Veröffentlichungen des Institutes
für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften
Reihe B · Abteilung Mathematik
Band 4,1

# Veröffentlichungen des Institutes für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften

Herausgegeben von
Fuat Sezgin

Reihe B · Nachdrucke

## ABTEILUNG MATHEMATIK

Band 4,1

Carl Schoy

# Beiträge zur arabisch-islamischen Mathematik und Astronomie

Erster Band

1988

Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften
an der Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

## CARL SCHOY

# BEITRÄGE ZUR ARABISCH-ISLAMISCHEN MATHEMATIK UND ASTRONOMIE

Nachdruck von Schriften aus den Jahren 1911-1926

Erster Band

herausgegeben von
Fuat Sezgin

in Zusammenarbeit mit
C. Ehrig-Eggert und E. Neubauer

1988

Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften
an der Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

In 100 Exemplaren gedruckt

Published by
Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften,
Frankfurt am Main.

Printed in Germany by Strauss Offsetdruck GmbH, Hirschberg.

# EINLEITUNG DES HERAUSGEBERS

Wenn Wissenschaftshistoriker heute einen eigenen Beitrag der Araber und Muslime auf den Gebieten Mathematik und Astronomie anerkennen, nachdem das Urteil ihrer Vorgänger hierüber im 18. Jahrhundert noch negativ gelautet hatte, so gebührt das Verdienst für diesen Anschauungswandel einer kleinen Zahl von Arabisten, die ihre Werke mit Geduld, Opferbereitschaft und Begeisterung hervorgebracht haben. Angeführt wurde ihre Reihe von den beiden französischen Arabisten Jean-Jacques und Louis-Amélie Sédillot in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Es folgte ihnen, ebenfalls in Paris, der Deutsche Franz Woepcke, der in einem Zeitraum von zehn Jahren in der Mitte des gleichen Jahrhunderts nahezu vierzig originelle und gehaltvolle Beiträge lieferte.[1]

Im ersten Viertel unseres Jahrhunderts ging dann die Führung in der Erforschung der arabisch-islamischen Mathematik- und Astronomiegeschichte auf den Schweizer Arabisten Heinrich Suter[2] über und auf den Deutschen Carl Schoy, dessen Werke in den beiden vorliegenden Bänden gesammelt sind.

Carl Schoy wurde 1877 in Bittelschies, Hohenzollern, geboren. Er studierte Astronomie, Mathematik und Physik an der Universität München. Sein Interesse an Wissenschaftsgeschichte wurde geweckt und entwickelte sich unter dem Einfluß des Geographiehistorikers S. Günther, des Mathematikhistorikers A. von Braunmühl und des Astronomen H. von Seeliger, und es führte ihn zum Studium des Arabischen. Eine glückliche Fügung ließ ihn 1917 in Tübingen die Bekanntschaft des Arabisten Chr. Seybold machen, dessen Spezialgebiet die Geographie bei den Arabern und Muslimen war. Ihre Verbundenheit wirkte prägend auf Schoys spätere Arbeiten.

Wie sein älterer Kollege Suter, so stützte sich auch Schoy in seinen Studien auf noch unveröffentlichte astronomische und mathematische Handschriften. Während jedoch Suters Interesse, neben thematisch engeren Studien, darauf gerichtet war, bio-bibliographische Werke zugänglich zu machen, wandte Schoy sich dem Studium eines neuen Gebietes zu, der mathematischen Geographie bei den Arabern und Muslimen.

Die jüngere wissenschaftsgeschichtliche Forschung verlor mit dem Tode Carl Schoys im Dezember 1925 einen der wenigen Gelehrten, die sich ganz der Mathematik, der Astronomie und der Geographie im arabisch-islamischen Bereich gewidmet haben. Er hinterließ uns als Resultat seiner zeitlich so begrenzten Tätigkeit eine nicht geringe Anzahl von Studien, die er unter harten materiellen und gesundheitlichen Umständen vollendete, wie wir im Nachruf seines Freundes, des Arabisten Julius Ruska, lesen, den wir im Anschluß an diese Einleitung wiedergeben.

Abschließend möchte ich den Mitarbeitern am Institut meinen Dank dafür aussprechen, daß sie dazu beigetragen haben, diese Studien durch ihre Sammlung und Neuveröffentlichung leichter zugänglich zu machen.

Frankfurt, im September 1987 Fuat Sezgin

---

(1) Ein Nachdruck gesammelter Schriften Woepckes erschien in den Veröffentlichungen unseres Institutes: *Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques. Nachdruck von Schriften aus den Jahren 1842-1874*, ed. Fuat Sezgin. 2 Bde. Frankfurt: IGAIW 1986.

(2) Nachdruck seiner Werke: *Beiträge zur Geschichte der Mathematik und Astronomie im Islam. Nachdruck seiner Schriften aus den Jahren 1892-1922*, ed. Fuat Sezgin. 2 Bde. Frankfurt: IGAIW 1986.

Carl Schoy

(1877 - 1925)

# KARL SCHOY ZUM GEDÄCHTNIS

Am 9. Dezember hat man in Frankfurt am Main die sterblichen Reste eines Mannes bestattet, der erst seit wenigen Wochen dem Lehrkörper der Universität angehörte, aber in dem kleinen Kreise derer, die seine Arbeiten würdigen konnten, schon lange als ausgezeichneter Forscher geschätzt war. Als praktischer Astronom ausgebildet und zugleich des Arabischen kundig, war Professor Karl Schoy der geborene Erforscher der Geschichte der arabischen Astronomie, dem nur der vor zwei Jahren verstorbene Züricher Gelehrte H. Suter an die Seite gestellt werden konnte. Schoy hat unsere Einsicht in die Entwicklung astronomischer und trigonometrischer Probleme bei den Arabern in einer Reihe von grundlegenden Arbeiten gefördert, bis ein allzu früher Tod ihn noch vor der Vollendung des 49. Lebensjahres den Seinen und der Wissenschaft, der zu dienen sein Lebensinhalt war, entrissen hat. Die Deutsche Gesellschaft für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften hat durch mich an der Bahre des Entschlafenen einen Kranz niederlegen lassen. Mag es mir vergönnt sein, dem schlichten, feinen Menschen und dem unersetzlichen Gelehrten auch in der weitern Öffentlichkeit ein Wort freundlichen Gedenkens nachzurufen. Einem schwäbischen Lehrerhause entsprossen - er wurde am 7. April 1877 zu Bisingen unweit Sigmaringen geboren -, verdankte K. Schoy der beschaulichen Ruhe dörflicher Verhältnisse, der landschaftlich schönen Umgebung am Nordfuß der Alb, einem geistig hochstehenden Vater und einer geliebten Mutter die ersten entscheidenden Eindrücke fürs Leben. Das zweite von vier Kindern, drei Brüdern und einer Schwester, wurde er wie sein älterer Bruder dem Lehrerberuf seines Vaters zugeführt und auf dem alten badischen Lehrerseminar in Meersburg ausgebildet. Aber sein Wissensdurst trieb ihn nach kurzer Tätigkeit aus dem Schuldienst heraus. Der Sternhimmel mit seinen Geheimnissen hatte schon des Knaben Seele erfüllt, und Blumen und Tiere waren seine stille Liebe gewesen. So wollte er Naturwissenschaften, vor allem Astronomie und Physik, studieren. Nach bestandenem Gymnasialabitur ging er nach München, dort ging ihm eine neue Welt auf. Seeliger, der Astronom, Günther und v. Braunmühl waren seine wichtigsten Lehrer; Seeliger wurde ihm ein väterlicher Freund und Ratgeber, die beiden andern lenkten ihn früh auf geschichtliche Probleme. Schoy legte nun die Prüfung für das höhere Lehramt ab und brachte einige Jahre im badischen Schuldienst zu. Die Berufsüberfüllung veranlaßte ihn, auch das preußische Staatsexamen nachzuleisten und in Essen 1909 am städtischen Gymnasium eine Stelle anzunehmen. In München hatte er sich den Dr.-Ing. erworben, in Heidelberg promovierte er 1913 mit einer Arbeit über die Gnomonik der Araber. Ein früh einsetzendes Nierenleiden, dem später noch andere quälende Krankheiten, besonders ein schweres Magenleiden, folgte, hat seine Arbeitskraft wohl schwächen, seinen Idealismus und seinen Forschergeist aber nicht niederbeugen können. Eine ihm geistig ebenbürtige Lebensgefährtin gefunden zu haben, die in aufopfernder Liebe alles Schwere tragen half, ist das große Glück seines kurzen Lebens gewesen. Es muß Fachzeitschriften überlassen bleiben, seiner wissenschaftlichen Arbeit im einzelnen zu gedenken. In den wenigen Mußestunden, die der Unterricht ließ, einem kranken und erholungsbedürftigen Körper abgerungen, lassen sie ahnen, was Schoy der Wissenschaft hätte sein können, wenn ihm rechtzeitig Hilfe geworden wäre. Als man endlich daran dachte, etwas zu tun, war es schon zu spät. Eine Berufung nach Berlin mußte Schoy mit Rücksicht auf seine Gesundheit ausschlagen, den von der Universität Frankfurt an ihn gelangten Lehrauftrag für Geschichte der exakten Wissenschaften im Orient hat er nur fünf Wochen lang lehrend ausfüllen können. Wie viel er zu geben wußte und wie viel Anregung von ihm ausging, hat Professor Dehn in bewegten Worten an der Bahre des Verewigten ausgesprochen. Möchte wenigstens alles, was von seinen Arbeiten im wesentlichen vollendet vorliegt, durch Eingreifen einer Akademie zum Druck befördert und dadurch der Wissenschaft gerettet werden.

Julius Ruska

Aus: Heidelberger Tageblatt vom 11. Dezember 1925.

# INHALTSVERZEICHNIS

## Erster Band

Kaiserliche Marine.
Deutsche Seewarte.

---

AUS DEM
ARCHIV DER DEUTSCHEN SEEWARTE.
XXXIV. JAHRGANG 1911.

Nr. 2.

# Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhenbestimmungen bei den älteren Völkern.

Von

**Carl Schoy,**
Oberlehrer am städtischen Gymnasium zu Essen, Ruhr.

---

(Mit einer Tafel.)

---

HAMBURG 1911.

## Nr. 2.

# Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhenbestimmungen bei den älteren Völkern.

(Mit einer Tafel.)

---

## Einleitung.

In seinen „Beiträgen zur Nautischen Astronomie“ (Rechnerische Behandlung einiger Gruppen theoretisch möglicher Fälle der Polhöhenbestimmung) („Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte“, 1910, Nr. 1) hatte der Verfasser (S. 10) angekündigt, eine spezielle Studie darüber anzustellen, wie in der praktischen Astronomie und Nautik die Ortsbestimmung sich im Laufe der Zeiten entwickelt hat. Diese Absicht hat er in der vorliegenden Arbeit zum Teil verwirklicht durch Darstellung der verschiedenartigen, oft nicht uninteressanten Methoden zur Ermittlung der Breite eines Ortes bei den Griechen, Indern und Arabern. Der ursprüngliche Plan, den Gegenstand bis in die neuesten Zeiten fortlaufend zu behandeln, erschien bei der Fülle des Materials auf einen Wurf nicht durchführbar; auch spricht eine unausbleibliche, durch das Thema selbst bedingte Heterogeneität des Inhalts für seine Zweiteilung, und so soll die zweite, viel umfangreichere Hälfte in einem späteren Abschnitt behandelt werden. Außerdem ergibt sich auch bei Vorführung der zahlreichen konstruktiv-gnomonischen Verfahren des Spätarabers Abul Hassan von Marokko († ca. 1250) inhaltlich wie formell eine deutliche Cäsur.

Daß die Arbeit dieselben Schwierigkeiten verursachte, auf die sich der historische Forscher in den älteren Zeiten bei der nur lückenhaft erhaltenen und oft schwer zugänglichen Literatur stets geführt sieht, war von vornherein zu erwarten. Außereuropäischer Sprachen nicht mächtig, war der Verfasser auf die leider noch sehr spärlichen Übersetzungen indischer und arabischer Handschriften angewiesen. Da unseres Wissens bis jetzt noch kein Versuch einer Darstellung der Geschichte der Breitenbestimmungen vorliegt, so stellt die Arbeit vollständiges Neuland dar, und wir haben den Mangel an jeglicher Vorarbeit oft genug dadurch empfunden, daß wir eine sehr große Zahl von Schriften, die für unser Thema etwas Wertvolles zu enthalten schienen, vergeblich durchblätterten. Hätten wir uns nicht der brieflichen Unterstützung bekannter Fachmänner in so reichlichem Maße zu erfreuen gehabt, wäre uns selbst diese in allen Teilen noch mangelhafte und unvollständige Durchführung der Arbeit unmöglich geworden. Wir erwähnen gerne und dankbarst der Aufklärungen des Herrn Geheimrats M. Cantor (Heidelberg), des Herrn Geheimrats S. Günther (München), des Hochwürdigen Herrn Paters Professor F. X. Kugler (Valkenburg in Holland), des Herrn Geh. Regierungsrats Professor H. Martus (Halensee), des Herrn Professors H. Suter (Zürich) und des Herrn Professors E. Wiedemann (Erlangen). Während er den beiden letztgenannten Herren zahlreiche Literaturangaben der arabischen Zeit verdankt, hat ihn aber in erster Linie Herr Geheimrat Günther, dessen Anregung das Entstehen der Arbeit zuzuschreiben ist, sowohl mit seinem reichen Wissen als auch durch Beibringung von Literatur vielfach unterstützt. In dieser Hinsicht leisteten ihm auch die Herren Dr. A. Wedemeyer (Berlin) und Professor A. Wolfer, Direktor der Sternwarte (Zürich), die dankenswertesten Dienste, die er bei seiner großen Entfernung von bedeutenden Bibliotheken, welche vorwiegend in Frage kamen, besonders zu schätzen weiß.

Wir haben es grundsätzlich vermieden, in den Text Vermutungen und problematische Darstellungen einzubeziehen. Wir begnügen uns damit, an dieser Stelle zu erwähnen, daß die Babylonier und Chaldäer nach den Aufhellungen durch Pater F. X. Kugler eine ganz entwickelte Sternkunde gehabt haben müssen. Nach einer gütigen brieflichen Mitteilung Herrn P. Kuglers an den Verfasser läßt sich für Babel ein Maximaltag von $14^h\ 24^m$ aus babylonischen Tafeln nachweisen. Seine Dauer ist wohl unmittelbar durch Beobachtung (mit einer Wasseruhr) bestimmt worden. Daß man in Babel die bei den Indern befolgte Methode der Polhöhenbestimmung angewandt habe, ist nach Kugler a priori wahrscheinlich, aber aus keiner der ihm zugänglichen Tafeln zu erweisen.

Essen (Ruhr), im September 1910.

C. Schoy.

## Erstes Kapitel.

## Spuren astronomischer Messungen bei den ältesten Kulturvölkern.

Schon die ältesten Kulturvölker wurden durch Formulierung und Lösung einfacher geometrischer Probleme, welche ihnen die Verhältnisse des praktischen Lebens und die Beobachtung des Himmels von selbst darboten, zu genaueren Messungen und damit zu den ersten mathematischen Studien veranlaßt. Es unterliegt keinem Zweifel, daß sich mit der ägyptischen Feldmeßkunst auch primitive astronomische Methoden gleichzeitig entwickelten, wohl im Anschluß an die periodische Wiederkehr gewisser Phänomene, den Lauf der Sonne, den Auf- und Untergang der Gestirne u. a. Die Schar der Parallelkreise, in welchen die jährliche scheinbare Sonnenbahn verläuft — Tierkreisgürtel —, mußte bald zu einer Fixierung ihrer Neigung zum Horizonte oder der senkrecht auf ihrer Ebene stehenden Drehachse — Weltachse — und damit zum Begriff der Polhöhe führen. Die Bestimmung eines solchen Neigungswinkels war sehr wohl schon möglich, als man die Kugelgestalt der Erde noch nicht erkannt hatte, wennschon damit das Wesen der geographischen Breite, als des integrierenden klimatischen Faktors, nicht erschlossen werden konnte. Erst bei den Griechen scheint die Veränderlichkeit der Polhöhe mit wechselndem Beobachtungsort klar erkannt und dann mit einer notwendigerweise kugelförmigen Erdgestalt in Verbindung gebracht worden zu sein; eine ebene Scheibe würde ja eine allerorts konstante Polhöhe nach sich ziehen. Sollte die Nechofahrt mit all ihren astronomischen Neuheiten ohne Konsequenzen für diese wichtige Frage der mathematischen Erdkunde geblieben sein?

Unmittelbar von selbst bietet sich zur Bestimmung des Sonnenstandes der Schatten eines aufrechten Gegenstandes dar, und so treffen wir auch als eines der allerersten astronomischen Instrumente[1]), sowohl bei den Chinesen als auch Ägyptern und Babyloniern[2]), einen senkrecht stehenden Stab — den Gnomon — resp. die Pyramide[3]), und das mit dem Schatten gegebene rechtwinklige Dreieck führte in der Er-

---

[1]) „Malgré sa simplicité, le gnomon ne peut être considéré comme appartenant nécessairement à la civilisation primitive . . . Avant de mesurer, par exemple, l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, il fallait nécessairement avoir la notion d'un équateur et d'une écliptique et être capable de se représenter dans une figure les rayons projetés par un corps céleste mobile sur une sphère. En un mot, il fallait déjà être astronome et geomètre." (M. **Jules Sageret**: Le Gnomon, Revue scientifique, 1910, pag. 526).

[2]) Von diesen haben die Griechen bekanntlich Gnomon und Polos überkommen; dies ergibt sich aus **Herodot** B. II, 109 und aus verschiedenen Stellen des Almagest, während nach M. **Jul. Sageret** (ebenda S. 527) der Polos bei den Juden im 8. Jahrhundert v. Chr. Erwähnung findet. (Vergl. Vers 8, Kap. XXXIII bei **Isaias**: „Invocavit propheta Dominum et reduxit umbram per lineas quibus iam descenderat in horologio Achaz retrorsum decem gradibus." Über diese Jesaias-Stelle, das anscheinend wunderbare Zurückweichen des Zeigerschattens auf natürliche Weise (sogenannte größte Digression oder Elongation) zu erklären, handeln eine Menge Schriften. Wir führen an: D. **Schwenter**, Deliciae physico-mathematicae, Nürnberg 1626, S. 253 ff. **Widder**, De Solis et umbrae stili retrogradatione, Gröningen 1760. Ausführlich bespricht denselben Gegenstand auch **Löschner**, Über Sonnenuhren, Graz 1906, S. 22 ff., wobei jedoch unrichtigerweise behauptet wird, dies Phänomen trete ein, wenn die Deklination $\delta$ der Sonne kleiner sei als die geographische Breite $\varphi$ des Ortes, d. h. in der heißen Zone (!). Das Versehen scheint auf R. **Wolf**, Handbuch der Astronomie, I. Bd., S. 432 (nicht II. Bd.!) zurückzugehen, wo die Ungleichung lautet: $p < 90° - \varphi$. Bei **Wolf** ist aber $p = 90° - \delta$, woraus folgt $\delta > \varphi$. Dieser Fall kann für die heiße Zone wohl eintreten. Bekanntlich ist, wenn $v$ den Winkel am Stern bezeichnet, nach Differentation der Gleichung: $\cos h \cdot \cos \alpha = -\cos \varphi \cdot \sin \delta + \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t$ nach dem Azimut $\alpha$ ($\alpha$ ein Maximum).

$$\cos h \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \cos \delta \, [\cos \alpha \cos t + \sin \varphi \sin t \cdot \sin \alpha]$$

$$= \cos \delta \cdot \cos v, \text{ also}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\cos \delta \cdot \cos v}{\cos h} = 0$$

$$\cos v = \frac{\sin \varphi - \sin h \cdot \sin \delta}{\cos h \cdot \cos \delta} = 0;$$

$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}$. Hieraus folgt für $h$ nur ein reeller Wert, wenn $\delta > \varphi$ ist.

[3]) Das griechische Wort „Pyramide", richtiger „Piramide", kommt vom ägyptischen „Piremus", d. i. „ansteigende Seitenkante" dieses Körpers, her; später wurde von den Griechen diese Detailbezeichnung für das Ganze gebraucht. (Vergl. hierzu M. **Cantor**, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I. Bd., III. Aufl., 1900, S. 99 und 100.)

mittlung der spitzen Winkel zu den ersten trigonometrischen Versuchen. Als solche müssen wir die Lösung jener Pyramidenaufgaben deuten, die sich im Papyrus Rhind, dem ältesten schriftlichen Dokument (wohl zwischen 2000 und 1700 v. Chr. verfaßt), finden, und welche in dem klassischen Werke A. v. Braunmühls: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. I. Bd., S. 1 und 2, ausführlich besprochen sind. Speziell für unseren Gegenstand, die Eruierung eines geographischen Datums, besitzen wir leider keine ägyptische Quelle; allein es ist mit aller Wahrscheinlichkeit zu vermuten, daß die Schatten der ägyptischen Pyramiden zur Bestimmung der Sonnenhöhe und damit wohl auch der geographischen Breite gerade in erster Linie gedient haben müssen. Hoffentlich wird die eifrige Forschung der Ägyptologen auch in astronomischen Fragen dieses ältesten Kulturvolkes bald Aufklärung bringen.

Ein ähnliches Dokument aus grauer Vorzeit, welches uns einen deutlichen Einblick auch in die Astronomie der Chinesen tun läßt, besitzen wir in dem uns durch E. Biot[1]) erschlossenen Werk „Tscheou-pey-swan-king“, d. h. „Heiliges Buch der Rechnung, genannt Tscheou-pey“, welcher letztere Ausdruck mit „Gnomon im Kreise“[2]) übersetzt werden kann. Ein größerer Teil desselben handelt von der Anfertigung und dem Gebrauch des Gnomons. Die Regel zu dessen Herstellung soll nach R. Wolf[3]) also lauten: „Man nehme einen Bambusstab, steche in denselben in einer Höhe von 8 Fuß ein Loch von 1/10 Fuß Durchmesser; diesen Stab stelle man auf einem vorher geebneten Boden senkrecht auf; dann suche man den Schatten desselben und beobachte ihn.“ Aus der Länge des Mittagsschattens zur Zeit der Solstitien folgten leicht Äquatorhöhe und Ekliptikschiefe als halbe Summe, resp. halbe Differenz der zwei Solstitialhöhen der Sonne[4]). Aus einer eingehenden Darstellung Delambres[5]) ist zu entnehmen, daß in China im Laufe der Zeit zehn verschiedene Messungen der Polhöhe und Ekliptikschiefe verzeichnet sind. Wir führen dieselben chronologisch auf: Die erste mit dem Gnomon angestellte Beobachtung scheint um das Jahr 1100 v. Chr. stattgefunden zu haben. Dabei war der Gnomon 8 Fuß hoch; sein Sommersonnenwendeschatten betrug 1½ Fuß, der weniger sichere Wintersolstitialschatten 13 Fuß. Aus diesen Daten würde eine Breite des Beobachtungsortes von $\varphi = 34^\circ\ 47'\ 11''$ folgen. Man kennt jedoch weder den Beobachter noch den Ort selbst. Für eine zweite Beobachtung, die man Liu-Hiang zuschreibt, waren die entsprechenden Schattenlängen des Gnomons 1,54 und 13,4 Fuß, woraus $\varphi = 35^\circ\ 3'\ 40''$ folgt. Die aus beiden Messungen ermittelten Werte für die Ekliptikschiefe stimmen jedoch sehr schlecht. Für eine dritte Beobachtung aus dem Jahre 237 n. Chr. wird Nanking als Beobachtungsort genannt. Solche Messungen zur Zeit der Sonnensolstitien sind jedoch für die Genauigkeit des Resultates sehr ungünstig; denn da sich die Deklination der Sonne um diese Zeiten nur sehr langsam ändert, so kann eine ganz beträchtliche Anzahl von Tagen — zehn und noch mehr — als Datum des Solstitiums angesprochen werden. Dagegen ändern sich die Meridianschatten des Gnomons von Tag zu Tag, am meisten etwa 1½ Monat vor und nach der Sonnenwende, bieten mithin um diese Zeit die beste Garantie für exakte Resultate. Diese Tatsache scheint auch bereits von chinesischen Astronomen berücksichtigt worden zu sein. So heißt es von einer vierten Messung, daß sie die Schattenlänge von 10 Fuß für den 9. November 173 n. Chr. und 9,6 Fuß für den 7. Februar 174 n. Chr. ergab. Trotz dieser bemerkenswerten Schärfe der Beobachtungen läßt sich hieraus ohne Kenntnis der Sonnendeklination kein Schluß auf Polhöhe $\varphi$ und Ekliptikschiefe $\varepsilon$ ziehen[6]). Bei einer fünften Observation, die im Jahre 521 n. Chr. stattfand, kennt man nur den Sommersonnenwendeschatten von 1,07 Fuß Länge, während das korrespondierende Winterdatum fehlt. Die Konjekturen von Pater R. Gaubil[7]) führen zu $\varphi = 32^\circ\ 10'\ 48'',5$ und $\varepsilon = 23^\circ\ 33'\ 56'',5$. Delambre aber bemerkt hierzu: „Cette obliquité serait bien petite. Gaubil ajoute une ombre d'été de 0,58 pieds; il dit qu'elle est évidemment fausse; on pourrait soupçonner qu'il y avait 1,58 pieds.“ Die sechste Beobachtung ist die der drei Schatten von Tsu-

---

[1]) E. Biot, Traduction et examen d'un ancien ouvrage chinois intitulé Tscheou-pei, littéralement: Style ou signal dans une circonférence. Journal Asiatique 1841.

[2]) Um den Fuß war nämlich ein Kreis mit 365¼ Teilen auf der Peripherie (pieds) beschrieben.

[3]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie, 1877, S. 129.

[4]) Wie man zur Nachtzeit Sternhöhen mit dem Gnomon ermittelte, lehrt J. Sageret, ibid. S. 529.

[5]) Delambre, Histoire de l'astronomie ancienne, Tome I, pag. 391—400.

[6]) Vgl. die Beobachtungen v. Tscheou-Kong (12. Jahrh. v. Chr.?) bei J. B. Biot: Précis de l'histoire de l'Astronomie chinoise. 1861, pag. 34.

[7]) R. Gaubil, Traité d'Astronomie chinoise, pag. 238.

Tschong. Die Daten sind etwas verschieden. Die neueste Lesart von Gaubil unter Annahme einer Ekliptikschiefe von $\varepsilon = 23^\circ 29'$ ist diese:

| Jahr n. Chr. | Monat | Sonnenhöhe |
|---|---|---|
| 461 | 27. November | 36° 17' 52" |
| 462 | 11. Januar | 36° 12' 13' |
| 462 | 12. Januar | 36° 12' 13" |

Die siebente Beobachtung fand im Winter des Jahres 578 n. Chr. zu Singanfu statt. Sie ergab $\varphi = 34^\circ 35' 49'',5$ und $\varepsilon = 23^\circ 51' 11'',5$. Eine achte, ebenfalls zu Singanfu gemachte Messung des Litchanfong datiert aus dem Jahre 629 n. Chr. Sie lieferte $\varphi = 34^\circ 16' 30'',5$ und $\varepsilon = 23^\circ 40' 0'',5$. In den Jahren 1049—1052 beobachtete man sehr eifrig zu Cai-Fong-Fu. Man fand für $\varphi$: 34° 52' 41",5 und für $\varepsilon$: 23° 30' 45",5. Weitere Observationen datieren aus den Jahren 1278 und 1279, deren sehr unzuverlässige Resultate Gaubil und La Caille[1]) näher prüften. Nach den Publikationen von M. Sylvestre de Sacy[2]) (1814), betr. „Die Geschichte, Wissenschaften und Einrichtungen der Chinesen", beobachtete und bestimmte die Polhöhe auch ein gewisser Y-Hang unter der Dynastie der Tang.

Ob alle diese Messungen mit den einfachen Mitteln des Gnomons stattfanden, oder ob sich in der langen Reihe von Jahren die Beobachtungsmethoden verfeinerten, vermögen wir nicht bestimmt anzugeben. Erst im 7. Jahrhundert fand die ebene Trigonometrie anscheinend Eingang in China, der volle 600 Jahre später die sphärische gefolgt sein soll[3]).

## Zweites Kapitel.

## Die Breitenbestimmung bei den Griechen.

### 1. Eudoxus von Knidos und Pytheas von Massilia.

Wenn somit nach dem Vorhergehenden die Forschungen in der Literatur der ältesten Kulturvölker bezüglich der Polhöhenfrage nur zu sehr dürftigen Resultaten führten und die astronomischen Messungsmethoden anscheinend nicht über die einfachsten Prinzipien der Gnomonik hinausgingen, so sind dafür die Fortschritte um so nennenswerter, welche das Problem der Breitenbestimmung zuerst durch die Griechen und später die Araber erfuhr. Zwar haben die Griechen zweifellos bis zur Mitte des 5. Jahrhunderts v. Chr. reichliche Anregungen aus Ägypten und Babylon empfangen, und ebenso übernahmen die Araber das Erbe der Griechen, allein unter beiden Nationen erlangten die primitiven Ideen der Kulturzentren am Nil und Euphrat eine solche Vertiefung und einen derartigen systematischen Ausbau, daß sie auch nach dem Niedergang der Hellenen und Araber viele Jahrhunderte hindurch das Abendland beherrschten. Als weiteren Beleg für die Abhängigkeit der Griechen auch von den Ägyptern (vgl. Anm. 2 S. 4) möchten wir noch anführen, daß Thales v. Milet den Schatten an einer ägyptischen Pyramide in dem Augenblick beobachtete, als er der Höhe derselben gerade gleichkam[4]), und daß Eudoxus von seiner

---

[1]) La Caille, Dans un Mémoire sur la Théorie du Soleil, Académ. des Sciences, 1757. pag. 110.

[2]) Vgl. le seizième volume, concernant l'histoire, les sciences et les usages des Chinois, une suite de l'histoire de la dynastie des Tang.

[3]) Biernatzki, „Die Arithmetik der Chinesen" (Journal f. r. u. a. Mathem. 1856, LII, S. 63—70). Vgl. auch v. Braunmühl, Vorlesungen usw., I. Bd., S. 5.

[4]) Nach der Erzählung des Plutarch, der in seinem Gastmahle Thales mit anderen über den König Amasis von Ägypten sich unterhalten läßt, soll der berühmte Milesier diese einfache Methode der Höhenmessung verbessert und durch die viel allgemeinere der ähnlichen Dreiecke ersetzt haben. Niloxenus äußert sich bei dieser Gelegenheit: „Obschon er auch um anderer Dinge willen dich (Thales) bewundert, so schätzt er doch über alles die Messung der Pyramiden, daß du nämlich ohne alle Mühe, und ohne eines Instrumentes zu bedürfen, sondern indem du nur den Stock in den Endpunkt des Schattens stellst, den die Pyramide wirft, aus den durch die Berührung des Sonnenstrahls entstehenden zwei Dreiecken zeigest, daß der eine Schatten zum anderen dasselbe Verhältnis hat wie die Pyramide zum Stock." (Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 3. Aufl., I. Bd., S. 139.)

eigenen Sternwarte in Knidos den Stern Kanopus im Horizonte observierte, den er früher am **ägyptischen** Himmel gesichtet hatte. Den ersten Gnomon soll **Anaximander** in Sparta aufgestellt haben[1]. Wie von **Eratosthenes** und **Hipparch**, so besitzen wir auch von den Schriften des **Eudoxus** nur fragmentarische Mitteilungen anderer Schriftsteller, aus denen **Ideler**[2], **Aug. Böckh**[3], **Schiaparelli**[4] und **Künßberg**[5] seine astronomischen Leistungen zusammenhängend darzustellen sich bemühten. Danach muß es ein wissenschaftliches Werk des **Geographen Eudoxus** gegeben haben, und besonders **Strabo** (II, C. 119) berichtet, daß von ihm zum erstenmal die „**Schiefe des Himmels**“ — also doch wohl die Polhöhe — bestimmt worden sei, allerdings ohne nähere Angabe des Verfahrens[6]. Jedenfalls wurde Eudoxus durch den Aufenthalt sowohl in Ägypten als auch Italien, wo ihn sein Sternkatalog zu unausgesetzten Beobachtungen zwang, auf die **Veränderlichkeit der Polhöhe** aufmerksam.

Ob diese wechselnde Schiefe des Himmels, ob zölestische Phänomene (Kugelgestalt des Mondes, der Sonne und kreisförmiger Schatten der Erde bei Mondfinsternissen) oder ob ausgedehnte philosophische Spekulationen die **Pythagoreer** auf die Lehre von der Kugelgestalt der Erde gebracht haben, läßt sich ebensowenig beantworten wie die Frage, welchem der Pythagoreer hierin die Priorität gebührt[7]. Viel ungezwungener erklärt sich die allmähliche Ausbildung der Zonenlehre als Folge der verschiedenen Himmelserscheinungen und Beleuchtungsverhältnisse auf der Erde, die mit **Parmenides**, dem zweiten Vertreter der **eleatischen Schule**, ihren Abschluß fand[8]. Planmäßige Beobachtungen am Gnomon finden wir wohl zuerst bei **Pytheas von Massilia**, einem ungefähren Zeitgenossen von **Aristoteles**, von **Dikaearch** und **Polybius** als durchaus unglaubwürdig hingestellt, aber von **Hipparch** anerkannt und auch in neuerer Zeit wieder gerechter beurteilt[9]. In seiner Vaterstadt hatte er die Länge des Gnomonschattens zur Zeit des Sommersolstitiums gemessen und gefunden, daß sie sich zur Höhe des Gnomons wie 41⁴/₅ : 120 verhalte[10]. Wenn bei ihm selbst auch keine numerischen Daten über die Ekliptikschiefe und die Breite Massilias nachzuweisen sind, so kann doch kein Zweifel bestehen, daß er an verschiedenen Orten auf Reisen, selbst im hohen Norden, bemüht war, Material für Polhöhenbestimmungen zu sammeln. Sehr interessant und für unsere Studien äußerst wertvoll sind die lichtvollen Ausführungen **H. Bergers** (a. a. O. S. 340 ff.), wonach **bereits Pytheas** zur Ermittlung der Polhöhe **die obere und untere Kulminationshöhe der Zirkumpolarsterne** gemessen und durch Bildung des arithmetischen Mittels jene Methode befolgt hätte, die wir zuerst sicher bei dem arabischen Astronomen **Al-Battâni** nachweisen können $\left(\varphi = \frac{h_1 + h_2}{2}\right)$. Wir führen die betreffende Stelle bei **Berger** wörtlich an: „*Um zu diesem Ergebnis zu gelangen (gemeint ist die genaue Festlegung des Ortes des Poles) kann* **Pytheas** *kaum einen anderen Weg eingeschlagen haben als den,* ***durch fortgesetzte Versuche die oberen und unteren Kulminationen der Zirkumpolarsterne*** *zu finden und zu vergleichen. Er muß bei dieser Arbeit ein wenn auch noch so einfaches Instrument gehabt haben, mit dessen Hilfe er, so gut es ging, instande war, Horizontabstände zu fassen, im Kreise herumzulegen oder nach einem geteilten Kreise zu bestimmen, vielleicht nur ein zirkelartiges Winkelinstrument mit drehbaren Schenkeln, mit einer Dioptra versehen. Die Unentbehrlichkeit eines solchen Instrumentes für die Arbeiten des* **Eudoxus, Pytheas, Aristyllus** *und* **Timocharis**, *für die Behandlung des Erd-*

---

[1] Nach v. **Braunmühls** Vorlesungen, I. Bd., S. 5 von **Diogenes Laertius** erzählt, I, c. 1 und 2, der es aus den Denkwürdigkeiten des **Hieronymus**, eines Schülers von **Aristoteles**, schöpft.

[2] L. **Ideler**, Über Eudoxus, Abhandl. d. Kgl. Akad. d. Wiss. zu Berlin, hist.-philolog. Kl. 1828, S. 200.

[3] A. **Böckh**, Über die vierzigjährigen Sonnenkreise der Alten, vorzügl. d. Eudoxischen, 1863, S. 10.

[4] **Schiaparelli**, Le sfere omocentriche di Eudosso, di Callippo e di Aristotele. (9. Bd. der Publikationen des Observatoriums der Brera zu Mailand.)

[5] H. **Künßberg**, Eudoxus von Knidos (Programm der Realschule zu Dinkelsbühl, 1889). (**Norbert Herz** gibt in seiner Geschichte der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Leipzig 1887, S. 18 als Hauptquelle für Eudoxus **Simplicius** an. [Freundl. briefl. Mitteilung v. Herrn Prof. H. **Michnik** in Beuthen, Ob.-Schlesien].)

[6] R. **Wolf**, Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur, 1891—93, II. Bd., S. 79.

[7] Vgl. über nähere Details: **Hugo Berger**, Geschichte der wissenschaftl. Erdkunde der Griechen, 1903, S. 171 ff.

[8] Ebenda S. 197 ff.

[9] A. **Schmidt**, Zu Pytheas v. Massilia, Programm d. Gymnasiums Landau, 1876.

[10] **Strabo** II, C. 134. (Die Breite von Marseille [Massilia] ist 43° 17' n. Nimmt man $\varepsilon$ für die damalige Zeit zu 23° 45' 10", so findet sich aus Pytheas' Daten für seine Vaterstadt $\varphi$ = 42° 57' 33".)

messungsproblems und die Ausführung der Sternkarte muß uns zugleich bezeugen, daß es in früher Zeit vorhanden war und neben der künstlichen Sphäre und dem Gnomon zur Verwendung kam. Es ist undenkbar, daß die Astronomen des 4. Jahrhunderts, notwendig durchdrungen von der Einsicht, daß alle Fortschritte ihrer mit Begeisterung gepflegten Wissenschaft von der Vervollkommnung der Messungen am Himmel abhängen, nichts für die Erfindung und Herstellung der nötigen Hilfsmittel getan und geleistet haben sollten. Es ist auch gar nicht anders anzunehmen, Pytheas muß ein solches Instrument auf seiner Reise mit sich geführt haben, wie unsere Schiffer den Sextanten . . ."

Wenn wir somit auch nicht im Besitze eines quellenmäßigen Nachweises für die Anwendung der Methode der Zirkumpolarsterne zur Polhöhenbestimmung bei den alten Griechen sind, so zwingen uns doch mit Berger unabweisbare Schlüsse zur Notwendigkeit einer solchen Annahme. In der Tat ist die Methode auch so einfach und drängt sich sogar dem natürlichen Laienblick so ganz von selbst auf, daß sie kaum bis zur Zeit der hochentwickelten Gnomonik der Araber unbeachtet geblieben sein kann. Man findet in den uns zugänglichen Werken arabischer Astronomen keine Andeutungen über den Urheber derselben, und sie ist vielleicht eine schriftlich nirgends nachweisbare oder erhaltene Tradition der Griechen.

