spéculative occupe 22 pages très-grand in-8°, à 31 lignes la page, d'une écriture extrêmement fine. Il est divisé en quatre livres. C'est une sorte de para-

Voici d'abord le premier de ces passages, faisant partie du troisième livre du traité, relatif aux nombres figurés. Après avoir mentionné, à l'occasion des nombres carrés, qu'ils ont toujours pour unités un des nombres 1, 4, 9, 6, 5, Avicenne continue en ces termes[1] :

ولامتحان المربعات فى الطريق الهندسى فلا يخلوا اما ان
يكون واحدا او اربعة او سبعة اوتسعة فللواحد واحد او
ثمانية وللاربعة اثنان او سبعة وللسبعة [2] اربعة او خمسة
وان كان تسعة فثلثة او ستة او تسعة

« Quant à la vérification des carrés d'après la méthode indienne (*fî 'l-tharîk al-hindacî*), c'est inévitablement un, ou quatre, ou sept, ou neuf. Or, à l'unité correspond un ou huit, au quatre deux ou sept, au sept quatre ou cinq, et si c'est neuf, on aura trois, ou six, ou neuf. »

Ce passage signifie que si l'on a un nombre qui, divisé par 9, laisse pour reste 1 ou 8 : le carré de ce nombre, divisé par 9, laissera pour reste 1. Si un nombre, divisé par 9, laisse pour reste 2 ou 7, le carré de ce nombre, divisé par 9, laissera pour

phrase de l'arithmétique de Nicomaque, et le tout n'a qu'une mince valeur comme travail original. Il est assez curieux que je n'aie pas remarqué une seule mention du nom de Nicomaque dans tout le cours du traité, quoique Avicenne nomme les Éléments d'Euclide, auxquels il renvoie, et les Pythagoriciens.

[1] Lignes 7 à 9 de la 17e page du traité dans le manuscrit de Leyde.

[2] Le manuscrit porte erronément التسعة.

reste 4. Si un nombre, divisé par 9, laisse pour reste 4 ou 5, son carré, divisé par 9, laissera pour reste 7. Enfin si un nombre, divisé par 9, laisse pour reste 3, 6, ou 9, son carré, divisé par 9, laissera pour reste 9[1].

Cette propriété des nombres carrés peut effectivement servir de contrôle dans les calculs numériques qui ont pour objet d'élever au carré des nombres entiers. Ce contrôle n'est autre chose que la preuve par neuf appliquée à l'opération arithmétique de l'élévation au carré, et le passage d'Avicenne nous apprend que ce procédé de vérification s'appelait indien, *hindací* (هندسى).

C'est ce qui résulte encore plus explicitement du second passage, faisant également partie du troisième livre du traité d'Avicenne[2], et que voici :

ومن خواص المكعبات ان امتحانها الذى على عمل الحساب
الهندسى اعنى ميزانه يكون اما واحدا واما ثمانية واما
تسعة فان كان واحدا فاحاد المبلغ واحد او اربعة او
سبعة وان كان ثمانية فثمانية او اثنان او خمسة وان كان
تسعة فثلثة او ستة او تسعة

« Une des propriétés des cubes consiste en ce que

[1] Ou zéro. On voit que les Indiens ont déjà examiné les résidus quadratiques par rapport au module 9, ce qui n'a rien de surprenant lorsqu'on songe aux beaux résultats qu'ils ont obtenus dans la résolution des équations indéterminées du second degré.

[2] Lignes 11 à 13 de la 19ᵉ page du traité dans le manuscrit de Leyde.

« le moyen de les vérifier d'après la manière d'opé-« rer du calcul indien (*al-hiçâb al-hindacî*), je veux « dire la preuve[1] qu'emploie ce calcul, est ou bien « un, ou huit, ou neuf. Si c'est un, les unités[2] du « nombre qu'on élève au cube[3] sont un, ou quatre, « ou sept; si c'est huit, ce sont huit, ou deux, ou « cinq; si c'est neuf, ce sont trois, ou six ou neuf. »

C'est-à-dire : si un nombre, divisé par 9, laisse pour reste 1, 4 ou 7, son cube, divisé par 9, laisse pour reste 1; si un nombre, divisé par 9, laisse pour reste 2, 5 ou 8, son cube, divisé par 9, laisse pour reste 8; et si un nombre, divisé par 9, laisse pour reste 3, 6 ou 9, son cube, divisé par 9, laisse pour reste 9[4].

Ces passages prouvent avec certitude que l'application de la preuve par neuf à l'élévation des nombres au carré et au cube est une particularité de l'arithmétique indienne; et rapprochés des traités d'Alkhârizmî et d'Alnaçawî, ils nous disposent à croire que l'invention de la preuve par neuf appartient aux Indiens.

Mais ces passages donnent lieu encore à une autre conclusion.

[1] Le mot ميزان, qui est le terme technique consacré pour désigner la *preuve*, signifie littéralement « balance. »

[2] C'est-à-dire les unités restantes après la division par 9.

[3] المبلغ est ordinairement le nombre résultant d'une opération arithmétique; ici c'est le nombre qui doit être soumis à cette opération, le nombre proposé. Ou peut-être il faut entendre par المبلغ le nombre résultant de l'extraction de la racine cubique, en considérant le cube comme le nombre proposé.

[4] Ou zéro. Ce passage montre que les Indiens avaient considéré aussi les résidus cubiques par rapport au module 9.

L'adjectif employé pour désigner le calcul *indien*, ou des méthodes *indiennes*, et qui est ordinairement *hindî* هندى, se présente, dans les deux passages d'Avicenne dont j'ai reproduit le texte arabe, sous la forme *hindacî* هندسى[1]. Si nous considérons que ce mot ne peut ici en aucune façon signifier « géo-« métrique, » sens qu'il a ordinairement, et si nous nous rappelons que le même mot *hindacî* désigne aussi chez les Arabes, d'après M. Taylor, « l'échelle « décimale de l'arithmétique[2], » nous devons être portés à admettre que le sens primitif du mot هندسة, qui se prononce *hindiçah* et *handaçah*, est « méthode « indienne » ou « art indien ; » et que, si ce mot désigne en arabe, ordinairement, la géométrie, c'est parce que les premières notions de cette science arrivées aux Arabes sont venues de l'Inde.

Je n'ignore pas que, d'après Fîroûzâbâdî[3], le mot هندسة *handaçah* serait dérivé du mot هنداز *hindâz* (مُشْتَقٌ من الهِنْدَازِ), que le mot *hindâz* serait à son tour une modification (appropriée au génie de la langue arabe, à la manière d'un nom d'action de la

[1] Voir aussi la variante du manuscrit parisien du *Fihrist*, signalée ci-dessus, p. 490, note 2.

[2] *Lilawati, or a Treatise on Arithmetic and Geometry by Bhascara Acharya* transl. etc. by J. Taylor. Bombay, 1816, in-4°, p. 35, l. 8 et suiv. « It has been already remarked that the Arabians call the decimal « scale of arithmetic, *Hindasi*, or Indian arithmetic; a circumstance « which clearly indicates the source from which they consider this « manner of notation to have been derived. »

[3] *The Kamoos*, vol. I. Calcutta, 1817, in-fol. p. ٧٣٥, lig. 12 à 14, et p. ٨١٤, lig. 1 à 3.

première forme des racines quadrilitères) du mot persan اندازه *andâzah* « mesure, » et que l'on aurait encore changé le ز *z* en س *ç* à cause de l'incompatibilité d'un ز *z* précédé d'un د *d* avec l'organe arabe (وإنّما صَيَّرُوا الزّاىَ سِينًا لِأنّهُ لَيْسَ فى كَلامِهِمْ زاىٌ قَبْلَها دالٌ).

Mais non-seulement cette étymologie est forcée et compliquée; elle s'appuie aussi sur une incompatibilité qui n'existe pas, car je trouve dans le *Kâmoûs*[1] le mot دَزْرٌ (racine دَزَرَ) où, comme on voit, le ز est précédé d'un د. On se demande d'ailleurs pourquoi les Arabes auraient eu besoin de tant modifier le mot اندازه avant de pouvoir l'accepter, lorsqu'ils ont admis sans aucune modification semblable les mots grecs جومطريا, ارثماطيقى, موسيقى, qui devaient paraître bien autrement barbares à l'organe arabe. En outre il serait fort extraordinaire que les Persans eux-mêmes fissent usage de la forme arabisée هندسة, et non de leur propre mot اندازه, si هندسة n'était réellement qu'une altération de celui-ci. Une telle préférence donnée à la forme arabisée pourrait se comprendre aux époques postérieures de la littérature persane, où les mots arabes, et même des phrases arabes entières, abondent dans le style persan. Mais elle paraîtrait étrange dans le *Châh-Nâmah*, qui est, comme on sait, presque le monument le plus ancien de la littérature persane, et dont l'auteur évite à

[1] *The Kamoos*, vol. I. Calcutta, 1817, in-fol. p. ٥٢٣, lig. 6. Comparer le Dictionnaire de Freytag, vol. II, p. 28, 2e colonne.

dessein et de parti pris les mots arabes. Or, voici deux passages que j'ai remarqués dans l'épisode du *Châh-Nâmah*, où est racontée l'enfance de Bahrâm Goûr[1], et dans lesquels sont employés les mots هندسی et هندسه.

Dans un conseil, convoqué par le roi, on délibère pour décider à qui doit être confiée l'éducation du jeune prince :

که یابد چنین روزگار از مهان
که بایسته فرزند شاه جهان
ببر گیرد ودانش آموزدش
دل از تیرگیها برافروزدش
زروی وهندی واز پارسی
نجوی دگر مردم هندسی
همان فیلسوفان بسیار دان
سخن گوی واز مردم کاردان

Qui parmi les grands obtiendra la charge de tenir dans ses bras le fils du roi du monde, de l'instruire, et de former son caractère? Est-ce un Roûmî, ou un Indien, ou un Perse, un astronome ou un géomètre (*handacî*), un des philosophes savants et éloquents, ou un homme versé dans les affaires?

Ensuite l'Arabe Mondar prend la parole, et, après quelques formules de politesse adressées au roi, il continue ainsi :

[1] *The Shah-Nameh*, etc. by Turner Macan. Calcutta, 1829, in-8°, vol. III, p. ١٤٩٣.

33.

سواريم وگرديم واسپ افگنيم
کسی را که دانا بود بشکنيم
ستاره شمر نيست از ما کسی
که از هندسه بهره دارد بسی

Nous sommes des cavaliers et des braves, et nous savons lancer le cheval. Nous sommes vainqueurs des plus savants, mais il n'existe pas parmi nous un astronome qui ait un grand savoir en géométrie (*handaçah*).

Je ferai observer en passant que ces vers me semblent encore mériter quelque attention à un autre point de vue. Il me paraît du moins significatif que Firdoûcî, vivant à une cour qui accueillait d'illustres savants arabes, et au moment où la science arabe jetait son plus grand éclat, refuse expressément aux Arabes du v^e^ siècle des connaissances mathématiques. J'ajouterai que, dans le même épisode, lorsqu'il s'agit de consulter les astronomes de la cour au sujet de l'avenir du prince nouveau-né, le poëte nomme parmi ces astronomes en premier lieu le chef du collége des astronomes indiens[1].

Un passage du *Bourhân-i-kâti'* me semble achever de trancher la question. Ce passage établit explicitement une signification du mot هندسه qui rattache

[1] *Loc. laud.* p. ۱۴۹۲ :

بدر بر ستاره شمر هرکه بود — که شايست گفتار ايشان شنود
يکی مايه‌ور بود با فرّ وهوش — سر هندوان بود ونامش سروش

ce mot aux chiffres indiens, et par conséquent à l'Inde هند *Hind*. Voici l'article du *Bourhân-i-kâti'* [1] :

هندسه بکسر اول وثالث وفتح سین بی نقطة بمعنی اندازه
وشکل باشد وارقامی‌را نیز گویند که در زیر حروف کلمات
نویسند همچو ابجد هوز حطی
١٠٩٨ ٧٦٥ ۴٣٢١

Hindiçah, dont la première et la troisième consonne sont suivies d'un *i* et le *ç* d'un *a*, signifie mesure et figure. On appelle aussi de ce nom les chiffres que l'on écrit au-dessous des lettres des mots [2], comme il suit :

ابجد هوز حطی
١٠٩٨ ٧٦٥ ۴٣٢١

[1] *Bourhani Qatia*. Calcutta, 1818, in-4°, p. ٩٩٣, col. 2, lig. 11 à 14.