## 2. Eratosthenes[1]) und Hipparch[2]).

Weniger durch gnomonische Messungen selbst, als durch kartographische Verarbeitung des aus den Reisen des Pytheas nach Norden und der zwei griechischen Gesandten Megasthenes und Deimachos nach dem Gangeslande gewonnenen geographischen Materials, das wesentlich durch die Reiseberichte vieler Gebildeten, denen es vergönnt war, das „Wunderland Indien" zu schauen, bereichert wurde, erwarb sich kein Geringerer als Eratosthenes ein großes Verdienst in der Festsetzung der geographischen Breite von Ländern und Städten. Wir haben bereits oben erwähnt, daß wir auch bei Eratosthenes und Hipparch auf lückenhafte Mitteilungen, hier auf diejenigen, die sich in Strabos Geographie I und II finden, angewiesen sind. Eine ungemein gründliche, kommentierte Darstellung der Leistungen dieser zwei großen Alexandriner findet sich in den unten angeführten Werken Bergers, die uns vorwiegend Führer sein sollen. Die Erstellung einer möglichst umfassenden und genauen Weltkarte, welche die Strabonische Chlamys verdrängte, war die vornehmste geographische Aufgabe des Eratosthenes. Überall, wo ihm astronomische Breitenangaben und Gnomonzahlen zu Gebote standen (so von Athen, Rhodos, Syrakus, Alexandria, Meroe u. a.[3]), benutzte er sie auf das sorgfältigste, und nur ungern nahm er in Ermangelung derselben seine Zuflucht zu unwissenschaftlicheren und unzuverlässigeren Methoden. Als solche werden genannt: die Angaben von Reisenden über Klima, Temperaturverhältnisse, das Auftreten gewisser Merkmale in der Tier- und Pflanzenwelt u. dgl. Wohl wußte auch Eratosthenes, daß diese ihm so gemachten Angaben, durch mehrmalige Überlieferung entstellt, mit Vorsicht zu gebrauchen seien, und er warnt sogar selbst vor der Schrift des Deimachos über Indien. Indem er infolge sehr großer Ungewißheit über den Verlauf des südlichsten Parallelkreises seiner Weltkarte „Zimtküste—Taprobane" diesen nicht mitzählte, erscheint auf der Eratosthenischen Plattkarte als erster Parallel der durch Meroe gehende, der sich nach Westen durch unbekannte Länder Libyens hinzog, im Osten Südarabien und die Südspitze Indiens durchschnitt. Der zweite Breitenparallel war mit dem Wendekreis identisch und ging durch Syene und im Osten durch Gedrosien. Ein dritter Breitenkreis war der von Alexandria, der östlich über Cölesyrien, Babylonien, Persien und das nördliche Indien strich. Von den drei noch folgenden Parallelen gibt Strabo den westlichen Verlauf nicht mehr an. Der vierte lief am Südrande des Hochgebirges von Kleinasien (Taurus) entlang durch Armenien, Medien und den nördlichsten Teil Indiens. Der fünfte war der von Lysimachia (Hellespont), dessen Verlauf nach verschiedenen Angaben ziemlich unbestimmt erscheint; vom sechsten wissen wir nur von Hipparch, daß er das südliche Britannien traf, und der Parallel von Thule endlich grenzte die bewohnte Zone gegen die erfrorene ab[4]).

---

[1]) H. Berger, Die geographischen Fragmente des Eratosthenes, 1880.

[2]) H. Berger, Die geographischen Fragmente des Hipparch, 1869.

[3]) Welche von ihnen auf gnomonische Messungen des Eratosthenes selbst zurückzuführen sind, läßt sich nicht entscheiden (vgl. Berger I, S. 187).

[4]) Von geographischen Koordinaten, wie sie uns heute geläufig sind, konnte bei Eratosthenes noch keine Rede sein. Seine Plattkarte wies nur eine Anzahl von Parallelen auf, die aber keine Beziehung zu einem Äquator als Symmetrie- oder Ausgangslinie der Zählung hatten. Erst Hipparch teilte den Erdquadranten in 90 gleiche Teile.

In der zweiten Lebenshälfte des Eratosthenes hatte aber sowohl die Verbesserung der astronomischen Beobachtungsinstrumente als auch die Mathematik selbst solche Fortschritte gemacht, daß man bei den Eratosthenischen Methoden und Resultaten nicht mehr stehen bleiben konnte. Die zielbewußte Durchführung einer diesbezüglichen Reformation ist das unvergängliche Verdienst des größten Astronomen des Altertums, Hipparchs von Nicäa in Bithynien, dessen geographische und astronomische Arbeiten uns bei Strabo verhältnismäßig vollständig erhalten sind. Hipparch hat die Geographie seines Vorgängers einer scharfen Kritik unterzogen und verworfen, „weil sie die untrüglichen Mittel der gleichzeitig so hoch entwickelten Mathematik nur teilweise verwerte, im allgemeinen aber bei der Anwendung der früher gebräuchlichen verharre und demnach nicht als naturgemäßer Fortschritt zu betrachten sei“ (Berger). In erster Linie verlangte Hipparch für alle wichtigeren Punkte der Karte astronomische Längen- und Breitenbestimmungen; von den Festlegungen derselben nach den schwankenden Angaben der Reisenden, von den trügerischen Schlüssen nach Temperaturvergleichungen und all den übrigen Hilfsmitteln, deren sich Eratosthenes und auch Strabo bedienten, wollte er nichts wissen. Sein Hauptaugenmerk richtete er auf die Erstellung der berühmten Breitentabelle. Zu diesem Zweck teilte er den Quadranten Pol—Äquator in 90 gleiche Teile und suchte darauf jeden Ort mit seinen geographischen Koordinaten genau zu plazieren. Dieses gewaltige Unternehmen Hipparchs erforderte aber die tatkräftigste Mithilfe und Unterstützung von seiten der Mitwelt. Deshalb richtete er an dieselbe die eindringliche Mahnung, ihm nach seinen einfachen Anweisungen von überallher Beobachtungsmaterial zu liefern, dessen rechnerische Bearbeitung ihm oblag. Welche Mittel standen nun Hipparch für die Breitenbestimmung zu Gebote? Er nennt sie allgemein zusammenfassend ἡ τῶν οὐρανίων ἐπίσκεψις, ἡ τῶν κλιμάτων ἐπίσκεψις (σύγγραμμα). Strabo I C. 12, IV. Fragment 5 gibt allgemein folgende an: den gleichzeitigen Auf- und Untergang und die gleichzeitige Kulmination der Gestirne, die Höhe des Poles über dem Horizont, Punkte im Zenit; am ausgiebigsten verwandte er: das Verhältnis des kürzesten und längsten Tages eines Ortes, die Gnomonzahlen und Sonnenhöhen (Berger, S. 16 und 38 ff.). Für Orte innerhalb der Wendekreise gibt er auch den Tag an, an welchem die Sonne das Zenit passiert; diese Art der Breitenvergleichung benutzte übrigens schon Eratosthenes und später auch Ptolemaeus; von dem ersteren wissen wir, daß dies für Meroe und Ptolemais 45 Tage vor und nach dem Sommersolstitium stattfand.

Im besonderen finden sich in den Fragmenten von Strabo I. C. 12, V folgende Angaben, mittels welcher Hipparch die Breite festzulegen imstande war:

V, Fragm. 3b: Der ganze kleine Bär ist an der Zimtküste (wahrscheinlich Ceylon oder die Halbinsel Malakka) zirkumpolar ($\varphi = 12^{\circ} = \frac{1}{2}\varepsilon$).

„ 4: In Ptolemais sei der längste Tag 13 Stunden lang ($\varphi = 16$ bis $17^{\circ}$).

„ 5: In Syene und Berenike steht im Sommersolstitium 1. die Sonne im Zenit, 2. dauert der längste Tag 13½ Stunden, 3. vom arktischen Kreis erscheint der große Bär fast ganz, außer den Schenkeln, dem Bärenschwanze und dem Stern $\gamma$.

„ 6: In Alexandria und Cyrene ist der längste Tag 14 Stunden; der Arctur steht im Zenit, ein wenig nach Süden geneigt (Beispiel für „Punkte im Zenit“). Daraus ergibt sich $\varphi = 31^{\circ}$.

In Alexandria ist am Mittag der Tag- und Nachtgleiche das Verhältnis des Schattens zum Gnomon $= 3:5$, in Carthago $7:11$.

„ 8: In Phönizien, Tyrus und Sidon währt der längste Tag 14¼ Stunden.

„ 9: In Syracus währt der längste Tag 14½ Stunden.

„ 11: In Athen währt der längste Tag 14⅔ Stunden.

„ 14: Fährt man in den Pontus hinein, so ist der längste Tag 15½ Stunden, die Orte sind gleichweit vom Pol und Äquator entfernt; der arktische Kreis geht durch das Zenit; auf diesem Kreise liegen die Sterne Algenib und Schedir $\alpha$ (Parallel des Hipparch, der am reinsten erhalten ist).

„ 15c: Die Dauer des längsten Tages beträgt 16 Stunden, und der Wendekreis des Krebses erhebt sich 17½° über den Horizont; das ist die Gegend, die ganze Sommernächte erglänzt im Sonnenlichte (Übergang der Abenddämmerung in die Morgen-

> dämmerung). Wo die Sonne zur Winterszeit höchstens 6 Ellen (12°) über dem Horizonte steht, dauert der längste Tag 17 Stunden, und die Breite beträgt 54°; wo sie im Wintersolstitium nur 4 Ellen (8°) erreicht, währt der längste Tag 18 Stunden bei einer Breite von 58°, endlich hat ein Ort unter dem 61.° weniger als 3 Ellen (nach **Ptolemaeus** $2\frac{1}{2}$) Sonnenhöhe und 19 Stunden größte Tageslänge.

Mit diesem reichlichen Zahlenmaterial vermochte **Hipparch** seine Breitentabelle viel mehr zu spezialisieren und auszudehnen als **Eratosthenes**. Indessen lassen sich nach **Berger** (S. 71) nur 12 Parallelen bei **Strabo** bestimmt nachweisen. Er beginnt mit dem Parallel der Zimtküste (12°), da die niedrigeren Grade in der unbewohnbaren Zone (Terra inhabitabilis propter calorem) lägen und schließt mit dem 58. Grad, der die erfrorene Zone begrenzt. Als Parallel von Meroe hebt **Strabo** den 16. Grad hervor, Syene eignete der 24., Alexandria der 31., Babylon der $33\frac{1}{2}$., Rhodos der 36., Alexandria in Troas der 41., Byzanz und Massilia der 43., Borysthenes der 48. usw. Sicherlich hatte **Hipparch** unter Benutzung der Angaben des **Pytheas** seine Tabelle noch weiter nach Norden fortgesetzt, obwohl eine nähere Darstellung derselben **Strabo** unnütz erschien.

Welche Genauigkeit hat **Hipparch** mit den ihm bei der Breitenbestimmung zu Gebote stehenden Hilfsmitteln erreicht? Am besten läßt sich diese Frage beantworten, wenn wir von seinen Gnomonzahlen und Angaben über den längsten Tag ausgehen. Bekanntlich errechnet sich die Tageslänge in der sphärischen Astronomie, falls $\delta$ die (positive) Sonnendeklination, $\varphi$ die geographische Breite und $s_0$ der zum halben Tagebogen gehörige Stundenwinkel ist, aus der Formel

$$\cos s_0 = -\operatorname{tang} \varphi \cdot \operatorname{tang} \delta, \quad \text{oder}$$

$$\cos (180^\circ - s_0) = \operatorname{tang} \varphi \cdot \operatorname{tang} \delta.$$

Am längsten Tage ist aber $\delta =$ der Ekliptikschiefe $= \varepsilon$, so daß man hat

$$\operatorname{tang} \varphi = \cos (180^\circ - s_0) \cdot \operatorname{cotg} \varepsilon.$$

Die Schiefe der Ekliptik unterliegt aber säkularen Veränderungen, sie nimmt zurzeit ständig ab. Nach **Ptolemaeus**, Almagest. lib. I, Cap. XII. ed. von **Halma** I. 57 war zu **Hipparchs** Zeiten $\varepsilon = 23^\circ 51'$. Dieser Wert scheint reichlich groß; R. **Wolf** gibt in seinem Handbuch der Astronomie, II. Bd., S. 91 für die genannte Zeit $\varepsilon$ zu $23^\circ 45'$ an. Wir haben nun nach obiger Formel für beide Werte von $\varepsilon$ die Polhöhe von Tyrus, Syracus und Athen berechnet, falls an diesen Orten der längste Tag resp. $14\frac{1}{4}$, $14\frac{1}{2}$ und $14\frac{2}{3}$ Stunden währte. Zum Vergleiche fügen wir in eckigen Klammern die wahren Breiten hinzu.

| | $\varepsilon = 23^\circ 51'$ | $\varepsilon = 23^\circ 45'$ |
|---|---|---|
| Tyrus . . . . | $\varphi = 33^\circ 28'$ | $\varphi = 33^\circ 36'$ [$\varphi = 33^\circ 12'$] |
| Syracus . . . | $\varphi = 36^\circ 1'$ | $\varphi = 36^\circ 9'$ [$\varphi = 37^\circ 4'$] |
| Athen . . . . | $\varphi = 37^\circ 3'$ | $\varphi = 37^\circ 13'$ [$\varphi = 37^\circ 58'$]. |

Während hier also auf jeden Fall die Dauer des längsten Tages für Athen und Syracus zu klein angegeben ist, sind die Daten in Fragm. 14 und 15c bei einer Ekliptikschiefe von $\varepsilon = 23^\circ 51'$ in schönstem Einklang mit der verlangten Polhöhe. Auch die Breitenangaben von Meroe, Syene, Alexandria, Rhodos und Massilia stimmen bis auf eine mäßige Anzahl von Bogenminuten mit der Wirklichkeit überein. Die Gnomonzahl 7 : 11 für Carthago ergibt den auffallend falschen Wert von $\varphi = 32^\circ 30'$ statt rund 36°. Auch die Angaben über Alexandria in Troas [39° 40'], Byzanz [41°] und den unteren Borysthenes [46°—47°] stimmen schlecht. Derselben Ungenauigkeit für diese Gegenden begegnen wir auch noch später bei den Arabern.

Wie gestaltete sich nun bei **Hipparch** die **rechnerische Behandlung** der Breitenbestimmung? Darüber bleibt uns **Strabo** die Antwort schuldig. Die Auswertung der Gnomonzahlen und des Verhältnisses vom kürzesten zum längsten Tag läßt auf eine ausgiebige Anwendung seiner **Sehnenrechnung** schließen, die aber nicht auf uns gekommen ist. Wir kennen weder die zwölf Bücher des **Hipparch** noch die sechs des **Menelaus von Alexandrien** über Sehnen, wir wissen nur, daß das Rechnungsverfahren des ersteren dem **Ptolemaeischen** an Eleganz nachstand¹).

---

¹) Vgl. v. **Braunmühl**, Vorlesungen usw. I, S. 14. Hipparch scheint auch im Besitze eines **graphischen Verfahrens** gewesen zu sein, vermöge dessen er — διὰ τῶν γραμμῶν — die oben genannten Aufgaben der sphärischen Astronomie zu lösen wußte. Dieser durch v. **Braunmühl** a. a. O. S. 10 ausgesprochenen und auf **Reinauds Géographie d'Aboulfeda** 1848 gestützten Behauptung steht M. **Cantor**, Vorlesungen usw., I. Bd., S. 362 ablehnend gegenüber.

## 3. Claudius Ptolemaeus.

Mit **Hipparch** hatte die mathematische Geographie der Griechen ihren Höhepunkt erreicht. Nach seinem Tode sehen wir die selbständigen Bemühungen und die eifrige Begeisterung der Epigonen nach und nach schwinden, bis sich die wissenschaftliche Erdkunde endlich in völliges Dunkel hüllte. Erst nach Verlauf eines vollen Jahrhunderts erwachte sie zu neuem Leben, um in den beiden letzten griechischen Repräsentanten **Marinus von Tyrus** und **Claudius Ptolemaeus** noch einmal hell aufzuleuchten. Doch ist des **Marinus** Werk, das wir aus der **Geographie des Ptolemaeus** kennen, weniger eine originelle Schöpfung als vielmehr eine Sammlung von Beobachtungsdaten und Reiseberichten für eine Weltkarte[1]). Auf dieser basiert **Ptolemaeus** unmittelbar; auch er ist weit davon entfernt, **Hipparchs** Leistungen zu überbieten. Seine neuen Beiträge zu dessen Breitentabelle sprechen rühmlichst für seinen — vielleicht allzu eifrigen — Sammelfleiß, und diesem, der nach **Berger** (a. a. O. S. 647) nahezu an ein kritikloses Zusammenraffen grenzte, ist es auch wohl zuzuschreiben, daß **Ptolemaeus** sogar wieder von den von **Hipparch** als unwissenschaftlich bezeichneten Methoden des **Eratosthenes** Gebrauch machte. Zu neuen Prinzipien in der Polhöhenfrage ist auch **Ptolemaeus** nicht durchgedrungen. Deshalb hatte er auch keine besseren Breiten als **Hipparch**, sondern, wenn er in der Not auf die älteren Methoden zurückging, naturgemäß noch schlechtere. In der Hauptsache legte er **die geographische Breite eines Ortes nach Angaben über den längsten Tag fest.** Wie er aber im einzelnen diese Aufgabe der sphärischen Astronomie rechnerisch bewältigte, erfahren wir aus seinem berühmten **Almagest** (Μεγάλη σύνταξις). Wir geben im folgenden die zum Verständnis erforderlichen Hilfssätze aus der **Ptolemaeischen Sehnenrechnung** und im Anschluß hieran die eigentliche Lösung des Problems wieder, uns dabei an die Ausgabe von **Halma** anschließend. Zunächst teilt **Ptolemaeus** den Kreisumfang in 360 Teile (Grade) und den Durchmesser in 120 τμήματα (partes, abgekürzt $p$). Eine pars hat 60 partes minutae (60′) und diese wieder 60 partes minutae secundae (60″). Den Schlüssel zum Verständnis seiner Sehnenregel liefert Fig. 1. Die zwei Sehnen $AF$ und $JG$ stehen senkrecht auf dem Kreisdurchmesser $BK$. Zieht man $AG$, so erhält man die zwei ähnlichen Dreiecke $ADE$ und $GHE$ und damit die Proportionen

$$\frac{AE}{EG}=\frac{AD}{GH}=\frac{2\cdot AD}{2\cdot GH}=\frac{AF}{JG}$$

$$\text{oder } \frac{AE}{EG}=\frac{\text{Gerade, welche spannt den doppelten Bogen von } AB}{\text{Gerade, welche spannt den doppelten Bogen von } BG},$$

oder rechts die Bezeichnung chorda (chord.), griech. εὐθεῖα, einführend:

$$\frac{AE}{EG}=\frac{\text{chord }(2\,AB)}{\text{chord }(2\,BG)}.$$

Die Hauptrolle in der Durchführung der sphärischen Aufgaben bei **Ptolemaeus** spielt aber die ständig wiederkehrende Anwendung des sogenannten **Transversalensatzes**, der von dem schon erwähnten Astronomen **Menelaus von Alexandria** herstammt und von diesem in seiner uns erhaltenen **Sphärik**[2]) auch auf Kugeldreiecke ausgedehnt wurde. Für das ebene Dreieck hat man z. B. folgende Gleichung (Fig. 2)

$$GE\cdot DZ\cdot AB=GZ\cdot DB\cdot AE,$$

oder wie sie bei **Menelaus** (und auch **Ptolemaeus**) geschrieben ist:

$$\frac{GE}{AE}=\frac{GZ}{DZ}\cdot\frac{DB}{AB}\text{[3])} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

---

[1]) Für unsere spezielle Frage findet man bei **Marinus** sehr wenig. Meistens scheint er nach der Stadiensumme aus Itinerarangaben die Plazierung eines Ortes auf seiner Karte bewerkstelligt zu haben. „Als neuer Versuch zu einer Breitenbestimmung kann nur die aus dem dritten Buche des **Diodor von Samos** entnommene Angabe gelten, die **Schiffer, die nach Limyrika in Indien führen, sehen den Stier und die Plejaden im Zenit mitten über ihrer Segelstange.**“ (**Berger**, Geschichte d. wiss. Geogr. d. Griechen, S. 590.)

[2]) F. **Maurolykus** v. **Messina**, Menelai sphaericorum libri tres (aus arabischen und hebräischen Handschriften übersetzt 1558).

[3]) Die Griechen kannten natürlich unsere mathematische Schreibart nicht, sondern führten obige Relation folgendermaßen in Worten an: „Es steht $GE$ zu $AE$ im zusammengesetzten Verhältnis von $GZ$ zu $DZ$ und $DB$ zu $AB$“ (auch von **Halma** wörtlich übersetzt: **Almagest** I, S. 51).

Die Übertragung des Transversalensatzes auf das sphärische Dreieck führt zu der sogenannten „Regula sex quantitatum“

$$\frac{\text{chord }(2\,GE)}{\text{chord }(2\,AE)} = \frac{\text{chord }(2\,GZ)}{\text{chord }(2\,DZ)} \cdot \frac{\text{chord }(2\,DB)}{\text{chord }(2\,AB)} \text{ (Fig. 3)} \quad . \; . \; . \quad \text{II).}$$

Zum Beweise derselben, den Ptolemaeus der Sphärik des Menelaus entnahm, muß auf Fig. 4 verwiesen werden: Es sei $H$ der Kugelmittelpunkt, von diesem seien nach den Durchschnittspunkten $B$, $Z$, $E$ der Kreisbögen die Geraden $HB$, $HZ$ und $HE$ gezogen, so daß sich $HB$ mit der Verlängerung der Sehne $AD$ in $T$ schneidet; zieht man noch $AG$ und $DG$, welche $HZ$ in $K$ und $HE$ in $L$ schneiden, so liegen die drei Punkte $T$, $K$, $L$ in einer geraden Linie; da sie sich gleichzeitig in den zwei verschiedenen Ebenen $AGD$ und $BZE$ befinden. (Also ist $TKL$ Schnittgerade dieser Ebenen.) Nunmehr erkennt man, daß sich auf die geradlinige Figur $ADT\,KGL$ der obige Transversalensatz anwenden läßt. Wir können daher schreiben:

$$\frac{GL}{LA} = \frac{GK}{KD} \cdot \frac{DT}{TA} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{III).}$$

Es ist aber nach unserem ersten Hilfssatz:

$$\frac{GL}{LA} = \frac{\text{chord }(2\,GE)}{\text{chord }(2\,AE)}; \quad \frac{GK}{KD} = \frac{\text{chord }(2\,GZ)}{\text{chord }(2\,ZD)}; \quad \frac{DT}{TA} = \frac{\text{chord }(2\,DB)}{\text{chord }(2\,BA)};$$

wodurch III) sofort in die „Regula sex quantitatum“ II) übergeht, w. z. b. w. Nach diesen Vorbereitungen können wir die Bestimmung der Polhöhe vortragen, wie sie sich bei Ptolemaeus (Halma I, S. 69 ff.) findet. In Fig. 5 sei $BD$ der Horizont, $AG$ der Äquator, $P$ der Pol, also $\sphericalangle PMD = \sphericalangle \varphi$ (Polhöhe). Würde die Sonne im Äquator laufen, so ginge sie in $E$ unter ($BE = ED = 90^\circ$). Da es sich aber um die Bestimmung von $\varphi$ aus dem längsten oder, was auf dasselbe hinauskommt, kürzesten Tag handelt, so läuft die Sonne im Parallel $CC_1$ einher und geht an diesem Tage in $H$ unter, und es ist $EH$ die (negative) Abendweite. Speziell für Rhodos geht die Sonne zur Zeit des Wintersolstitiums $1\frac{1}{4}^h$ früher unter als zur Zeit des Äquinoctiums, so daß also arc $ET$, in Zeitmaß verwandelt, $1\frac{1}{4}^h$ gibt. Für die Bestimmung der Breite bedarf Ptolemaeus aber erst der Kenntnis der Abendweite $HE$ oder deren Ergänzung auf $90^\circ$: $BH$. Diese ergibt sich aus folgender Regel[1]:

$$\frac{\text{chord }(2\,AT)}{\text{chord }(2\,AE)} = \frac{\text{chord }(2\,TZ)}{\text{chord }(2\,ZH)} \cdot \frac{\text{chord }(2\,HB)}{\text{chord }(2\,BE)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{IV).}$$

Es ist aber für Rhodos nach obigem:

$$\begin{array}{cc}
2\,AT = 142^\circ\,30'; & 2\,TZ = 180^\circ; \\
\text{chord }(2\,AT) = 113^p\,37'\,54''\text{[2]}; & \text{chord }(2\,TZ) = 120^p; \\
2\,AE = 180^\circ; & 2\,ZH = 132^\circ\,17'\,20'' \text{ (} \varepsilon \text{ bekannt} = 23^\circ\,51'\,35''\text{)}; \\
\text{chord }(2\,AE) = 120^p; & \text{chord }(2\,ZH) = 109^p\,44'\,53''\text{[2]}.
\end{array}$$

Dazu kommt ebenfalls als bekannt $2\,BE = 180^\circ$, also chord $(2\,BE) = 120^p$. Folglich ist in IV alles gegeben bis auf $HB$. Wir nennen chord $(2\,HB) = 2\,x$ und haben dann: $\frac{113^p\,37'\,54''}{120^p} = \frac{120^p}{109^p\,44'\,53''} \cdot \frac{2\,x}{120^p}$, woraus $2\,x = 103^p \ldots$, also nach den Ptolemaeischen Sehnentafeln[2] $HB = 60^\circ$ folgt (abgerundet). Jetzt läßt sich auch Bogen $BZ = PD = \varphi$ leicht ermitteln durch die Proportion:

$$\frac{\text{chord }(2\,ET)}{\text{chord }(2\,TA)} = \frac{\text{chord }(2\,EH)}{\text{chord }(2\,HB)} \cdot \frac{\text{chord }(2\,BZ)}{\text{chord }(2\,ZA)}.$$

Nun findet man aber:

$$\begin{array}{c|c}
2 \text{ arc } ET = 37^\circ\,30', & 2 \text{ arc } EH = 60^\circ, \\
\text{chord }(2\,ET) = 38^p\,34'\,22'', & \text{chord }(2\,EH) = 60^p, \\
2 \text{ arc } TA = 142^\circ\,30', & 2 \text{ arc } HB = 120^\circ, \\
\text{chord }(2\,TA) = 113^p\,37'\,54'', & \text{chord }(2\,HB) = 103^\circ\,55'\,23'', \\
 & 2 \text{ arc } ZA = 180^\circ, \\
 & \text{chord }(2\,ZA) = 120^p,
\end{array}$$

---

[1] Sie ergibt sich ganz genau wie II aus folgender Transversalengleichung an Fig. 2: $\frac{AE}{GA} = \frac{DZ}{GD} \cdot \frac{BE}{ZB}$

[2] Vgl. hierüber Almagest (Halma I, S. 38).

woraus ganz wie bei der Berechnung der Abendweite für chord ($2\,BZ$) $= 2\,x = 70^p\,32'\ldots$; d. i. $2\,BZ = 2\,\varphi = 72^\circ\,1'$, also $\varphi = 36^\circ$ als annähernde Breite für Rhodos folgt[1]. (Der „Connaissance des Temps" von 1824 zufolge hat Rhodus [Hafendamm] 36° 26' 53" n. Br.)

Noch viele andere Fragen über die schiefe Sphäre und ihre Konsequenzen für die Tagesdauer, den Sonnenstand und die Schattenverhältnisse am Gnomon behandelt Ptolemaeus besonders im zweiten Buche des Almagest auf ähnliche Art, ohne jedoch für unsere Frage etwas Neues und Bemerkenswertes zu bieten. Anders ist dies auf dem Gebiete der Kartographie, deren weitere Verfolgung aber nicht mehr in den Rahmen unserer Abhandlung gehört, und da mit Ptolemaeus die letzten selbständigen wissenschaftlichen Taten eines Griechen vor uns liegen, so sind wir mit der Würdigung des griechischen Zeitalters zu Ende gekommen.

## Drittes Kapitel.

## Die trigonometrische Polhöhenbestimmung der Inder.

Auch bei den Hindus scheint der Gebrauch des Sonnenzeigers in altersgraue Vorzeit hinaufzureichen. Gewisse Umstände lassen darauf schließen, daß sie seine Kenntnis, wenn nicht von den Chinesen, so von den Chaldäern erhielten, da ihn die Braminen genau so handhaben wie die letzteren[2]. Andererseits hat J. B. Biot[3] dargetan, daß die „Nakshatras" oder Mondhäuschen der Hindus nichts anderes sind als die 28 Sterneinteilungen (divisions stellaires) der Chinesen. Er sagt darauf wörtlich: „Cela m'avait fait soupçonner que toute cette science astronomique, dont les Brahmes disent être en possession depuis des millions d'années, pourrait bien n'être ni si ancienne, ni si purement indienne, qu'on l'avait cru sur leur parole . . ."[3] Außer Zweifel steht ferner der hellenistische Einfluß auf die Entwicklung der indischen Astronomie, besonders seit dem Eroberungszuge Alexanders des Großen. Aber die wesentlich geometrischen Methoden gestalteten die hervorragend rechnerisch begabten Inder in durchaus origineller Weise um, an Stelle der Konstruktion in den Orthogonalprojektionen der Himmelskugel die Proportion setzend, die ihnen geläufig war[4]. Daher spielten die ähnlichen Dreiecke bei ihnen eine Hauptrolle. Wenn dies einfache Mittel aber zur Lösung ihrer sphärisch-astronomischen Aufgaben ausreichen sollte, so konnte es nur unter Benutzung der Projektion der Himmelskugel auf drei senkrecht zueinander stehende Ebenen (Horizont, Meridian und Äquator) geschehen, ganz nach dem Vorgang der Griechen. Für Aufgaben, in welchen die Polhöhe gesucht wird, kommt allein die Projektion auf die Meridianebene in Betracht. Über den Gebrauch des Gnomons zur Erlangung der nötigen Daten läßt sich die Geschichte der Astronomie von C. G. F. also vernehmen (S. 191): „Der Sonnenzeiger dient den Braminen, den Mittagskreis (Meridian) und die Lage ihrer Pagoden zu bestimmen und ausfindig zu machen, wieviel ein jeder Tag im Jahre außer den Nachtgleichen größer oder kleiner ist als der Tag der Nachtgleichen. Sie stellen dabei ihre Beobachtungen bloß am Tage der Nachtgleichen an . . . Sie suchen dahero den Tag, wo die Sonne 12 Zeichen oder kein Zeichen hat, und wenn sie dies berechnet haben, machen sie eine Stelle auf dem Boden völlig wagrecht. Mitten darauf setzt man vermittels des Lotes ein Lineal oder eine Stange von willkürlicher Länge, die aber von unten bis oben in 12 gleiche Teile abgeteilt ist, die man angulam (Zölle) nennt. Ein jeder Zoll hat wieder 60 Abteilungen, die man Scheviangulam (zweyte Zölle) nennt. Man beobachtet darauf den kleinsten Schatten der Sonne und mißt die Länge desselben nach der Skala des Sonnenzeigers ab . . ." Zu bemerken ist hierzu, daß sie dabei von der irrigen Ansicht ausgehen, die Tag- und Nachtgleiche finde stets beim Durchgang der Sonne durch den Meridian des Ortes statt. Dieser Fehler entstellt unter Umständen das Resultat der Be-

---

[1] Aus dem regelmäßigen Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs- und Zehneck ergeben sich, wenn man deren Seiten im Radius des umgeschriebenen Kreises ausdrückt, leicht folgende Sehnen: chord $36^\circ = 37^p\,4'\,55''$; chord $72^\circ = 70^p\,32'\,3''$; chord $60^\circ = 60^p$; chord $90^\circ = 84^p\,51'\,10''$; chord $120^\circ = 103^p\,55'\,23''$; chord $144^\circ = 114^p\,7'\,37''$ usw.

[2] Geschichte der Astronomie von C. G. F., 1792, Chemnitz (Hofmann & Fiedler), I. Bd., S. 190.

[3] Biot, Études sur l'astronomie indienne, 1859, pag. I.

[4] H. Th. Colebrooke, Algebra with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara translated, 1817, Cap. II, sect. IV.

obachtung bedeutend mehr als die Refraktion, welcher die Alten bekanntlich keine Rechnung trugen. Speziell im mittleren und südlichen Indien betrug sie — sie ist bekanntlich der Tangens der Zenitdistanz proportional — zur Zeit der Äquinoctien, wo eben die Zenitdistanz der Sonne sehr gering ist, höchstens 30—45 Bogensekunden. Das Rechnen selbst geht bei ihnen ohne Bleistift und Feder erstaunlich rasch und sicher mittels Kaurimuscheln vor sich, hat aber den Nachteil, daß eine Kontrolle unmöglich ist, indem beim Weiterschreiten der Rechnung das Vorausgehende stets auseinandergeworfen wird. Nur die Sonnen- und Mondstafeln[1]) stehen auf Palmblättern, die sie in kleine Büchelchen gebunden haben und beim Gebrauche nachschlagen, dabei ihre rätselhaften Verse, welche die Rechenvorschrift enthalten, beständig hersagend[2]).

Auf unsere Frage, nach der Bestimmung der Polhöhe, erhält man nähere Auskunft aus den astronomischen Siddhântas oder Systemen, die jedoch noch sehr wenig in europäische Sprachen übersetzt sind. Das anscheinend älteste und berühmteste dieser Werke ist der Sûrya-Siddhânta oder „die sichere Wahrheit enthüllt durch die Sonne", 1860 im Journal of the American oriental Society von Burgess in englischer Sprache veröffentlicht und mit ausführlichen Erläuterungen versehen. Bei dem außerordentlich konservativen Sinn der Hindus weisen aber auch viel später entstandene Siddhântas gegen diesen ersten keinen Fortschritt auf, so daß man mit viel Wahrscheinlichkeit annehmen darf, daß die ursprünglichen Methoden, wie sie in den ersten Jahrhunderten n. Chr. entstanden, unverändert beibehalten worden sind[3]), und so glaubten wir uns auf das Studium des Sûrya-Siddhânta, der uns am leichtesten zugänglich war, beschränken zu dürfen[4]). Ein Auszug desselben bildet übrigens auch den Appendix zu J. B. Biots schon zitiertem Werk über indische Astronomie.

Bekanntlich finden sich die Regeln und Sätze der indischen Astronomen in Form von Versen ohne Spur eines Beweises angeführt. Burgess hat denselben jedem lemma jeweils hinzugefügt. Dieselbe Aufgabe hatte Nallino bei Al-Battânis opus astrononicum, während Sédillot das Werk von Abul Hassan ohne Verifikation der merkwürdigen arabischen Rechnungen und Konstruktionen in französischer Übersetzung veröffentlichte. Sein Inhalt wird uns im fünften Kapitel ausführlich beschäftigen.

Aus der alleinigen Verwendung der Proportion folgt schon, daß die Methoden der Inder zur Auffindung der geographischen Breite nicht vielgestaltig sein können. In der Tat existieren nur zwei Möglichkeiten:

1. die Bestimmung der Polhöhe, falls die Sonne keine Deklination hat (Tag- und Nachtgleiche);

2. die Ermittlung derselben bei beliebiger Sonnendeklination.

Beide Aufgaben sind im III. Kapitel des Sûrya-Siddhânta enthalten, und wir führen sie in extenso vor:

1. Gegeben der Mittagsschatten eines Gnomons von bekannter Länge zur Zeit des Äquinoctiums; gesucht die Breite (latitude-aksha) und die Äquatorhöhe (colatitude-lamba) des Beobachtungsortes:

Vers 13 und 14 des genannten Kapitels enthalten die Antwort: der Radius der Himmelskugel, multipliziert mit der Länge des Gnomons oder seines Schattens und dividiert durch die Äquinoctial-Hypotenuse, gibt den Sinus der Äquatorhöhe bzw. der geographischen Breite; die entsprechenden Bögen sind Äquator- und Polhöhe selbst.

Zum Verständnis dieser Regel diene Fig. 6. $SZ$ ist ein Quadrant des Meridians, $C$ das Zentrum der Welt; $EC$ die Projektion der Äquatorebene auf den Meridian. Ist dann $Cb$ der Gnomon, so wirft er in dem Augenblick, wo die Sonne im Äquator und Meridian, also in $E$, steht, den Schatten $be$ auf die wagrechte Stelle des Bodens. Da man sowohl $bC$ als auch $be$ kennt, so ergibt sich die Länge der Äquinoctialhypotenuse zu $Ce = \sqrt{\overline{Cb}^2 + \overline{be}^2}$.

---

[1]) Und wohl auch die Sinustafeln.

[2]) Vgl. Neue Sammlungen von Reisebeschreibungen von Dr. Ebeling, II. Teil, S. 409 ff. (aus Le Gentils Reisen in den indischen Meeren in den Jahren 1761—69).

[3]) So werden auch die Rechenvorschriften und die Handhabung ihrer Tafeln, die Le Gentil beschreibt, schon in früherer Zeit gegolten haben.

[4]) Die übrige noch einschlägige Literatur siehe bei v. Braunmühl, Vorles. usw. I, S. 32.

Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $Cbe$ und $CBE$ folgt:

$$Ce : Cb = CE : CB \text{ und hieraus}$$

$$\text{I} \quad \ldots\ldots \quad \frac{CE \cdot Cb}{Ce} = CB = \sin (90^\circ - \varphi)^{1)} = \sin \text{ (lamba).}$$

Ferner hat man: $Ce : be = CE : BE$, woraus folgt:

$$\text{II} \quad \ldots\ldots \quad \frac{EC \cdot be}{Ce} = BE = \sin \varphi^{1)} = \sin \text{ (aksha),}$$

indem die Sinus auch für den Radius $r$ (nicht $= 1$) der Himmelskugel stets durch Linien ausgedrückt werden. Die Gleichungen I und II sind der mathematische Ausdruck von Vers 13 und 14.