[2] D'après l'exemple que donne le *Bourhân-i-kâti'*, il paraît qu'il faut entendre par ces « mots » les mots techniques formés des lettres numérales arabes. L'usage de placer au-dessous de ces mots techniques les nombres correspondants écrits en chiffres indiens est observé en effet dans des traités d'arithmétique arabes lorsqu'il s'agit d'expliquer et de présenter en tableau la notation indienne. Ainsi je trouve dans le manuscrit 1912 suppl. ar. de la Biblioth. imp. fol. 17 v°, lig. 7 à 11, le passage suivant :

فی معرفة القلم الهندی وهو تسعة اشکال وهی هذه

(« De la connaissance de la notation indienne, et ce sont neuf figures, « à savoir les suivantes : »)

ايقغ ∴ بكر ∴ جلش ∴ دمت ∴ هنث ∴ وسخ ∴ زعذ ∴ حفض
١١١١ ∴ ٢٢٢ ∴ ٣٣٣ ∴ ۴۴۴ ∴ ٥٥٥ ∴ ٦٦٦ ∴ ٧٧٧ ∴ ٨٨٨
طصظ
٩٩٩

Un tableau tout à fait pareil occupe dans le même manuscrit les quatre dernières lignes du folio 22 r°.

Ce que l'on peut admettre comme vraisemblable dans cette prétendue origine persane du mot arabe qui désigne la géométrie, c'est que les premières connaissances dans cette science ont été transmises aux Arabes par l'intermédiaire des Persans. Mais le sens primitif de ce mot هندسة, employé également par les Persans et par les Arabes, me paraît toujours être « science indienne, art indien, méthode indienne. »

Je citerai en dernier lieu un passage d'Ibn Albannâ, célèbre mathématicien arabe, qui florissait au Maroc dans la première moitié du XIII[e] siècle de notre ère, passage qui se trouve dans le traité d'arithmétique de cet auteur intitulé *Talkhîs*[1], et où l'adjectif هندسى *hindacî* me paraît encore être employé dans le sens d'*indien*, quoique le commentateur Alkalaçâdî (mort en 1486 de J. C.), au temps duquel le sens primitif du mot هندسى était tombé probablement en désuétude et dans un oubli complet, l'entende d'une autre façon.

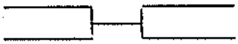
Voulant exposer la règle des deux fausses positions à laquelle les Arabes donnent différents noms et, entre autres, celui de l'opération avec les plateaux de balance[2], Ibn Albannâ dit[3] :

[1] تلخيص اعمال الحساب « Exposé des opérations du calcul. »

[2] Ce nom vient d'une figure composée de deux ronds ou de deux oblongs, sur les différentes parties de laquelle les arithméticiens arabes placent les nombres proposés, supposés et résultants.

[3] Fol. 58 r°, lig. 25 à 27 du premier morceau du manuscrit désigné par le n° 11, p. 105 du cahier de février-mars 1862 du *Journal asiatique*. Le même passage d'Ibn Albannâ est reproduit fol. 48 r°, lig. 23 et suiv. du deuxième morceau du même manuscrit n° 11; et

واما الكفات فهى من الصناعة الهندسية وصورتها ان تضع ميزانا على هذه الصورة 

« Quant aux plateaux de balance, ce procédé fait « partie de l'art indien[1]; et leur figure consiste en « ce que vous tracez une balance de la forme sui« vante  . »

Alkalaçâdî fait suivre ce passage du commentaire que voici[2] :

هذا هو الوجه الثانى من العمل بالنسبة واتى بصورة الكفات ايضاحا وبيانا للناظر فى كتابه فان قُلتَ لم وضع المصنف هذه الصورة فى الكتاب ولم يوضع غيرها كصورة ضرب الجدول وصورة الغربال ونحوها مما يناسب هذا المعنى قُلتُ والله اعلم كان المصنف وقت وضع هذا الموضوع متشاغلا بالهندسة وشان المهندسين يصوروا الاشكال والتماثيل لكى يقرب عليهم فهم المعانى الدقيقة

« Ceci est la seconde espèce d'opérations fondées « sur la proportion. L'auteur a donné la figure des « plateaux comme un éclaircissement et une expli« cation en faveur des personnes qui étudient son « ouvrage. Et si vous dites : pourquoi l'auteur a-t-il « tracé cette figure dans son ouvrage, et pourquoi

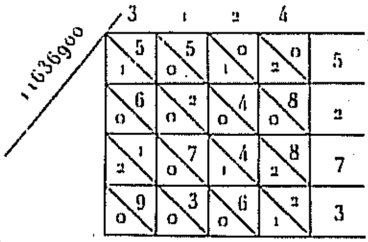
fol. 42 v°, lig. 10 et suiv. du manuscrit désigné par le n° 111, p. 108 du cahier de février-mars 1862 du *Journal asiatique*. Mais ces deux commentaires ne l'accompagnent d'aucune remarque propre à éclaircir le point dont il s'agit ici.

[1] *Al-cinâ'at al-hindaciyyat*, ce que l'on traduirait, suivant la manière ordinaire, par « l'art géométrique. »

[2] *Loc. laud.* fol. 58 r°, lig. 27, à fol. 58 v°, lig. 5.

« n'ont pas été tracées certaines autres, comme la « figure de la multiplication au moyen du tableau, « la figure du crible[1], et d'autres semblables, rela-

[1] Ce qu'Alkalaçâdî appelle « la multiplication au moyen du tableau » est une méthode de multiplication sur laquelle on trouve des recherches spéciales et très-étendues dans un ouvrage du prince Don Balthasar Boncompagni, intitulé *Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478*. Voir *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, t. XVI (année 1863), p. 330 et suiv. Voici un exemple de cette méthode, tiré du commentaire d'Alkalaçâdî et représentant la multiplication $3124 \times 3725 = 11636900$



Le crible auquel Alkalaçâdî fait allusion est le Crible d'Ératosthènes; par la figure du crible, il entend le tableau suivant, qu'il a donné dans une partie antérieure de son commentaire.

19	17	15	13	11	9	7	5	3
37	35	33	31	29	27	25	23	21
55	53	51	49	47	45	43	41	39
73	71	69	67	65	63	61	59	57
91	89	87	85	83	81	79	77	75
109	107	105	103	101	99	97	95	93
127	125	123	121	119	117	115	113	111
145	143	141	139	137	135	133	131	129

« tives à cette théorie? je réponds : Dieu seul connaît « la vérité; (mais je pense que) l'auteur, au moment « où il traita cette matière, était préoccupé de géo- « métrie, et il est d'habitude, chez les géomètres, « de tracer des figures et des images pour se faciliter « l'intelligence des théories subtiles. »

Je ne sais pas si le lecteur juge comme moi cette explication d'Alkalaçâdî, qui me semble faite au hasard et trop facile. Il n'y a rien de géométrique absolument dans la règle des deux fausses positions, telle qu'elle est pratiquée par les arithméticiens arabes [1]. D'autres considérations, au contraire, me semblent corroborer le sens que je donne au passage d'Ibn Albannâ, à savoir, que la règle des deux fausses positions est d'origine indienne.

Je ne peux pas développer ici ces arguments, car je dois terminer cette digression, devenue déjà trop longue. Mais je rappellerai du moins le titre d'un traité composé au moyen âge, qui a pour objet la résolution d'un grand nombre de problèmes au moyen de la règle des deux fausses positions, et dont on doit la connaissance à M. Libri [2]. Ce titre est conçu comme il suit : « *Liber augmenti et diminutionis vocatus* « *numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi po-* « *suerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum* « *qui Indorum dictus est composuit.* » Peu de lignes après

[1] Voir par exemple le deuxième chapitre de la quatrième partie du traité d'arithmétique d'Alkalaçâdi, *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, t. XII (année 1859), p. 416 à 418.

[2] *Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, t. I, Paris, 1838, in-8°, p. 304 à 371 et 124.

le commencement du traité, on trouve encore le passage suivant : « Hic post laudem Dei inquit. Com« pilavi hunc librum secundum quod sapientes In« dorum adinvenerunt de numeratione divinationis, « utilem, etc. »

J'ajouterai que je trouve dans le *Fihrist* la mention de deux traités « de l'augmentation et de la diminution » (في الجمع والتفريق), c'est-à-dire de la règle des deux fausses positions, par Send Ben Alî et par Sinân Ibn Alfath, précisément les mêmes qui avaient écrit aussi, comme nous l'avons vu ci-dessus, des traités de calcul indien. En outre le *Fihrist* mentionne un commentaire du calculateur et astronome Abdallah Ben Alhoçaïn Alçaïdanânî sur le « Traité de l'augmentation et de la diminution » de Mohammed Ben Moûçâ Alkhârizmî, l'auteur que nous pouvons considérer comme l'introducteur par excellence de l'astronomie, de l'algèbre et de l'arithmétique indiennes parmi les Arabes de l'Orient[1].

LES CHIFFRES INDIENS EN EUROPE.

Quoique l'unité de l'empire des khalifes fût rompue de bonne heure, les pèlerinages de la Mecque,

[1] Voir manuscrit 1400[2] supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris, fol. 121 r°, lig. 9, 128 r°, lig. 8 et 9, 127 r°, lig. 2 et 3. On trouve encore dans le *Fihrist* (même manuscrit, fol. 128 r°, lig. 3, et 128 v°, lig. 14 et 15) la mention de deux autres traités « de l'augmentation et de la diminution, » l'un par l'Égyptien Aboû Qâmil Chodjâa Ben Aslam, algébriste et calculateur célèbre, l'autre par Ahmed Ben Mohammed. (Comparez aussi la 2[e] section du III[e] chapitre de la Lîlâvati de Bhâskara, Colebrooke, *Algebra, etc.* p. 23 à 25.)

un commerce florissant, des voyages d'individus, des migrations de peuplades entières, et même des guerres, ne cessaient d'entretenir, entre les différentes contrées habitées par des musulmans, des relations nombreuses. Depuis que l'arithmétique indienne fut connue aux Arabes orientaux, elle dut donc s'introduire aussi tôt ou tard dans les pays arabes de l'Occident. L'extrême rareté des données relatives à ce fait de l'histoire des sciences ne nous permet pas d'en fixer l'époque avec précision, mais nous ne nous tromperons pas de beaucoup en considérant comme probable que les Arabes d'Afrique et d'Espagne reçurent l'arithmétique indienne dans le courant du x^e siècle de notre ère.

Nous ignorons encore si cette communication s'opéra au moyen de traités composés par des Arabes orientaux et transportés dans le Maghreb, ou au moyen de communications plus immédiates avec la science indienne, semblables à celles qui avaient eu lieu pour les Arabes de l'Orient, et dont il a été question ci-dessus. Toujours est-il à remarquer que l'arithmétique indienne eut cours chez les Arabes d'Orient sous le nom de « calcul indien, » tandis que les Arabes d'Afrique et d'Espagne l'appelèrent « calcul « de la poussière, » calcul du *gobâr*. J'ai fait connaître en divers endroits, dans les paragraphes précédents de ce mémoire [1], les données et les raisons qui me déterminent à considérer ce nom comme étant d'origine indienne, soit qu'on le rapporte à l'habitude de

[1] Voir p. 60, 64, 240, 241, 267, 276, 497.

calculer sur le sable, soit qu'on y voie une allusion au calcul du nombre des grains de poussière, qui paraît avoir joué dans l'Inde un rôle important[1]. J'ai fait observer aussi que le calcul gobâr est la vraie arithmétique indienne, comme le prouvent les traités de calcul gobâr eux-mêmes que nous connaissons, et comme le confirme la tradition des arithméticiens arabes de l'Occident, dont j'ai cité ci-dessus les témoignages.