2. Es habe die Sonne die nördliche Deklination $ED$ oder die südliche $ED'$, befinde sich also im Augenblick der Kulmination in $D$ oder $D'$; der Mittagsschatten ist dann $bd$ oder $bd'$. Die Verse 14 und 15 lehren die Bestimmung der Breite und Äquatorhöhe wie folgt:

Der Mittagsschatten ($bd$ oder $bd'$) ist die Basis (bhuja), wenn der Radius ($CD$ oder $CD'$) mit demselben multipliziert und durch die entsprechende Hypotenuse ($Cd$ oder $Cd'$) dividiert wird, so ist das Resultat der Sinus der Zenitdistanz und in Bogenmaß verwandelt, die Zenitdistanz der Sonne selbst (nata); diese ist nördlich vom Zenit, wenn die Basis $bd$ nach Süden liegt und umgekehrt. Nimm die Summe von Deklination und Zenitdistanz, wenn ihr Vorzeichen verschieden, ihre Differenz, wenn es dasselbe ist. Das Resultat wird die geographische Breite sein; hieraus findest du den Sinus der Breite: subtrahierst du vom Quadrat des Radius das Quadrat des letzteren, so ist die Quadratwurzel daraus der Sinus der Äquatorhöhe.

Wiederum folgen aus den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken $Chd$ und $CHD$ resp. $Chd'$ und $CH'D'$ die Proportionen:

$$Cd : dh = CD : DH \text{ und}$$

$$Cd' : d'h = CD' : D'H', \text{ woraus}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{III} \quad \ldots\ldots & \dfrac{CD \cdot dh}{Cd} = DH \text{ und} \\ \text{IV} \quad \ldots\ldots & \dfrac{CD' \cdot d'h}{Cd'} = D'H' \end{array}\right\} = \text{Sinus der Zenitdistanz.}$$

Und nun ist nach Fig. 6 entweder

$$DZ + ED = \varphi \quad \text{oder}$$

$$D'Z - ED' = \varphi, \quad \text{endlich}$$

$$\sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{EB}^2} = CB = \sin (90^\circ - \varphi, \text{ q. e. d.}$$

Dies die zwei Methoden zur Ermittlung der Polhöhe, die sich bei den Indern nachweisen lassen. Das ganze 3. Kapitel des Sûrya-Siddhânta behandelt in seinen 51 Versen noch eine größere Anzahl ähnlicher Aufgaben, wo aber die Polhöhe stets als gegeben angenommen wird und andere Größen gesucht sind. Es wäre eigentlich zur Bestimmung von $\varphi$ aus $\frac{1}{2} (h_1 + h_2)$ ein kleiner Schritt gewesen, da doch die Hindus ihre Beobachtungen im Meridian anstellten und bereits Addition und Subtraktion zweier Bögen im Mittagskreis vornahmen. Allein diesen Schritt zu tun verhinderte der Umstand, daß sie, auf den Gnomon allein angewiesen, zu ihren astronomischen Messungen nur die Schatten eines besonnten Stabes und keine Sternbeobachtungen benutzen konnten. Indem die Sonne aber stets auf- und untergeht und der Polarstern in Indien tief am Himmel steht, so wurde den indischen Astronomen der Begriff des Zirkumpolarsterns und damit der unteren und oberen Kulmination wohl nicht recht deutlich. Der Sûrya-Siddhânta ist eben die „sichere Wahrheit, enthüllt durch die Sonne“.

---

[1] Für die Geschichte der Trigonometrie ist die Tatsache von großer Wichtigkeit, daß im Sûrya-Siddhânta zum erstenmal der Sinus auftritt. Den Indern kommt also das Verdienst zu, denselben zuerst eingeführt zu haben. Vgl. über nähere Details, sowie auch über die Berechnung der indischen Sinustafeln v. Braunmühl, Vorlesungen usw., I. Bd., S. 34 ff.

## Viertes Kapitel.

## Die Polhöhenfrage bei den Ostarabern.

Wenden wir uns jetzt zu jenem Volke, welches vom 9. Jahrhundert ab die Führerrolle in der Mathematik und Astronomie übernahm. Wie ein glänzendes Meteor plötzlich am nächtlichen Himmel erscheint, so treten die Araber fast wie mit einem Schlage aus der Dunkelheit ihres Nomadenlebens auf den Plan der Wissenschaft, die sie unter 500jähriger liebevoller und eifriger Pflege auf erstaunliche Höhe brachten. „Daß ein Volk jahrhundertelang jedem Kultureinflusse von seiten seiner Nachbarvölker unzugänglich war, daß es selbst in jener ganzen Zeit keinen Einfluß üben konnte, daß es dann plötzlich seinen Glauben, seine Gesetze und mit diesen seine Sprache weiten Ländern aufzwang, ist für sich eine so regelwidrige Erscheinung, daß es wohl der Mühe lohnt, ihren Ursachen nachzuforschen, daß aber zugleich mit ihr die Gewißheit gegeben ist, die plötzlich auftretende, anderen Entwicklungen ebenbürtige Geistesreife könne aus sich selbst unmöglich zustande gekommen sein." (M. Cantor, Vorlesungen usw., I. Bd., S. 693.)

In erster Linie floß den Arabern die Wissenschaft aus griechischen Quellen zu. Besonders in Syrien, das in den ersten Jahrhunderten n. Chr. eine vollständige griechische Kolonie war, lebte in den Akademien zu Antiochia, Emesa, Edessa und Damaskus der einstige wissenschaftliche griechische Geist fort, und auch in Persien fehlte es nicht an Beziehungen zu Griechenland. Als nun die Omaijaden Damaskus zur Residenz wählten, erwachte in ihnen, im Kontakt mit griechischer Bildung, das Bestreben, diese dem arabischen Volke durch Übersetzungen zugänglich zu machen. Die erste Tat in dieser Hinsicht war die Übertragung des Euklid und des Ptolemaeus (Almagest)[1], und wie sehr der ostarabische Astronom Al-Battâni noch unter Ptolemaeischem Einfluß stand, werden wir sofort sehen.

Wie aber die indische Trigonometrie und Astronomie zu den Arabern kam, ist uns in einer Erzählung des arabischen Astronomen Ibn Al-Adamî erhalten, wonach im Jahre 773 ein des „Sindhind" sehr kundiger Mann zu dem Khalifen Al-Manṣûr kam, der seine Kenntnisse angeblich aus den „Kardadjas"[2]) hatte, von denen er einen Auszug besaß. Sofort befahl der Khalif dessen Übersetzung ins Arabische, eine Arbeit, welche Mohammed ben Ibrâhim Al-Fazâri übertragen wurde. Heute wissen wir, daß der in der Erzählung erwähnte Sindhind nichts anderes war, als der Siddhânta Brahmaguptas.

Leider ist bis jetzt von der großen Menge arabischer Handschriften erst eine sehr spärliche Zahl in europäische Sprachen übersetzt, so daß eine lückenlose Darstellung der Entwicklung irgendeiner wissenschaftlichen Disziplin bei den Arabern nicht möglich ist. In vollständiger lateinischer Ausgabe besitzen wir das Buch: „Über die Bewegung der Sterne" (De motu stellarum) des Astronomen

### 1. Al-Battâni (Albategnius)[3].

Wir verdanken sie einem Gelehrten des 12. Jahrhunderts, Plato von Tivoli[4]), besitzen aber seit 1903 eine vorzüglich kommentierte Neuausgabe des Al-Battâni unter dem Titel Opus astronomicum von Nallino[5]), welche an Klarheit die Übersetzung des der Mathematik wenig kundigen Plato weit übertrifft. Diese ist deshalb im folgenden ausgiebig benutzt.

Zuerst begegnen wir im Opus astronomicum der Polhöhenbestimmung der Zirkumpolarsterne, und zwar unter den beiden Formen

$$\varphi = \frac{h_1 - h_2}{2} + h_2 \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Es heißt darüber bei Nallino (a. a. O. Kap. VI, S. 15): „Wenn du einen Stern beobachtest, der in einem Kreise am Himmel herumgeführt wird, welcher seinen Mittelpunkt im

---

[1]) Wohl entstanden aus dem arabischen Artikel al und dem Superlativ von μέγας: μέγιστος.

[2]) D. i. Sinustafeln.

[3]) D. i. Mann aus Battan in Syrien.

[4]) Uns lag vor die von Regiomontan kommentierte Ausgabe mit einem Vorwort von Melanchthon: De Scientia Stellarum, Nürnberg 1537.

[5]) Publikation der Sternwarte der Brera zu Mailand.

Nordpol hat, und der in seinem ganzen Verlauf über dem Horizonte bleibt, und du nimmst die größte Höhe dieses Sterns, welche er im Meridian zwischen Pol und Zenit erreiche, und wenn du darauf wartest, bis er durch den Meridian zwischen Pol und Horizont geht, womit er die kleinste Höhe erreicht, so mußt du der halben Differenz dieser zwei Höhen die kleinste hinzufügen, um die Höhe des Nordpols über dem Horizonte zu erhalten. Auf gleiche Weise ergibt die halbe Summe der zwei Höhen ebenfalls die Polhöhe oder Breite des Ortes.“ [1])

Daraus erhellt, daß also die Methode der Zirkumpolarsterne den arabischen Astronomen des 9. Jahrhunderts wohl bekannt war und längst vor Abul Hassan in Anwendung gebracht wurde [2]). Zu eruieren, ob sie sich noch bei früheren Arabern nachweisen läßt, wird Aufgabe einer künftigen Durchforschung der noch im Staube der reichhaltigen Bibliotheken des Ostens und Westens vergrabenen arabischen Handschriften sein, und man muß sich bis jetzt mit irgendwie begründeten Vermutungen der Männer von Fach begnügen. H. Suter [3]) ist der Ansicht, daß die Methode den Arabern lange vor Battāni bekannt war, und S. Günther [4]) glaubt, daß sie wohl gar auf Hipparch zurückgehe.

Als zweites Verfahren wird im Opus astronomicum erwähnt die Bestimmung der Breite aus dem Zeitunterschied des längsten oder kürzesten Tages und dem mittleren Tag (Kap. VIII, S. 21: „per incrementum diei longissimi super diem medium aut per decrementum diei brevissimi.“ — „Per augmentum longioris diei super diem aequalem vel per brevioris diei diminutionem,“ bei Plato von Tivoli: De scientia stellarum, Kap. VIII, S. 13). Hierbei folgt Al-Battāni ganz seinem griechischen Vorbilde Ptolemäus, dabei allerdings, wie er ausdrücklich sagt, die halben Sehnen durch den Sinus ersetzend. Mit Berücksichtigung dieses läßt sich der Text der Battānischen Lösung leicht aus der Transversalenregel des Ptolemäus verifizieren, und diesen Beweisgang wollen wir einschlagen. Wir können uns dabei auf Fig. 5 Tafel I beziehen. Wenn man dort $Z$ als Nordpol auffaßt, so repräsentiert $CC_1$ den Wendekreis des Krebses, $CA = C_1G$ die Ekliptikschiefe $\varepsilon$, $AT = \sphericalangle P$ den halben Tagbogen des kürzesten Tages. Nach den Bezeichnungen Al Battānis ist:

$HE$ = distantia ascensus Cancri ab ortu aequinoctiali,
$HB = 90^\circ - EH$ = dist. (longinquitas) ascens. Cancri a puncto boreali.

Zunächst muß $HB$, womit ja dann sofort $EH$ gegeben ist, berechnet werden. Dafür wird folgende Regel angegeben:

„Multipliziere den Kosinus der Ekliptikschiefe mit dem Sinus des halben Tagebogens und dividiere das Produkt durch den Radius; was herauskommt, verwandle in Bogen. Dieser ist dann die Länge des Aufganges des Krebskopfes vom Nordpunkt, durch deren Subtraktion von $90^\circ$ du die Länge des Aufganges des Krebsanfangs vom Äquinoctialpunkt (Widder) erhältst.“

Die Richtigkeit derselben ergibt sich mühelos aus der Anwendung des Transversalensatzes auf das rechtwinklige sphärische Dreieck $HBZ$. Wir verlängern in demselben (Fig. 7) die Hypotenuse $ZH$ bis $J$ und die Kathete $ZB$ bis $K$, so daß $ZJ = ZK = 90^\circ$ wird. Durch $K$ und $J$ legen wir den größten Kreisbogen $KJ$, der die verlängerte Kathete $HB$ in $S$ trifft. Dann ist $S$ der Pol von $ZK$, also auch $SB = SK = 90^\circ$; $JK = \sphericalangle$ P. Somit kann man schreiben:

$$\frac{\text{chord } (2\,HB)}{\text{chord } (2\,SB)} = \frac{\text{chord } (2\,ZH)}{\text{chord } (2\,JZ)} \cdot \frac{\text{chord } (2\,JK)}{\text{chord } (2\,SK)}.$$

---

[1]) Die betreffende Stelle bei Plato von Tivoli, die nach Kap. VIII, S. 13 (De scientia stellarum) wahrscheinlich von Plato selbst eingeschoben ist, wie Nallino (a. a. O. S. 15) mit Recht vermutet, da sie gar nicht zum Titel des Kap. VIII paßt, lautet: „Si autem haec per aliquam stellarum fixarum circa polum positarum, et ipsae sunt, quae in ipsa regione nunquam occultantur, inspicere volueris, ipsius altitudines cum altius et inferius fuerit, quod contigit cum per circulum medium coeli semel supra polum et semel subtus polum transierit accipe, scilicet altitudines, aut eas in unum collige, et collecti dimidium accipe, quodque fuerit, erit altitudo poli in regione illa.“

[2]) In R. Wolfs „Geschichte der Astronomie“ findet sich S. 149 die irrige Ansicht ausgesprochen, daß sich Abul Hassan von Marokko († ca. 1250) zum erstenmal der Mittelbildung der Kulminationshöhen eines Zirkumpolarsterns zur Bestimmung der Polhöhe bedient hätte. Die gleiche falsche Behauptung spricht auch H. Löschner in seinem interessanten Buche „Über Sonnenuhren“, S. 42 aus.

[3]) und [4]) Nach gütigen brieflichen Mitteilungen der Herren Professoren Suter und Günther an den Verfasser.

Durch Übergang zu dem Sinus ergibt sich hieraus:

$$\frac{\sin HB}{R} = \frac{\cos \varepsilon}{R} \cdot \frac{\sin P}{R} \quad \text{oder}$$

$$\text{I} \;.\;.\;.\;.\;.\quad \frac{\cos \varepsilon \cdot \sin P}{R} = \sin \text{(longinquitas ascens. initii Cancri a puncto boreali), q. e. d.}$$

Weniger deutlich scheint uns die sich hieran anschließende Vorschrift für die Ermittlung der Polhöhe selbst ausgesprochen. Sie lautet:

„Darauf multipliziere den Sinus des halben Inkrements des längsten Tages mit dem Sinus der Distanz des Aufgangs des Beginns des Krebses vom Nordpunkte; das Produkt dividiere durch den Sinus der Länge des Aufgangs des Krebskopfes vom Aufgang des Widderanfangs; was herauskommt, verwandle in Bogen, und dieser gibt die Höhe des Poles für jenen Ort, an welchem der längste Tag um die gegebene Zeitdauer den mittleren übertrifft."

Wir wenden zur Aufhellung des vorstehenden Textes die Regula sex quantitatum II, S. 12 auf Fig. 5 an und erhalten:

$$\frac{\text{chord } (2\,ET)}{\text{chord } (2\,AT)} = \frac{\text{chord } (2\,EH)}{\text{chord } (2\,HB)} \cdot \frac{\text{chord } (2\,BZ)}{\text{chord } (2\,AZ)}.$$

Durch Übergang zu den Winkeln und den Battänischen Bezeichnungen folgt:

$$\frac{\text{chord } (180^\circ - 2\,P)}{\text{chord } (2\,P)} = \frac{\text{chord (2 dist. ascens. Cancri ab ortu aequinoct.)}}{\text{chord (2 dist. ascens. Cancri a puncto boreali)}} \cdot \frac{\text{chord } (2\,\varphi)}{\text{chord } 180^\circ}$$

und durch Einführung der Sinus:

$$\frac{\cos P}{\sin P} = \frac{\sin \text{(dist. ascens. Cancr. ab ortu aequinoct.)}}{\sin \text{(dist. ascens. Cancr. a punct. bor.)}} \cdot \frac{\sin \varphi}{R}.$$

Die Auflösung nach $\sin \varphi$ ergibt:

$$\text{II} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \sin \varphi = \frac{\cos P \cdot \sin \text{(dist. asc. Cancri a puncto bor.)}}{\sin \text{(dist. asc. Cancr. ab ortu aequin.)}} \cdot \frac{R}{\sin P}.$$

Das Inkrement oder Augment des längsten Tages ist nach unserer Fig. 5 $= 90^\circ - P$ und also auch $\cos P = \sin (90^\circ - P)$.

Soweit sind Text und Formel in Übereinstimmung. Wohin der Faktor $\frac{R}{\sin P}$ gekommen ist, erfahren wir nicht. Vielleicht hat Al-Battāni für den Sinus des Zählers der Ausdruck: $\frac{\cos \varepsilon \cdot \sin P}{R} = \frac{\sin (90^\circ - \varepsilon) \cdot \sin P}{R}$ vorgeschwebt, wodurch die Formel für $\sin \varphi$ überginge in

$$\sin \varphi = \frac{\sin (90^\circ - P) \cdot \sin (90^\circ - \varepsilon)}{\sin \text{(dist. asc. Cancr. ab ortu aeq.)}}.$$

Es ist aber $\sin (90 - \varepsilon) = \sin HZ = \sin$ (dist. asc. Cancri a Polo boreali). Dürfte man also S. 17 Nordpunkt durch „Nordpol" ersetzen, so wäre die Formel dem Text völlig kongruent[1]).

Endlich kennt unser trefflicher Astronom, den man nicht mit Unrecht den „Ptolemäus der Araber" nennt, auch die indische Methode der Bestimmung der Polhöhe, welcher wir S. 15 bereits gedachten. So findet sich in Kap. XIV (bei Nallino S. 29—30, bei Plato S. 19) und lautet:

„Wenn du die Breite irgendeines Ortes wissen willst, oder was dasselbe ist, seine Entfernung vom Äquator, oder die Polhöhe an diesem Ort, so bestimme die Mittagshöhe der Sonne mit Hilfe des Quadranten oder des Schatteninstrumentes (Gnomon), ebenso für dieselbe Zeit die Deklination der Sonne: ist diese nördlich, so

---

[1]) Im Kommentar, S. 179, zeigt Nallino, daß Formel II leicht in unsere bekannte Relation für die Berechnung des kürzesten oder längsten Tages: $\cos (180^\circ - P) = \mp \tan \varphi \cdot \tan \varepsilon$ übergeführt werden kann, wenn man sin (long. asc. Cancr. a puncto bor.) durch $\frac{\cos \varepsilon \cdot \sin P}{R}$ und sin (long. asc. ab ortu aeq.) durch $\frac{R \cdot \sin \varepsilon}{\cos \varphi}$ ersetzt.

subtrahiere sie von der Mittagshöhe, ist sie südlich, so addiere sie zu ihr; das Resultat ist die Höhe des Anfangs des Widders oder des Anfangs der Wage für jenen Ort. Dieses subtrahiere von 90°, so hast du die Breite des Ortes oder seine Polhöhe. — Die Breite eines Ortes, die man aus der Tafel der Breite der Städte entnimmt, ist nur der Wahrheit nahe, aber nicht so sicher wie die durch Beobachtung gefundene.“

## 2. Ibn Jûnis.

Schon bedeutend weiter ausgedehnt ist unser Thema und die Polhöhenaufgabe mannigfacher variiert bei Ibn Jûnis, welcher unter dem Fatimiden Al—Hâkim zu Kairo seine berühmten hakimitischen Tafeln, ein astronomisches Werk in 81 Kapiteln, ausarbeitete. Leider besitzen wir keine vollständige Übersetzung desselben; nur die ersten Kapitel (III—VI) hat Caussin in den „Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliotheque Nationale“ (Tome VII, pag. 94 ff.) in französischer Sprache veröffentlicht[1]. Für die Polhöhenfrage ist in diesen Anfangskapiteln nichts zu finden. Da aber Caussin die sämtlichen Kapitel im Inhaltsverzeichnis aufgeführt hat, so ist daraus zu ersehen, auf welche Arten Ibn Jûnis die Breite zu bestimmen vermochte. So handelt

Kap. 21 davon: „Trouver la latitude du lieu et la déclinaison du soleil par une même hauteur dont l'azimut est connu, dans deux degrés opposés du zodiaque.

„ 22 „ Trouver la latitude d'un lieu par l'amplitude ortive et la hauteur qui n'a pas d'azimut lorsqu'elles sont connues dans un même degré du zodiaque.

„ 30 „ Trouver la latitude du lieu par le cercle oriental.

„ 35 „ Trouver la latitude du lieu et la longeur du mékyas des heures simples, quand ce mékyas (Gnomon) est perdu et que la latitude du lieu est inconnue.

„ 51 „ Trouver la latitude du lieu par la déclinaison d'un astre et sa hauteur dans le cercle du milieu du ciel.“

Noch eine größere Anzahl von Kapiteln handeln von sehr interessanten Fragen der sphärischen Astronomie, so namentlich von der Dämmerung, dem Morgen- und Abendrot u. a. Eine zusammenhängende Übersetzung der späteren Kapitel hat Sédillot für Delambre geliefert, der in seiner „Histoire de l'astr. du moyen âge“ davon Gebrauch machte (S. 76—156). Im Druck ist die Sédillotsche Übersetzung nicht erschienen, so daß wir über Ibn Jûnis nur das mitteilen können, was sich bei Delambre findet.

In der Lösung der Aufgabe des Kap. 22: die Polhöhe aus der Morgenweite (amplitude ortive) und der Höhe der Sonne im ersten Vertikal zu finden, entwickelt Ibn Jûnis eine ganz erstaunliche Fertigkeit in der Anwendung der orthographischen Projektion (auf die Meridianebene), deren er sich auch bei der Behandlung trigonometrischer Fragen ausschließlich bediente[2]. In Fig. 8 ist $SQ$ die Projektion des (halben) Äquators, $BC$ diejenige des Parallels, in welchem die Sonne für die gegebene Morgenweite ($= \sphericalangle \mathcal{A}$, Fig. 9) läuft. Diese läßt sich durch das auf dem Durchmesser des Horizonts $HH_1$ vom Parallel $BC$ abgeschnittene Stück $QC$ leicht aus Fig. 9 entnehmen[3]: Setzt man den Radius der Himmelskugel $= 1$, so ist $EG = QC = \sin \mathcal{A}$. Ebenso findet man die Höhe $h$ der Sonne im ersten Vertikal aus dem rechtwinkligen Dreieck $JKQ$:

$$JK = QR = \sin h$$ [3],

und nun hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck $RQC$, in dem Winkel $QRC = \sphericalangle \varphi =$ der gesuchten Polhöhe ist:

$$RC = \sqrt{\overline{RQ}^2 + \overline{QC}^2} = \sqrt{\sin^2 h + \sin^2 \mathcal{A}}.$$

Es finden sich bei Ibn Jûnis noch folgende Beziehungen angeführt:

$$QC = RC \cdot \sin \varphi; \; QF = \sin \delta \text{ [3]) } (\delta = \text{Deklination}) = QC \cdot \cos \varphi,$$

womit das Leydener Manuskript abbricht.

---

[1] Der vollständige Titel lautet: „Le livre de la grande table Hakémite par le Sheikh ebn Jounis manuscrit appartenant à la bibl. de l'université de Leyde, indiqué dans le catalogue imprimé pag. 457 sous le Nº 1162. Par la $\text{C}^{\text{en}}$ Caussin 16.

[2] Vgl. v. Braunmühl, Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie, S. 24 ff. (Nova acta d. kg. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. LXXI.)

[3] Vgl. des Verfassers „Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch astronomischer Aufgaben“, S. 15. Leipzig 1910.

Aber die Lösung ist in der Relation

$$QC = RC \cdot \sin \varphi$$

vollständig gegeben:

$$\sin \varphi = \frac{\sin A}{\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 h}}.$$

Der Ausdruck $\sin \delta = QC \cdot \cos \varphi$ ist wohl angegeben für den Fall, daß statt der Morgenweite $A$ die Deklination $\delta$ der Sonne als bekannt angenommen wird.

Auch von der Breitenbestimmung aus der wohl sehr alten Formel Meridianhöhe $H = 90^\circ - (\varphi - \delta)$ ist bei Ibn Jûnis die Rede (Delambre a. a. O. S. 142). Interessante Aufschlüsse über die arabische Gnomonik und die Bestimmung der Polhöhe vermittelst der Horizontalsonnenuhr gewährt uns die Behandlung der Aufgabe in Kap. 35 (Delambre a. a. O. S. 130 ff.). Die Problemstellung lautet:

Der Gnomon einer Horizontalsonnenuhr (cadran horizontal) ist verloren gegangen, und die Breite des Ortes ist unbekannt. Man soll diese Breite bestimmen und die Länge des Gnomons wiederfinden.

Zuerst wird um das (bekannte) Zentrum des Gnomons ein Kreis geschlagen und dessen Peripherie in 360 Grade geteilt. Mit diesem Kreise ist ein anderer kongruent, auf dem die am Gnomon genommenen Winkel abgelesen werden. Ibn Jûnis nennt diesen Hilfskreis den Destour, d. i. eine Art Anzeiger oder Vergleicher. Zu einer beliebigen Stunde stehe die im Äquator laufende Sonne (Fig. 10) im Punkte $Q_1$, der Stundenwinkel sei $= \sphericalangle s$, die Sonnenhöhe $= \sphericalangle h$, und der Gnomonschatten ist durch die Verbindung des dem Sonnenort $Q_1$ entsprechenden Punktes $Q$ der Schattenkurve $K$ mit dem Zentrum $O$ des Gnomons gegeben. Der Winkel, welchen der Schatten mit der Nord-Südlinie $NS$ bildet, ist identisch mit dem Azimut $\alpha$ der Sonne. Diesen Winkel $SOQ$ greife man mit dem Zirkel ab und übertrage ihn auf den Destour, womit man seinen Betrag an der geteilten Peripherie ablesen kann. (Diese Operation ist überflüssig, wenn man $OS$ und $OQ$ mit dem Kreise um das Zentrum des Gnomons zum Schnitt bringt.) Aus der Kenntnis des Azimuts $\alpha$ und des Stundenwinkels $s$ folgt durch Anwendung des Sinussatzes[1] auf das sphärische Dreieck $PZQ_1$:

$$\sin (90^\circ - h) : \sin (90 - \delta) = \sin s : \sin (180^\circ - \alpha),$$

oder, da die Sonne keine Deklination hat:

$$\text{I} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \cos h = \frac{\sin s}{\sin \alpha},$$

und mit Hilfe von $h$ erhält man auf gleiche Weise für $\varphi$:

$$\text{II} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \cos \varphi = \frac{\sin h}{\cos s}.$$

Fällt man vom Punkte $Q$ die Senkrechte auf $NS$, so erhält man damit die Ost-Westrichtung $EQ$ (Äquinoctiale), und der Winkel $\alpha$ läßt sich auch aus dem rechtwinkligen Dreieck $OEQ$ finden:

$$\sin \alpha = \frac{EQ}{OQ},$$

wo $EQ$ und $OQ$ bekannt sind. Damit geht I über in

$$\text{III} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \cos h = \sin s \cdot \frac{OQ}{EQ}.$$

Endlich läßt sich die Höhe des Gnomons $g$ aus $h$ und $OQ$ leicht ermitteln. In dem rechtwinkligen Dreieck $OO_1Q$ gilt

$$\frac{g}{OQ} = \operatorname{tang} h, \text{ also}$$

$$\text{IV} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad g = OQ \cdot \operatorname{tang} h,$$

womit die Aufgabe in allen Teilen gelöst ist.

---

[1] Daß Ibn Jûnis diesen tatsächlich kannte, folgt aus Delambre a. a. O. S. 112; Hak. Tafeln, Kap. XV.

Obwohl mit diesen Angaben Delambres sich die Frage der Polhöhenbestimmung bei Ibn Jûnis durchaus nicht erschöpfend beantworten läßt und wir von der Festlegung der Richtung nach Mekka[1] (Ziehung der Qibla, Kibleh) nichts erfahren, so ersehen wir andererseits aus diesem Kapitel, wie es um das Jahr 1000 n. Chr. mit der arabischen Gnomonik bestellt ist. Man sieht, daß der Astronom bei senkrechtem Stylus eigentlich für jeden Tag andere Stundenmarken (heures temporaires) auf den Schattenkurven bestimmen mußte. Dies besorgte er bekanntlich nur für die Schattenlinien der beiden Solstitialtage und verband „äquihoräre" Punkte durch gerade Linien; ein Verfahren, das nur annähernd richtig war. Daß der dabei begangene Fehler jedoch nicht beträchtlich werden konnte, zeigt Delambre zahlenmäßig (Hist. de l'astronomie ancienne, S. 482).

## Fünftes Kapitel.

## Die gnomonisch-konstruktiven Methoden Abul Hassans.

Wie Ptolemäus, der letzte wissenschaftliche Grieche, uns in seinem Almagest die Constructio magna, die große Zusammenstellung der Leistungen griechischer Mathematiker und Astronomen, vorführt, so weist auch die Blüteperiode arabischer Wissenschaft schon in den Tagen ihres Niedergangs im fernsten Westen maurischer Kultur einen letzten großen Mann auf: Abul Hassan Ali von Marokko. Auch er legt uns in einem stattlichen zweibändigen Folianten, welcher den Titel führt: „Zusammenfassung der Anfänge und Zwecke", auseinander, wie weit es die Araber in der praktischen Astronomie gebracht haben, und bis zu welcher Verfeinerung insbesondere die arabische Gnomonik gediehen war. Es ist eines der vielen Verdienste des Orientalisten J. J. Sédillot, dem Abendlande Abul Hassans Werk, welches als Manuskript 1147 der Kgl. Bibliothek zu Paris angehört, durch Übersetzung in die französische Sprache zugänglich gemacht zu haben. Die Collections des commencements et des fins haben den speziellen Titel: „Traité des instruments astronomiques des Arabes composé au treizième siècle par Aboul Hhassan Ali, De Maroc", 1834.

Sowohl im ersten als auch im zweiten Bande kommt Abul Hassan oft auf die Bestimmung der Polhöhe zu sprechen. Man kann bei ihm fünf Arten von Methoden unterscheiden:

1. Bestimmungen der Breite aus dem Zenit—Pol—Sonne—(Stern-) Dreieck,
2. konstruktive Ermittlung derselben aus dem Zifferblatt der Horizontalsonnenuhr (arabisch: Basithah),
3. bis 5. das Aufsuchen der Breite vermittelst der Vertikalsonnenuhr über dem Meridian, der Ost-Westlinie und der von dieser um ein gegebenes Azimut abweichenden Vertikaluhr (französisch: Déclinant).

---

[1] Das Ziehen dieser Richtlinie (eigentlich nach Ibn Jûnis: Gesichtswendung gegen die Kaaba) lehrt schon Al-Battânî und ebenso Ibn Jûnis (vgl. die lehrreiche Abhandlung von G. W. S. Beigel, „Bemerkungen über die Gnomonik der Araber" in „Fundgruben des Orients", I. Bd., S. 409 ff.). Danach hat Al-Battânî für Rakka (Aracte) in Persien, wo er beobachtete, die Polhöhe von 36° zugrunde gelegt, was mit der Karte II von J. Lelewels Atlas: „Géographie du moyen âge" in sehr gutem Einklang steht. Ibn Jûnis berechnet die Kibleh-Richtung für Fostat (neben Kairo). Da sie jedoch mit Beigels Rechnungen nicht stimmt, so vermutet er, daß Ibn Jûnis keine ganz genauen Längen- und Breitenunterschiede von Fostat und Mekka hatte. Beigel legt deshalb die Angaben der Ptolemäischen Geographie der Rechnung zugrunde, wonach Fostat (Babylon Aegypti) der 30. Parallel, Mekka (Macoraba) der 22. eignet. Die erstere Angabe ist noch heutigen Tages richtig (vgl. C. Niebuhrs „Reisebeschreibung nach Arabien usw.", I. Bd., Tab. XII), die zweite nur um ca. 20 Bogenminuten zu groß. Diese Genauigkeit der Ptolemäischen Angaben ist geradezu überraschend. — Leider hat Caussin aus den Hakimitischen Tafeln des Ibn Jûnis gar keine Breiten ausgehoben, so daß wir in dieser Hinsicht nichts mitzuteilen vermögen.

Wir haben uns mit der Bedeutung der Kibleh für die mohammedanische Religion eingehender beschäftigt in dem Aufsatz: „Die Sonnenuhren der Araber in ihrer Bedeutung für die arabische Astronomie und Religion" (Naturwiss. Wochenschr. 1911, S. 240 ff.). Ihre Festlegung in den Nischen aller Moscheen und auf dem Zifferblatt der Horizontaluhren, die an öffentlichen Orten von freier Aussicht, besonders auf den Minarets, aufgestellt waren, war Aufgabe des Astronomen, der gleichzeitig Diener der Religion war. Der bei der Moschee amtlich angestellte Zeitbeobachter heißt Mowakket, er ist verschieden von dem Gebetsrufer, welcher Muedsin heißt. „Der erste Ausrufer war Bellal, der Äthiopier; der Prophet sagte von ihm: „Bellal ruft mit einer Stimme wie Kristall" (Auszüge aus der Sunna oder der mündlichen Überlieferung Mohammeds 81, S. 153).

Was die Behandlung des sphärischen Dreiecks anlangt, so bedient sich **Hassan** neben der Projektionsmethode häufig solcher Regeln, die im wesentlichen auf den Kosinussatz hinauslaufen; und daraus zieht **Delambre** den Schluß, daß ihn die Westaraber gekannt hätten (Hist. de l'astr. du moyen âge, S. 187), welcher Meinung **von Braunmühl** nicht zustimmt, sondern aus dem verschiedenartigen Aufbau und der wechselnden Gestalt der Sätze folgert, daß der große Marokkaner sie für jeden einzelnen Fall besonders aus der Figur ableitete und „keine gemeinsame Quelle kannte, aus der sie sich alle schöpfen ließen" (a. a. O. S. 85).

Andererseits ergibt sich aus **Nallinos** Opus astronomicum des **Al-Battāni** (Teil I, S. 138), daß **der Zeiger** (γνώμων) **der Sonnenuhr immer senkrecht auf der Uhrebene oder dem Zifferblatt stand**[1]), also bei Vertikaluhren parallel dem Horizont. Solche Uhren findet man jetzt noch an Kirchen, deren Längsrichtung von Osten nach Westen geht.

### 1. Bestimmungen der Breite aus dem Zenit—Pol—Sonne—(Stern-) Dreieck.

Obwohl sich unter den Breitenbestimmungen aus dem eben genannten sphärischen Dreieck teilweise die uns schon bekannten Methoden der **Inder** und **Al-Battānis** finden, so glauben wir doch alles bei **Abul-Hassan** bezüglich unserer Frage Vorkommende ausführlich mitteilen zu müssen, da wir bei unserem Gewährsmann eine viel größere Ausführlichkeit treffen. Es heißt im 1. Buche S. 100:

1. α) **„Die Breite eines Ortes** (‚béled') **ist ein Kreisbogen** (arc de cadran) **des Meridians zwischen Zenit und Äquator, und dieser Bogen ist gleich der Erhebung des Poles über den Horizont** (Polhöhe). **Will man die Breite eines irdischen Ortes bestimmen, so nimmt man die Meridianhöhe der Sonne über dem Horizont dieses Ortes, und wenn sie = 90° ist und die Sonne keine Deklination hat, so hat der Ort keine Breite; hat die Sonne aber eine Deklination, so hat der Ort eine Breite, welche gleich dieser Deklination ist."**

Die Richtigkeit dieser Darlegungen ergibt sich leicht aus der Formel für die Mittagshöhe $H$ der Sonne bei der Polhöhe $\varphi$ und der Deklination $\pm\delta$:

$$\sin H = \cos(\varphi \mp \delta),$$

woraus folgt:

$$H = 90^{\circ} - \varphi \pm \delta.$$

Setzt man hierin $H = 90^{\circ}$, so wird für $\delta = 0^{\circ}$ auch $\varphi = 0^{\circ}$; im anderen Falle ist $\varphi = \pm\delta$, q. e. d.

β) **„Wenn die gemessene Mittagshöhe der Sonne kleiner als 90° ist und die Sonne keine Deklination hat, so ziehe man diese Höhe von 90° ab, und der Rest gibt die Breite des Ortes. Hat die Sonne aber eine Deklination, so füge man sie der beobachteten Höhe hinzu, wenn beide vom selben Vorzeichen sind, oder man ziehe sie davon ab, wenn sie von ungleichem Vorzeichen sind, und wenn das Resultat der Addition oder Subtraktion = 90° ist, so hat der Ort keine Breite, wenn es aber nicht 90° ist, so wird die Differenz auf 90° der Breite des Ortes gleich sein.** Statt der Sonne kann man sich auch eines Sternes bedienen, dessen Deklination und Kulminationshöhe dann bekannt sein muß."

Auch hier läßt sich die Regel aus der Mittagshöhe der Sonne sofort verifizieren. Aus

$$H = 90^{\circ} - \varphi \pm \delta \text{ folgt für } \delta = 0:$$
$$\varphi = 90^{\circ} - H.$$

Ist aber $\delta \gtrless 0$, so wird

$$\varphi = 90^{\circ} - (H \pm \delta).$$

Für $H \pm \delta = 90^{\circ}$ wird $\varphi = 0^{\circ}$ q. e. d.

γ) Die folgende Methode ist die der Kulminationshöhen eines Zirkumpolarsterns, die hier ebenfalls vollständiger als bei **Al Battāni** angegeben ist. Hier heißt es nämlich noch ergänzend: **„Wenn aber die beiden Höhen von verschiedenen Vorzeichen sind, so ziehe man ihre Summe von 180° ab, und die Hälfte des Restes der kleinsten Höhe hinzugefügt, wird der Breite des**

---

[1] Trotzdem glaubt R. **Wolf** (Geschichte der Astronomie, S. 142), daß bei den Arabern auch der Polos, d. i. ein Sonnenzeiger, der nach dem Weltpol gerichtet ist, kultiviert wurde, eine Ansicht, der auch J. **Drecker** (Gnomone und Sonnenuhren, 1909, S. 21), zustimmt. Wir konnten jedoch in der arabischen Gnomonik nirgends einen solchen finden.

Ortes gleich sein. Wenn sie gleich sind, so füge man einer der beiden den halben Rest hinzu, und die gefundene Summe ist gleich der Breite des Ortes."

Nach diesen ausführlichen Regeln zur Bestimmung der Polhöhe folgt eine Breitentabelle, in welcher die geographische Breite von 135 Orten angegeben ist. Dabei hat Abul Hassan die Namen jener Städte, deren Breite er selbst bestimmte, mit roter Tinte eingezeichnet; bei der Festsetzung der anderen Breitenzahlen bediente er sich der — wie er selbst klagt — oft sehr ungenauen und voneinander abweichenden Angaben anderer Autoren oder wie Eratosthenes der Berichte von Personen, die dort gewesen waren. Besonders unsicher nennt er die ihm zu Gebote stehenden Daten für die Länder Indiens, der Rihhozaren[1]) oder Khozaren und der Esclavons[2]).

Wir geben im folgenden ein Probe aus der Breitentabelle Abul Hassans, indem wir eine Anzahl Orte mit den Polhöhen nach Hassan anführen und in der eckigen Klammer die wahre Breite beifügen, soweit wir dieselbe aus modernen Tabellen feststellen konnten. Damit der Text ein fortlaufendes Ganze bleibe, geben wir die sich auf die beigefügten Buchstaben beziehenden Erläuterungen erst am Schluß.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rhânah[a]) | 10° 0' | | Jerusalem (El-Khods) | 32° 40' | [31° 48'] |
| Rhadin[a]) | 10° 40' | | Damaskus (Dimechke) | 33° 0' | [33° 30'] |
| Al Takrur[a]) | 10° 40' | | Bagdad | 33° 15' | [33° 20'] |
| Zafar[b]) | 12° 30' | | Antiochia (Antakië) | 34° 40' | [35° 55'] |
| Aden | 13° 0' | [13° 10'] | Algier (Al Jezâïr) | 35° 30' | [36° 49'] |
| Sanaa | 14° 10' | [15° 10'] | Aleppo | 35° 30' | [35° 15'] |
| Donkala (am Nil) | 17° 0' | [19°, Neu-Donkola] | Cadix | 36° 0' | [36° 31' 7"] |
| | | | Rakka[g]) (Persien) | 36° 0' | [36° 0'] |
| Mekka | 21° 0' | | Sinjâr (Mesopot.) | 36° 0' | [36° 0'] |
| Medina (Jastreb) | 24° 0' | | Sevilla (Ichbilia) | 37° 15' | [37° 21'] |
| Kabul[c]) | 24° 0' | | Ishahân[h]) | 37° 20' | [32° 25'] |
| Biskara[d]) | 27° 50' | | Cordoba | 38° 30' | [37° 42'] |
| Biskle[e]) | 28° 15' | | Genua (Janua) | 39° 30' | [44° 25'] |
| Schiras | 29° 36' | [20° 40'] | Toledo | 40° 0' | [39° 50'] |
| Kairo (Misr) | 29° 55' | [30° 3' 12"] | Saragossa | 41° 30' | [41° 40'] |
| Alexandria | 31° 0' | [31° 11' 20"] | Konstantinopel | 47° 0' | [41° 0'] |
| Marokko (Merrâkiche) | 31° 30' | [31° 30'] | Kirme (Krim?) | 51° 0' | [ca. 45°] |
| Kufa[f]) | 31° 30' | | Bulrar (Bolgar a. d. Wolga?) | 51° 0' | [ca. 48°] |

[a]) Rhana — Khana — Ort in Westafrika, an der Mündung des Gana (Gambia?) gelegen, der nach Leiwels Atlas pl. 21 dem lacus Kura unter dem Äquator als Westarm des Nils entfließt. Rhadia — Kadia, am Gana, ebenso Takrur oder Tekrur weiter im Binnenlande. [b]) Zafar in Südost-Arabien, nordöstlich von Aden. [c]) Pl. 22 weist zweimal den Ort Kabul auf: einmal an der Südgrenze der persischen Provinz Khorasan und nochmals südlich der Landschaft Sind. Der geographischen Breite nach kann nur das letztere gemeint sein. [d]) Auch Biskara kommt mehrfach vor, sowohl südlich von Tunis [34° 50'] als tief in der Sahara gelegen. Gemeint ist das letztere. [e]) Biskle-Trizkie ist im südlichsten Marokko gelegen. [f]) Kûfa westlich vom Euphrat, Vaterstadt des arabischen Gelehrten Ǵâbir ben Haijân el Sûfî, nicht zu verwechseln mit dem spanischen Astronomen Ǵâbir ben Aflah. Aus Kûfa stammen noch andere arabische Gelehrte. (Vgl. H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. Leipzig 1900. S. 1 und 209.) [g]) Rakka — Beobachtungsort Al-Battânis. [h]) Das oben angeführte Ishahan oder Isfahan kann nicht die nachmalige reiche Residenz Abbas d. Gr. sein, sondern lag viel nördlicher in Khorasan.

Bei sehr vielen Orten lehrt der Vergleich, daß ihre Polhöhe von dem marokkanischen Astronomen durchweg zu klein angegeben wird. Diese Tatsache findet ihre natürliche Erklärung in der Annahme, daß zur Zeit des Äquinoctiums auf gnomonische Weise die Mittagshöhe $H$ der Sonne ermittelt worden ist. Dann hat man nach früherem

$$\varphi = 90° - H.$$

---

[1]) Die Rihhozaren waren ein ursprünglich türkisches, später zum Judentum übergetretenes Volk, das im südlichen Rußland an der Wolga wohnte. Die Bewohner hießen al andalus (Andalusien); ihre Residenz war Kurtobah (Cordoba). (Vgl. hierzu die interessanten Ausführungen von S. Günther: „Ein mathematisch-geographisches Dokument aus dem 10. Jahrhundert", Leopoldina 1880, S. 122 ff.)

[2]) Esclavons, hier identisch mit Slaven. (Briefliche Mitteilung von Herrn Professor S. Günther.)

Der Gnomonschatten gibt aber nicht die Höhe des Sonnenmittelpunktes, sondern des oberen Sonnenrandes. Nimmt man noch die Refraktion hinzu, welcher die Araber ebenfalls keine Rechnung trugen, so müßte $H$ stets zu groß, demnach $\varphi$ zu klein ausfallen.

Die auffallenden Abweichungen der am Schwarzen Meere und im Lande der Khazaren gelegenen Orte von ihrer wahren Lage bestätigen die Unsicherheit, die ja Abul Hassan selbst erwähnt.

δ) Im 69. Kapitel, S. 325 handelt es sich um die Bestimmung der Breite eines Ortes, für welchen ein Stern, dessen Azimut und Höhe für einen bekannten Ort gegeben sind, bei seiner Kulmination durch das Zenit geht.

Die Lösung ist die, daß aus den Daten $\alpha$ und $h$ des Sternes am Orte der gegebenen Polhöhe $\varphi_1$ zuerst die Deklination $\delta$ desselben ermittelt wird, was von Hassan im 65. Kapitel, S. 311 in einer ziemlich weitschweifigen Weise durchgeführt wird, die im wesentlichen auf den Kosinussatz hinausläuft, den man im Zenit—Pol—Stern-Dreieck für die Seite $90^\circ - \delta$ aufschreiben kann:

$$\sin \delta = \sin \varphi_1 \cdot \sin h - \cos \varphi_1 \cdot \cos h \cdot \cos \alpha.$$

Dabei wird das Produkt $\cos \alpha \cdot \cos h$ einem Sinus gleichgesetzt, den Sédillot den sinus primordial nennt (oûlâ = prior = antérieur), eine Abkürzung, welche das rechtwinklige sphärische Dreieck der Fig. 13 erläutert[1]. Nachdem also $\delta$ aus

$$\sin \delta = \sin \varphi_1 \cdot \sin h - \cos \varphi_1 \cdot \sin p$$

gefunden ist, stellt sich in dem oben genannten Spezialfall dasselbe als mit der Polhöhe identisch heraus (Fig. 12).

## 2. Von der Breitenbestimmung mittels des Horizontalcadrans oder des Bazithahs.

Zum Verständnis der merkwürdigen gnomonischen Methoden Abul Hassans zur Auffindung von béled ist es angezeigt, die arabischen Sonnenuhren in Kürze zu charakterisieren. Es möge dies zunächst für die Horizontalsonnenuhr geschehen.

Im wesentlichen handelt es sich bei der Herstellung derselben um die Verzeichnung der sogenannten Schattenkurven, welche das Ende eines lotrecht auf einer Horizontalebene stehenden besonnten Stabes bei der täglichen scheinbaren Rotation des Himmelsgewölbes beschreibt. Ihre Natur läßt sich leicht erkennen aus der Erwägung, daß sie Abbilder von Kreisen — Parallelkreisen der Sonne — sind. Zieht man von allen Punkten eines solchen Kreises Strahlen durch die Stabspitze, so umhüllen sie einen senkrechten Kreiskegel, dessen Verlängerung jenseits des Stabendes von der Horizontebene geschnitten wird. Die Schnittkurve, welche eben mit der Schattenlinie identisch ist, ist also ein Kegelschnitt. Der Stab oder der Gnomon wirft natürlich so lange einen Schatten, als die Sonne über dem Horizonte steht. Im Augenblick des Auf- und Unterganges der Sonne wirft aber ein Gegenstand einen unendlich langen Schatten, da die Sonnenstrahlen der Horizontebene parallel laufen. Diese äußersten Punkte der Schattenkurve sind also unendlich ferne Punkte: da sie deren zwei besitzt, so erkennen wir, daß eine auf- und untergehende Sonne auf horizontaler Auffangfläche eine Hyperbel als Schattenlinie erzeugt. Da diese zwei Punkte dem Sonnenauf- und -untergang gegenüberliegen, so hängt die Ausbreitung der Hyperbel von der Lage dieser Marken auf dem Horizonte ab; sind Morgen- und Abendweite groß, der Auf- und Untergang also nahe am Nordpunkt, so liegt die Hyperbel in einem schmalen Raum und besitzt einen stark gekrümmten Scheitelteil; geht die Sonne im Osten auf und im Westen unter, d. h. läuft sie zur Zeit der Äquinoctien im Äquator, so liegen sich die zwei unendlich fernen Punkte diametral gegenüber: die Hyperbel hat sich bis zur geraden Linie verflacht, welche also das Bild des Äquators (Widders) ist. Diese gerade Linie ist die Ost-Westrichtung. Bei negativer Morgen- und Abendweite liegen Auf- und Untergangspunkt der Sonne näher beim Südpunkt; es treten wiederum Hyperbeln mit geringerer oder größerer Scheitelkrümmung auf, aber die Scheitel liegen auf der entgegengesetzten Seite der Ost-Westlinie. So überdeckt sich die Horizontalebene diesseits und jenseits dieser Geraden mit einer Schar von Hyperbelästen, als Projektionen der Parallelkreise von $-23^1/_2{}^\circ$ bis $+23^1/_2{}^\circ$ $(\mp \varepsilon)$.

α) Falls ein solcher Bazithah gegeben ist, sei nach dem Wege gefragt, die Breite des Ortes zu bestimmen, für den er konstruiert wurde, wenn diese Breite unbekannt ist.

---

[1] Solche eigene Termini für Produkte finden sich bei Abul Hassan öfters.

„Die Antwort ist die, daß, da der Gnomon bekannt ist, sowie auch seine Schatten(längen) für den Mittag des Anfangs des Widders, Steinbocks und Krebses, die Breite des Ortes gegeben ist durch den Gnomon und einen dieser Schatten."

In Fig. 14 sei $OF = q$ der Gnomon, welcher bei der Sonnenhöhe $H_1FB_1 = 90^\circ - \varphi + \varepsilon$ den Schatten $FQ = m$ (Sonne im Krebs), am Mittag des Anfangs des Widders, wo die Sonnenhöhe $= 90^\circ - \varphi$ ist, den Schatten $FS = m_1$, endlich zur selben Zeit im Steinbock bei der Sonnenhöhe $90^\circ - \varphi - \varepsilon$ einen solchen $FR = m_2$ wirft. In Fig. 15 sind die Schattenkurven für die zwei Solstitialtage und die Tag- und Nachtgleiche gezeichnet. $F$ ist der Fußpunkt des Gnomons. Aus Fig. 14 liest man leicht ab:

$$21.\ \text{Juni:}\ \frac{q}{m} = \operatorname{tang}\,[90^\circ - (\varphi - \varepsilon)] = \operatorname{cotg}\,(\varphi - \varepsilon),$$

$$21.\ \text{März, 23. Sept.:}\ \frac{q}{m_1} = \operatorname{tang}\,(90^\circ - \varphi) = \operatorname{cotg}\,\varphi,$$

$$21.\ \text{Dezember:}\ \frac{q}{m_2} = \operatorname{tang}\,[90^\circ - (\varphi + \varepsilon)] = \operatorname{cotg}\,(\varphi + \varepsilon),$$

woraus, wie behauptet, $\varphi$ jedesmal gefunden werden kann.

β) „Im Falle aber der Gnomon nicht bekannt ist, sei es deshalb, weil er verloren gegangen ist, oder daß, weil seine Gestalt kegelförmig ist, man den senkrechten Abstand der Spitze vom Fußpunkt (Pfeilhöhe) nicht genau haben kann, die der wahre Gnomon ist, lautet die Antwort, daß, da der Schatten des wahren Mittags (des Tages des Beginns) des Steinbocks und derjenige seines Assr bekannt sind, die Differenz dieser beiden Schatten gleich der Länge des Gnomons ist", womit diese Aufgabe auf α) zurückgeführt ist.

Der Assr (oder Aṣr) ist jene Zeit des Nachmittags, die in dem Augenblick eintritt, in dem der Horizontalschatten gleich dem Mittagsschatten vermehrt um die Länge $q$ des Gnomons ist. Er endigt, wenn der Überschuß des Abendschattens über den Meridianschatten gleich der doppelten Höhe $2\,q$ des Gnomons ist[1]. Setzt man $q = 1$, so ist für den Beginn des Assr, wo die Sonnenhöhe $h'$ sein möge:

$$\operatorname{cotg}\,h' = 1 + \operatorname{tang}\,(\varphi \mp \delta)$$

und für das Ende (Sonnenhöhe $= h''$): $\operatorname{cotg}\,h'' = 2 + \operatorname{tang}\,(\varphi \mp \delta)$[2] (Fig. 15).

γ) „Wenn es heißt, daß der Mittagsschatten des Beginns des Steinbocks nicht bekannt ist, sei es, weil das Zentrum des Gnomons zerstört ist, oder weil, falls der Gnomon von Kegelform ist und auf seinem Fuße feststeht, man den genauen Betrag des Mittagsschattens zum Beginn des Steinbocks nicht haben kann, so lautet die

---

[1] Die Zeit des Aṣr (Áṣr = Nachmittag) ist für den Muselmann eine Gebetszeit. Er hat während des Aṣr vier Rakas (Einzelgebete) zu verrichten. Deshalb war eine genaue Festlegung desselben von jeher eine Aufgabe des Astronomen. Vor Abul Hassan wird der Aṣr in dieser Definition anscheinend nirgends erwähnt. Auch Hassan klärt uns über die religiösen Praktiken und ihren Zusammenhang mit der Sonnenuhr nicht näher auf. Es ist nicht richtig, wenn R. Sonndorfer in seiner Sonnenuhrkunde behauptet, daß die Konstruktionen in Abul Hassans Werke „fast alle religiösen Gebräuchen dienen" (S. 16). Über diese ist noch gar nichts in europäische Sprachen übersetzt, obwohl darüber sehr viele Details existieren (freundliche briefliche Mitteilung von Herrn Prof. Suter). Sie datieren jedoch aus einer späteren Zeit und sind in der Regel von Gebetsrufern verfaßt; vor 1350—1400 gibt es nur sehr wenige diesbezügliche arabische Handschriften.

Wie man die für das ganze Jahr gültige Aṣr-Kurve in das Zifferblatt der Sonnenuhr einzeichnen kann, und wie die Gleichung für diesen merkwürdigen geometrischen Ort aufzustellen wäre, hat Schreiber dieses in dem schon erwähnten Aufsatz in der Naturwiss. Wochenschr. gezeigt. Wenn man den Fußpunkt des Gnomons zum Koordinatenanfang, die Kardinalrichtungen zu den Koordinatenachsen macht, so findet man leicht folgende zwei Gleichungen:

$$y^2 \cdot \sin^2 \delta - x^2 \cdot \cos\,(\varphi - \delta) \cdot \cos\,(\varphi + \delta) + x \cdot q \cdot \sin 2\,\varphi - q^2 \sin\,(\varphi - \delta) \cdot \sin\,(\varphi + \delta) = 0,$$

$$x^2 + y^2 = q^2 \cdot [1 + \operatorname{tang}\,(\varphi - \delta)]^2.$$

Die Elimination von $\delta$ führt auf eine Gleichung vom 8. Grade. Die Aṣr-Linie scheint nicht ohne merkwürdige Eigenschaften zu sein. Sie, wie auch die „Hafir-Kurven" und der „Halazun" (Schraubenlinie) lassen indessen sehr übersichtliche Parameterdarstellungen zu, wodurch ihre Diskussion ermöglicht wird. Wir werden eingehend über diese merkwürdigen Erzeugnisse arabischer Gnomonik in einem eigenen Buche handeln.

[2] Nach der Festsetzung des Imâms Schafiy (784—819) begann der Assr in dem Augenblick, wenn der Gnomon einen Schatten = seiner eigenen Länge ($q$) zeigte und endigte bei einer Schattenlänge = $2\,q$ (vgl. Mudgea d'Ohsson: Tableau général de l'empire othoman, pag. 179). Daß die Hassansche Festsetzung des Assr vollkommener ist, sieht man sofort.

Antwort, daß man den Ort des Zentrums mit irgendeiner Substanz ausfüllen und den Verschluß (obturateur) verebnen muß, bis er nicht mehr über die (Ober-)Fläche der Stundenlinien hervorragt; alsdann verlängere man die Linie des wahren Mittags und nehme die Mitte des Teiles dieser Linie, der in den Verschluß des Gnomonfußes fällt, und falls der Gnomon kegelförmig ist, so hebe man ihn weg, und dann ist nach Ausfüllung der Vertiefung, in der sich der Fuß des Gnomons befand, der weitere Verlauf der Operation offenbar."

Um den Gnomon auf der horizontalen Platte (Holztafel u. dgl.) solide zu placieren, bedienten sich die arabischen Astronomen eines eigenen Durchbohrungsinstrumentes, des Atherbâls (vielleicht vom lateinischen Terebra oder Terebella = Bohrer), dessen Gestalt in Fig. 17 wiedergegeben ist (Fig. 116 aus dem Traité ect. par J. J. Sédillot). Es war wohl ein Drillbohrer, der durch eine umgelegte Schnur mit einem Bogen bewegt wurde[1]). Das genau in das rechtwinklige Gestell passende gleichseitige Dreieck nahm natürlich an den Umdrehungen des Bohrers teil, wodurch die senkrechte Bohrrichtung in der Tafel gewährleistet wurde. War auch die Verdickung des Bohrers in dieselbe eingedrungen, so war die gewünschte Vertiefung für den Gnomon vorhanden, worauf er mit dem Fuß eingelassen und wohl durch eine Art Hülse (obturateur) verschlossen wurde. Die wahre Mitte des Gnomons befand sich dann genau unter der Spitze des Atherbâls (Fig. 18).

δ) „Wenn man aber auf dem Verschluß des Gnomons die Mitte als Zentrum desselben nicht nehmen kann, sei es wegen der differierenden Ränder des Obturateurs, oder weil man den Gnomon nicht wegheben kann, so kann man folgendes Verfahren einschlagen:

Ziehe in der Ebene des Papiers die Strecke $AB$ und mache sie gleich dem Teil des Parallels des Widders genommen zwischem dem Beginn der vierten (Nachmittags-) Stunde und der Mittagslinie; im Punkte $A$ (Fig. 19) trage den Winkel $BAC = \varepsilon$ (Ekliptikschiefe) an, nimm hierauf den Teil der Mittagslinie zwischen Widder und Steinbock (in Fig. 15 sind die für diese Aufgabe gebrauchten Buchstaben in Klammern beigefügt), lege einen der Punkte auf $B$ und beschreibe mit dieser Strecke um $B$ einen Kreisbogen, so erhältst du auf $AC$ den Punkt $D$, ziehe nun durch $D$ und $B$ eine Gerade und fälle von $A$ das Lot auf dieselbe, so ist es gleich der Höhe $q$ des Gnomons; ferner ist dann $BE$ gleich der Distanz zwischen dem Fußpunkt des Gnomons und dem Widder (auf der Mittagslinie), $ED$ gleich der Distanz zwischen dem Fußpunkt des Gnomons und dem Steinbock; endlich ist Winkel $BAE$ = der Polhöhe $\varphi$."

Ein viel einfachere Klarstellung dieser Hassanschen Konstruktion, als wir sie in der Naturw. Wochenschrift. S. 245 und 246 durch ausgedehnte Rechnungen gaben, verdanken wir Herrn Prof. H. Michnik am Kgl. Gymnasium zu Beuthen, Oberschlesien, die wir deshalb hier vorführen wollen.

Wird $AE = q$ als Gnomon senkrecht auf der Nord-Südrichtung angenommen, so wirft er, wenn die Sonne im Widder zur Kulmination (in $S_0$) gelangt, den Mittagsschatten $q \cdot \operatorname{cotg} (90^\circ - \varphi) = q \cdot \operatorname{tang} \varphi$. Zu Beginn der vierten Stunde (Sonne in $S_3$) falle der Schatten der Gnomonspitze nach $F$. Dann ist $ABF$ die Ebene des Äquators durch den Punkt $A$. $\sphericalangle S_0AS_3 = \sphericalangle FAB$ ist dann der Stundenwinkel der Sonne $= 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$. Da $\sphericalangle ABF = 90^\circ$ ist, so ist im Dreieck $ABF$ auch $\sphericalangle AFB = 45^\circ$, mithin $AB = AF \frac{q}{\cos \varphi}$. Trägt man an $AB$ noch den $\sphericalangle \varepsilon$ an, so ist $AD$ der Strahl, welchen die Sonne im Moment der Kulmination herabsendet, wenn sie im Steinbock steht; denn da bei $E$ ein rechter Winkel ist, so bleibt im Dreieck $DEA$: $\sphericalangle ADE = 90^\circ - \varphi - \varepsilon = 90^\circ - (\varphi + \varepsilon)$. Daher ist $ED$ die Distanz zwischen dem Fußpunkt des Gnomons und dem Steinbock.

ε) „Falls aber weder der Parallel des Krebses noch der des Steinbocks gezeichnet vorliegen, so ziehe man wiederum eine Gerade $AB$ gleich dem Teil der Mittagslinie, welchen die von einer im Widder und im Pol stehenden Sonne erzeugten Mittagsschatten des Gnomons ausschneiden, beschreibe über $AB$ einen Halbkreis, nehme auf dem Widder wiederum den Teil zwischen der Mittagslinie und

---

[1]) Nach einer gütigen brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. Eilhard Wiedemann in Erlangen.

dem Beginne der vierten Stunde, setze damit in $B$ ein und beschreibe einen Bogen, wodurch auf dem Halbkreis Punkt $C$ gefunden ist; fälle von $C$ das Lot $CD$ auf $AB$, so hast du damit die Länge des Gnomons, und es wird Bogen $BC$ gleich $2\varphi$, also Winkel $BZF$ gleich der Polhöhe $\varphi$ sein." (Fig. 20 und 21.)

Wir finden für die Schattenlänge $FB$ und die Strecke $FA$:

$$FA = q \cdot \text{cotang}\ \varphi;\ FB = q \cdot \text{tang}\ \varphi,$$

$$\text{also:}\quad FA + FB = AB = q \cdot (\text{cotang}\ \varphi + \text{tang}\ \varphi) = \frac{q}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi},$$

während die Schattenlänge des Gnomons bis zum Widder zum Beginn der vierten Stunde $BC = \frac{q}{\cos\varphi}$ ist. Jetzt zeichnen wir das rechtwinklige Dreieck der Fig. 21. Es ist durch die Hypotenuse $AB$ und die Kathete $BC$ vollständig bestimmt, und man hat:

$$BC : AB = \cos \sphericalangle ABC$$

oder für $BC$ und $AB$ die gefundenen Werte eingesetzt:

$$\frac{q}{\cos\varphi} : \frac{q}{\cos\varphi \cdot \sin\varphi} = \cos \sphericalangle ABC = \sin\varphi,$$

folglich $\sphericalangle ABC = 90^\circ - \varphi$; also auch $\sphericalangle BAC = \varphi$.

Der Punkt $Z$ ist der Kreismittelpunkt, das Dreieck $ACZ$ daher ein gleichschenkliges; mithin ist der Winkel $BZC$ (Außenwinkel des Dreiecks $ACZ$) gleich $2\varphi$. Ferner ist auch Dreieck $BCZ$ gleichschenklig; daher teilt das Lot $ZF$ den Winkel an der Spitze $2\varphi$ in zwei gleiche Teile, so daß man tatsächlich hat $\sphericalangle FZB = \varphi$. Man erkennt jetzt ohne weiteres, daß Fig. 21 dem rechtwinkligen Dreieck der Fig. 20, nämlich $ACB$ kongruent ist. Dort erscheint aber das Lot von der Spitze des rechten Winkels $CF$ als Länge des Gnomons, also ist auch $CD$ der Fig. 21 $= q$, q. e. d.

### 3. Das Aufsuchen der Breite vermittelst der Vertikalsonnenuhr in der Meridianebene.

Zum Verständnis der folgenden Konstruktionen müssen wir uns erst über die Lage der Schattenlinien auf einer solchen Vertikalebene Aufschluß verschaffen. Der jetzt wagerecht und von West nach Ost gerichtete Zeiger wirft die längsten Schatten nach dem unteren Teil der Vertikalebene, wenn die Sonne mittags am höchsten steht; dagegen wird zur Zeit der Auf- und Untergänge der Schatten in die durch den Fußpunkt des Zeigers gehende wagerechte gerade Linie fallen. Das jetzt zu behandelnde Zifferblatt, die Mittagsebene, schneidet die Ebene des Himmelsäquators in seinem Durchmesser, welcher die Äquatorhöhe $90^\circ - \varphi$ angibt. Die Bilder der beiden Wendekreise sind Schnitte eines Kegels mit der Vertikalebene, und da beide Kreise gleichweit vom Äquator abstehen, so müssen ihre perspektivischen Bilder symmetrisch zur Ablotung des Äquators liegen, woraus weiter folgt, daß sie die Horizontale in zwei Punkten $A$ und $B$ treffen, die gleichweit nach rechts und links vom Durchschnitt $C$ des Äquators mit der Nord-Südlinie abstehen; endlich zieht diese symmetrische Lage der zwei Kegelschnitte zum Äquator nach sich, daß eine Senkrechte zum Äquator, d. h. eine Parallele zur Weltachse, auch symmetrische Punkte der Kurven trifft, und daß insbesondere ein durch $C$ gehendes Lot, d. i. die Weltachse selbst, die Scheitel derselben enthalten muß. Fig. 22 soll die zeichnerische Herstellung des Zifferblattes, das mit der Meridianebene zusammenfallend zu denken ist, näher erläutern:

Wenn am 21. März oder 23. September der Sonnenmittelpunkt im Kulminationspunkt $Q$ des Äquators angelangt ist, senden die vor der Bildfläche befindlichen Sonnenstrahlen den Schatten des in $C$ senkrecht auf der Uhrebene stehenden (daher zu einem Punkt verkürzten) Zeigers auf $CQ_1$ hin bis ins Unendliche. Ist aber in $t$ Nachmittagsstunden der Sonnenmittelpunkt auf dem Himmelsäquator um den Bogen $15\,t = s$ Grade weiter bis nach $M$ gekommen, so stoßen die Sonnenstrahlen gegen $QQ_1$ unter dem Winkel $s$ auf, und die Schattenlänge hat sich auf $CM_1 = q \cdot \text{cotg}\ s$ verkürzt. Abends 6 Uhr, bei $s = 90^\circ$, wird bei Sonnenuntergang die Schattenlänge $= q \cdot \text{cotg}\ 90^\circ = 0$ (Punkt $C$). Oberhalb $C$ kann nie ein Schatten fallen; deshalb ist jener Teil des Äquators gestrichelt ($CQ$).

Wenn am 21. Juni der Sonnenmittelpunkt auf dem Wendekreis des Krebses $KR$ mittags in $K$ angekommen ist, läuft der Schatten des Zeigers auf $CL$ hin ins Unendliche. Geht an diesem Tage der Sonnenmittelpunkt in $U$ unter, so erhält man aus dem bei $N$ rechtwinkligen Kugeldreieck $PNU$:

$\sin \varepsilon = \cos \varphi \cdot \cos \gamma$, also $\cos \gamma = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi}$, und der Schatten des Zeigers hat die Länge $CA = g \cdot \cot \gamma$. In $A$ endet die Schattenkurve des Sommersolstitialtages. (Sie ist gestrichelt fortgesetzt.) Ist am Nachmittag der Sonnenmittelpunkt in $F$, so fälle man von $F$ auf $ZKr$ das Lot $FT = f$. Man findet dann für $f$ aus dem rechtwinkligen Dreieck $FTZ$:

$$\sin f = \sin s \cdot \cos \varepsilon.$$

Der Strahl $FC$ ist gegen die Bildebene unter dem Winkel $f$ geneigt; der die Spitze des Zeigers treffende Strahl hat die gleiche Richtung. Mithin ist die Schattenlänge zur Nachmittagssonnenzeit $s$, $CF_1 = g \cdot \operatorname{cotg} f$. Die Lage dieses Schattens von $C$ an links neben $CZ$ findet man aus dem Bogen $ZT$. Zunächst hat man aus $\cos s = \operatorname{tang} \varepsilon \cdot \operatorname{tang} PT$:

$$\operatorname{tang} PT = \cos s \cdot \operatorname{cotg} \varepsilon,$$
$$\text{also} \quad ZT = PT - (90^\circ - \varphi).$$

Bei Sonnenuntergang wird $f$ zu $\gamma$. Nach Berechnung dieser Größen für wenige Stunden $s$ kann man den Hyperbelast $LA$ für eine gewählte Breite $\varphi$ genau zeichnen. Es braucht kaum darauf hingewiesen zu werden, daß der Strahl $KCL$, der den unendlich fernen Punkt der Schattenkurve enthält, bei der Zeichnung die Rolle einer Asymptote spielt, ähnlich wie $BC$ für den zweiten unendlich fernen Punkt des gestrichelten aufsteigenden Astes. Der Wendekreis des Steinbocks ergibt auf ganz gleiche Weise den durch $B$ ziehenden Hyperbelzweig. Auf ihrer Ostseite erhält die Sonnenuhr dieselben Schattenlinien.

α) „Gegeben seien die von einem Gnomon auf eine in der Mittagslinie stehende Vertikalebene geworfenen Schattenkurven der Sonnenbahn; man soll die Breite ermitteln, für welche sie konstruiert sind."

Sie ergibt sich aus der Figur unmittelbar als Komplement der Neigung des Widders zur Horizontalen, welche gleich der Äquatorhöhe, also gleich $90^\circ - \varphi$ ist.

β) „Wenn aber der Gnomon aus seinem Zentrum $C$ nicht weggenommen werden kann, so daß sich von hier aus der Bogen zwischen Widder und Horizontalen nicht beschreiben läßt, so nehme man irgendwo auf dem Widder einen anderen Punkt (z. B. $M_1$) an und ziehe durch ihn eine Parallele zur Horizontalen, so schließt auch sie mit dem Bilde des Äquators den Winkel $90^\circ - \varphi$ ein."

γ) „Wenn aber der Gnomon und sein Zentrum unbekannt (zerstört) sind, so fülle man die Vertiefung aus, verebne den Obturateur, ziehe eine Horizontale von Nord nach Süd hindurch und zerlege den Teil $\widehat{AB}$, den sie aus den Bildern der beiden Wendekreise ausschneidet, in zwei gleiche Stücke; die Mitte $C$ von $AB$ wird dann das Zentrum des Gnomons sein. Alsdann nehme man die Schattenlänge des Gnomons auf dem Widder drei Stunden vor oder nach dem Höchststand der Sonne, und man hat die Länge des Gnomons.

Die Konstruktion ist nach dem, was über die symmetrische Lage der Schattenbilder der beiden Wendekreise zum Äquator gesagt ist und bei Berücksichtigung der Formel für die Schattenlänge zur Zeit des Äquinoctiums: $g \cdot \operatorname{cotg} s$, welche also in den angegebenen Zeitpunkten in $g \cdot \operatorname{cotg} 45^\circ = g$ übergeht, sofort verständlich.

δ) „Wenn es aber heißt, daß der Parallel des Widders und der Gnomon unbekannt sind, so lautet die Antwort:

Beschreibe aus dem Zentrum $C$ des Gnomons einen Kreisbogen, welcher im Schnittpunkt $A$ des (Bildes des) Krebses mit der Horizontalen beginnt und auf demselben Parallel (in $D$, Fig. 22) endigt, so wird dieser Bogen der doppelten Breite gleich sein; teile ihn in zwei gleiche Teile, so ist ein Teil gleich der gesuchten Breite; eine Senkrechte auf der Winkelhalbierenden (Weltachse) geführt durch $C$ wird den Widder darstellen. Die Länge des Gnomons findet sich genau wie in der vorhergehenden Aufgabe."

Da die Weltachse durch den Scheitel $E$ der Krebshyperbel geht, so muß der Bogen $AD$ durch $PP_1$ in $G$ halbiert werden. Nun ist aber $\sphericalangle ACG = \varphi$, folglich $\sphericalangle ACD = 2\,\varphi$ usw. In beiden vorstehenden Aufgaben ist vorausgesetzt, daß die Stundenlinien auf der Uhrebene vorhanden sind.

### 4. Wie man die Breite an der Vertikaluhr über der Ost-Westlinie finden kann.

Auch hier müssen wir uns erst über die Lage der Schattenkurven klar sein. Fig. 23 sei die Kugelfigur mit der Uhrebene $E$, welche durchsichtig zu denken ist. Der Fußpunkt $C$ des Zeigers $q$ ist Mittelpunkt der Himmelskugel. Die Uhrebene $E$ geht durch den Schnitt des Äquators mit dem Horizont, d. h. durch die Ost-Westlinie ($O$-$W$). Der Zeiger ist also nach dem Südpunkt $S$ gerichtet. Die Schattenlinie für einen Tag des Äquinoctiums $O_1 W_1$ liegt unterhalb $C$, geht $OW$ gleichlaufend durch $M$, so daß der Mittagsschatten am 21. März und 23. September die Länge $MC = q \cdot \text{tang}\,(90^\circ - \varphi) = q \cdot \text{cotg}\,\varphi$ hat. Wenn der Sonnenmittelpunkt in $K$, der Kulmination des Krebses, angekommen ist, so fällt der Schatten der Gnomonspitze nach $K_1$[1] hinab, und es ist $CK_1 = q \cdot \text{cotang}\,(\varphi - \varepsilon)$; entsprechend erhält man für den Wendekreis des Steinbocks: $CSt_1 = q \cdot \text{cotang}\,(\varphi + \varepsilon)$. Im Auf- und Untergangspunkt $O$ und $W$ der Sonne zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen laufen die Sonnenstrahlen parallel der Ebene $E$, und der Schatten der Gnomonspitze fällt auf $O_1 W_1$ jeweils in unendliche Ferne. Der Wendekreis des Krebses durchsetzt $E$ in den Punkten $X$ und $Y$; sie liefern unendlich ferne Punkte der Krebshyperbel; da aber die Schnittpunkte des Steinbocks mit dem Horizont (z. B. $U$) vor der Bildfläche $E$ liegen, so fehlen der Steinbockshyperbel auf $E$ die unendlich fernen Punkte; sie endigt in $U_1$.

α) „Es sei ein solcher Vertikal in der Ost-Westlinie gegeben; man verlangt die Breite, für welche er konstruiert worden ist. Sie ergibt sich leicht aus dem Vertikalschatten des wahren Mittags im Widder und der Länge des Gnomons."

Man hat nämlich, wie schon oben im Text erwähnt ist, $MC = q \cdot \text{cotg}\,\varphi$ oder $\text{tang}\,\varphi = \frac{q}{MC}$.

β) „Wenn man aber sagt, daß die Länge des Gnomons unbekannt ist, sei es wegen seiner konischen Form, oder weil er verloren ging, obwohl der Schatten des wahren Mittags unbekannt ist, sei es, weil das Zentrum des Gnomons zerstört wurde, oder daß es auf seinem Standort festgemacht ist, so kann man zur Ermittlung der geographischen Breite also verfahren:

Wenn der Gnomon unbekannt ist, so nehme man mit dem Zirkel den Teil des Parallels des Widders, der zwischen der Mittagslinie und dem Beginn der vierten[2] Stunde liegt, und trage ihn als Strecke $AB$ auf (Fig. 24); hierauf mache man Winkel $BAC = \varepsilon$ gleich der Schiefe der Ekliptik. Von $B$ aus ermittle man den Punkt $C$ durch Abtragen jenes Teils der Mittagslinie, die zwischen dem Anfang des Widder- und Krebsparallels liegt, auf dem freien Schenkel des Winkels $\varepsilon$. Dann ziehe man durch $CB$ eine Gerade bis zu dem beliebigen Punkte $E$ und lasse von $A$ das Lot $AD$ auf sie herab; diese Strecke wird gleich der Länge $q$ des Gnomons. Winkel $ABE$ gleich der gesuchten Polhöhe $\varphi$ sein."

Zum Beweise berechnen wir erst die Strecke $AB$; sie ist ein Stück des Äquatorbildes; im wahren Mittag fällt der Schatten der Gnomonspitze nach $M$. Um den Schatten derselben zu Beginn der vierten Stunde, also bei einem Stundenwinkel von $s = 45^\circ$ zu bestimmen, müssen wir das zugehörige Azimut der Sonne kennen, weil von diesem die Länge eines auf die Ost-Westebene fallenden Schattens abhängt. Mittels des Kotangentensatzes ergibt sich aber aus dem uns bereits geläufigen Zenit—Pol—Sonnendreieck:

$$\cos\,(90^\circ - \varphi) \cdot \cos s = \sin\,(90^\circ - \varphi) \cdot \text{cotg}\,(90^\circ - \delta) - \sin s \cdot \text{cotg}\,(180^\circ - \alpha),$$

woraus unter Beachtung, daß $s = 45^\circ$ ist und die Sonne keine Deklination hat, also $90^\circ - \delta = 90^\circ$ ist, sofort folgt:

$$\sin \varphi = \text{cotg}\,\alpha.$$

Es ist aber nach Fig. 23:

$$\frac{AB}{q} = \text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

also:

$$AB = \frac{q}{\sin \varphi}.$$

---

[1] In Fig. 23 steht $K$ statt $K_1$.