Une fois connue, l'arithmétique indienne dut faire abandonner aux Arabes de l'Occident les méthodes difficiles et compliquées de l'Abacus, et rétablir chez eux le véritable usage du zéro. Mais quant aux figures des chiffres eux-mêmes, indifférentes pour

[1] On pourrait être tenté de ramener l'origine de ce nom aux Romains, qui avaient également l'habitude de calculer sur le sable. On trouve dans l'*Encyclopædia metropolitana* (vol. I. London, 1845, in-4°, p. 408) une suite de citations d'Horace, Perse, Martianus Capella, Cicéron, Tertullien, Juvénal, Pétrone, relatives à cette coutume. Il se pourrait donc que le nom de « calcul de la poussière » eût été usité chez les Romains pour désigner l'arithmétique pratique, et eût été donné aussi, dans la suite, à l'arithmétique perfectionnée des Néopythagoriciens; qu'il eût été transmis avec celle-ci aux Arabes de l'Afrique et de l'Espagne, lesquels enfin l'auraient appliqué aux méthodes indiennes, après avoir appris à connaître ces dernières. Cette conjecture aurait l'avantage d'indiquer une cause déterminée de la différence qui existe entre les noms de l'arithmétique indienne chez les Arabes de l'Occident et chez ceux de l'Orient. Mais elle repose sur trop d'hypothèses superposées les unes aux autres, pour être adoptée, tant qu'elle ne sera pas corroborée par des données positives. Les faits actuellement connus, tels que je les ai exposés, sont en faveur d'une origine indienne du nom en question, et prouvent du reste que l'usage de calculer sur le sable a existé aussi bien chez les Indiens que chez les Romains.

la facilité de l'emploi de l'une ou de l'autre méthode; il était plus commode, au contraire, de conserver celles que les Arabes avaient adoptées des peuples latins, et auxquelles un long usage les avait habitués. Nous avons vu, en outre, qu'au x^{e} siècle, les formes des chiffres arrivés de l'Inde aux Arabes d'Orient ne différaient encore que pour quatre sur neuf des formes plus anciennes qu'avaient reçues autrefois les Néopythagoriciens.

Les Arabes d'Espagne, calculateurs habiles et astronomes zélés à une époque où le moyen âge chrétien se débat encore dans les ténèbres de la barbarie, maniant les chiffres d'autant plus activement que les nouvelles méthodes indiennes rendaient les calculs plus faciles, donnèrent peu à peu aux figures qui avaient été pour les Néopythagoriciens encore une sorte de symboles philosophiques cette forme cursive que nous présentent les chiffres gobâr.

C'est cette même forme cursive des chiffres que nous voyons tout à coup paraître chez les peuples chrétiens de l'Europe au XIII^{e} siècle, et se répandre chez eux sous le nom de *chiffres arabes*, parce qu'elle leur était venue des Arabes d'Espagne.

En effet, dès la fin du XI^{e} siècle, le contact de l'Occident avec l'Orient, amené par les croisades, dut éveiller l'attention des savants chrétiens et diriger leurs aspirations vers le monde arabe. Ils s'étaient sentis enchaînés jusqu'alors, malgré leurs efforts les plus pénibles, dans le cercle étroit des débris de la science grecque, altérés encore par des polygraphes latins, que l'antiquité expirante leur avait laissés. Ils durent maintenant désirer d'autant plus vivement de participer aux trésors intellectuels de la civilisation supérieure qu'ils commencèrent à entrevoir chez les peuples musulmans.

Cependant l'Orient même, mille fois plus éloigné dans ces temps de désordre et de violence que ne le sont aujourd'hui les points les plus distants du globe, but seulement de grandes entreprises guerrières, était à peu près inaccessible aux paisibles savants. L'Espagne seule réunissait, par une rare combinaison de circonstances exceptionnelles, les avantages d'être un pays chrétien, suffisamment rapproché, et d'offrir dans Tolède, conquise en 1085, un foyer et une école de la science des Arabes.

C'est là que se rendit d'Angleterre, en 1130, Adélard de Bath, désireux d'étudier les sciences mathématiques aux sources arabes; et l'exemple du célèbre traducteur fut suivi par Robert de Reading, William Shelley et Daniel Morley ses compatriotes, en 1140, 1145 et 1180[1]. C'est là aussi que l'Italie envoya Gérard de Crémone, né en 1114 et mort en 1187, qui y apprit l'arabe et employa dès lors toute sa vie à traduire de l'arabe en latin un grand nombre d'ouvrages dont M. le prince Boncompagni a publié la liste d'après un manuscrit de la Bibliothèque du Vatican[2].

[1] Voir Wallis, *De Algebra tract. hist. et pract.* Operum math. t. II, p. 12 et 5, 6.

[2] *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese traduttore del se-*

C'est de là enfin que se répandit, chez les nations chrétiennes, la première connaissance de l'arithmétique indienne sous le nom d'*Algorisme*.

Un des premiers traités d'Algorisme est probablement celui de Jean de Séville, auteur qui vécut en Espagne dans la première moitié du XII[e] siècle[1]. J'ai déjà dit que ce n'est encore, en grande partie, qu'une reproduction plus développée du traité d'Alkhârizmî[2], et les expressions du commencement : « Incipit « prologus in libro alghoarismi de pratica arisme« trice. Qui editus est a magistro Johanne yspalensi[3], » paraissent indiquer que l'auteur lui-même ne présentait son ouvrage que comme une édition du traité arabe appropriée à l'usage de ses contemporains. Le nom *Alghoarismi* ou *Algoarismi*[4] est la transcription presque exacte[5] du nom arabe الخوارزمي dont la transcription la plus naturelle devait être *Alchoarismi*, en rendant le و par *o* et le ا par *a*. On trouve effectivement la forme *Alchoarismi* dans la liste ci-dessus

colo duodecimo e di Gherardo da Sabbionetta astronomo del secolo decimoterzo. Notizie raccolte da Baldassarre Boncompagni. Roma, 1851, in-fol. p. 4 à 7.

[1] Comparer *Journal asiatique*, cahier de février-mars 1862, p. 115 à 117.

[2] On peut conclure de là que le traité d'Alkhârizmî existait en Espagne dans la première moitié du XII[e] siècle.

[3] *Trattati d'aritmetica*, p. 25, lig. 6 et 7.

[4] *Loc. laud.* p. 25, lig. 22.

[5] Je fais observer qu'une transcription *presque exacte* est une transcription *extrêmement exacte* au moyen âge, où l'on rend « Aboû-becr » par *Albubater*, « Aboû-merwân » par *Abhomeron*, « Ibn Rochd » par *Averroes*, « Aboûl-Haçan » par *Elluchasem*, etc.

mentionnée des traductions de Gérard de Crémone. Cependant la forme latine la plus habituelle de ce nom, et en même temps le titre usuel des traités d'arithmétique indienne écrits dans l'esprit de ceux d'Alkhârizmî et de Jean de Séville, devint *Algorismus*. C'est dans ces traités d'Algorisme que commence à paraître, au moyen âge, le nom des Indiens, de même que dans les traductions latines faites sur l'arabe dont le XII[e] siècle est la grande époque. La tradition indo-arabe remplace depuis ce temps la tradition gréco-latine.

Une fois que l'impulsion était donnée, l'Europe dut connaître l'arithmétique indienne sous une forme encore plus parfaite que n'en présentaient le traité d'Alkhârizmî et ses imitations. Des méthodes plus élégantes et plus expéditives que celles que Mohammed Ben Moûçâ avait enseignées aux Arabes d'Orient avaient existé peut-être dans l'Inde dès cette époque, ou peut-être n'y avaient été inventées que depuis, mais s'étaient répandues dans la suite des temps chez les Arabes. Léonard de Pise, que ses voyages avaient conduit dans le nord de l'Afrique, en Égypte et en Syrie, en rapporta la connaissance de ces méthodes indiennes perfectionnées, et les exposa pour la première fois dans son grand traité d'arithmétique et d'algèbre, intitulé *Liber Abbaci*[1] et terminé en 1202.

[1] Ce mot ne signifie plus ici que « calcul » et ne doit pas faire supposer que les méthodes enseignées dans cet ouvrage sont celles de l'ancien système de l'Abacus.

J'ai tâché de montrer à un autre endroit[1] en quoi consiste la différence des méthodes indiennes d'Alkhârizmî et de Léonard de Pise, et la supériorité de ces dernières. Je ne reviendrai donc pas sur cette question, qui d'ailleurs est étrangère à l'objet du présent mémoire. Mais je citerai, d'après l'édition de M. le prince Boncompagni, le passage du *Liber Abbaci* relatif aux chiffres, qui forme le commencement du premier chapitre de cet ouvrage[2].

« Novem figuræ Indorum hæ sunt :

9 8 7 6 5 4 3 2 1

« cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, « quod arabice zephirum appellatur, scribitur qui- « libet numerus. »

Je ferai observer d'abord que, dans le manuscrit n° 21 classe XI de la Bibliothèque Magliabechiana de Florence[3], un de ceux dont M. le prince Boncompagni s'est servi pour son édition du *Liber Abbaci*, les neuf chiffres du passage ci-dessus paraissent avoir tout à fait la forme des chiffres gobâr. Léonard de Pise avait appris à connaître ces chiffres à Bougie, où son père, envoyé par la ville de Pise pour y veiller aux intérêts du commerce pisan, l'avait fait venir afin d'apprendre l'arithmétique indienne[4]. Les pas-

[1] *Mém. sur l'introd. de l'arithmétique indienne en Occident*, p. 46 et 47.

[2] *Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano pubblicato da Baldassarre Boncompagni.* Roma, 1857, in-4°, p. 2.

[3] Je dois à la bienveillante courtoisie de M. le prince Boncompagni la possession d'une copie de ce précieux manuscrit.

[4] *Il Liber Abbaci*, p. 1. « Cum genitor meus a patria publicus

sages ci-dessus traduits (p. 58 à 68) expliquent pourquoi Léonard de Pise appelle ces chiffres « les figures des Indiens. »

J'appellerai ensuite l'attention du lecteur sur la transcription « zephirum » du mot arabe *cifron* صِفْرٌ « vide » lequel est, à son tour, la traduction du mot sanscrit *çoûnya*. Je dois dire que je vois dans cette transcription « zephirum, » dont la forme italienne était « zefiro, » l'origine du mot zéro [1], que nous trouvons sous cette dernière forme dans le traité de Calandri, imprimé à Florence en 1491 [2]. On y lit (fol. 4 v°, lig. 1 à 3) :

« Sono dieci le figure con le quali ciascuno numero si può significare : delle quali n' è una che « si chiama zero : et per se sola nulla significa : ma « con qual vuoi dell' altre copulata a quella da maggior significato. »

L'introduction du mot zéro dans la langue française est probablement un des effets de l'influence prépondérante qu'avait acquise en France la civilisation italienne au XVI[e] siècle.

On incline encore davantage à considérer *zero* comme une modification de *zefiro* et *zephirum*, lors-

« scriba in duana bugee pro pisanis mercatoribus ad eam confluentibus constitutus preesset, me in pueritia mea ad se uenire faciens, « inspecta utilitate et commoditate futura, ibi me studio abbaci per « aliquot dies stare uoluit et doceri. Vbi ex mirabili magisterio in « arte per nouem figuras Indorum introductus, etc. »

[1] Cette étymologie a été proposée déjà par M. Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. II, p. 29.

[2] Philippi Calandri *de Arithmetrica opusculum.*

qu'on songe que le *Liber Abbaci* fut la source principale et presque unique où puisèrent, jusqu'à l'époque de la renaissance, les auteurs des traités d'arithmétique italiens, et que ces traités ne sont presque tous que des copies plus ou moins fidèles, plus ou moins abrégées du grand ouvrage de Léonard de Pise.

Les vastes recherches que M. le prince Boncompagni a entreprises sur toutes les parties de l'histoire des sciences mathématiques en Italie doivent le mettre en état de décider mieux que personne cette intéressante question de l'origine du mot zéro, en suivant, à travers les traités d'arithmétique italiens des XIII^e^, XIV^e^ et XV^e^ siècles, les diverses transformations par lesquelles *zefiro* s'est changé en *zero*. Ce serait un beau résultat que de mettre fin aux incertitudes et aux conjectures auxquelles donne lieu encore le nom d'un signe qui est certainement un des plus importants de ceux qu'emploient les mathématiques.