[2] Im Sédillotschen Text wohl irrtümlich: la partie du parallèle du Bélier comprise entre la ligne méridienne et le commencement de la troisième heure, womit die Rechnung nicht stimmt.

Zur Zeit des wahren Mittags ist die Höhe der Sonne im Widder $= 90^\circ - \varphi$, im Krebs $= 90^\circ - (\varphi - \varepsilon)$, folglich die Differenz der Schattenlängen des Gnomons zu diesem Zeitpunkt $= MK_1$ (nach Fig. 23) $= BC$ (nach Fig. 24) $= q \cdot [\operatorname{cotg}(\varphi - \varepsilon) - \operatorname{cotg}\varphi] = q \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varphi \cdot \sin(\varphi - \varepsilon)}$.

Für den Winkel $ACB$ folgt nach dem Sinussatz:

$$BC : AB = \sin\varepsilon : \sin\sphericalangle(ACB)$$

oder für $BC$ und $AB$ die Werte eingesetzt:

$$\frac{q \cdot \sin\varepsilon}{\sin\varphi \cdot \sin(\varphi - \varepsilon)} : \frac{q}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\sphericalangle(ACB)},$$

d. i.

$$\sin\sphericalangle(ACB) = \sin(\varphi - \varepsilon)$$

$$\sphericalangle ACB = \varphi - \varepsilon,$$

woraus für den spitzen Winkel bei $B$ sofort $\sphericalangle ABD = \varphi$ folgt. Somit ist

$$\frac{AD}{AB} = \sin\varphi,$$

oder

$$AD = AB \cdot \sin\varphi = \frac{q}{\sin\varphi} \cdot \sin\varphi = q,$$

womit die Behauptungen der vorstehenden Konstruktion erwiesen sind.

**Abul Hassan** fügt dieser interessanten Lösung noch hinzu, daß die Strecke $CD$ (Fig. 24) gleich $CK_1$ (Fig. 23), also gleich dem Teil der Mittagslinie sei, der zwischen dem Fußpunkt des Gnomons und dem Anfang des Krebses liegt. Wir fanden

$CK_1 = q \cdot \operatorname{cotg}(\varphi - \varepsilon)$ (Fig. 23); andererseits ist nach Fig. 24:

$$\begin{aligned} CD &= CB + BD \\ &= \frac{q \cdot \sin\varepsilon}{\sin\varphi \cdot \sin(\varphi - \varepsilon)} + q \cdot \operatorname{cotg}\varphi \\ &= \frac{q}{\sin\varphi}\left[\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\varphi - \varepsilon)} + \cos\varphi\right] \\ &= \frac{q\,[\sin\varepsilon + \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varepsilon - \cos^2\varphi \cdot \sin\varepsilon]}{\sin\varphi \cdot \sin(\varphi - \varepsilon)} = \frac{q \cdot \sin\varphi\,(\sin\varphi \cdot \sin\varepsilon + \cos\varphi \cdot \cos\varepsilon)}{\sin\varphi \cdot \sin(\varphi - \varepsilon)} \\ &= q \cdot \operatorname{cotg}(\varphi - \varepsilon);\ \text{d. h. } CD = CK_1. \end{aligned}$$

## 5. Die Ermittlung der Polhöhe am Déclinant oder der von den Kardinalrichtungen abweichenden Vertikaluhr.

Auch am Zifferblatt einer um ein gegebenes Azimut $\alpha$ von der Nord-Südrichtung abweichenden Vertikaluhr, dessen Konstruktion naturgemäß schwieriger ist als das der vorausgegangenen Uhren, lehrt **Abul Hassan** die Bestimmung der Breite. Es ist geradezu erstaunlich, auf welcher hohen Stufe der Gnomonik der marokkanische Meister gestanden haben muß. Auch hier gibt er seine Vorschriften kurz und bündig ohne Spur einer Erläuterung oder eines Beweises, und es hat uns die Aufhellung dieser **Hassan**schen Methoden, die mehr theoretisches Interesse als praktischen Nutzen haben, große Schwierigkeiten gemacht[1]).

Da unseres Wissens noch in keinem Lehrbuch der Gnomonik der Déclinant bearbeitet ist, so geben wir in Kürze eine Theorie desselben. Das Zifferblatt ist in der Ebene $DZD'Z'$ enthalten, welche von der Äquinoctiale um den Winkel $\alpha$ abweicht. Der Gnomon, der wiederum senkrecht auf der Uhrebene steht, ist horizontal nach dem Punkt $G$ gerichtet ($\sphericalangle SMG = \alpha$) die Schnittlinie des Horizonts mit dem Déclinant ist $DD'$, über ihr steigt der Durchschnitt mit der Äquatorebene $FF'$ ostwärts an zur Höhe $h$, welche sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $FDO$ mittels der Formel

$$\operatorname{tang} h = \sin\alpha \cdot \operatorname{cotg}\varphi$$

---

[1]) Wir erwähnen bei dieser Gelegenheit gerne und dankbarst der liebenswürdigen Unterstützung des Herrn Geh. Rates H. **Martus** in **Halensee**, von dem auch Fig. 25 herrührt.

findet. Das nach Süden gewandte Zifferblatt dieser Sonnenuhr wird von der Sonne beschienen erst von $t$ Stunden vor dem Mittagsaugenblicke an ($15\,t = s$). Diese Zeit $t$ wird aus dem Dreieck $PZF$ durch den Sinussatz gefunden:

$$\frac{\sin s}{\cos h} = \frac{\sin (90^\circ + \alpha)}{\sin 90^\circ}$$

$$\sin s = \cos \alpha \cdot \cos h.$$

Um diese Zeit läuft der Schatten des Zeigers $MJ = q$ auf $MF$ hin ins Unendliche. Wenn die Sonne das Azimut $\alpha$ hat, also in $L$ steht, kommt der Strahl $LM$ herab aus der Höhe $h_1$, die aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $LGW$ hervorgeht durch $\cos \alpha = \operatorname{tang} \varphi \cdot \operatorname{tang} h_1$

$$\operatorname{tang} h_1 = \cos \alpha \cdot \operatorname{cotg} \varphi.$$

Der Schatten des Gnomons geht in diesem Augenblick von $M$ aus senkrecht herab, also rechtwinklig gegen die Wagerechte $DD'$, und wird begrenzt von dem durch seine Spitze $J$ gehenden Sonnenstrahl, welcher parallel $LM$ ist. Also ist

$$\sphericalangle MJK = \sphericalangle LMJ = h_1 \text{ (Wechselwinkel).}$$

Daher die Schattenlänge

$$MK = q \cdot \operatorname{tang} h_1 = q \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{cotg} \varphi.$$

In der durch $K$ gleichlaufend mit $FF'$ gehenden Geraden $RR'$ liegen am 21. März und 23. September die Endpunkte aller Schatten.

Da $PM$ auf $MF$ und $MA$ senkrecht steht, ist $\sphericalangle AMF = s$ der Neigungswinkel des Mittagsstrahles $AM$ gegen die Uhrebene $DZD'$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $ZAF$ folgt durch

$$\cos (90^\circ - h) = \cos \varphi \cdot \cos s$$

$$\cos s = \frac{\sin h}{\cos \varphi}.$$

Um den Mittagsschatten $ME$ zu finden, kann man den so berechneten Winkel $s$ irgendwo an $RR'$ antragen und durch die Gnomonspitze $J$ die Parallele $JE$ ziehen. Besser jedoch ist es, wenn man zur Festlegung des Punktes $E$ auf $RR'$ die Strecke $KE$ berechnet. Da $\sphericalangle JMK = 90^\circ$ ist, wird

$$JK = \sqrt{q^2 + \overline{MK}^2} = q \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 h_1} = \frac{q}{\cos h_1},$$

also
$$KE = KJ \cdot \operatorname{cotg} s = q \cdot \frac{\operatorname{cotg} s}{\cos h_1}.$$

Auf $RR$ liegen die Schatten von $J$ zu allen Stunden der Tag- und Nachtgleichen.

Ebenso läßt sich der Mittagsschatten zur Zeit des Solstitiums ermitteln. Wir wollen den Gang der Rechnung für den Wendekreis des Krebses angeben: da der Gnomon auf der Ebene $DZD$ senkrecht steht, so ist auch die durch $GJM$ gelegte Ebene $GKrTME'$ zu ihr rechtwinklig, also ist $\sphericalangle KrMT = \gamma$ der Neigungswinkel des Mittagsstrahles $KrM$ gegen die Bildebene $DZD'$. Der Winkel $\gamma$ findet sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $KrSG$

$$\cos (90^\circ - \gamma) = \cos (90^\circ - \varphi + \varepsilon) \cdot \cos \alpha$$

$$\sin \gamma = \sin (\varphi - \varepsilon) \cdot \cos \alpha.$$

Der durch $J$ parallel mit $KrM$ laufende Sonnenstrahl hat also gegen das Zifferblatt auch den Neigungswinkel $JE'M = \gamma$, daher ist die Länge des Mittagsschattens

$$ME' = q \cdot \operatorname{cotg} \gamma.$$

Seine Lage wird bestimmt durch $\sphericalangle E'MZ' = \sphericalangle ZMT = \sphericalangle \eta_1$, und man hat aus dem rechtwinkligen Dreieck $KrTZ$ durch

$$\cos (\varphi - \varepsilon) = \cos \gamma \cdot \cos \eta_1 :$$

$$\cos \eta_1 = \frac{\cos (\varphi - \varepsilon)}{\cos \gamma}.$$

Danach kann man $ME$ auf dem Zifferblatt einzeichnen.

α) „Gegeben sei ein Déclinant, man fragt, wie man die Breite des Ortes finden kann, für welche er konstruiert ist.

Man mache die Linie $AB$ gleich dem Teil der (vertikalen) Meridianlinie, der zwischen der Horizontalen und dem Parallel des Widders liegt. Dann errichte man auf $AB$ ein Lot, nehme mit dem Zirkel den Abstand des Schnittpunktes der Horizontalen mit der Nord-Südlinie vom Endpunkte des Gnomons und beschreibe damit um $A$ einen Kreisbogen, der auf $AD$ (Fig. 26) den Punkt $C$ markiert. Verbindet man $C$ mit $B$, so ist der Winkel $ABC$ gleich der Breite $\varphi$."

Hier ist $AB$ (Fig. 26) die Strecke $MK$ der Fig. 25, um welche das Bild $RR'$ des Widders tiefer liegt als die Horizontalebene. Unter der Horizontalen ist hier die Linie $OW$ zu verstehen, in welcher sich Äquator und Horizont durchsetzen. Eine Parallele zur Nord-Südlinie durch die Gnomonspitze $J$ trifft $OW$ in $C$, und es ist $JC$ der (senkrechte) Abstand des Schnittpunktes der Horizontalen und Nord-Südlinie vom Endpunkt des Zeigers. Wir fanden aber für $MK = AB$ den Ausdruck

$$q \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{cotg}\varphi,$$

während man aus Fig. 25 abliest:

$$JC = AC = q \cdot \cos\alpha,$$

da Dreieck $MJC$ bei $C$ rechtwinklig ist. Konstruiert man mit diesen Strecken als Katheten das rechtwinklige Dreieck $BAC$ der Fig. 26, so ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \sphericalangle ABC &= \frac{AC}{AB} \\ &= \frac{q \cdot \cos\alpha}{q \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{cotg}\varphi} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\varphi} = \operatorname{tang}\varphi, \end{aligned}$$

d. h. es ist $\sphericalangle ABC = \varphi$, q. e. d.

5) „Wenn man sagt, daß der Gnomon unbekannt sei, so lautet die Antwort:

Nimm die Linie $AB$ gleich dem Teil der Horizontalen, der zwischen dem Parallel des Widders und der Meridianlinie liegt, beschreibe darüber einen Halbkreis, nimm hierauf den Teil der Horizontalen zwischen dem Parallel des Widders und dem Fußpunkt des Gnomons in den Zirkel, setze damit in $A$ ein und mache auf $AB$ die Marke $C$; in diesem Punkte errichte das Lot auf $AB$, welches den Halbkreis in $D$ trifft. Dann ist $CD$ gleich der Länge des Gnomons, und der Rest der Operation ist offenbar."

Das Bild des Widders $RR'$ (Fig. 25) durchsetzt den Horizont in $B$ (Schnittpunkt von $DD'$ mit $RR'$). Auf der Ebene des Déclinant ist die Meridianlinie die Ablotung des Meridians selbst, also $EH$[1]. Diese begegnet $DD'$, welches hier offenbar als Horizontale zu nehmen ist, in $H$; mithin ist $AB$ der Fig. 27 $= BH$. Wir finden $MB$ durch

$$\begin{aligned} MB = MK \cdot \operatorname{cotg} h &= \frac{q \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{cotg}\varphi \cdot \operatorname{tang}\varphi}{\sin\alpha} \\ &= q \cdot \operatorname{cotg}\alpha = AC, \end{aligned}$$

andererseits ist $MH = ME \cdot \sin\varphi$,

für $ME$ hat man:

$$\begin{aligned} ME = q \cdot \operatorname{cotg} s &= q \cdot \frac{\cos s}{\sin s} = q \cdot \frac{\sin h}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{\cos\alpha \cdot \cos h} \\ &= q \cdot \frac{\operatorname{tang} h}{\cos\alpha \cdot \cos\varphi}. \end{aligned}$$

Es ist aber $\operatorname{tang} h = \sin\alpha \cdot \operatorname{cotg}\varphi$,

mithin

$$ME = q \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\varphi}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \cos\alpha} = q \cdot \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\varphi}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} MH &= q \cdot \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\varphi} \cdot \sin\varphi \\ &= q \cdot \operatorname{tang}\alpha = CB. \end{aligned}$$

Es ist also die Strecke

$$\begin{aligned} BH = BM + MH = AC + CB &= q \cdot \operatorname{cotg}\alpha + q \cdot \operatorname{tang}\alpha \\ &= q\,(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha) = \frac{q\,\cdot}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \end{aligned}$$

und man findet mittels des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck $ADB$:

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= AC \cdot CB \\ &= q \cdot \operatorname{cotg}\alpha \cdot q \cdot \operatorname{tang}\alpha = q^2, \end{aligned}$$

also $CD = q =$ der Länge des Gnomons.

Damit ist die Aufgabe auf $\alpha$ zurückgeführt.

---

[1] $H$ fehlt in Fig. 25.

$\gamma$) „Der Gnomon sei unbekannt, und wenn man sagt, daß es sein Zentrum auch sei, so lautet die Antwort:

Man nehme die Linie $AB$ gleich dem Teil der Horizontalen, der zwischen dem Parallel des Widders und der (wahren) Mittagslinie liegt, trage in $B$ den Winkel $\alpha$ der Abweichung des Déclinants von der Nord-Südlinie an und in $A$ dessen Komplement $90^{0} - \alpha$[1]). Vom Schnittpunkt $D$ (Fig. 27) fälle man das Lot $DC$ auf $AB$ herab, so wird dies gleich der Länge des Gnomons sein, die Linie $AC$ gleich dem Teil der Horizontalen zwischen dem Parallel des Widders und dem Fußpunkt des Gnomons und $CB$ gleich dem Teil der Horizontalen zwischen Zentrum des Gnomons und wahrer Mittagslinie.“

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich leicht aus den Resultaten der Ausführungen unter $\beta$). Wenn $AC = g \cdot \text{cotg.} \, \alpha$, $CB = g \cdot \text{tang} \, \alpha = g \cdot \text{cotg} \, (90^{0} - \alpha)$ und $DC = g$ ist, so müssen die Winkel bei $A$ und $B$ bezüglich $\alpha$ und $90^{0} - \alpha$ sein. Dann treffen die Schenkel $AD$ und $BD$ in $D$ unter einem rechten Winkel zusammen. Mit der Kenntnis der Länge $g$ des Gnomons gestaltet sich die Ermittlung der Breite $\varphi$ wie in $\alpha$).

Welche Aufgaben dieser reichhaltigen Sammlung von Polhöhenbestimmungen Abul Hassan selbst erdacht hat, und welche er aus den Schriften seiner Vorgänger kennt, von denen er Al-Battâni, Al-Fergâni, Abû'l Wafâ, Al-Zarkâli und Dschabir ibn Aflah zitiert, läßt sich bei unserer lückenhaften Kenntnis der arabischen Literatur zurzeit noch nicht entscheiden. Wie wir bei Ibn Jûnis sahen, finden sich in dessen Gnomonik bereits ähnliche Ansätze zur Bestimmung der Breite am Horizontalcadran.

Ob diese Methode, aus den Dimensionen der Sonnenuhr die Breite, für welche sie ursprünglich konstruiert war, wiederzufinden, praktisch zur Anwendung kam, läßt sich nicht nachweisen. Immerhin wäre es denkbar, daß ein der Gnomonik kundiger Reisender, der an Orte des großen mohammedanischen Reiches kam, wo ihm die Polhöhe unbekannt war, die Ortsuhr, deren Konstruktion ja aus religiösen Gründen verbindlich war, nach der Breite befragt hätte. Die oftmalige Formulierung des Ortsbestimmungsproblems: „si le centre du gnomon est inconnu“ oder „si le gnomon est détruit“ läßt vermuten, daß auch auf den Fall Bedacht genommen wurde, wo schon der Zahn der Zeit die Uhr zerstört hatte und die sie einst hegenden Gläubigen vom Feinde vertrieben waren.

---

[1]) Im französischen Text ist wohl $A$ mit $B$ verwechselt; es muß heißen: in $A$ den Winkel $\alpha$ der Abweichung und in $B$ dessen Komplement.

# Inhaltsübersicht.

Altenburg
Piererſche Hofbuchdruckerei
Stephan Geibel & Co.

Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte 1911, Nr 2.

Carl Schoy:

# Die geschichtliche Entwickelung der Polhöhenbestimmungen bei den älteren Völkern

Tafel

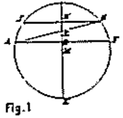


Fig. 1

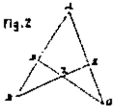


Fig. 2

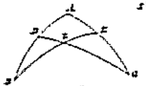


Fig. 3

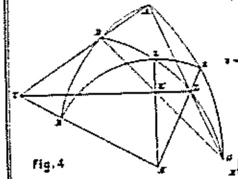


Fig. 4

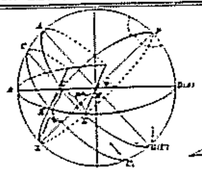


Fig. 5

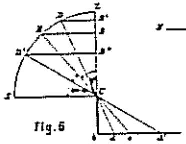


Fig. 6

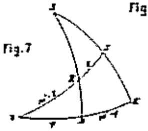


Fig. 7

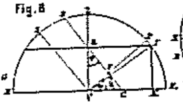


Fig. 8

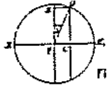


Fig. 9

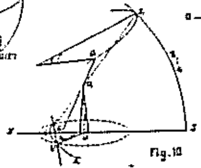


Fig. 10

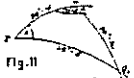


Fig. 11

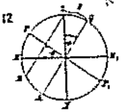


Fig. 12


Fig. 13

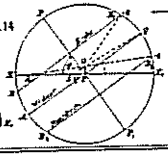


Fig. 14

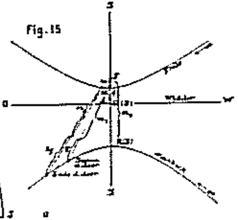


Fig. 15


Fig. 16

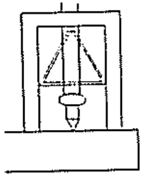


Fig. 17

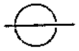


Fig. 18

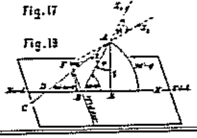


Fig. 19

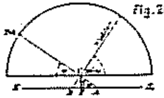


Fig. 20

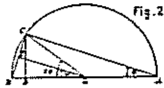


Fig. 21

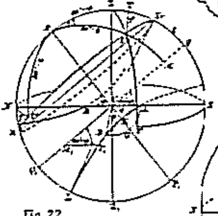


Fig. 22

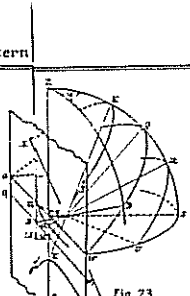


Fig. 23

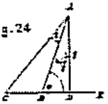


Fig. 24

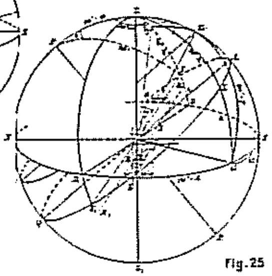


Fig. 25

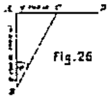


Fig. 26

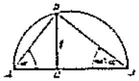


Fig. 27

Druck der Deutschen Seewarte

Naturwissenschaftliche Wochenschrift.

Neue Folge X. Band; der ganzen Reihe XXVI. Band. | Sonntag, den 23. April 1911. | Nummer 16.

# Die Sonnenuhren der Araber in ihrer Bedeutung für die arabische Astronomie und Religion.

Von Oberlehrer C. Schoy in Essen.

„En admettant que nous devions 1 aux Arabes, nous devons bien 100000 aux Grecs'" sagt Maximilian Marie in seiner Histoire des sciences mathématiques et physiques (II. Vol. pag. 118). Man wird kaum eine Behauptung finden, die so unwahr ist und die Araber so ungerecht trifft wie diese. Am allerwenigsten aber verdienen dies harte Urteil ihre astronomischen Leistungen. Es ist zweifellos, daß, wenn dereinst sachkundige Arabologen in größerer Zahl, als dies bis heute leider der Fall war, sich mit Liebe der Übersetzung noch so vieler im Staube der Bibliotheken des Ostens und Westens vergrabenen Handschriften annehmen werden, unser bis jetzt durchaus lückenhaftes Bild von der arabischen Astronomie in einer für dieselbe nur ehrenvollen Weise vervollständigt werden wird. Aber auch die bis jetzt spärlichen Übersetzungen arabischer Autoren in europäische Sprachen lassen uns schon einen deutlichen Einblick tun in die ganz eigenartigen und höchst originellen Methoden, insbesondere der arabischen Gnomonik, deren reizvolle Anwendungen auf Fragen der maurischen Religion einem — wie dem schottischen Mathematiker Hamilton die analytische Mechanik — „like a poem" vorkommen können.

Obwohl die Zahl gnomonischer Schriften zur Legion angewachsen ist, so scheinen tiefere Kenntnisse, speziell der arabischen Sonnenuhrkunde, doch nur sehr wenig verbreitet zu sein. Dies haben wir bei der Lektüre arabischer Astronomen besonders dann empfunden, wenn wir zur Aufhellung der Schwierigkeiten die vorhandene Literatur oft vergeblich konsultierten. Wir halten es deshalb für nützlich, einige interessante Details aus dem obigen Thema in leicht verständlicher Darstellung zu geben.

Natürlich hatten auch die Araber, wie alle Völker, ihre Quellen, aus denen ihnen die Wissenschaft zufloß. Bekanntlich waren es nach dem Niedergang der Griechen syrische Ärzte, welche mit der hellenistischen Bildung vertraut, den Mohammedanern die ersten wissenschaftlichen Anregungen gaben, auf welche bald die Übersetzung zahlreicher griechischer Autoren in die arabische Sprache folgte. Wie aber die exakten Wissenschaften der Inder zur Kenntnis der Araber kamen, ist uns noch in einer Erzählung des Astronomen Ibn al Adami[1]) erhalten, wonach im Jahre 773 n. Chr. ein des Sindhind[1]) sehr kundiger Mann vor dem Kalifen Al-Mansûr erschien. Seine Kenntnisse stammten aus dem Sûrya Brahmagupta,[2]) dessen sofortige Übersetzung ins Arabische der Kalif befahl.

Die einfachste Idee einer Sonnenuhr bringt das Gnomon, ein vertikaler, schattenwerfender Stab, zum Ausdruck. Diesen wandten, z. T. unabhängig voneinander, alle älteren Kulturvölker, so die Ägypter (Pyramiden), Chinesen (Bambusstab), Babylonier, Chaldäer, Juden, Griechen und Inder an, ja wir haben sogar Zeugnisse von seiner Existenz bei den Azteken Mexikos.[3]) Indessen diente es in den allermeisten Fällen nur zur Orientierung, zur Ermittlung der Sonnenhöhe, der Ekliptikschiefe und der geographischen Breite. Dafür gibt es eine Menge schriftlicher Belege. Als eigentliches Zeitmeßwerk ist ein senkrecht auf der Erde stehender Stab praktisch durchaus ungeeignet, da der Schatten desselben an ein und demselben Ort zu ein und derselben Zeit jeden Tag seine Richtung ändert, oder astronomisch ausgedrückt: zu ein und demselben Stundenwinkel (s) gehören bei konstanter Polhöhe ($\varphi$) und variabler Deklination ($\delta_\odot$) der Sonne verschiedene Azimute[4]) ($\alpha$).

Aus diesem Grunde kam schon sehr frühe für Zeitbestimmungen der Polos zur Verwendung, ein parallel der Weltachse, also ungefähr zum Polarstern gerichteter Stylus, der seine Schatten das ganze Jahr zur selben Zeit auf die gleiche Stelle wirft. Wir finden ihn schon im 7. Jahrhundert v. Chr. bei den Babyloniern, und die Griechen haben ihn mit aller Wahrscheinlichkeit von diesen überkommen und zu Eudoxus Zeiten sicher schon gekannt. Um so auffallender ist es deshalb, daß die Araber, die doch von dieser Vereinfachung zweifellos Kenntnis hatten, den Polos nicht einführten, sondern sich durch

---

[1]) Vgl. Notices et extraits des manuscrits de la biblioth. nation. VII, pag. 126. Paris.

[1]) Sindhind = Siddhânta = astronomisches System (der Inder).

[2]) d. i. astronomisches System des Brahmagupta.

[3]) „Chez les Azteques, au matin de la fête Toxcatl, ou du solstice, dit Alvarado, on dressait dans la cour du Grand Temple nombre de perches, l'une d'elles, plus haute que les autres, surmontait la principale pyramide." (M. J. Sagaret: „Le Gnomon", in Revue scientifique, 1910, pag. 527).

[4]) Aus dem sphärischen Dreieck: Zenit-Pol-Sonne hat man nach dem Kotangentensatz:

$$\cos s \cdot \sin \varphi = \cos \varphi \cdot \tang \delta + \sin s \cdot \cotg \alpha,$$

also ist $\alpha$ bei konstantem $\varphi$ u. s mit $\delta$, d. h. mit den Tagen des Jahres, veränderlich.

Beibehaltung des Gnomons die Anfertigung der Sonnenuhr mathematisch und praktisch sehr erschwerten. Daß er bei ihnen neben dem Gnomon ebenfalls kultiviert wurde, wie R. Wolf behauptet,[1] ist nicht bewiesen. Wir haben bei der Lektüre derjenigen arabischen Astronomen, deren Schriften in europäische Sprachen übertragen sind, bis zu Abul Hassan Ali von Marokko keinen einzigen Polos gefunden, und wenn Wolf mit seiner Behauptung darauf fußt, daß die ersten abendländischen Schriftsteller neben dem Gnomon auch den Polos erwähnen, und dabei nach eigener Angabe sich auf die Araber stützten, so kann dies zum mindesten nicht auf Grund der uns zugänglichen Literatur geschehen sein,[2] vielmehr glauben wir, daß das mohammedanische Volk aus religiösen Gründen, von denen später noch zu handeln ist, nur einseitig Gnomone konstruierte. (Vgl. auch Marie a. a. O. II, pag. 141.)

Zuerst erfahren wir über die arabischen Sonnenuhren Näheres bei Al-Battâni[3] oder Albategnius († 929), der ein Buch über die Bewegung der Sterne schrieb, welches von Plato von Tivoli, einem Gelehrten des 12. Jahrhunderts, unter dem Titel: de scientia stellarum ins Lateinische übersetzt wurde. Da dieser der Mathematik wenig kundig war und die Ausgabe unter Unklarheiten leidet, so ist die vor wenigen Jahren erfolgte Neubearbeitung des Buches von der Bewegung der Sterne durch Nallino sehr zu begrüßen. Aus dieser, betitelt opus astronomicum, ergibt sich (pars I, pag. 138), daß sowohl horizontale als auch vertikale Sonnenuhren einen Stylus besitzen, der senkrecht auf dem Zifferblatt steht, also bei Vertikaluhren parallel dem Horizonte läuft. Da die Vertikaluhr schon eine Verallgemeinerung des gnomonischen Prinzipes bedeutet, so geht die Horizontaluhr sicher weiter als auf Al-Battâni zurück. So wissen wir aus den Übersetzungen der Schriften Thabit ben Korrahs (836—901) durch Gerhard von Cremona (1114—1187), daß dieser ausgezeichnete Gelehrte bereits jene Linien studierte, „quas gnonometrum styli apicis umbra percurrit.“ Wie Al-Battâni die Konstruktion zweier Horizontalcadrans (für die Breiten 36° und 38°) lehrt, wird uns von Delambre[4] (a. a. O. pag. 57 ff.) ausführlich mitgeteilt: „Man nehme eine Marmor- oder Kupferplatte von rechteckiger Gestalt, so daß die Breite $^2/_3$ der Länge ist; in der halben Breite und $^2/_3$ der Länge markiere man den Mittelpunkt eines Kreises, den man um denselben mit beliebigem Radius beschreibt. Darauf teile man durch 2 senkrecht aufeinanderstehende Durchmesser den Umfang in Quadranten von 90° oder, sofern es geeignet sein wird, von 2° zu 2° oder 3° zu 3°, verzeichne darauf die Schatten des Stabendes, wann die Sonne im Krebs und Steinbock läuft, für jede der 6 ungleichen Stunden, desgleichen den Schatten des Widders (Ost-Westlinie), darauf nehme man ein der Länge nach in gleiche Teile geteiltes Lineal, welches zum wenigsten dem längsten Schatten des Steinbocks gleichkommt und markiere damit auf dem Zifferblatt das Ende des Schattens in der mittels des geteilten Kreises bestimmten Richtung. Besorgt man dies für jede Stunde, so wird man den Tagebogen des ganzen Steinbocks haben. Ist dieselbe Operation auch für den Wendekreis des Krebses durchgeführt, so gibt die Verbindung je zweier entsprechenden Punkte dieser Kurven durch Gerade die Stundenlinien.“ Noch zwei andere Vorschriften teilt Albategnius mit, die aber weniger exakt sind als diese.

Zur näheren Erläuterung der vorstehenden Konstruktion, die im wesentlichen bei allen arabischen Astronomen dieselbe blieb, sei auf Fig. 1 verwiesen. Natürlich fiel der Fußpunkt des Gnomons, das stets 12 Einheiten des Maßstabes (12 Finger) hoch war, mit dem Mittelpunkte des obigen Kreises zusammen. Die Länge des Stäbchens sei q. Zunächst mußte nun für eine gegebene Breite die Dauer des kürzesten und längsten Tages, wo die Sonne im Steinbock, bzw. Krebs läuft, festgestellt werden, welche Aufgabe Al-Battani, sich ganz an Ptolemaeus anschließend, mit Hilfe der Fundamentalformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck löste,[1] wobei er allerdings die halben Sehnen der Griechen durch die Sinus der Inder ersetzt.[2] Der gefundene Tagbogen wurde in beiden Fällen in 12 gleiche Teile geteilt; die Zeitdauer, welche die Sonne brauchte, um den Bogen zwischen 2 solchen äquidistanten Punkten zu durcheilen, nannte man eine temporäre Stunde. Sie war also im Sommer länger als im Winter. Die temporäre Stunde beherrschte die Astronomie auch während der ganzen arabischen Zeit, erst Abul Hassan führte die gleichen Stunden ein, die einem Stundenwinkel von 15° entsprachen. Zur Bestimmung der Schattenlänge m für die einzelnen Stunden war zunächst die Kenntnis der Sonnenhöhe h nötig, womit dann m für ein Gnomon der Länge q sich aus einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten m und q sind, wobei letztere dem Winkel h gegenüberliegt, zu q · cotg h ergibt.

---

[1] R. Wolf, Geschichte der Astronomie, pag. 143 und Handbuch der Astronomie I. Bd., pag. 429.

[2] In der sehr hübschen Programmabhandlung von Jos. Drecker: „Gnomone und Sonnenuhren“ (1909, Aachen, Ober-Realschule) findet sich dieselbe Ansicht wie bei R. Wolf ausgesprochen, jedoch ohne nähere Begründung, pag. 21.

[3] d. i. Mann aus Battan in Syrien.

[4] Auch Delambre's: Hist. de l'astronomie du moyen âge handelt bei Albategnius hiervon, pag. 57.

[1] Vgl. von Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I. Bd., pag. 25.

[2] Der zu einem dieser Tage gehörige Stundenwinkel $2 s_0$ findet sich ganz einfach dadurch, daß man im sphär. Dreieck Zenit-Pol-Stern den Kosinussatz:

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos s$$

aufschreibt und nach dem zum Auf- oder Untergang der Sonne ($h = 0$) gehörigen Stundenwinkel $s_0$ auflöst:

$$\cos s_0 = - \operatorname{tang} \varphi \cdot \operatorname{tang} \delta.$$

Da außer der Breite $\varphi$ und der Deklination $\delta$ (am kürzesten und längsten Tag = der Ekliptikschiefe $\varepsilon$) aber durch die temporäre Stunde auch der Stundenwinkel s gegeben war, so ließ sich h aus dem uns bereits geläufigen Zenit-Pol-Sterndreieck nach dem Kosinussatz berechnen:

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos s.$$

In dieser Gestalt kannten ihn aber weder Al-Battâni, noch spätere arabische Astronomen, vielmehr zerlegten sie ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck stets in 2 rechtwinklige; dagegen war ihnen der Sinussatz geläufig.[1] War so h gefunden, so mußten die Schattenlängen $m = q \cdot \operatorname{cotg} h$ vom Fußpunkt des Gnomons unter gewissen Winkeln zur Nordsüdlinie mittels des schon erwähnten Lineals abgetragen werden. Diese Winkel sind aber mit den Azimuten der Sonne zu den betr. Stunden identisch. Zu ihrer Berechnung aus $\varphi$, $\delta$ und h gibt Al-Battâni (ohne Beweis) die Regel:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \frac{\left(\frac{r \cdot \sin(90^0 - \delta)}{\sin(90^0 - \varphi)} - \frac{\sin h \cdot \sin \varphi}{\sin(90^0 - \varphi)}\right) \cdot r}{\sin(90^0 - h)},[2]$$

welche für $r = 1$ und Einführung der Kosinusse sofort in den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie übergeht. Zur konstruktiven Festlegung der Azimute diente der eingeteilte Kreis (Fig. 1).

Da also ein und dieselbe Rechenvorschrift oftmals auszuführen war, so lag der Gedanke, eine Kotangententabelle zu erstellen, sehr nahe. Al-Battâni muß auch eine solche besessen haben, da er in seinem Werke davon spricht, wennschon sie nicht abgedruckt ist.

Viel erörtert bereits ist die Frage nach der Natur der Kurven, welche vom Schatten des Stabendes täglich beschrieben werden. Sie läßt sich ohne jeden mathematischen Formelapparat beantworten: Betrachten wir die Sonnendeklination $\delta_{\odot}$ für einen Tag als konstant, so ist die scheinbare Sonnenbahn am Himmel ein Kleinkreis, dessen Bogenabstand vom Himmelsäquator $= \delta_{\odot}$ ist. Dieser Sonnenparallel läßt sich aber auch als Grundfläche eines Kegels deuten, dessen Spitze mit derjenigen des Gnomons koinzidiert, und dessen Mantellinien von sämtlichen Sonnenstrahlen gebildet werden, welche während des Tages durch das Stabende gehen. Die Gesamtheit der das Stabende durchsetzenden Strahlen bildet eigentlich einen Doppelkegel, dessen zweiter, dem ersten kongruenter, Teil vom scheinbaren Horizont durchschnitten wird. Dieser Durchschnitt liefert die Schattenlinie auf der horizontalen Platte, welche somit ein Kegelschnitt ist. Im Augenblick des Auf- und Untergangs der Sonne werden die Schatten der irdischen Gegenstände unendlich lang; die Kurve hat also in diesem Falle 2 unendlich ferne Punkte, ist mithin in der gemäßigten und heißen Zone stets eine Hyperbel. Nur die Mitternachtssonne vermag in der kalten Zone Ellipsen als Schattenlinien zu erzeugen.

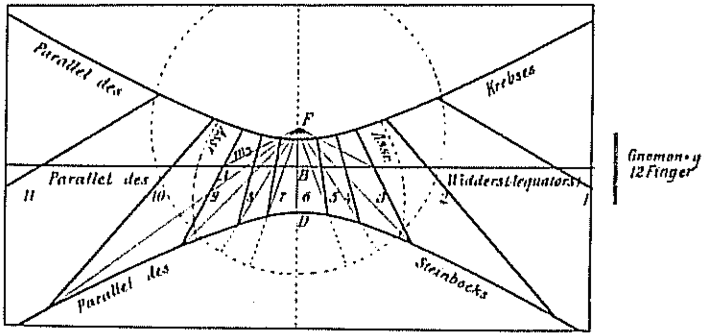


Fig. 1.

Wie schon erwähnt, wurden vom Astronomen immer die 2 Hyperbeln, welche den beiden Wendekreisen entsprachen, zuerst aufgezeichnet. Dazu kam das Projektionsbild des Äquators, welches stets in eine Gerade — die Ost-Westlinie — ausartet, da der Schattenkegel für $\delta_{\odot} = 0^0$ in eine Ebene übergeht, die sich mit dem Horizont in einer Geraden schneidet. Selten fanden sich auf dem Zifferblatt noch weitere Hyperbeln, die irgendwelchen anderen Tagen des Jahres entsprachen.

Durch Verbindung der Punkte, in welche der Schatten des Stabendes zu entsprechenden temporären Stunden auf den Hyperbeln fiel, entstanden die sog. Stundenlinien. Es ist zu er-

---

[1] Dies folgt aus vielen Stellen arabischer Handschriften; vgl. auch den Nachweis von H. Suter: „Zur Trigonometrie der Araber" (Bibl. math. (3) 10, pag. 156—160, 1910), wonach ihn sicherlich schon der Lehrer Al-Bêrûnîs, nämlich Abû Nasr ben Irâq († ca. 1000—1020) gekannt hat.