On a voulu dériver le mot zéro de l'arabe صِحْرٌ *cihron*[1], mais je considère cette étymologie comme complétement inadmissible. Il est vrai que le Dictionnaire de Freytag porte, à l'article صِفْرٌ entre autres, « صِفْرٌ صِحْرٌ prorsus vacuus. *Hamas.* » et que le même « صِفْرٌ صِحْرٌ prorsus vacuus, quite empty, etc. » est donné aussi par Meninski et d'autres dictionnaires.

[1] Le *h* a ici le son très-perceptible d'une aspiration dure presque semblable au *ch* allemand.

Mais cette combinaison des mots *cifron cihron*, qui est sans doute une de ces allitérations dont les Arabes se servent pour exprimer une idée avec plus d'emphase, peut très-bien se trouver dans un recueil de poésies comme l'*Hamâsa*, sans qu'il s'ensuive le moins du monde que le mot *cihron*, devant servir à renforcer, dans cette combinaison particulière, le son du mot *cifron*, ait été employé, par les arithméticiens arabes, comme terme technique synonyme de ce dernier. Je peux assurer du moins que j'ai rencontré, dans les traités arabes relatifs aux mathématiques, constamment le mot *cifron*, pour exprimer zéro, mais pas une seule fois le mot *cihron*.

Ce qui est certain, c'est que de صِفْرٌ *cifron* dérive le mot *chiffre*, qui est devenu, dans la plupart des langues européennes, la dénomination commune des dix signes dont le zéro est le plus important au point de vue de la notation. Cependant cet emploi du mot *chiffre* ne s'est pas introduit sans laisser des traces très-marquées de la signification primitive de *cifron*. Ainsi, en anglais, le mot *cipher* est resté le terme propre pour désigner zéro, tandis que dans le sens de chiffre, caractère numérique, on se sert de préférence du mot *figure*[1]. En portugais, *cifra* a parfaitement conservé le sens de zéro à côté de celui de chiffre. En suédois, pour exprimer qu'un homme est nul, on dit : *han är just en siffra*. En français, où

[1] Cela est tout à fait conforme à l'usage arabe des mots صفر et شكل, et à l'usage italien des mots *zero* et *figura*.

maintenant le souvenir que le mot chiffre ait jamais signifié zéro est complétement effacé, cette signification a existé autrefois. Ainsi on trouve le mot *chiffre* employé plusieurs fois, dans le sens de zéro, dans un morceau relatif à l'arithmétique pratique, écrit en vieux français, et contenu dans un manuscrit du xv^e siècle, coté ancien fonds latin n° 7352 de la Bibliothèque impériale de Paris[1]. Comme il s'agit, dans le passage auquel je fais allusion, de l'explication en paroles d'un exemple de multiplication numérique, il n'y a pas d'ambiguïté possible relativement au sens que le mot chiffre doit avoir. Je crois aussi être sûr d'avoir remarqué un emploi semblable du mot *ziffer* dans des ouvrages allemands du xvi^e siècle, mais je me trouve en ce moment privé des moyens de vérifier le fait.

Les méthodes indiennes que Léonard de Pise avait fait connaître dans le *Liber Abbaci* furent exposées aussi par Maxime Planude, moine grec du xiv^e siècle[2], dans sa Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς. J'ai publié ailleurs les passages les plus importants de Planude relatifs à ces méthodes, et je me borne ici à reproduire les quelques lignes de son ouvrage qui concernent les chiffres[3] :

[1] Voir l'ouvrage ci-dessus cité du prince Boncompagni, *Atti dell' Accad. Pontif. de' Nuovi Lincei*, t. XVI (1863), p. 397, lig. 49 et 55.

[2] Voir Harles, *Bibliotheca græca*, t. XI, Hamburgi, 1808, in-4°, p. 682, 690, 691. D'après Halma (*Compos. math. de Ptolémée*, t. I. Paris, 1813, in-4°, p. LII), le calcul indien se trouverait déjà dans un manuscrit grec du xii^e siècle.

[3] Manuscrits ancien fonds grec de la Bibliothèque impériale de

« Les figures sont au nombre de neuf seulement.
« Ce sont les suivantes : ١. ٢. ٣. ٤. ٥. ٦. ٧. ٨. ٩. On pose « encore un autre signe que l'on appelle *tziphra*, et « qui, d'après les Indiens, signifie « rien [1]. » Les neuf « figures mêmes sont aussi indiennes, et la *tziphra* « s'écrit comme il suit : o. »

Les figures des chiffres, dans ce passage, sont celles des chiffres indiens des Arabes orientaux. On en trouve des fac-simile à la page 27 du mémoire ci-dessus cité Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident.

Nous avons déjà vu [2] que les chiffres du moine Néophytos sont également les chiffres indiens des Arabes orientaux, et pareils à ceux de Planude, si ce n'est que le quatre et le cinq ont respectivement les formes S et O. Cette forme du quatre paraît correspondre à la variante ٤ du quatre qui existe chez les Arabes orientaux. Quant au zéro, que Néophytos appelle *τζύφρα* ou *τζύμφρα*, la manière dont ce signe est figuré dans les manuscrits 1928 et 2350 de l'an-

Paris, n° 2428, fol. 186 r°, lig. 7 à 11; n° 2382, fol. 1 r°, lig. 6 à 10; n° 2509, fol. 97 r°, lig. 6 à 10; n° 2381, fol. 3 r°, lig. 3 à 5 :

Εἰσὶ δὲ τὰ σχήματα ἐννέα μόνα· ἃ καὶ εἰσὶ ταῦτα ١. ٢. ٣. ٤. ٥. ٦. ٧. ٨. ٩. *τιθέασι δὲ καὶ ἕτερόν τι σχῆμα ὃ καλοῦσι, τζίφραν· κατ' Ἰνδούς, σημαῖνον οὐδέν· καὶ τὰ ἐννέα δὲ σχήματα, καὶ αὐτὰ ἰνδικά ἐστιν· ἡ δὲ τζίφρα, γράφεται οὕτως o.*

[1] Je traduis ici « rien » pour rendre le texte littéralement. Mais on voit par la suite du traité que *οὐδέν* signifie, chez Planude, en réalité « zéro. » Ainsi, pour exprimer « je pose zéro, » il dit *γράφω οὐδέν*; pour exprimer « je ne pose rien, » il dit *οὐ γράφω τι*.