[2] Vgl. hierzu: Opus astron., Cap. XI und v. Braunmühl a. a. O. pag. 33.

warten, daß sie ebenfalls krummliniger Natur sind. Aber der Astronom verband gleichnamige Punkte der 2 äußersten Hyperbeln einfach durch **gerade Linien**. Dies ist mathematisch unrichtig. **Delambre** hat jedoch in seiner Histoire de l'astronomie ancienne, tome II pag. 481 gezeigt, daß diese krummen Linien von einer Geraden nur wenig abweichen, mithin der Fehler in der Konstruktion gering ist.[1])

Zum zweitenmal erhalten wir einen Einblick in die arabische Gnomonik durch das große Werk des **Ibn Jûnis**, welches dieser Gelehrte aus adeligem Geschlecht (de famille noble et distinguée) um das Jahr 1000 zu Kairo in seinen berühmten **Hakimitischen Tafeln** herausgab. Leider ist bis jetzt nur ein Teil (Kap. III—V und VI) der 81 Kapitel von **Caussin** in französischer Sprache veröffentlicht. Über dieses merkwürdige Opus, das aus 4 oder 2 Volumes bestehen soll und lange Zeit schon die Aufmerksamkeit der Astronomen auf sich zog, erfahren wir Näheres bei **Delambre** (Hist. de l'astron. du moyen âge, pag. 76). Für unseren Gegenstand kommen in Frage die Kapitel XXVII und XXXV, welche lauten:

„Trouver la hauteur des heures marquées sur le cadran", und

„Trouver la latitude du lieu et la longeur du mékyas des heures simples, quand ce mékyas (Gnomon) est perdu et la latitude inconnue".

Im wesentlichen behandelt danach auch **Ibn Jûnis** den Basithah ähnlich wie **Al-Battâni**; **die Ermittlung der geographischen Breite aber aus den Linien des Zifferblattes ist eine bemerkenswerte Aufgabe, welche die arabischen Astronomen der Sonnenuhr zuwiesen.** Sie kehrt insbesondere bei **Abul Hassan** wieder, der ihr im 2. Bande seines stattlichen Werkes: Collection des Commencements et des fins,[2]) übersetzt von J. J. **Sédillot** und herausgegeben unter dem Titel: Traité des instruments astronomiques des Arabes, 1834, einen eigenen Abschnitt widmet (pag. 612—619). Wir können deshalb nicht umhin, von dieser Bedeutung der arabischen Sonnenuhr für die Astronomie etwas ausführlicher zu reden:

Falls die Auffindung der Polhöhe eines Ortes an seiner Sonnenuhr praktisch wirklich vorgenommen wurde, so ist dies wohl so zu denken, daß der Gnomonik kundige Reisende, die in Städte des großen mohammedanischen Reiches kamen, deren Breite ihnen noch unbekannt war, die pro loco konstruierte Uhr befragten. Dies war stets möglich, da ihre Erstellung in den maurischen Landen allgemein, ja aus religiösen Pflichten vielleicht verbindlich war. Die oftmalige Formulierung des Problems: „si le centre du gnomon est inconnu", oder „si le gnomon est détruit" läßt vermuten, daß auch auf den Fall Bedacht genommen ist, wo schon der Zahn der Zeit die Uhr zerstört hatte und die sie einst hegenden Gläubigen vom Feinde vertrieben waren.

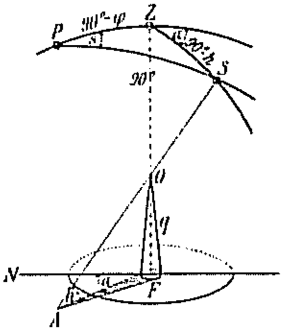


Fig. 2.

Wie **Ibn Jûnis** die Aufgabe am Horizontalcadran löste, ist bei **Delambre** (a. a. O. pag. 136 ff.) auseinandergesetzt: Man beschreibe um den Fußpunkt des Gnomons einen Kreis und teile ihn in 360 Grade. **Ibn Jûnis** sagt: „Einen Kreis, egal einem jener Zirkel, welche auf dem „Destour" sind."[1]) Zuerst wird die zu einer bestimmten Stunde (s) gehörige Schattenrichtung ($\alpha$) ermittelt (Fig. 2), die in dem Winkel AFN enthalten ist und mit einem Zirkel auf den Destour übertragen. Die augenblickliche Sonnenhöhe h wird aus dem sphärischen Dreieck ZPS mittels des Sinussatzes gefunden:

$$\cos h : \sin 90^{0} = \sin s : \sin \alpha$$

$$\cos h = \frac{\sin s}{\sin \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{I)}$$

Mit der Kenntnis von h liefert der Kosinussatz:

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin 0^{0} + \cos \varphi \cdot \cos 0 \cdot \cos s,$$

woraus sich ergibt:

$$\cos \varphi = \frac{\sin h}{\cos s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II)},$$

womit also die Polhöhe $\varphi$ gefunden ist.

Zu bemerken ist, daß die Beobachtung am Tag des Äquinoktiums stattfand (da $\delta = 0$), und daß wir für Formel II) den Kosinussatz anwandten, den wir bei **Ibn Jûnis** nicht finden. Es ist nicht zu erfahren, wie er zu dem zweiten Ausdruck für die geographische Breite kommt.

Ist h aus I) bekannt, so findet sich die Länge des verlorenen Gnomons sehr einfach aus dem ebenen rechtwinkligen Dreieck AOF zu

---

[1]) Unter der Voraussetzung, daß den temporären die **gleichen Stunden** substituiert werden, entwickelt die Gleichung der Stundenlinien der Verf. in seinen „Beiträgen zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronom. Aufgaben", 1910. Es sind in diesem Falle Hyperbeln, deren stärker gekrümmter Teil nicht innerhalb des Zifferblattes liegt.

[2]) d. i. das Buch, welches den Anfang mit dem Zweck vereinigt.

[1]) d. i. zweifellos eine Art Vergleichskreis.

$$q = AF \cdot \operatorname{tang} h,$$

womit die Aufgabe in allen Teilen gelöst ist.

Wie wir bereits erwähnten, hat Abul-Hassan die Sonnenuhren planmäßig für Polhöhenbestimmungen fruktifiziert. Bei ihm sind Horizontal- und Vertikaluhren mit gleicher Ausführlichkeit behandelt. Die letzteren zerfallen wieder in 3 Gruppen: 1. und 2. in Vertikale über dem Meridian und der Ost-Westlinie, 3. in von den Kardinalrichtungen um irgendein Azimut ($\alpha$) abweichende Vertikaluhren (Déclinants). Bei allen steht der Zeiger senkrecht auf der Uhrebene.

1. Es sei nun zuerst ein Basithah gegeben. Fragt man nach der Breite, für welche er konstruiert wurde, so erhält man die Antwort, daß mit der Länge q des Gnomons und dem Schattenbilde des Steinbocks, Widders oder Krebses sich die Polhöhe leicht findet aus einem rechtwinkligen Dreieck, welches das Gnomon mit seinem Mittagsschatten zur Zeit der Solstitien oder Äquinoktien bildet, wo die Kulminationshöhe der Sonne bekanntlich gleich $90^{\circ} - \varphi \pm \varepsilon$ oder $90^{\circ} - \varphi$ ist. Das Schattendreieck liefert dann

1. Für das Wintersolstitium:

$$\frac{q}{m} = \operatorname{tang}[90^{\circ} - (\varphi + \varepsilon)] = \operatorname{cotg}(\varphi + \varepsilon)$$

2. Für das Sommersolstitium:

$$\frac{q}{m_1} = \operatorname{tang}[90^{\circ} - (\varphi - \varepsilon)] = \operatorname{cotg}(\varphi - \varepsilon)$$

3. Für das Äquinoktium:

$$\frac{q}{m_2} = \operatorname{tang}(90^{\circ} - \varphi) = \operatorname{cotg} \varphi,$$

woraus $\varphi$ jedesmal leicht berechnet werden kann.

2. Falls aber das Gnomon verloren ging oder man wegen seiner konischen Form den Mittelpunkt seines Fußes und damit seine Höhe nicht genau nehmen kann, so subtrahiere man seinen Mittagsschatten von der Schattenlänge zu Beginn des Assr,[1] und die Differenz wird gleich der Länge des Gnomons sein. Darauf verfahre man wie vorher.

3. Wir führen noch den schwierigeren Fall an, dann die Breite zu finden, wo weder das Gnomon und sein Fußpunkt noch der Assr bekannt sind, bezweifeln jedoch, daß Hassan wirklich im Ernste daran dachte, in einem solch prekären Fall die Uhr nach der Breite zu fragen, für die sie erstellt wurde, sondern halten den Traktat lediglich für ein mathematisches Kuriosum, das uns aber beweist, auf welcher Höhe der Marokkanische Meister gestanden hat.

Zuerst zieht er die Linie AB (Fig. 3), welche gleich ist dem Teil des Äquatorbildes, welches der Schatten des Stabendes zur Zeit der Äquinoktien vom Kulminationspunkt bis zu Beginn der 4. Stunde nachmittags (gleiche Stunden) bestreicht (Fig. 1). Hierauf wird in A der Winkel $\varepsilon$ der Ekliptikschiefe angetragen und der Strahl AC gezogen. Der Punkt D auf demselben wird dadurch gefunden, daß man von B aus mit jenem Teil der Nord-Südlinie einen Kreisbogen durch AC beschreibt, der zwischen Widder und Steinbock liegt. Das Lot von A auf die Verlängerung von DB, nämlich AE, ist dann gleich der Länge q des Gnomons und Winkel BAE gleich der verlangten Breite $\varphi$.

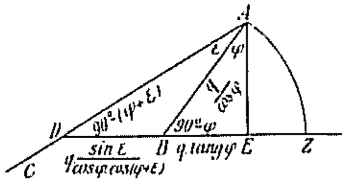


Fig. 3.

Wir wollen den Beweis dieser merkwürdigen Ermittlung von béled (Breite), von dem sich bei Hassan keine Spur findet, für Interessenten der mathematischen Richtung im Kleindruck kurz angeben.

Bei der Länge q des Gnomons ist der Mittagsschatten, falls die Sonne im Äquator läuft, $= m_2 = q \cdot \operatorname{tang} \varphi$. Um die Schattenlänge zu Beginn der 4. Stunde desselben Tages zu finden, muß erst die Sonnenhöhe zu diesem Augenblick bekannt sein. Sie sei $h_3$, entsprechend einem Stundenwinkel von $s_3 = 3 \cdot 15^{\circ} = 45^{\circ}$. Sei dieser Nachmittagsschatten $= m_3$, so hat man:

$$m_3 = q \cdot \operatorname{cotg} h_3.$$

Für $h_1$ findet man aber aus dem Zenit-Pol-Sterndreieck:

$$\begin{aligned} \sin h_3 &= \sin \delta \cdot \sin \varphi - \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s_3 \\ &= \sin 0^{\circ} \cdot \sin \varphi + \cos 0^{\circ} \cdot \cos \varphi \cdot \cos 45^{\circ} \\ &= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Damit wird $\cos h_1 = \sqrt{1 - \sin^2 h_3} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \cos^2 \varphi}}{\sqrt{2}},$

$$\text{also } \operatorname{cotg} h_3 = \frac{\cos h_3}{\sin h_1} = \frac{\sqrt{2 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi},$$

$$\text{folglich } m_3 = q \cdot \frac{\sqrt{2 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

Nun ist nach Vorschrift des Textes

$$AB = q \cdot \sqrt{\frac{2 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}}$$

$$= \frac{q}{\cos \varphi} \sqrt{2 - \cos^2 \varphi - 1 + \cos^2 \varphi} = \frac{q}{\cos \varphi}$$

zu machen (Fig. 1). Für BD aber findet man:

$$BD = q \{ \operatorname{tang}(\varphi - \varepsilon) - \operatorname{tang} \varphi \} = q \left\{ \frac{\sin(\varphi - \varepsilon)}{\cos(\varphi - \varepsilon)} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right\}$$

$$= q \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi \cdot \cos(\varphi + \varepsilon)}.$$

Damit sind im Dreieck ABD 3 Beziehungen festgelegt: es ist nämlich

$$\sphericalangle BAC = \varepsilon; \; AB = \frac{q}{\cos \varphi}; \; BD = q \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi \cdot \cos(\varphi + \varepsilon)}.$$

---

[1] Hiermit ergibt sich von selbst, daß unter Assr jener Stundenwinkel (nachmittags) verstanden ist, zu welchem der Schatten des Gnomons seinen Mittagsschatten um die Länge des Gnomons übertrifft.

Für den Winkel bei D hat man dann:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin D} = \frac{q \cdot \sin \varepsilon}{\cos(\varphi + \varepsilon) \cdot \cos \varphi} : \frac{q}{\cos \varphi}$$

$$\sin D = \cos(\varphi + \varepsilon), \text{ somit}$$

$$\measuredangle D = 90^0 - (\varphi + \varepsilon).$$

Daraus folgt tatsächlich: $\measuredangle ABE = 90^0 - \varphi$, folglich $\measuredangle BAE = \varphi$.

Endlich ist:

$$\frac{AE}{AB} = \sin(90^0 - \varphi) = \cos \varphi$$

$$AE = AB \cdot \cos \varphi = \frac{q \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi} = q; \; q \cdot e \cdot d.$$

Wir müssen es uns versagen, die Sachlage auch an den Vertikaluhren zu schildern, die anscheinend noch nirgends ausführlich bearbeitet sind, deren Theorie aber zum Interessantesten der ganzen Gnomonik gehört. Wir haben in einer eigenen Untersuchung: „Die Geschichte der Polhöhenbestimmung bei den älteren Völkern", deren Publikation eben erfolgt, uns eingehend mit diesen merkwürdigsten Erzeugnissen arabischer Konstruktionen beschäftigt.

Wenn somit die arabische Sonnenuhr schon in der sphärischen Astronomie eine hervorragende Rolle spielte, so tritt ihre Bedeutung in ein noch helleres Licht, wenn wir uns zu den zahlreichen religiösen Pflichten des Muselmans bei der Verehrung Allahs wenden:

Außer den schon erwähnten Hyperbeln und Stundenlinien, die das Zifferblatt durchziehen, besaß jede Uhr eine eigene gerade Linie, die vom Fußpunkt des Gnomons ausging und die Richtung nach Mekka hatte; das war die Kibleh oder Quibla. Bekanntlich sollte nach den Vorschriften des Korans jeder Gläubige beim Gebet sein Antlitz nach der hl. Stadt Mekka wenden.[1] Ein eigener Beamter hatte die Uhr unausgesetzt zu bewachen und durch Ausruf den Augenblick bekannt zu geben, wann der Schatten des senkrechten Stabes gerade auf die Quibla fiel.[1] Dann hatte auch der Schatten jedes anderen Gegenstandes das Azimut von Mekka, und der Gläubige nahm bei den verschiedenen Posituren des Gebets sofort die Richtung an, die ihm sein eigener Körperschatten wies.[2] Wir finden die Quibla natürlich nur an horizontalen Uhren (Bazithahs), und glauben, daß dieses eben erwähnte religiöse Moment der Grund war, warum niemals ein Polos in den öffentlichen Gebrauch kam, der außerdem in niedrigen Breiten durch seine geringe Neigung zum Horizont unpraktisch würde; ein vertikaler Stab schien dem Muselman für die Erfüllung seiner religiösen Pflichten am zweckdienlichsten. Daß aber auch vertikale Uhren einen lotrecht auf dem Zifferblatt stehenden Stylus hatten, ist wohl eine einfache Übertragung der Verhältnisse des Bazithahs auf den Vertikal gewesen.

Die Ziehung der Quibla lehrt schon Al-Battâni. Jedoch ist seine Konstruktion, zu deren Ausführung man der Kenntnis des Längen- und Breitenunterschiedes von Mekka und dem Ort, für den die Sonnenuhr bestimmt ist, bedarf, nur ein Approximationsverfahren, das der Wahrheit um so näher kommt, je geringer die erwähnten Längen- und Breitenunterschiede sind. Auch eine Berechnung des Azimuts, welches die Quibla mit der Nord-Südlinie bildet, findet sich schon bei Al-Battâni; sie beruht auf der Projektionsmethode des Analemmas und lehnt sich ganz an die Behandlungsweise sphärisch-trigonometrischer Fragen bei Ptolemaeus an. Delambre gibt im Anschluß hieran eine verbesserte Methode zur Berechnung der Quibla; es würde jedoch zu weit führen, wollten wir näher auf dieses Problem eingehen, das heute in der sphärischen Trigonometrie seine einfachste Erledigung findet.[3]

Die Koinzidenz des Schattens mit der Quibla findet aber am Tage in der Regel nur einmal, selbstverständlich an jedem Tage zu einem anderen Zeitpunkt statt; denn in dem eingangs erwähnten Kotangentensatz ist der Stundenwinkel (s) bei konstantem Azimut ($\alpha$) von der Sonnendeklination ($\delta$) abhängig. Nach den Vorschriften des Koran muß jedoch der Gläubige das Ssalât, d. i. das ihm vorgeschriebene rituelle Gebet fünfmal am

---

[1] Diese Orientierung nach dem Heiligtum ist übrigens nicht arabischen Ursprungs, sondern wurzelt im Judentum. Nach der Überlieferung ist sie so alt, wie der Tempel selbst. Die Weiherede (Kön. I, 8, danach Chron. II, 6), noch deutlicher aber das Buch Daniel (6, 11) zeigen uns dies. So heißt es in dem letzteren: „als Daniel nun vernahm, daß der Erlaß ausgefertigt war, begab er sich in sein Haus, in dessen Obergemach er in der Richtung nach Jerusalem geöffnete Fenster hatte, kniete täglich dreimal nieder und betete zu seinem Gotte und dankte ihm, ganz wie er es bisher zu tun gepflegt hatte". — Nach J. Hamburger: Real-Enzyklopädie für Bibel und Talmud, 1883, II, p. 1134 besteht für den Betenden folgende Vorschrift: Außerhalb Palästinas wendet sich der Gläubige diesem Lande zu, innerhalb Palästinas nach Jerusalem, in Jerusalem nach dem Tempel, im Tempel nach dem Heiligtum.

„Selbst in den Gebetsriten war Mohammed anfänglich von den Juden abhängig, er wandte sein Antlitz zeitweilig beim Gebete nach Jerusalem; die älteste Moschee in Medina ist nach Jerusalem orientiert. Aber der mächtigen Judenherrschaft gegenüber war der Liebe Mühen umsonst. Da trat am 16. Januar 624 nach Sonnenuntergang ein Mann in die Moschee und rief den zum Gottesdienst versammelten Gläubigen zu: „Ich komme vom Propheten und bringe euch die Nachricht, daß Gott die Kiblah abgeändert, wendet euer Angesicht gegen die Ka'ba von Mekka; denn diese ist von nun an euere Kiblah!" Alle drehten sich um, so daß die Kinder und Frauen, die sonst in den letzten Reihen standen, nun vorn waren. Die Neuerung machte großes Aufsehen: mit gutem Grund, weil sie endgültig mit dem Judentum brach und die Stiftung der arabischen Nationalkirche einleitete" (Nissen, „Orientation", I, p. 70—72).

---

[1] A. Müller führt in seinem zweibändigen Werke: „Der Islam im Morgen- und Abendland" (1883—85, I. Bd., p. 193) an, daß man im Zweifelsfalle die Richtung nach Mekka durch einen Blick auf einen zu diesem Zweck angefertigten kleinen Kompaß festzustellen pflege. Dies kann aber doch nur so gemeint sein, daß der Kompaß eine angenäherte Nord-Südrichtung gibt und der Muselman zu dieser das ihm für seine Gegend bekannte Azimut der Quibla hinzufügt.

[2] Ebenda, p. 195, wird erwähnt, daß man mit Vorliebe Blinde zu Ausrufern der Gebetszeiten wähle. Dies schließt aber doch jegliche Benützung der Sonnenuhr aus.

[3] Vgl. d. Verfassers „Beiträge etc." p. 31.

Tage, unter Beobachtung wechselnder Körperhaltung, verrichten: 1. bei Tagesanbruch (Fadschr), 2. um Mittag (Zohr, Zuhr), 3. am Nachmittag (Assr), 4. bei Sonnenuntergang (Maghrib), 5. am Spätabend (Ischa). Dazu kommt das obligatorische Wochengebet am Freitag Mittag (Ssalât aldschum'a). Es ist einleuchtend, daß die Gläubigen bei diesen genau zu erfüllenden Vorschriften zuverlässiger Zeitangaben bedürfen. Hierzu diente aber wiederum die Sonnenuhr. Für Fadschr und Maghrib war ja im Sonnenauf- und -untergang der Moment zur Verrichtung der 2, bzw. 3 Rakas (d. i. der einzelnen Gebete) ohne weiteres gegeben. Hingegen bedurfte man für Zohr und Assr künstlicher Hilfsmittel. Der Zohr begann im Augenblick der Sonnenkulmination und endigte, als der Schatten des Gnomons den Mittagsschatten (m) um die Gnomonshöhe (q) übertraf, also $= m + q$ war. Dann setzte der Assr ein, der seinerseits wieder endigte, als der Gnomonschatten um die doppelte Höhe des Gnomons (2 q) länger war als der Mittagsschatten ($= m + 2q$). Natürlich hängt auch die Dauer dieser Tageszeiten von der geographischen Breite ($\varphi$) und der Deklination der Sonne ab. Dies mögen folgende 2 von uns berechnete Beispiele zeigen:

| | $\delta$ | $\varphi$ | s | |
|---|---|---|---|---|
| 1.) | $+12$" | 35 | $51\frac{1}{4}$" | (Beginn d. Assr) |
| | " | " | $68\frac{1}{2}$" | (Ende " " ) |
| 2.) | $-12$" | " | $25\frac{2}{3}$" | (Beginn " " ) |
| | " | " | $56\frac{1}{2}$" | (Ende " " ) |

Im ersten Falle beginnt also der Assr in der 4. Nachmittagsstunde und dauert etwas über eine Stunde; zur Winterszeit aber tritt er schon in der 2. Nachmittagsstunde ein und währt volle 2 Stunden. Deshalb sind in diesen längeren Intervallen auch 4 Rakas zu verrichten.

Die Assr-Kurve ist leicht in das Zifferblatt einzutragen, wenn die Hyperbeln bereits gezeichnet vorliegen: man nimmt die Summe der Strecken $m + q$ in den Zirkel und beschreibt damit um den Fußpunkt des Gnomons einen Kreis; wo er die entsprechende Tageshyperbel schneidet, ist ein Punkt der Kurve, die jedoch eine sehr komplizierte Gleichung hat.[1] Ebenso findet man mit den Kreisen der Radien $m + 2q$ die Assr-Kurve für das Ende dieser Tageszeit. Aus den 2 Beispielen folgt, daß der zwischen diesen 2 Kurven enthaltene Raum nach der Steinbockshyperbel an Breite zunimmt.

Leider können wir nähere Details über diese astronomische Festlegung der Gebetszeiten während des Tages trotz eifriger Nachforschung noch nicht geben. Es ist uns nicht gelungen, aus astronomischen Schriften einen tieferen Einblick in den Sachverhalt zu tun. Montuclas „Récréations Mathématiques", die auch auf diese Seite der arabischen Gnomonik einzugehen scheinen, konnten wir weder aus den Bibliotheken Berlins noch Münchens erhalten, und 2 wertvolle Schriften aus dem Antiquariat Genthners (Paris), die er in seinem Catalogue 41 von 1910 noch aufführt, waren bei unserer Bestellung bereits vergriffen. Hören wir daher das Wenige, was die 2 bedeutendsten Autoritäten der arabischen Astronomie Delambre und Sédillot zu dieser Frage vorbringen. In der Histoire de l'astron. du moyen âge des ersteren heißt es (pag. 188):

„Le zhore et l'ashre sont des parties du jour où les bons Musulmans doivent accomplir certaines practiques religieuses aux quelles ils paraissent attacher beaucoup d'importance, et sur lesquelles Aboul Hassan ne nous donne aucun détail" . . . „Quand l'ombre sera égale au style, j'ignore si les Musulmans avaient quelque devoir religieux à remplir (c'est à dire) vers le quart du jour; mais on voit plusieurs vestiges de l'importance qu'ils attachaient à cette égalité que les gnomonistes modernes négligent entièrement."

Die Observation von Sédillot (Traité XX, pag. 270) lautet: „Nous n'avions jus qu'à présent que des données tres imparfaites de la durée du zhohre et de l'ashre, quoique ces deux parties du jour se rattachent immédiatement aux practiques religieuses des Musulmans, sur lesquelles nous avons de très grands détails."

Wenn somit bei Zohr und Assr der Sachverhalt ziemlich klar ist, so wissen wir hingegen nichts Näheres über jenes Gebet, dessen Zeitpunkt durch die Richtung der Quibla signalisiert ist. Da diese von der Lage irgendeines Ortes zu Mekka abhängt, so ist diese Gebetszeit nicht nur mit der Sonnendeklination, sondern auch mit der Länge und Breite desselben veränderlich. Vielleicht fällt das große öffentliche Gebet (grande prière) am Freitag auf die Zeit, in welcher der Gnomonschatten die Quibla passiert. Auf bildlichen Darstellungen der grande prière wenden alle Gläubigen ihr Antlitz der Sonne zu, das Licht begrüßend, das ihnen dann von Mekka strahlt.

In sonnigen Landen, unter stets lachendem azurblauen Himmel war die Heimat der arabischen Sonnenuhr, wo sie jahrhundertelang die glücklichen Stunden zählte, die Allah seinem Volke schenkte. Aber längst ist auch hier die Geschichte mit unerbittlicher Notwendigkeit „über Gräber vorwärts" geschritten: Zersprengt sind die maurischen Reiche des Ostens und Westens, zerfallen die einst in märchenhafter Schönheit prangenden Paläste, Moscheen und Sternwarten, und wie ehedem in der Vorzeit Tagen, irrt heute der Beduine wieder rastlos durch die Wüste, unbekümmert um die großen Leistungen seiner Vorfahren und unfähig zu neuen. Möge das Abendland sich im Glanz der überreichen Schätze, die in den arabischen Wissenschaften noch zu heben sind, noch einmal sonnen! —

---

[1] Sie ist das Resultat der Elimination von $\delta$ aus der Gleichung der Tageshyperbel (Wolf, Handbuch I, p. 432):

$$y^2 \cdot \sin^2\delta + x^2 \cdot \cos(\varphi - \delta)\cos(\varphi + \delta) + x \cdot q \cdot \sin 2\varphi$$
$$+ q^2 \cdot \sin(\varphi + \delta) \cdot \sin(\varphi - \delta) = 0$$

und der Kreisgleichung:

$$x^2 + y^2 = q^2 [1 + \operatorname{tang}(\varphi - \delta)]^2,$$

wenn man den Fußpunkt des Gnomons zum Koordinatenanfangspunkt, die Kardinalrichtungen zu den Koordinatenachsen macht.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift.

Neue Folge XI. Band; der ganzen Reihe XXVII. Band. | Sonntag, den 6. Oktober 1912. | Nummer 40.

# Die arabische Sonnenuhr im Dienste der islamischen Religionsübung.

Von Dr. C. Schoy, Essen.

Unter dieser Überschrift möchte ich einige Nachträge zu dem Aufsatz bringen, den ich in der Aprilnummer 1911, Nr. 16 der Naturw. Wochenschr. veröffentlicht habe: „Die Sonnenuhren der Araber in ihrer Bedeutung für die arabische Astronomie und Religion." Ich habe dort S. 247 ausgeführt, daß über die astronomische Festsetzung der fünf täglichen Gebetszeiten, die der fromme Muselman zu beobachten hat, in der europäischen Literatur so gut wie gar nichts zu finden ist, obwohl diese Frage für den Astronomen von höchstem Interesse ist. Weder Sédillot, noch Montucla, noch Delambre vermögen nähere Details zu geben, sondern nur in den von mir im genannten Aufsatz zitierten Werken darauf hinzuweisen, daß hier Aufklärung sehr wünschenswert sei. Im „Moniteur" von 20. Juli 1809 findet sich folgende bemerkenswerte Stelle:

„Une des applications les plus intéressantes de l'astronomie dans un temps où les horloges étoient si rares, est sans doute l'art de construire les cadrans solaires de toute forme. Montucla, dans son „Histoire de Mathématiques", regrettoit de n'avoir rien à nous apprendre sur l'état de cette science chez les Arabes."

Weitere eifrige Nachforschungen haben mich jedoch in den Stand gesetzt, heute einige detallierte Bemerkungen machen zu können über die Bedeutung der arabischen Sonnenuhr im Dienste der islamitischen Religionsübung.

Handeln wir zuerst von der Qiblah oder Keblah, d. i. die Richtlinie gegen die Kaaba zu Mekka: Wir wissen (vgl. meinen schon erwähnten Aufsatz, S. 246), daß der Prophet selbst ihre Innehaltung beim Gebet am 16. Januar 624 ausdrücklich verordnet hat. Von dieser Vorschrift weicht selbst ein religiös gleichgültiger Islamite nicht ab. Carsten-Niebuhr berichtet in seiner „Reisebeschreibung nach Arabien" (I. B., p. 226), daß ihn in der Wüste herumschweifende Beduinen öfters angefleht hätten, ihnen die Qiblah zu bestimmen, wenn sie ganz ohne Orientierung waren.[1] Der Behauptung A. Müller's („Der Islam im Morgen- und Abendlande, 1883—85, I. Bd., p. 193), daß man im Zweifelsfalle die Richtung nach Mekka durch einen Blick auf einen zu diesem Zweck angefertigten Kompaß festzustellen pflege, steht folgende Angabe Carsten-Niebuhr's (a. a. O., p. 226) entgegen: „Die Direktion des Weges fand ich leicht nach einem kleinen Kompaß, ohne daß es die Araber merkten oder daß es einigen Argwohn erwecken konnte; denn, obgleich die mohammedanischen Gelehrten Kompasse haben, um danach die Keblah in ihren Mosquéen zu bauen, so schien doch keiner der herumstreifenden Araber, der meinen Kompaß gesehen hat, den Gebrauch desselben zu kennen. Es ist also wohl nicht sehr zuverlässig, wenn man in Beschreibungen von Arabien lieset, daß die Karawanen daselbst nach dem Kompaß reisen." [1]

Die Festlegung der Qiblah hatte nicht nur auf dem Zifferblatte der Horizontalsonnenuhr, sondern in den Nischen aller Moscheen und an öffentlichen Orten mit freier Aussicht zu geschehen.[2] Reiche Muselmänner lassen sich sogar die Qiblah in ihrem eigenen Gebetszimmer (Oratoire) ziehen. Hier ist der Ort, die schöne Anekdote wiederzugeben, die sich in den Récréations mathématiques et physiques 1790, Tome III, p. 63 (nouvelle édition par M. Montucla) findet. Montucla behandelt die Aufgabe der sphärischen Trigonometrie: „Gegeben: 2 Seiten eines sphärischen Dreiecks und der eingeschlossene Winkel: einen der 2 anderen Winkel zu finden." Er sagt dazu folgendes (wörtliche Verdeutschung):

„Da ich mich in Ermanglung einer Sinustabelle, die ich mit all meinem Gepäck bei einem Schiffbruch verloren hatte, bei einer gewissen Gelegenheit veranlaßt sah, diese Aufgabe durch einfache Konstruktion zu lösen, so werde ich dieselbe hier wiedergeben. Ich kann jedoch die sonderliche Veranlassung, die mich dazu führte, nicht verschweigen:

Ich war auf der Insel Socotora, nahe bei Madagaskar auf einem Schiff der „Compagnie des Indes", welches dort vor Anker lag, als ich die Bekanntschaft eines frommen Muselmans machte, der als der reichste und angesehendste der ganzen Insel galt. Aus den astronomischen Beobachtungen, die er mich anstellen sah, erkannte er bald, daß

---

[1] Der maurische Astronom Muslim ben Ahmed el-Leiti aus Cordova (†907/908) war so leidenschaftlich um die Innehaltung der Gebetsrichtung besorgt, daß er den Beinamen Sâhib el-qible, d. i. Meister oder Bewahrer der Qible, erhielt. (Vgl. H. Suter: Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. Leipzig 1900, p. 39.)

[1] Vom Kompaß und der Südrichtung handelt auch: E. Wiedemann, Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft, Berlin, B. 9, p. 768, Anmerkung.

[2] Das reich ausgestatte Werk von Mudgea d'Ohsson: Tableau général de l'empire othoman, Paris 1788, gibt auf Tafel XVI eine Abbildung eines solchen öffentlichen Gebetsplatzes. Ein pyramidenförmig zugespitzter Stein, dessen Vorderfläche mit der ewigen Lampe geschmückt ist, markiert die Qiblah. Der Betende, der auf dem Gebetsteppich kniet und die Lampe anblickt, wendet damit von selbst sein Gesicht gen Mekka.

ich Astronom war, und dieses brachte ihn auf den Gedanken, mir den Vorschlag zu machen, ihm in seinem Betzimmer die genaue Richtung nach Mekka zu bestimmen, damit er sich bei der Verrichtung seiner Gebete nach der heiligen Stätte wenden könne. Ich wollte mich dazu angesichts der Sachlage jedoch nicht entschließen, aber der fromme **Yahia** (das war sein Name) bat mich so inständig um die Erfüllung seiner Bitte, daß ich sie ihm nicht abschlagen konnte. Da ich weder eine Karte noch einen Globus hatte, wohl aber die Längen und Breiten der zwei in Frage kommenden Orte kannte, so nahm ich meine Zuflucht zu einer rein geometrischen Konstruktion in großem Maßstabe. Ich bestimmte also den Richtungswinkel von Mekka nach dieser Insel und zog auf der Steinplatte des Gebetszimmers die Linie, deren Richtung nach Mekka wies. Ich kann die Dankesbezeugungen nicht beschreiben, die mir der brave **Yahia** für meine Willfährigkeit erwies. Er versprach mir, sie nie zu vergessen, und ich zweifle keineswegs, daß, falls er noch lebt, er dankbar im Gebet den Propheten bittet, mir die Augen zu öffnen."

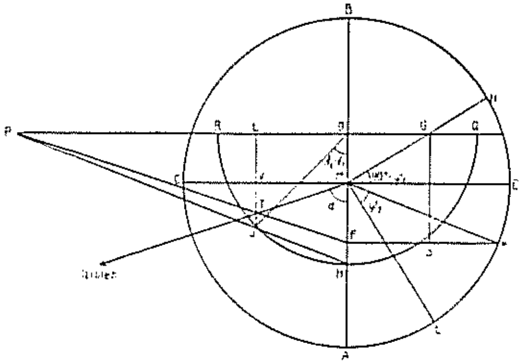


Fig. 1.

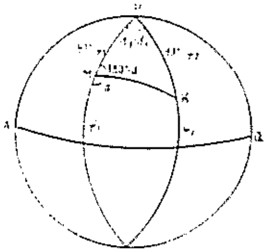


Fig. 2.

Die Qiblahrichtung durch eine rein geometrische Konstruktion zu finden, verfuhr **Montucla** folgendermaßen:

Es sei $\varphi_1$ die geographische Breite von Mekka, $\varphi_2$ diejenige des Ortes, für welchen die Qiblah zu ziehen ist. Ebenso seien $\lambda_1$ und $\lambda_2$ bez. die Längen der beiden Orte. Man beschreibe mit möglichst großem Radius einen Kreis, der den Horizont von Mekka vorstellt. Dann ziehe man 2 rechtwinklige Durchmesser AB und CD und mache DN gleich der Poldistanz von Mekka; dann ist ME $\perp$ MN ein Stück des Äquators. EK sei gleich der Distanz des zweiten Ortes vom Äquator. Jetzt ziehe man KF und KG $\perp$ MB und MN, fälle von G das Lot GO auf den Durchmesser AB und verlängere es nach rechts und links. Darauf beschreibe man mit dem Radius GK um O als Zentrum den Halbkreis RHQ, welcher notwendig innerhalb des Kreises liegt. Von H aus trage man auf RHQ den Bogen JH = dem Längenunterschied $\lambda_2 - \lambda_1$ der 2 Orte ab, fälle das = Lot JL auf den Durchmesser RQ, ziehe HJ bis zu seinem Durchschnitt P mit dem verlängerten Durchmesser, ziehe endlich = die Gerade PF, welche LJ in T schneidet. Dieser Punkt T repräsentiert die Projektion des 2. Ortes auf den Horizont von Mekka, und dementsprechend wird die Linie MT mit AB den gesuchten Richtungswinkel = $\alpha$ bilden.

Wir geben den Beweis dieser schönen Konstruktion, der sich bei **Montucla** nicht findet, für Interessenten der mathematischen Richtung an: In Fig. 2 seien M und K die 2 Orte mit den Breiten $\varphi_1$ und $\varphi_2$ und den Längen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ ($\lambda_2 > \lambda_1$), P der Nordpol, AQ der Äquator, $\sphericalangle \alpha$ repräsentiere die Qiblahrichtung. Dann errechnet sich dieselbe leicht nach dem Cotangentensatze der sphärischen Trigonometrie. Man hat nämlich im sphärischen Dreieck MKP:

$$\cos(90^0 - \varphi_1) \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1) = \sin(90^0 - \varphi_1) \cdot \operatorname{cotg}(90^0 - \varphi_2) - \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \operatorname{cotg}(180^0 - \alpha);$$

$$\sin\varphi_1 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1) = \cos\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi_2 + \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \operatorname{cotg}\alpha \quad . \quad \text{I)}$$

Aus dieser Gleichung I) läßt sich $\alpha$ bestimmen. Aus der Montucla'schen Konstruktion muß, falls dieselbe richtig ist, I) wiederum entfließen.

Tatsächlich ist:

$$\begin{aligned} TL &= TV + VL \\ &= VM \cdot \operatorname{cotg}\alpha + MG \cdot \cos\varphi_1 \\ &= OJ \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \operatorname{cotg}\alpha + r \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1, \end{aligned}$$

wenn man ME = r setzt, oder

$$TL = r \cdot \cos\varphi_2 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \operatorname{cotg}\alpha + r \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 \quad . \quad . \quad \text{II)}$$

Andererseits ist auch:

$$PO = OH \cdot \operatorname{cotg}\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2},$$

da die Winkel bei H und J im gleichschenkligen Dreieck OJH jeweils $90^0 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$ sind, und da

$OH = OJ = r \cdot \cos \varphi_2$ ist:

$$PO = r \cdot \cos \varphi_2 \cdot \operatorname{cotg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \alpha)$$

und ebenso

$$PL = LJ \cdot \operatorname{cotg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; II)$$

$$= r \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \quad . \; . \; \beta)$$

In den ähnlichen Dreiecken PLT und POF besteht aber die Proportion:

$$\frac{LT}{OF} = \frac{PL}{OP} = \frac{r \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}}{r \cdot \cos \varphi_2 \cdot \operatorname{cotg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}},$$

woraus folgt:

$$LT = OF \cdot \cos (\lambda_2 - \lambda_1)$$

Nun ist: $OF = GS = r \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2$

Damit gewinnen wir für TL einen zweiten Ausdruck:

$$TL = r \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos (\lambda_2 - \lambda_1) \quad . \; . \; III)$$

Durch Komparation von II) und III) ergibt sich:

$$r \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos (\lambda_2 - \lambda_1) = r \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \operatorname{cotg} \alpha + r \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1,$$

und indem man linker und rechter Hand mit $r \cdot \cos \varphi_2$ hebt,

$$\sin \varphi_1 \cdot \cos (\lambda_2 - \lambda_1) = \cos \varphi_1 \operatorname{tang} \varphi_2 + \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \operatorname{cotg} \alpha,$$

d. i. aber genau unsere Cotangentenformel I), womit die Richtigkeit der Konstruktion dargetan ist.