[2] P. 244, 245 et 484, 485.

cien fonds grec de la Bibliothèque impériale a été discutée précédemment.

Les noms τζίφρα et τζύφρα, transcriptions de l'arabe صِفْرٌ cifron, montrent que les Grecs byzantins reçurent l'arithmétique indienne par l'intermédiaire des Arabes; et la forme des chiffres de Planude et de Néophyte confirme ce que la nature des choses nous aurait déjà conduits à supposer, à savoir, que les Arabes qui transmirent aux Grecs les chiffres indiens furent ceux de l'Orient. D'autre part, les chiffres des deux moines grecs prouvent en quelque sorte que ce n'est pas par l'intermédiaire des Arabes de l'Orient que l'Occident chrétien a reçu ses chiffres, parce que ceux-ci devraient, en ce cas, ressembler aux chiffres des Arabes orientaux, comme les chiffres de Planude et de Néophyte.

Ainsi, dès le XIVe siècle, l'Europe chrétienne entière est en possession des chiffres indiens, adoptés sous la forme usitée chez les Arabes orientaux par les Grecs byzantins, sous la forme ancienne des Néopythagoriciens, rendue plus cursive par les Arabes occidentaux, chez les nations catholiques. Un siècle plus tard, cette dernière forme, destinée à être, dans la suite, la seule employée en Europe, est fixée par l'imprimerie [1].

Cet art nouveau et la prépondérance qu'acquiert en Europe, depuis les temps de la renaissance, le

[1] Dans l'ouvrage ci-dessus cité de Calandri, imprimé à Florence en 1491, les chiffres ont déjà identiquement la même forme que dans nos impressions d'aujourd'hui.

développement des sciences mathématiques, contribuent à rendre, dans l'Occident, l'usage des chiffres plus vulgaire et infiniment plus étendu qu'il ne l'est devenu chez les Arabes. Le XVII^e^ siècle surtout crée à la fois des moyens nouveaux à l'analyse, et donne aux calculs une facilité et une portée inconnues jusqu'alors, par l'invention des logarithmes. Ces découvertes jettent les bases de l'influence toujours croissante que les mathématiques, et les sciences exactes en général, prennent par leurs applications dans la vie pratique, influence dont les chiffres sont pour ainsi dire le symbole visible. Au XVIII^e^ siècle, la participation des personnes privées aux intérêts de la fortune publique et à de grandes opérations financières commence à constituer une autre de ces faces de la société moderne auxquelles les chiffres servent de langage, et dont l'importance se fait sentir à chacun. Bientôt après naît aussi cette tendance tout européenne des individus à se rendre compte des conditions d'existence des grands corps sociaux dont ils font partie, tendance qui aboutit à ces sciences composées de chiffres que nous appelons la statistique et l'économie politique.

En Orient, au contraire, par suite d'un penchant à la forme parlée particulier aux mathématiciens arabes[1], nous rencontrons à différentes époques, et

[1] On remarque aussi cette disposition, contraire à l'emploi de notations, chez les algébristes arabes, car, quoiqu'une notation algébrique ait été inventée par les Arabes occidentaux (voir *Journ. asiat.* cahier d'octobre-novembre 1854, p. 348 et suiv.), elle n'a été que

jusqu'aux XVe et XVIe siècles, des traités d'arithmétique arabes, où les nombres qui se présentent à chaque ligne sont écrits tout au long par des numératifs où il n'est pas fait usage d'un seul chiffre, quoique des traités d'arithmétique soient assurément, de tous les ouvrages imaginables, ceux où l'emploi des chiffres serait le plus naturel et paraîtrait presque inévitable. J'ai déjà mentionné que, pour les tables astronomiques, la notation alphabétique est restée, chez les Arabes, presque la seule en usage. Enfin, pour la gestion des finances et les transactions commerciales, un certain besoin de cacher au vulgaire les secrets de l'administration, ou au public le montant des opérations du négociant, fit adopter des notations comme les chiffres dîwânî et siyâk. Toutes ces circonstances, jointes aux causes générales qui ont arrêté en Asie la civilisation au niveau intellectuel du moyen âge, ont empêché les chiffres indiens d'être, dans l'Orient, universellement et exclusivement employés, comme ils le sont actuellement en Europe.

peu développée, et aucune notation algébrique proprement dite ne paraît avoir été employée par les Arabes d'Orient, qui ont exprimé dans leurs traités d'algèbre, au moins dans ceux connus jusqu'à présent, toutes les opérations par des mots, quoique étant voisins de l'Inde, où ils pouvaient trouver des commencements d'une notation algébrique.

ERRATA.

Page 237, ligne 5, lisez « Walid » au lieu de « Wâlid. »

Page 276, ligne 9, lisez « en s'en servant beaucoup » au lieu de « par des efforts constants. »

فهرس المحتويات

طبع في ١٠٠ نسخة

نشر بمعهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
بفرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية
طبع في مطبعة شتراوس، مورلنباخ، ألمانيا الاتحادية

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٣

محمد بن موسى الخوارزمي

(نشط نحو ٢٠٠هـ)

نصوص ودراسات

القسم ١

جمع وإعادة طبع

فؤاد سزكين

بالتعاون مع

كارل إيرج-إيجرت، مازن عماوي، إكهارد نويباور

١٤١٨هـ - ١٩٩٧م

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

يصدرها

فؤاد سزكين

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٣

محمد بن موسى الخوارزمي (نشط نحو ٢٠٠هـ)

نصوص ودراسات

القسم ١

جمع وإعادة طبع

١٤١٨هـ - ١٩٩٧م
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

سلسلة الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

المجلد ٣