Eine so komplizierte Konstruktion der Qiblah findet sich jedoch bei keinem arabischen Astronomen; sie bedienten sich vielmehr sogenannter Approximationsverfahren, die der Wahrheit um so näher kamen, je geringer die Entfernung des fraglichen Ortes von Mekka war. Al Battâni (vgl. C. Nallino: Opus astronomicum, Caput LVI. Azimut qiblae supputare p. 137) geht von dem rechtwinkligen Dreieck ABC der Figur 3 aus. Es sei A die gegebene Stadt, deren Länge $\lambda_2$ und deren Breite $\varphi_2$ ist; B bedeute Mekka mit der Länge $\lambda_1$ und der Breite $\varphi_1$. BC sei ein Meridianbogen durch Mekka und AB ein größter Kreis, der also die Distanz der 2 Städte darstellt. Bogen AC werde als größter Kreis rechtwinklig zum Meridian BC gezogen, so daß er also die Ost-Westlinie repräsentiert. Es ist unter Winkel BAC das Azimut der Qiblah zu verstehen. Al Battâni setzt nun:

$$\sin \text{ (Azimut)} = \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin \text{ distantia}},$$

was nur angenähert richtig ist, denn BC kann nicht genau gleich dem Breitenunterschiede $\varphi_2 - \varphi_1$ der 2 Orte sein.

Außerdem lehrt er:

$$\sin \text{(distantia)} = \sqrt{\sin^2 (\varphi_2 - \varphi_1) + \sin^2 (\lambda_2 - \lambda_1)},$$

was in einer sphärischen Figur falsch ist

Es ist kaum anzunehmen, fügt Nallino diesen Battâni'schen Berechnungen im Kommentar hinzu, daß der berühmte Astronom Falsches gelehrt habe, da er in ganz ähnlichen früheren Problemen richtige Formeln anwandte. Die Kenntnis des Azimuts der Qiblah war aber für die Architekten, die die islamischen Tempel zu bauen hatten, unerläßlich. Die Nische in der Wand des Tempels, die den Betenden die Richtung nach Mekka wies, wurde bekanntlich Mihrâb genannt. Da aber ein Fehler von wenigen Graden kaum von Bedeutung ist, und die meisten der damaligen Archtikten den trigonometrischen Calcul nicht beherrschten, so wollte ihnen Al Battâni eine bequeme, der Wahrheit nahekommende Regel für die Konstruktion der Qiblah geben.

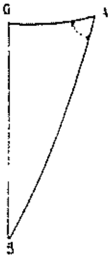


Fig. 3.

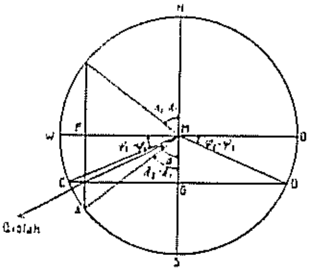


Fig. 4.

Eine ähnliche Näherungsmethode lehrt auch Al Ġagmini: (+ ca. 1240) (vgl. „die Astronomie des Ġagmini" von Rudolff und Hochheim, Leipzig 1893, p. 61 ff.). Man zähle auf dem indischen Kreise vom Südpunkt aus die Differenz zwischen den Längen Mekkas und des gegebenen Ortes nach Westen zu ab, ebenso vom Nordpunkt aus und verbinde die beiden Schlußpunkte dieser abgegrenzten Kreisteile durch eine Gerade AB (Fig. 4). Desgleichen trägt man vom Westpunkt aus nach Süden zu den Gradunterschied der beiden Breiten ab, ebenso vom Ostpunkte aus und verbindet die beiden so fixierten Punkte durch eine Gerade CD, welche AB in K schneiden wird. Zieht man jetzt vom Mittelpunkt des Kreises aus nach K eine Gerade, so hat man in ihr die gewünschte Qiblahrichtung.

Aus diesem Verfahren würde rechnerisch folgen:

$$MF = r \cdot \sin (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$MG = r \cdot \sin (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; I)$$

Andererseits gibt das sphärische Dreieck der Figur 3, wenn jetzt, wie es Ġagmini verlangt, $\alpha$ am Meridian liegt:

$$\sin (\varphi_2 - \varphi_1) = \operatorname{tang} (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \operatorname{cotg} \alpha.$$

Das ist:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} (\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)} \quad . \; . \; . \; . \; II)$$

I und II stimmen nur für kleine Längenunterschiede gut überein.

Auch von persischen Autoren kennen wir Methoden zur Bestimmung der Qiblah. L. A.

Sédillot berichtet in seinen „Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux" (Paris, 1845, S. 323), daß in dem persischen Manuskript Nr. 173 der Kgl. Bibliothek zu Paris auch ein Verfahren zur Ermittlung des Azimuts von Mekka auseinandergesetzt wird, dessen Autor Ali-Schah-Olai-al Munedjem von Buchara ist. In neuerer Zeit hat der persische Oberst A. Kržiž unserem Gegenstand eine eingehende Studie gewidmet. (Vgl. Archiv der Mathem. u. Phys. Bd. 45, S. 289.)

Die Qiblahfrage ist auch bereits Gegenstand kartographischer Studien geworden. In seinem Buche: The Theory of Map-Projektions with special reference to the projections used in the Egyptian Survey Departement, Kairo 1911, und schon früher, erwähnt J. L. Craig eine „Mecca retroazimuthal projection", die den Zweck hat, eine Karte herzustellen, in der auf jedem Punkte die Richtung der Qiblah sofort abgelesen werden kann. Dabei sind die Meridiane als gleichabständige Geraden angenommen, wodurch selbstverständlich die Parallelkreise keine einfachen Kurven werden können. E. Hammer gibt eine solche „gegenazimutale" Karte in mittabstandstreuer Projektion (Peterm. Mitt. 1910, S. 153). Auch in den Annalen der Hydrographie und maritimen Metrologie finden sich Azimuteodiagramme (1905 von Maurer und 1910 von A. Wedemeyer). Möchte solchen Kartogrammen nicht nur ein theoretisches Interesse für den Kartographen, sondern auch bald eine praktische Bedeutung für den frommen Muselman zukommen!

Wenden wir uns jetzt zur astronomischen Festsetzung der Gebetszeiten. Schon bei Ibn Junis findet man in seinen berühmten Hakimitischen Tafeln mehrere Kapitel, die von der Dauer der Morgen- und Abenddämmerung handeln; ausführlich bespricht deren Bestimmung auch Abul Hassan in seinem bereits im ersten Aufsatze erwähnten Buch (S. 295 und 296). Diese Aufgabe war um so mehr Angelegenheit des Astronomen, als er gleichzeitig Diener der Religion war. Die Dämmerungszeiten sind aber bekanntlich für den Muselman 2 Gebetszeiten (Fadschr und Maghrib). Zum Gebet vor der Morgenröte ist man in allen Ländern und Himmelsstrichen verpflichtet, nur ausgenommen da, wo der Aufgang der Sonne zu nahe auf ihren Untergang folgt. Der Prophet selbst hat diese 2 Gebete verordnet, indem er sagt: „Wenn die Sonne aufgeht, betet, bis sie heraufgestiegen, und wenn sie untergeht, betet, bis sie hinabgesunken; vernachlässigt nicht das Morgen- und das Abendgebet, denn zwischen beiden zeigt sich das Horn des Teufels." (Auszüge aus der Suna oder mündlichen Überlieferung Mohammeds, aus: „Fundgruben des Orients", Wien 1809, 1. Bd. S. 277.)

Für das Mittagsgebet (Zohr) kommt die Zeit bis zum Aṣr in Betracht mit Ausnahme der 40 Minuten vor und nach dem Durchgang der Sonne durch den Meridian.

Ich hatte in meinem ersten Aufsatz über diesen Gegenstand (S. 247) eine Stelle bei Delambre erwähnt, die sich in seiner Histoire de l'astronomie du moyen âge (S. 188) findet: „Quand l'ombre sera égale au style, j'ignore, si les Musulmans avaient quelque devoir religieux à remplir . . . "

Sie bezieht sich auf eine Festsetzung des Aṣr, (Nachmittagsgebet) wie sie der Imâm Schafiy (764—819) gab. Es heißt bei Mudgea d'Ohsson: Tableau général de l'empire othoman, pag. 173: „Das Ssalat Aṣr beginnt im Augenblick, wenn die Sonnenuhr einen Schatten gleich der doppelten Länge ihres Zeigers zeigt und endigt mit Sonnenuntergang . . . ." Nach dem Imân Schafiy muß diese Gebetsstunde in jenem Augenblick beginnen, wenn die Uhr einen Schatten gleich der Länge des Zeigers wirft; dieser Zeitpunkt des Tages heißt daher mit Recht: Aṣr-ewel, erste Zeit, und der Moment der doppelten Schattenlänge. Aṣrsany, zweite Zeit." Hiermit ist also jene Stelle bei Delambre vollständig aufgehellt. Nehmen wir noch die Definition des Aṣr hinzu, wie sie sich bei Abul Hassan findet: Das Aṣr ist jene Zeit des Nachmittags,[1]) die in dem Augenblick eintritt, in dem der Horizontalschatten gleich dem Mittagsschatten, vermehrt um die Länge q des Gnomons, ist. Er endigt, wenn der Gnomonschatten um die doppelte Höhe des Gnomons (2 q) länger ist als der Mittagsschatten, so haben wir also 3 verschiedene Festsetzungen dieser merkwürdigen Tageszeit.[2]) Daraus geht hervor, daß dem Aṣr eine ganz besondere Bedeutung beigelegt wird. Dies wird uns vollständig bestätigt in einer Abhandlung von J. Goldziher in Budapest: „Die Bedeutung der Nachmittagszeit im Islam" (Archiv für Religionswissenschaft, IX Bd., S. 293 ff.), der wir folgendes entnehmen: Der Prophet selbst pflegte dem Aṣr große Wichtigkeit beizulegen und es sehr frühe, bald nach dem Zuhr, also nahe der oberen Zeitgrenze, zu vollziehen. Er ging nach Beendigung des Aṣr oft noch nach El-'Awālī (1—2 deutsche Meilen von Medina) und kam dort an, als die Sonne noch hoch am Himmel stand. Der Mystiker Abū-Tālib al-Mekkī berichtet von folgendem Ausspruch des Propheten: „Wenn jemand zu jener Zeit (gemeint ist das Aṣr) 4 Rakahs verrichtet und dabei die Koranrezitation, die Kniebeugung und Prosternation korrekt vollführt, so beten 70000 Engel mit ihm und flehen bei Gott um Sündenvergebung für ihn, denn die Tore des Himmels werden zu dieser Stunde geöffnet, und ich liebe es, daß man gerade damals von mir eine fromme Handlung vorlegen könne."

An einer Reihe von Beispielen tut Goldziher dar, daß man sehr gerne gerichtliche Eide im Zusammenhang mit dem Aṣr ablegen läßt. Man

---

[1]) In L. Am. Sédillot: Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes, Paris 1849 wird sie „temps de la sieste" genannt (p. 57).

[2]) Zweifellos finden sich in den zahlreichen arabischen Manuskripten über die Gebetszeiten, die meist von Gebetsrufern verfaßt sind, noch andere Festsetzungen.

scheint dabei vorauszusetzen, daß der Schwörende aus Scheu vor der heiligen Weihe zu dieser Tageszeit nicht den Mut haben würde, einen Meineid zu schwören. Auch auf die Frage nach dem Grund der besonderen Bedeutung des Aṣr gibt Goldziher eine Antwort: „Nach der mohammedanischen Überlieferung lösen zur Aṣr-Zeit die zur Überwachung der Welt hinabgesandten Engel einander ab; die Tagesengel kehren in den Himmel zurück, während die für die andere Hälfte des Tages bestimmten Engel auf der Erde erscheinen. Man möge nun bestrebt sein, daß die zurückkehrenden Engel auf die Frage Allahs: „Wie habt ihr meine Diener zurückgelassen?" den Bericht erstatten können, daß sie die Muslims im Gottesdienst verlassen haben.

Der Beginn und das Ende des Aṣr läßt sich auch auf dem Zifferblatt der Sonnenuhr in Gestalt einer Kurve darstellen. Solche Aṣr-Linien findet man bei Abul Hassan, allerdings unrichtig; auch scheint dem marokkanischen Astronomen die Geometrie derselben vollständig fern gelegen zu haben. Ich habe drei Aṣr-Kurven nach der Hassan'schen Definition in das Netz der Stundenlinien und Tageshyperbeln arabischer Sonnenuhren eingezeichnet und zwar für die Breiten $\varphi = 0$, $\varphi = 30^0$ und $\varphi = 45^0$.

In nebenstehender Figur 5 gebe ich die Abbildung der Aṣr-Linie für einen Bewohner des Äquators. Die Zwiebelform derselben ist augenfällig. Ein eingehendes Studium dieser merkwürdigen Anwendung der Geometrie auf religiöse Fragen wird sich in meinem Buche: „Arabische Gnomonik" finden, dessen Publikation hoffentlich baldigst erfolgen kann. Ich muß mich hier darauf beschränken, nur einzelne Resultate mitzuteilen. Die Kurve ist vom 8. Grade; sie läßt aber in Cartesischen Koordinaten eine Parameterdarstellung für beide Variablen zu, die hier erwähnt sei: Ist

$$r^2 = x^2 + y^2$$

und q die Gnomonshöhe, so gelten für die Aṣr-Kurve die beiden Gleichungen:

$$x = \pm (q - r) \sqrt{\frac{q^2 + r^2}{q^2 + (q - r)^2}}$$

$$y = \pm q \sqrt{\frac{q(2r - q)}{q^2 + (q - r)^2}}$$

Ein Blick auf die Figur lehrt, daß die Hassan'sche Definition im Beginn und Ende des Aṣr Zeitpunkte von großer Konstanz festlegte. Mit Ausnahme der Tage des Äquinoktiums tritt das Aṣr immer zwischen der 3. und 4. Nachmittagsstunde ein; sein Ende fällt stets zwischen die 4. und 5. Stunde. Der Zweig innerhalb der Doppelpunkte hat keine praktische Bedeutung, obwohl ich im ersten Aufsatz seine Zeitangabe berechnete. Erst bei sehr großen Deklinationen, wie sie die Sonne nie erreicht, tritt das Aṣr viel zu früh ein; die Y-Achse ist, geometrisch gesprochen, eine Asymptote der Kurve. Auch bei $\varphi = 30^0$ und $45^0$ verläuft die Aṣr-Kurve hinsichtlich der Stundenlinien ebenso, freilich für die temporären anders als für die äquinoktialen.

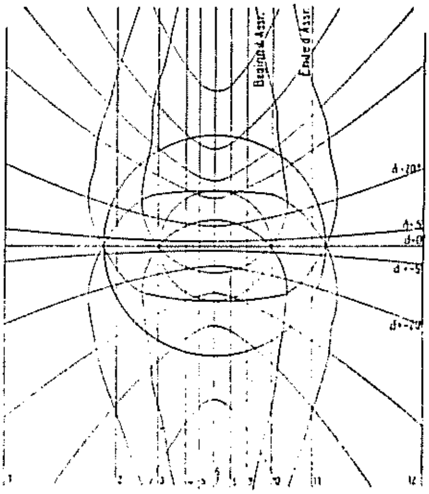


Fig. 5.

Die zwei Kreise der Fig. 5 mit den Radien q und 2q sind die geometrische Darstellung des Aṣr nach Schafiy. Hiernach tritt das Aṣr viel früher ein; die Schafiy'sche Festsetzung versagt, wenn die Sonne an einem Tage die Höhe von 45°, wo der Schatten gleich der Länge des Gnomon ist, überhaupt nicht erreichen kann. Jedenfalls ist das Aṣr Schafiy's vielmehr im Sinne Mohammeds als die astronomisch ungleich vollkommenere Bestimmung dieser Tageszeit durch Abul Hassan.

---

Kaiserliche Marine.
Deutsche Seewarte.

AUS DEM
ARCHIV DER DEUTSCHEN SEEWARTE.
XXXVI. Jahrgang 1913.

Nr. **1.**

# Arabische Gnomonik

von

Dr. **Carl Schoy**, Essen (R.)

Mit 10 Figuren und 2 Tafeln.

HAMBURG 1913.
Gedruckt bei Hammerich & Lesser in Altona.

# Vorwort.

Wenn es bei der Abfassung einer Schrift über Sonnenuhrkunde dem Autor nicht erspart bleibt, stichhaltige Gründe anzuführen, die ihn zur Vermehrung der so reichhaltigen Literatur veranlaßten, sei es, daß er einen von den gewöhnlichen Traktaten abweichenden Weg der Methodik einschlägt, sei es, daß er durch sein historisches Wissen Aufklärung in gnomonische Fragen zu bringen sucht, über welche die Akten noch keineswegs geschlossen sind, so befindet sich hingegen der Schreiber einer arabischen Gnomonik in der angenehmen Lage, seine Leser in ein überaus reizvolles Gebiet einführen zu dürfen, in welchem tiefere Kenntnisse sehr wenig verbreitet zu sein scheinen. Schon die ersten Kapitel dieser Abhandlung werden zeigen, daß die Entwicklung der arabischen Sonnenuhrkunde eine ganz andere war, als die der griechischen und occidentalen, deshalb auch Erzeugnisse aufweist, welche der uns geläufigen Gnomonik vollständig fehlen. Der tiefere Grund hiervon ist in dem islamitischen Religionskultus gegeben, in dessen Dienst der arabische Astronom die Sonnenuhr von jeher mit Vorliebe stellte, da er gleichzeitig Diener der Religion war. Leider ist jedoch unser Wissen in der arabischen Gnomonik noch recht lückenhaft, wie ich schon in meinem Aufsatz: „Die Sonnenuhren der Araber in ihrer Bedeutung für die arabische Astronomie und Religion" (Naturwiss. Wochenschr., Jahrg. 1911, pag. 241 ff.) beklagt habe, und am allerwenigsten sind wir aufgeklärt über den Zusammenhang der Sonnenuhr mit den religiösen Praktiken der Mohamedaner. Es ist nicht richtig, was R. Sonndorfer in seinem sonst so trefflichen Buche: „Theorie und Konstruktion der Sonnenuhren" (Wien, 1864, pag. 16) behauptet, daß die Konstruktionen in Abul Hassans Werke: „Ǧâmi el-mabâdi welġâjât", (das Ganze der Anfänge [Prinzipien] und der Enden [Resultate]), welches uns in einer französischen Übersetzung von J. J. Sédillot vorliegt, „fast alle religiösen Gebräuchen dienen". Abul Hassan teilt uns in dieser Hinsicht nichts mit; von diesbezüglichen Schriften, die in der Regel von Gebetsrufern verfaßt sind, ist noch garnichts in europäische Sprachen übersetzt. Außereuropäischer Sprachen nicht mächtig, mußte ich mich damit begnügen, über diese eigenartige „religiöse Geometrie" das mitzuteilen, was ich zerstreut in verschiedenen Kompendien und Monographien fand und es zu einer mathematischen Theorie zu vereinen, wie sie sich im 4. und 5. Kapitel findet. Zum ersten Mal ist hier, m. W., eine völlig exakte Behandlung der Temporärstunden und -stundenlinien gegeben, deren graphische Darstellung sich für die Breiten $\varphi = -30°$ und $\varphi = 45°$ findet. Ebenso sind die merkwürdigen Hâfir- und Halazûncurven des Abul Hassan einer mathematischen Diskussion unterworfen worden, wie ich denn keineswegs Bedenken trug, dem Leser nicht nur gnomonische Kenntnisse, sondern auch Bekanntschaft mit den Anfangsgründen der höheren Mathematik zuzumuten.

Essen a. d. R., im Mai 1912. Dr. Carl Schoy.

### Nr. 1.

# Arabische Gnomonik

von Dr. Carl Schoy, Essen (R.).

## Historisch bibliographische Einleitung.

Als der älteste arabische Astronom, bei dem man einiges über die Gnomonik der Araber findet, wird gewöhnlich Al-Battâni, d. i. Mann aus Battan in Syrien, genannt, der im Abendlande unter dem Namen Albategnius bekannt ist. Er lebte anfänglich in Raqqa, später in Bagdad. Gestorben ist er im Jahre 929 unserer Zeitrechnung. In vollständiger lateinischer Ausgabe besitzen wir das Buch: „Über die Bewegung der Sterne“ (de motu stellarum), die wir einem Gelehrten des 12. Jahrhunderts, Plato von Tivoli, verdanken. Sie wurde 1537 zu Nürnberg gedruckt und kommentiert herausgegeben durch Regiomontan als Appendix zu den Rudimenta astronomica des Alfraganus unter dem Titel: de scientia stellarum. Das Vorwort stammt von Melanchton. Im opus astronomicum Al-Battâni, sive Albatenii, ad fidem cod. Escurial. arabice editum, lat. versum, adnotation. instructum a. C. Alfonso Nallino[1]) besitzen wir eine vorzügliche Neuausgabe des berühmten arabischen Astronomen. Aus pars I (pag. 138) derselben erfahren wir, daß sowohl horizontale als auch vertikale Sonnenuhren einen Stylus besitzen, der senkrecht auf dem Zifferblatte steht, also bei Vertikaluhren parallel zum Horizonte läuft. Damit ist schon ein fundamentaler Unterschied zwischen der occidentalen und arabischen Sonnenuhr gegeben, denn bei der ersten weist der Zeiger nach dem Weltpol[2]) (Polos).

Aber längst vor Al-Battâni haben sich ostarabische Astronomen mit der Konstruktion von Sonnenuhren beschäftigt, die gewöhnlich auf Marmor- oder Kupferplatten verzeichnet wurden. So ist es begreiflich, warum die Sonnenuhr im Arabischen „Ruchâmet“ (Marmorplatte) heißt. H. Suter erwähnt in seinem Buche: „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke“, Leipzig 1900 (Übersetzung des VII. Teiles des Kitâb el-Fihrist [Buch des Verzeichnisses]) den Mohammed ben Mûsâ al-Chowârezmi aus Chowarezm, (Chiwa) der als Astronom in den Diensten des Khalifen Al-Mâmûm stand und zwischen 835 und 845 starb. Nicht nur, daß er auf Befehl dieses berühmten Abasiden einen Auszug aus einem Sindhind der Inder, der schon unter Al-Mansur durch Al-Fazâri übersetzt wurde, anfertigte, schrieb er u. a. auch: „Über die Sonnenuhr“. Dieses Werk scheint jedoch nicht einmal mehr arabisch vorhanden zu sein. Zu dem Gelehrtenstab, den Al-Mâmûm an seinem Hofe hielt, gehörte auch Ahmed ben Abdallâh, bekannter unter dem Namen Habaš el hâsib (der Rechner) el-Merwazi, der in Bagdad lebte (+ ca. 864—874). Ihm werden u. a. die Abhandlungen zugeschrieben: „Über Sonnenuhren und Gnomone“, sowie: „Über die Konstruktion der horizontalen, senkrechten, geneigten und schiefen (gedrehten) Flächen“.[3]) Es hat ferner Ahmed ben Moh. ben Ketîr al-Fargâni aus Fargan in Transoxanien, der ebenfalls Astronom Al-Mâmûms war, nach Golius, der sein Hauptwerk: „Das Buch der Elemente der Astronomie“ arabisch und lateinisch herausgab, (Amsterdam 1669) ein Buch über die Konstruktion der Sonnenuhren verfast unter dem Titel: „Marmorplatten“. (Vgl. Golii Notae in Alfraganum, pag. 2). Nach H. Suter a. a. O., pag. 36 muß der berühmte arabische Mathematiker Tabit ben Qorra (826—901) ebenfalls mehrere Bücher

---

[1]) Publikationen der Sternwarte der Brera bei Mailand (1599—1903).

[2]) In meinem bereits im Vorwort erwähnten Aufsatz habe ich mich eingehend darüber geäußert, weshalb die Araber nur einseitig Gnomone konstruierten. Wiederum sind es religiöse Gründe gewesen.

[3]) Nach Suter, a. a. O. pag. 13, handelt es sich hier wahrscheinlich um Sonnenuhren.

gnomonischen Inhalts geschrieben haben, so „Über die Sonnenuhren“, „Über die Konstruktion der Schattenlinien des Gnomons der Sonnenuhr“. Tabit kennt also bereits jene Kegelschnittskurven, welche der Schatten der Stabspitze täglich durcheilt. („quas gnomonetrum styli apicis umbra percurrit“). Anscheinend ist die wohl irrige Ansicht verbreitet, daß Gerhard von Cremona (1114—1187) die Schrift des Tabit: „de horometria“ übersetzt habe.[1] Sie befindet sich in der Bibliothek zu Escurial; die anderen angeführten Werke sind nicht mehr erhalten. Auch ein Enkel Tabits hat über Sonnenuhren geschrieben; Suter nennt a. a. O. pag. 53: „Über die Sonnenuhren“, (wörtlich: Schatteninstrumente), „Über die Konstruktion und Anwendung der Sonnenuhren“, „Über die Schatten und besonders die Einrichtung der Sonnenuhr, bei welcher der Schatten nicht länger und nicht kürzer wird als erforderlich für die Auffindung der Mittagslinie“. Von allen 3 Schriften scheint nichts mehr zu existieren.

Verschiedene Astronomen scheinen sich sehr frühzeitig mit der Festsetzung der Gebetsrichtung (Qible = Gesichtswendung gen die Kaaba zu Mekka) befaßt zu haben. Nicht mehr vorhanden ist eine Schrift des Ahmed ben Dâ'ûd, Abû Hanîfa el-Dînawarî (aus Dinawar +895) „Über die Qible“; hingegen findet sich noch als arabisches Manuskript zu Paris eine Abhandlung des El-Fâdil ben Hâtmi el Nairîzî (+922/23) „Über die Gebetsrichtung“. Es ist ja sehr verständlich, daß dieses religiöse Moment, worüber Kapitel IV ausführlich handeln wird, schon bei den ersten arabischen Astronomen eine große Rolle spielen mußte. Die Qible wurde auf der Platte aller Horizontalsonnenuhren gezogen. Suter berichtet a. a. O., pag. 39, von Muslim ben Ahmed el-Leitî, bekannt unter dem Namen Ṣâhib el-qible (d. i. Meister oder Bewahrer der Qible) aus Cordova, (+907/908) daß er diesen Beinamen Ṣâhib el-qible nur erhalten habe, weil er so leidenschaftlich um ihre Innehaltung besorgt war.

Zu einer gewissen Berühmtheit sind auch die arabischen Wasseruhren gelangt, die, wie Kapitel III zeigt, mit den gnomonischen Problemen der Araber aufs innigste zusammenhängen. Einhard beschreibt in den Annales Francorum, annus 807, die bekannte Wasseruhr, welche Hârûn ar-Raschid Karl dem Großen zum Geschenke machte. In Tome XVII (1891) des Journal asiatique hat Baron Carra de Vaux unter dem Titel: „Notice sur deux manuscrits arabes“ auch den Traktat eines nicht genannten arabischen Autors über Wasseruhren übersetzt, deren Erfindung aber bekanntlich nicht Sache der Araber, sondern der Griechen ist. A. Wittstein bespricht im VI. Band der „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“ ausführlich genannte Wasseruhren, welche bei den Arabern tagâr heißen. (Vgl. A. Wittstein: Historisch-astronomische Fragmente aus der orientalischen Literatur a. a. O. pag. 91). Sie waren in der Regel so eingerichtet, daß sie nach jeder Stunde eine Kugel warfen oder fallen ließen. Die betreffende Stelle lautet nach der Übersetzung Carra de Vaux's: „Alle Stunden kommt ein Loch der oberen Platte mit dem einzigen Loch der unteren Platte zur Deckung; es fällt eine Kugel; sie wird zur Spitze eines Enterhakens hingeführt, welche sich auf der Außenseite der Kiste befindet, deren Schnabel sich vermittelst einer Schaukelbretteinrichtung öffnet und die Kugel auszuwerfen scheint. Man erhält ein Schlagwerk, wenn man unter die Spitze des Enterhakens ein Schallbecken aus Kupfer oder Stahl stellt, welches die Kugel bei ihrem Falle trifft“.

Noch nicht aufgeklärt ist, was der Astronom Moh. ben el-Hasan ben Achî Hišâm unter „motabbile“ versteht, von den Übersetzern mit „trommelnder Sonnenuhr“ wiedergegeben. G. Flügel sagt in den Anmerkungen zur Herausgabe des Fihrist, (II, 132) es sei dies „unstreitig eine Sonnenuhr, welche die Mittagsstunde durch Beckenschall andeutete“.[2]

Wennschon im 10. Jahrhundert einer der bedeutendsten arabischen Mathematiker, Abul Wefâ, lebte, der an dem Ausbau der Trigonometrie unter den mohamedanischen Gelehrten kein geringes Verdienst hatte, und wennschon er dem Kollegium der Sternwarte angehörte, welche der Bujide Scharaf Eddaula (985—989) im Garten seines Palastes zu Bagdad bauen ließ, so scheint er doch über Sonnenuhrkunde nichts geschrieben zu haben, und ein Gleiches gilt von Al-Bîrûnî. Dagegen muß die Gnomonik eine ganz bedeutende Förderung durch Ibn Jûnis (+1009 in Kairo) erfahren haben. Leider sind seine berühmten Hakimitischen

---

[1] Eine freundliche diesbez. briefliche Mitteilung von Herrn Prof. Suter an den Verfasser besagt, daß das Exemplar im Escurial arabisch sei und er nicht an eine lateinische Übersetzung desselben glauben könne.

[2] Nach einer freundlichen diesbez. Mitteilung Herrn Prof. Suters an den Verf. mag hier ein Fehler des arabischen Textes vorliegen, selbst wenn die Vermutung Flügels richtig ist, kann man sich kaum vorstellen, wie dies bewerkstelligt wurde.

Tafeln in ihrer Gesamtheit nicht erhalten. Caussin hat die ersten Kapitel des Leydener Manuskripts übersetzt und die folgenden — es sind im ganzen 81 — nach Möglichkeit im Inhaltsverzeichnis aufgeführt.[1]) Eine zusammenhängende Darstellung der Astronomie des Ibn Jûnis hat J. J. Sédillot für Delambre geliefert, der in seiner Histoire de l' astronomie du moyen âge davon Gebrauch machte, (pag. 76—156) aber gerade für die Gnomonik sehr wichtige Kapitel (z. B. XXVII: Trouver la hauteur des heures marquées sur le cadran) fehlen im Manuskript von Ibn Schâtir, welches Sédillot zur Verfügung stand. Soviel aber zu ersehen ist, hat Ibn Jûnis bereits ausgedehnte Tabellen für die Schattenlängen zu den einzelnen Stunden, sowie über die Schattenrichtungen (Azimute) erstellt. Seine vorzügliche Festsetzung des Aṣr an der Vertikaluhr wird uns im VI. Kapitel noch ausführlich beschäftigen. Auch scheint Ibn Jûnis der erste gewesen zu sein, welcher die Horizontaluhr in den Dienst der Polhöhenbestimmung gestellt hat.[2])

Bereits seit Beginn des 8. Jahrhunderts hatten die Araber die Wissenschaft auch nach dem Occident getragen, um ihr in Spanien und Marokko in Al-Zarqâli, Dschabir ibn Aflah (Geber) und Abul Hassan drei Gelehrte zu schenken, die sich den ostarabischen Astronomen würdig an die Seite stellen können. Es ist jedoch nicht möglich, astronomische Leistungen der zwei ersten Gelehrten festzustellen, die speziell für unser Thema in Betracht kämen. Um so überreicher ist die Fülle der gnomonischen Berechnungen, Konstruktionen von Sonnenuhren und anderen astronomischen Instrumenten, mit denen uns Abul Hassan Ali von Marokko († ca. 1270[3]) bekannt macht.[4]) Es ist kaum anders möglich, als daß er eine umfassende Literaturkenntnis besaß, die er sich auf seinen weiten Reisen durch Afrika und Spanien erwarb. So zitiert er auch eine Reihe von Autoren als Al-Chwarizmî, Al-Battâni, Al-Fergâni, Abul Wefâ, Al-Bîrûnî u. a. Daß er auf ihren Schultern steht, ist klar, allein ich kann nach eingehender Prüfung der Sachlage nicht anders, als ihn für den größten Astronomen der Westaraber zu erklären, durchaus nicht für einen geschickten Kompilator, sondern einen Meister voller Originalität. Der große Marokkaner ist der letzte namhafte Gnomoniker der Araber, und wir können mit ihm zur eigentlichen Behandlung der Materie übergehen, die ohne sein Werk nicht denkbar und durch dasselbe fast ausschließlich gegeben ist. Möge sie zeigen, daß ich mit den eben ausgesprochenen Worten nicht zu viel behauptet habe.

---

[1]) Notices et Extraits des manuscrits de la biblioth. nation. VII, pag. 16—240.

[2]) Vgl. C. Schoy: Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhenbestimmungen bei den älteren Völkern, S-Altenburg, 1911, pag. 19.

[3]) In dem Artikel des F. A. Brockhaus'schen Konversationslexikons (neueste Auflage) Abul Hassan habe ich versucht, die Lebenszeit dieses noch so wenig gekannten Gelehrten etwas näher zu bestimmen.

[4]) Traité des instruments astronomiques des Arabes composé au treizième siècle par Aboul Hhassan Ali de Maroc, par J. J. Sédillot; Paris, 1834, 2 Tomes.

## I. Kapitel.

## Die Horizontalsonnenuhr oder die Baẓithah (Basiṯa).

Über ihre Herstellung erfahren wir zum ersten Mal Näheres bei Al-Battâni. In seinem schon erwähnten Werke lehrt er die Konstruktion zweier Horizontaluhren (für die Breiten von 36° und 38°, da sein Beobachtungsort Raqqa unter dem 36 Grad n. Br. lag): „Man nehme eine Marmor- oder Kupferplatte von rechteckiger Gestalt, so daß die Breite $^2/_3$ der Länge ist; in der halben Breite und $^2/_3$ der Länge markiere man den Mittelpunkt eines Kreises, den man um denselben mit beliebigem Radius beschreibt. Darauf teile man durch 2 senkrecht aufeinander stehende Durchmesser den Umfang in Quadranten von 90° oder, sofern es geeignet erscheint, von 2° zu 2° oder 3° zu 3°, verzeichne hierauf die Schatten des Stabes, wann die Sonne im Krebs und Steinbock läuft, für jede der 6 ungleichen Stunden, desgleichen die Schatten des Widders. (Ost-Westlinie). Darauf nehme man ein Lineal, welches zum wenigsten dem längsten Schatten des Steinbocks gleichkommt und markiere damit auf dem Zifferblatt das Ende des Schattens in der mittels des geteilten Kreises bestimmten Richtung. Besorgt man dies für jede Stunde, so wird man den Tagbogen des ganzen Steinbocks haben. Ist dieselbe Operation auch für den Wendekreis des Krebses durchgeführt, so gibt die Verbindung je zweier entsprechenden Punkte dieser (Tages-) Kurven durch Gerade die Stundenlinien". Noch zwei andere Vorschriften teilt Albategnius mit, die aber weniger exakt sind als diese. Man findet sie, wie auch die obige, bei Delambre (a. a. O. pag. 56 und 57).

Zur näheren Erläuterung der vorstehenden Konstruktion, die im wesentlichen bei allen arabischen Astronomen dieselbe blieb, sei auf Fig. 1 verwiesen. Es fiel der Fußpunkt des Gnomons, dessen Höhe 12 Einheiten (Finger) des Maßstabs betrug, mit dem Mittelpunkt des erwähnten Kreises zusammen. Diese Höhe sei für ein und alle Mal mit $q$ bezeichnet. Zunächst mußte nun für eine gegebene Breite die Dauer des kürzesten und längsten Tages, wo die Sonne im Anfang des Steinbocks, bezw. Krebses steht, festgestellt werden, welche Aufgabe Al-Battâni, sich ganz an Ptolemaeus anschließend, mit Hilfe der Fundamentalformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck löste[1]), wobei er allerdings die halben Sehnen der Griechen durch den Sinus der Inder ersetzt. Der zu einem dieser halben Tage gehörige Stundenwinkel $s_0$ findet sich einfach dadurch, daß man im sphärischen Dreieck Zenit-Pol-Sonne den Kosinussatz:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) . \cos(90^\circ - \varepsilon) + \sin(90^\circ - \varphi) . \sin(90^\circ - \varepsilon) . \cos s$$

d. i.

$$\sin h = \sin \varphi . \sin \varepsilon + \cos \varphi . \cos \varepsilon . \cos s$$

anschreibt und nach dem zum Auf- oder Untergang der Sonne ($h = 0$) gehörigen Stundenwinkel $s_0$ auflöst, wodurch man erhält:

$$\cos s_0 = - \operatorname{tang} \varphi . \operatorname{tang} \varepsilon,$$

wo $\varepsilon$, die Ekliptikschiefe, für das Wintersolstitium durch $-\varepsilon$ zu ersetzen ist. Der gefundene Tagbogen wurde in beiden Fällen in 12 gleiche Teile geteilt; die Zeitdauer, welche die Sonne brauchte, um den Bogen zwischen 2 aequidistanten Teilpunkten zu durchlaufen, nannte man eine temporäre Stunde. Sie war also im Sommer länger als im Winter. (Vgl. Kapitel III). Die temporäre Stunde beherrschte die Astronomie auch während der ganzen arabischen Zeit, erst Abul Hassan gebrauchte neben den früheren auch die gleichen oder Aequinoktialstunden, die einem Stundenwinkel von 15° entsprechen. Zur Bestimmung der Schattenlänge $m$ für die einzelnen Stunden war erst die Kenntnis der Sonnenhöhe $h$ nötig, womit sich dann sofort ergab

$$m = q . \operatorname{cotg} h$$

Da außer der Breite $\varphi$ und der Deklination $\delta$ ($\varepsilon$) aber durch die temporäre Stunde auch der Stundenwinkel $s$ gegeben war, so ließ sich $h$ aus dem oben bereits angeschriebenen Kosinussatz berechnen. In dieser Gestalt kannten ihn aber weder Al-Battâni, noch spätere arabische Astronomen, vielmehr zerlegten sie

---

[1]) Vgl. A. von Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, Leipzig, 1900—1903, 2 Bände, I Bd., pag. 25.

ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck stets in 2 rechtwinklige; dagegen war ihnen der Sinussatz geläufig.[1]) War $h$ auf diese Weise gefunden, so mußten die Schattenlängen $m = q \,.\, cotg\, h$ vom Fußpunkt des Gnomons unter gewissen Winkeln zur Nord-Südlinie mittels des schon erwähnten Lineals abgetragen werden. Diese Winkel sind aber mit den Azimuten der Sonne zu den einzelnen Stunden des Tages identisch. Zu ihrer Berechnung aus $\varphi$, $\delta$ und $h$ gibt Al-Battâni (ohne Beweis) die Regel:

$$sin\,(90^\circ - \alpha) = \frac{\left(\dfrac{r \,.\, sin\,(90^\circ - \delta)}{sin\,(90^\circ - \varphi)} - \dfrac{sin\, h \,.\, sin\, \varphi}{sin\,(90^\circ - \varphi)}\right) . \, r}{sin\,(90^\circ - h)}$$ [2])

welche für $r = 1$ und Einführung der Kosinusse sofort in den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie übergeht. Zur konstruktiven Festlegung der Azimute diente der eingeteilte Kreis. (Fig. 1).

Da also ein und dieselbe Rechenvorschrift oftmals auszuführen war, so lag der Gedanke, eine Kotangententabelle zu erstellen, sehr nahe. Battâni hat auch eine solche besessen; sie ist im III. Teil des Opus astronomicum abgedruckt. Auch Ibn Jûnis hatte eine solche Kotangententabelle, allein er vermied die Rechnung mit Tangenten stets auf das Sorgfältigste. Es dürfte vom rein historischen Standpunkt aus nicht ohne Interesse sein, hier anzuführen, wie Battâni, Ibn Jûnis und Abul Hassan jeweils die Sonnenhöhe rechnerisch ermittelten: Der erste der 3 Astronomen, den man oft auch den Ptolemaeus der Araber nennt, geht aus von der uns schon geläufigen Formel

$$cos\, s_0 = -\, tang\, \varphi \,.\, tang\, \delta$$

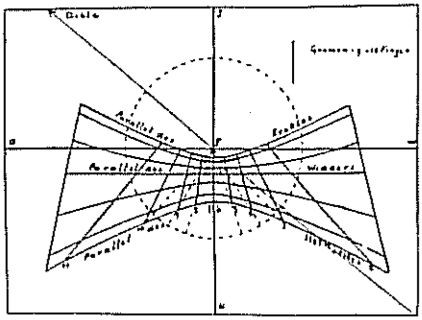


Fig. 1.

Nun wird

$$si\,n\; vers\, s_0 = 1 - cos\, s_0 = 1 + tang\, \varphi \,.\, tang\, \delta$$
$$= \frac{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta + sin\, \varphi \,.\, sin\, \delta}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta} = \frac{cos\,(\varphi - \delta)}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta}$$

gebildet. Also ist auch

$$sin\, h \,.\, sin\; vers\, s_0 = \frac{sin\, h \,.\, cos\,(\varphi - \delta)}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta}$$

oder

$$\frac{sin\, h \,.\, sin\; vers\, s_0}{cos\,(\varphi - \delta)} = \frac{sin\, h}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta} .$$

Beachtet man, daß aus

$$sin\, h = sin\, \delta \,.\, sin\, \varphi + cos\, \delta \,.\, cos\, \varphi \,.\, cos\, s$$
$$1 - cos\, s = sin\; vers\, s = \frac{cos\,(\varphi - \delta) - sin\, h}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta}$$
$$= sin\; vers\, s_0 - \frac{sin\, h}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta}$$

folgt, so kann man weiterhin schreiben

$$sin\; vers\, s_0 - sin\; vers\, s_0 \,.\, \frac{sin\, h}{cos\,(\varphi - \delta)} = sin\; vers\, s_0 \left(1 - \frac{sin\;\, h}{sin\, \left[90^\circ - (\varphi - \delta)\right]}\right) = sin\; vers\, s,$$

woraus dann folgt:

$$sin\; vers\, s = sin\; vers\, s_0 - \frac{sin\; vers\, s_0 \,.\, sin\, h}{sin\, \left[90^\circ - (\varphi - \delta)\right]} ,$$

und dies ist die Regel zur Berechnung von $h$, wie sie sich bei Battâni findet.

Ganz eigenartig ging zur Bestimmung derselben Größe Ibn Jûnis zu Werke. Um ganz im rechtwinkligen Dreieck verbleiben zu können, führt er folgende 2 Begriffe ein:

Der Baad ist die Distanz der Sonne oder des Sterns vom Westpunkt des Horizontes; der Inhiraf ist der Winkel dieser Distanz mit dem ersten Vertikal.

---

[1]) Dies folgt aus vielen Stellen arabischer Handschriften: vgl. auch den Nachweis von H. Suter: „Zur Trigonometrie der Araber" (Bibl. math. (3) 10, pag. 156—160, 1910), wonach ihn sicherlich schon der Lehrer Al-Bêrûnîs, nämlich Abû Nasr ben Irâq (+ ca. 1000—1020) gekannt hat.

[2]) Vgl. hierzu: Opus astron., Cap. XI und v. Braunmühl a. a. O., pag. 33.

In Fig. 2 ist durch den Stern oder die Sonne $S$ und den Westpunkt $Q$ des Horizonts ein Großkreisbogen gelegt, der in $p$ auf dem Meridian senkrecht steht, ebenso durch das Zenit $Z$ und $S$ ein Höhenkreis. Dann hat man die 2 rechtwinkligen Dreiecke $S\,p\,Z$ und $S\,p\,P$; in diesem ist $\sphericalangle\, p\,P\,S = s$, $\sphericalangle\, p\,Z\,S = a$; $Z\,S = 90^\circ - h$; $p\,S = 90^\circ - S\,Q = 90^\circ -$ baud, ferner, weil $p\,Q = Q\,Z = 90^\circ$ ist, $\sphericalangle\, p\,Q\,Z =$ Seite $p\,Z =$ inhiraf. Man hat demnach successive

$$\cos(90^\circ - p\,S) = \sin P\,S \,.\, \sin \sphericalangle\, p\,P\,S$$

$$\sin p\,S = \cos \delta \,.\, \sin s$$

$$\cos Z\,S = \sin h = \cos p\,S \,.\, \cos p\,Z,$$

$$\sin h = \sin Q\,S \,.\, \cos \sphericalangle\, S\,Q\,Z,$$

$$= \sin baud \,.\, \cos inhiraf;$$

$$\cos a = \frac{\sin baud \,.\, \sin inhiraf}{\cos h},$$

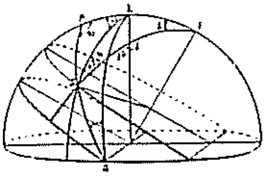


Fig. 2.

womit Höhe und Azimut aus rechtwinkligen Dreiecken bestimmt sind.

**Abul Hassan** nennt das Produkt $\cos\varphi \,.\, \cos\delta$ *assl*[1]). Es ist ein Bestandteil der Formel

$$\sin h = \sin\delta \,.\, \sin\varphi + \cos\delta \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos s.$$

Im Meridian (obere Kulmination) ist $s = 0$, und $h = H$ (Mittagshöhe).

Dann hat man $$\sin H = \sin\delta \,.\, \sin\varphi + \cos\delta \,.\, \cos\varphi$$

Und da für den Sechsstundenkreis $\sin\delta \,.\, \sin\varphi = \sin h_6$ ist, so folgt weiter:

$$\sin H = \sin h_6 + assl$$

und endlich $$\sin h = \sin h_6 + assl \,.\, \cos s$$

$$= \sin H - assl + assl \,.\, \cos s,$$

welche Formel ebenfalls sehr bemerkenswert ist.

Daß die Araber auch den Kurven, welche das Ende des Schattens eines lotrechten Stäbchens während eines Tages auf der Horizontalebene beschreibt, schon sehr frühe ihre Aufmerksamkeit zuwandten, ist uns aus der Einleitung bekannt. **Abul Hassan**, der auch ein Buch über die **Kegelschnitte** verfaßt hat, das aber verloren gegangen ist, gibt in seinem schon erwähnten Hauptwerk sowohl im Text als auch auf sehr kostbaren Tafeln, eine durchaus richtige Darstellung der Schattenlinien für jeden einzelnen Fall. Es sind bekanntlich Kegelschnitte als Zentralprojektionen der Parallelkreise, welche die Sonne am Himmel täglich durchwandert, auf die Uhrfläche als Projektionsebene und mit der Stabspitze als Projektionszentrum. Wir wollen die Gleichung der Kegelschnittskurve für die Horizontalebene hier entwickeln, da sie auch fernerhin in unseren Untersuchungen eine Rolle spielt: Sei (Fig. 3) $S$ die Stabspitze, welche der Sonnenstrahl $S\,\Sigma$ durchsetzt, so ist $F\,\Sigma$ der Schlagschatten des Stabes und $\Sigma$ ein Punkt der Schattenkurve, deren Hauptachse die Nord-Südlinie ist, weil sich auf derselben der Scheitel $A$ der Kurve befindet, der dem Augenblick der Sonnenkulmination entspricht, die stets im Südpunkt stattfindet. Die rechtwinkligen Koordinaten von $\Sigma$, bezogen auf genannte Achse und den Fußpunkt $F$ des Gnomons als Koordinatenanfang seien $x$ und $y$. Da die Schattenrichtung vom Azimut der Sonne bedingt wird, so ist $\sphericalangle\, D\,F\,\Sigma = a$. Aus dem bei $D$ rechtwinkligen Dreieck $F\,D\,\Sigma$ liest man ab:

$$y = F\,\Sigma \,.\, \sin a,$$

und aus dem bei $F$ rechtwinkligen Triangel $\Sigma\,F\,S$:

$$F\,\Sigma = q \,.\, \cot g\, h,$$

wobei $h$ die dem Schattenpunkt $\Sigma$ entsprechende Sonnenhöhe ist.

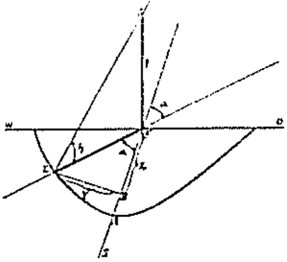


Fig. 3.

Damit wird $$y = q \,.\, \cot g\, h \,.\, \sin a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

---

[1]) assl = Wurzel, Anfang. Solche Termini finden sich bei **Abul Hassan** sehr häufig.

Nach dem Sinussatz hat man im Zenit-Pol-Sonnedreieck:

$$sin\, \alpha = \frac{cos\, \delta \,.\, sin\, s}{cos\, h} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

und nach dem Kosinussatz:

$$sin\, h = sin\, \delta \,.\, sin\, \varphi + cos\, \delta \,.\, cos\, \varphi \,.\, cos\, s \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

Durch Einsetzen des Wertes von $sin\, \alpha$ aus II) in I) wird

$$y = q \,.\, \frac{cos\, \delta \,.\, sin\, s}{sin\, h},$$

und wenn man jetzt noch $sin\, h$ durch den Ausdruck III) ersetzt:

$$y = q \,.\, \frac{cos\, \delta \,.\, sin\, s}{sin\, \delta \,.\, sin\, \varphi + cos\, \delta \,.\, cos\, \varphi \,.\, cos\, s} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

Ferner ist

$$\frac{x}{y} = cotg\, \alpha,$$

$$x = y \,.\, cotg\, \alpha = q \,.\, \frac{cos\, \delta \,.\, sin\, s \,.\, cotg\, \alpha}{sin\, \delta \,.\, sin\, \varphi + cos\, \delta \,.\, cos\, \varphi \,.\, cos\, s} \ldots\ldots\ldots \quad \text{IVa)}$$

Der Kotangentensatz auf das besagte Dreieck angewandt, gibt

$$cotg\, \alpha = \frac{cos\, s \,.\, sin\, \varphi - cos\, \varphi \,.\, tang\, \delta}{sin\, s}$$

Setzt man diesen Wert von $cotg\, \alpha$ in IVa) ein, so ergibt sich

$$x = q \,.\, \frac{cos\, s \,.\, sin\, \varphi \,.\, cos\, \delta - cos\, \varphi \,.\, sin\, \delta}{sin\, \delta \,.\, sin\, \varphi + cos\, \delta \,.\, cos\, \varphi \,.\, cos\, s} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V)}$$

Eliminiert man aus IV) und V) die Variable $s$, so hat man die für jede Zeit des ganzen Tages gültige Gleichung in $x$ und $y$:

$$y^2 \,.\, sin^2 \delta - x^2 \,.\, cos\, (\varphi - \delta) \,.\, cos\, (\varphi + \delta) + x \,.\, q \,.\, sin\, 2\, \varphi - q^2 \,.\, sin\, (\varphi - \delta) \,.\, sin\, (\varphi + \delta) = o \,\ldots\ldots \quad \text{VI)}$$

Um zu entscheiden, welcher Art der durch VI) definierte Kegelschnitt ist, bedenke man, daß eine auf- und untergehende Sonne 2 unendlich lange Schatten, also 2 unendlich ferne Punkte erzeugt, mithin die Schattenkurve eine Hyperbel ist, daß eine um Mitternacht den Horizont gerade berührende Sonne einen unendlich fernen Punkt, d. h. eine Parabel erzeugt, daß endlich bei Mitternachtssonne jeder Schattenpunkt im Endlichen liegt, d. h. die Kurve ein geschlossener Kegelschnitt wird. Wie aber aus einer einfachen Projektion der Himmelskugel auf die Meridianebene ersichtlich ist,

muß im ersten Fall $\varphi + \delta < 90°$
„ zweiten „ $\varphi + \delta = 90°$
und im dritten „ $\varphi + \delta > 90°$ sein.

Und welche Gestalt haben die Verbindungslinien „aequihorärer“ Punkte der einzelnen Tageskurven? Wir stehen damit vor der Frage nach der Natur der Stundenlinien. Sie ist für gleiche oder aequinoktiale Stunden sehr leicht zu beantworten, ungelöst noch für die temporären Stunden. Doch wird Kapitel III Aufschluß über diese interessante Frage geben, soweit eine mathemathische Behandlung tunlich ist. Hier sei vorläufig nur erwähnt, daß die temporären Stundenlinien durchaus keine Geraden sind, wie die Araber irrtümlich annahmen. Für gleiche Stunden jedoch ist der fragliche Ort auf der Sphäre ein Meridian, der von Pol zu Pol zieht. Auf ihm befindet sich die Sonne das ganze Jahr beim Stundenwinkel $s$, gleichviel, welches ihre Deklination sei. Der Durchschnitt eines Großkreises mit einer Ebene ist stets eine gerade Linie, und eine solche muß also der zu erwartende geometrische Ort in der Ebene sein. Da er für das ganze Jahr gültig ist, so muß die Gleichung desselben von dsr Sonnendeklination unabhängig sein; man findet die fragliche Gleichung also durch Elimination von $\delta$ aus IV) und V). Dazu dividiert man in beiden Zähler und Nenner rechter Hand durch $cos\, \delta$, wodurch nur noch $tang\, \delta$ vorkommt. Rechnet man dies aus IV) heraus, so hat man

$$tang\,\delta = \frac{q\,.\,sin\,s - y\,.\,cos\,\varphi\,.\,cos\,s}{y\,.\,sin\,\varphi},$$

und dieser Ausdruck in V) eingesetzt läßt dieselbe übergehen in

$$y = x\,.\,tang\,s - q\,.\,cos\,\varphi\,.\,tang\,s \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{VII)},$$

welches offenbar die Gleichung einer geraden Linie ist. Setzt man für $s$ der Reihe nach 0°, 15°, 30° usw., so erhält man der Reihe nach die verschiedenen Stundenlinien, die sich für gleiche Stunden in einem Punkte der $X$-Achse schneiden. (Projektion des Pols.) Für diese ist $y = 0$; der Schnittpunkt hat also die Abscisse

$$x = q\,.\,cos\,\varphi\ ,$$

ist mithin nicht indentisch mit dem Fußpunkt des Gnomons.

## II. Kapitel.

## Der Ḥâfir und Halazûn.

Zu ihrem Verständnis müssen wir noch einmal auf die im 1. Kapitel gelehrte Höhenbestimmung zurückkommen, wie sie von den einzelnen arabischen Astronomen vorgenommen wurde. Natürlich besaß auch Abul Hassan ausgedehnte Tabellen, aus denen er die Sonnenhöhen für jede Stunde jedes Tages entnehmen konnte. Aber der Marokkanische Astronom ging noch weiter. Um sich ganz von der Rechnung freizumachen, — der 2. Band seines astronomischen Werkes handelt ja ausschließlich von den Konstruktionen — lehrt er uns ein rein graphisches Verfahren, wie man die Schattenlänge für jeden Tag des Jahres und zu jeder Stunde des Tages an einem gegebenen Orte mit einem Zirkel abgreifen könne: Die Konstruktion des Ḥâfir.[1] Sie ist die folgende: Man beschreibe einen Kreis, dessen Radius mindestens dem längsten Schatten der 5. Nachmittagsstunde zur Zeit der Wintersonnenwende gleichkommt und teile seine Peripherie in 36 gleiche Teile. Der Kreis selbst stellt die Ekliptik vor. Dann entfallen auf jedes Zeichen des Tierkreises 3 Teile. Sämtliche Teilpunkte der Peripherie verbinde man mit dem Kreismittelpunkt. Aus den Kotangententabellen entnehme man alsdann die Längen der Schatten für den wahren Mittag jener Jahrestage, welche einer Länge der Sonne (in der Ekliptik) von 0°, 10°, 20°, 30° . . . 360° entsprechen. Ebenso entnehme man den Tabellen die Schattenlängen für dieselben Jahrestage der ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften[2]) Nachmittagsstunde und trage sie auf den entsprechenden Kreisradien ab. Wenn man zum Schluß die Endpunkte, welche der wahre Mittag, die erste, zweite Stunde usw. auf den 36 Linien, die unter gleichen Winkeln vom Mittelpunkt des Kreises ausstrahlen, liefern, durch einen stetigen Linienzug verbindet, so erhält man in ihnen die oben genannten Ḥâfirkurven. Ein beliebiger Tag des Jahres definiert dann eine ganz bestimmte Länge $l$ der Sonne in der Ekliptik, und ein Strahl, unter diesem Winkel vom Mittelpunkte an die Peripherie des Kreises gezogen, wird auf den einzelnen Ḥâfirkurven die Schattenlängen eines gegebenen Gnomons, für welchen natürlich der ganze Cadran konstruiert wird, für die verschiedenen Stunden des Tages in interpolatorischer Weise ausschneiden. Für nicht allzugroße Ansprüche an Genauigkeit ist also der Nutzen solcher Ḥâfire einleuchtend.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, diese merkwürdigen Gebilde arabischer Gnomonik, die sich vor Abul Hassan anscheinend nirgends finden, einer Diskussion zu unterwerfen, soweit dies bei der Kompliziertheit der mathematischen Ausdrücke, die dabei auftreten, angängig ist. Der Kreismittelpunkt oder Fußpunkt des Gnomons sei der Koordinatenanfang. Dann ist die Länge $\varrho$ des Schattens eine Funktion des Ortes der Sonne in der Ekliptik. Wir nehmen die astronomische Länge derselben als Polarwinkel; es ist also O ♈ die $X$-Achse; sie definiert die Länge Null, und 180°, während die $Y$-Achse die Länge $l = 90°$ und 270° aus-

---

[1]) Das Wort Ḥâfir bedeutet in buchstäblichem Sinne: Huf, Klaue (französ. sabot) und es scheint sich direkt auf die im allgemeinen ovale Gestalt der Kurven zu beziehen, um die es sich hier handelt.

[2]) Abul Hassan denkt also an temporäre Stunden, wo bei der 6. Nachmittagsstunde die Sonne stets untergeht. Im deutschen Mittelalter und später, bis gegen 1550, sprach man von „Judenstunden" oder führte sie auch auf babylonisches und griechisches Vorbild zurück.

schneidet. Wir behandeln zunächst den Ḥāfir des wahren Mittags. Die Mittagshöhe der Sonne ist $H = 90° - (\varphi - \delta)$, folglich

$$\varrho = q \, . \, cotg \left[ 90° - (\varphi - \delta) \right] = q \, . \, tang \, (\varphi - \delta)$$

$$\varrho = q \, . \, \frac{tang \, \varphi - tang \, \delta}{1 + tang \, \varphi \, . \, tang \, \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Die Deklination $\delta$ der Sonne drückt sich aber bekanntlich durch

$$sin \, \delta = sin \, \varepsilon \, . \, sin \, l$$

aus, so daß

$$tang \, \delta = \frac{sin \, \varepsilon \, . \, sin \, l}{\sqrt{1 - sin^2 \varepsilon \, . \, sin^2 l}}$$

wird.

Setzt man diesen Wert für $tang \, \delta$ rechter Hand in 1) ein, so hat man schon die Polargleichung der Ḥāfirkurve für den wahren Mittag.

$$\varrho = q \, . \, \frac{tang \, \varphi - \dfrac{sin \, \varepsilon \, . \, sin \, l}{\sqrt{1 - sin^2 \varepsilon \, . \, sin^2 l}}}{1 + tang \, \varphi \, . \, \dfrac{sin \, \varepsilon \, . \, sin \, l}{\sqrt{1 - sin^2 \varepsilon \, . \, sin^2 l}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad II)$$

Dabei ist $l$ von 0° bis 360° zu zählen.

Für einen Ort des Äquators, wo $tang \, \varphi = 0$ ist, vereinfacht sich II) zu

$$\varrho = q \, . \, tang \, \delta = q \, . \, \frac{sin \, \varepsilon \, . \, sin \, l}{\sqrt{1 - sin^2 \varepsilon \, . \, sin^2 l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad III)$$

und diese vereinfachte Gleichung III) ist es, die wir weiter diskutieren wollen. Wir gehen mittels der Beziehung

$$\frac{y}{x} = tang \, l$$

auf rechtwinklige Koordinaten über und finden durch einfache Rechnung aus III) eine Parameterdarstellung für $x$ und $y$, nämlich

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \, \varrho \, . \, \frac{\sqrt{q^2 \, sin^2 \varepsilon - \varrho^2 \, sin^2 \varepsilon}}{sin \, \varepsilon \, . \sqrt{\varrho^2 + q^2}} \\ y &= \pm \, \frac{\varrho^2}{sin \, \varepsilon \, . \sqrt{\varrho^2 + q^2}} \end{aligned} \right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad IV)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß dieser Ḥāfir aus 2 kongruenten Hälften besteht, die im Anfangspunkt des Koordinatensystems zusammenhängen, denn dort ist für $x = 0$ und $y = 0$ auch $\varrho = 0$. (Tafel I, Fig. 1.)

Bildet man aus IV) den ersten Differentialquotienten, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varrho \, (\varrho^2 + 2 \, q^2) \, . \, \sqrt{q^2 \, sin^2 \varepsilon - \varrho^2 \, cos^2 \varepsilon}}{q^4 \, sin^2 \varepsilon - \varrho^4 \, cos^2 \varepsilon - 2 \, \varrho^2 \, q^2 \, . \, sin^2 \varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad V)$$

a) Für wagerechte Tangenten ist der Zähler von V) gleich Null zu setzen. Dies führt zu den 3 Gleichungen

$$\varrho_1 = 0$$

$$\varrho_2 = \pm \, i \, q \, . \, \sqrt{2}$$

$$\varrho_3 = \pm \, q \, . \, tang \, \varepsilon$$

welch letzteres Resultat man auch unschwer aus IV) findet, indem man $x = 0$ setzt.

b) Für senkrechte Tangenten ist der Nenner von V) gleich Null zu setzen. Hieraus folgt für $\varrho$:

$$\varrho = \pm \sqrt{- q^2 \, tang^2 \varepsilon \pm q \, . \, tang \, \varepsilon \, . \sqrt{1 + q^2 \, tang^2 \varepsilon}}$$

c) Zur Bestimmung von **Wendepunkten** haben wir $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ zu machen und die hieraus entfließende Gleichung nach $\varrho$ aufzulösen. Nun ist in unserem Fall

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d\left(\frac{d y}{d x}\right)}{d \varrho} \cdot \frac{d \varrho}{d x}$$

Soll der Ausdruck rechter Hand $= 0$ werden, so muß entweder

$$\frac{d \varrho}{d x} \text{ oder } \frac{d\left(\frac{d y}{d x}\right)}{d \varrho} = 0 \text{ sein.}$$

Für $\frac{d \varrho}{d x}$ findet man durch Differentiation von $IV_1$):

$$\frac{1}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{d \varrho}{d x} = \frac{(q^2+\varrho^2)^{2} \cdot (q^2 \sin^2 \varepsilon - \varrho^2 \cos^2 \varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{q^4 \sin^2 \varepsilon - \varrho^4 \cos^2 \varepsilon - 2\, q^2 \varrho^2 \cos^2 \varepsilon}$$

Dieser Differentialquotient ist Null, wenn es sein Zähler ist, oder wenn sein Nenner bei endlichem Zähler unendlich groß wird. Indem wir die letztere Möglichkeit ausscheiden, bleiben die Resultate

$$\varrho = \pm i\, q$$
$$\varrho = q \,.\, tang\,(\pm \varepsilon)$$

Indessen definiert dieser 2. Wert von $\varrho$ keine eigentlichen Wendepunkte, sondern nur wagerechte Tangenten. Es ist ja selbstverständlich, daß da, wo die Neigung der Kurve, d. h. $\frac{d y}{d x} = 0$ ist, auch die Zunahme der Neigung, d. i. $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ sein muß. Somit bleibt noch der Fall zu untersuchen, wo $\frac{d\left(\frac{d y}{d x}\right)}{d \varrho} = 0$ ist. Wir schreiben zur leichteren Ausführung dieser Differentiation die Gleichung V) so:

$$\frac{d y}{d x} = (q^4 \sin^2 \varepsilon - \varrho^4 \cos^2 \varepsilon - 2\, \varrho^2 q^2 \sin^2 \varepsilon)^{-1} \cdot (\varrho^3 + 2\, q^2 \varrho) \cdot (q^2 \sin^2 \varepsilon - \varrho^2 \cos^2 \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Dann folgt nach bekannten Differentiationsregeln

$$\begin{aligned}\frac{d y'}{d \varrho} = \;& 4\,(\varrho^4 + 2\, q^2 \varrho^2)(\varrho^2 \cos^2 \varepsilon + q^2 \sin^2 \varepsilon)(q^2 \sin^2 \varepsilon - \varrho^2 \cos^2 \varepsilon)\\ & - (\varrho^4 + 2\, q^2 \varrho^2)(q^4 \sin^2 \varepsilon - \varrho^4 \cos^2 \varepsilon - 2\, \varrho^2 q^2 \sin^2 \varepsilon) \,.\, \cos^2 \varepsilon\\ & + (3\, \varrho^2 + 2\, q^2)(q^4 \sin^2 \varepsilon - \varrho^4 \cos^2 \varepsilon - 2\, \varrho^2 q^2 \sin^2 \varepsilon)(q^2 \sin^2 \varepsilon - \varrho^2 \cos^2 \varepsilon)\end{aligned}$$

Entwickelt man den Ausdruck rechts und ordnet nach Potenzen von $\varrho$, so erhält man zur Bestimmung der Wendepunkte die folgende Gleichung 6. Grades:

$$\varrho^6 \cot g^2 \varepsilon\,(5 - 9 \cos^2 \varepsilon) - \varrho^4 q^2 (2 - 4 \cos^2 \varepsilon) + \varrho^2 q^4 (7 - 11 \cos^2 \varepsilon) + 2\, q^6 \sin^2 \varepsilon = o \;\ldots\ldots \quad VI)$$

Da sie nur gerade Potenzen von $\varrho$ enthält, so läßt sie sich auf den 3. Grad herunterbringen, indem man $\varrho^2 = \varrho_1$ setzt. Dann gilt es die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho_1^3 \cot g^2 \varepsilon\,(5 - 9 \cos^2 \varepsilon) - \varrho_1^2 q^2 (2 - 4 \cos^2 \varepsilon) + \varrho_1 q^4 (7 - 11 \cos^2 \varepsilon) + 2\, q^6 \sin^2 \varepsilon = o \;\ldots\ldots \quad VII)$$

zu finden. Da jedoch ihre algebraische Auflösung äußerst mühsam würde, so suchen wir die reelle Wurzel durch Näherung zu bestimmen. Der längste Mittagsschatten ist am Aequator $= q \,.\, tang\,(\pm \varepsilon)$, alle anderen sind $= q \,.\, tang\,(\pm \delta)$, wo $\delta$ die augenblickliche Sonnendeklination vorstellt. Setzen wir jetzt in VI) den längsten Mittagsschatten ein, so werden wir nicht erwarten dürfen, daß er die Gleichung zu Null macht. Sei die rechte Seite $= \Delta$, so haben wir

$$\begin{aligned}\Delta &= q^6 \left[tang^4 \varepsilon\,(5 - 9 \cos^2 \varepsilon) - tang^4 \varepsilon\,(2 - 4 \cos^2 \varepsilon) + tang^2 \varepsilon\,(7 - 11 \cos^2 \varepsilon) + 2 \sin^2 \varepsilon\right]\\ &= q^6\, tang^2 \varepsilon \left[7 - 9 - 5 \sin^2 \varepsilon + 3\, tang^2 \varepsilon\right]\end{aligned}$$

Und da $\sin^2 \varepsilon$ in roher Annäherung $= 0{,}16$; $tang^2 \varepsilon = 0{,}19$ ist, so wird annähernd $\Delta = -0{,}418 \ldots q^6$, also $\Delta < o$, d. h. der Wert, welcher VI) befriedigt, ist nicht $= q \,.\, tang\, \varepsilon$, sondern kleiner. Mithin sind reelle

Wendepunkte da. Setzt man $q = 1$, so wird Gleichung VII) annähernd befriedigt durch den Wert $\varrho_1 = 0.106$, woraus man zieht:

$$\varrho = \pm \sqrt{0.106} = \pm\ 0.302,$$

während der längste Mittagsschatten für $q = 1$ zu $\varrho = \pm 0.43$ wird. Die Wendepunkte treten etwa bei $\delta = \pm 17^\circ$ ein.

Man kann sich nach dem Vorausgehenden leicht ein genaueres Bild eines Mittagshâfirs machen, so wie ihn Fig. 1 auf Tafel I zeigt. Zweimal im Jahre passiert die Sonne den Aequator, (21. III und 23. IX) erreicht mithin unter $\varphi = 0^\circ$ das Zenit, so daß an diesen Tagen der Mittagsschatten $= 0$ ist. Dieser Hâfir muß daher eine 2mal durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems gehende Kurve, ein zur $X$-Achse symmetrisch liegendes Doppeloval sein. Da vom Aequinoktium $\delta$ schnell wächst oder abnimmt, so muß ein solches Oval von $O$ aus erst ziemlich weit nach rechts und links ausscheeren, um dann allmählich anzusteigen oder nach unten zu fallen.[1]

Ebenso muß $\varrho$ nach I) für jeden anderen Ort der Erde 2mal $= 0$ werden, wenn $\varphi = \delta$ ist (also nur innerhalb der heißen Zone). Doch sind nicht mehr beide Hälften des Hâfir symmetrisch.

Außerhalb der heißen Zone hat $\varrho$ das ganze Jahr einen endlichen Wert. Nach I bleiben die Schatten für $\delta = +\varepsilon$ am kürzesten. Tafel I, Fig. 2 zeigt einen von mir berechneten Mittagshâfir für $\varphi = 30^\circ$. Er hat eine herzförmige Gestalt mit deutlicher Spitze.

Man kann auch die Gleichung eines Hâfir für eine beliebige Stunde und unter der Annahme, daß $q = 0$ sei, entwickeln, allein ihre Diskussion wird bei der Kompliziertheit der Ausdrücke naturgemäß sehr unübersichtlich. Trotzdem will ich die allgemeinste Gleichung eines Hâfir noch ableiten und für $q = 0$, $s$ – eine Parameterdarstellung angeben. Für eine beliebige Sonnenhöhe $h$ ist die Schattenlänge

$$\varrho = q \,.\, cotg\, h$$

Aus dem Zenit-Pol-Sonnedreieck folgt:

$$\sin h = \sin \delta \,.\, \sin \varphi + \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s$$

und hieraus:

$$cotg\, h = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 h}}{\sin h} = \frac{\sqrt{1 - (\sin \delta \,.\, \sin \varphi + \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s)^2}}{\sin \delta \,.\, \sin \varphi + \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s}$$

Mithin wird

$$\varrho = q \,.\, \frac{\sqrt{1 - (\sin \delta \,.\, \sin \varphi + \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s)^2}}{\sin \delta \,.\, \sin \varphi + \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s}$$

---

[1] Der Mittagshâfir am Aequator ist eine leicht quadrierbare Kurve. Nach der bekannten Quadraturformel für Polarcoordinaten: $F = \frac{1}{2}\int \varrho^2 \,.\, d\,l$ hat man nach III

$$F = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{q^2 \sin^2 \varepsilon \,.\, \sin^2 l}{1 - \sin^2 \varepsilon \,.\, \sin^2 l} \,.\, d\,l = \frac{q^2}{2} \int_0^l \frac{\sin^2 \varepsilon \,.\, \sin^2 l}{1 - \sin^2 \varepsilon \,.\, \sin^2 l} \,.\, d\,l \,.$$

Der Bruch unter dem letzten Integral läßt sich in eine sehr rasch convergierende Potenzreihe entwickeln, da $\sin \varepsilon = \frac{2}{5}$ ist. Es ist:

$$\frac{\sin^2 \varepsilon \,.\, \sin^2 l}{1 - \sin^2 \varepsilon \,.\, \sin^2 l} = \sin^2 \varepsilon \,.\, \sin^2 l + \sin^4 \varepsilon \,.\, \sin^4 l + \sin^6 \varepsilon \,.\, \sin^6 l + \ldots$$

Mithin

$$F = \frac{q^2 \,.\, \sin^2 \varepsilon}{2} \left[ \int_0^l \sin^2 l\, d\,l + \sin^2 \varepsilon \int_0^l \sin^4 l\, d\,l + \sin^4 \varepsilon \int_0^l \sin^6 l\, d\,l + \ldots \right]$$

Nach der bekannten Reduktionsformel

$$\int \sin^m l\, d\,l = \frac{-\sin^{m-1} l \,.\, \cos l}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} l\, d\,l$$

lassen sich die vorliegenden Integrale leicht bestimmen.

Nach der Methode der Partialbruchzerlegung findet man auch

$$F = \frac{q^2}{4} \left[ \int_0^l \frac{d\,l}{1 - \sin \varepsilon \sin l} - \int_0^l \frac{1 + 2 \sin \varepsilon \sin l}{4 + \sin \varepsilon \sin l}\, d\,l \right]$$

Das erste Integral hat den Wert: $\frac{-2}{\cos \varepsilon}\, arc\, tang \left( \sqrt{\frac{1 + \sin \varepsilon}{1 - \sin \varepsilon}} \,.\, tang \left( 45^\circ + \frac{l}{2} \right) \right)$

Das 2. aber ist ein elliptisches.

Es war aber $sin\,\delta = sin\,\varepsilon\,.\,sin\,l$; $cos\,\delta = \sqrt{1-sin^2\varepsilon\,.\,sin^2 l}$, womit wir erhalten:

$$\varrho = q\,.\,\frac{\sqrt{1-(sin\,\varepsilon\,.\,sin\,\varphi\,.\,sin\,l+cos\,\varphi\,.\,cos\,s\,.\,\sqrt{1-sin^2\varepsilon\,.\,sin^2 l})^2}}{sin\,\varepsilon\,.\,sin\,\varphi\,.\,sin\,l+cos\,\varphi\,.\,cos\,s\,.\,\sqrt{1-sin^2\varepsilon\,.\,sin^2 l}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{VIII)}$$

Dies ist die Polargleichung eines Hâfir, konstruiert für eine beliebige Stunde bei beliebiger Polhöhe. Setzt man hierin zur Vereinfachung wiederum $\varphi = 0$ (Aequator), so findet sich nach einigen Umrechnungen leicht die IV) analoge Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\,\varrho\,.\,\frac{\sqrt{q^2-(\varrho^2+q^2)\,cos^2 s\,.\,cos^2\varepsilon}}{cos\,s\,.\,sin\,\varepsilon\,.\,\sqrt{\varrho^2+q^2}} \\ y &= \pm\,\varrho\,.\,\frac{\sqrt{\varrho^2\,cos^2 s-q^2\,sin^2 s}}{cos\,s\,.\,sin\,\varepsilon\,.\,\sqrt{\varrho^2+q^2}} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{IX)}$$

Ausdrücke, die für $s = 0$, d. h. den wahren Mittag, sofort in die Formeln IV) übergehen.

Noch weit verwickelter werden die Gleichungen der Hâfire, falls man temporäre Stunden zugrunde legt. Für solche hat Abul Hassan die Kurven konstruiert. Wir kommen im nächsten Kapitel auf diesen Gegenstand nochmals zurück.

Den Halazûn oder die Schraubenlinie, Spirale (Hélice) erhält Hassan dadurch, daß er wiederum die Schattenlängen auf den 36 Radien eines Kreises abträgt, jedoch diesmal so, daß die Schatten eines halben Jahres schon den ganzen Kreis erfüllen, also der Polarwinkel $l$ stets doppelt so groß ist wie beim Hâfir. Der Grund, die Kurve so in die Breite zu ziehen, liegt wohl in der Erkenntnis, daß damit ein viel deutlicheres Bild als beim Hâfir erzeugt wird, welches für die Interpolation günstiger ist, und schließlich genügt ja auch die Serie der Schatten eines halben Jahres, weil Schatten, die zu gleichweit von den Solstitien liegenden Daten gehören, an Länge gleich sind. Aus dieser Definition folgt zunächst:

$$\begin{aligned} y &= \varrho\,.\,sin\,2\,l \\ &= 2\,\varrho\,.\,sin\,l\,.\,cos\,l \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{X)} \end{aligned}$$

Andrerseits ist nach II):

$$\varrho = q\,.\,\frac{tang\,\varphi + \dfrac{sin\,\varepsilon\,.\,sin\,l}{\sqrt{1-sin^2\varepsilon\,.\,sin^2 l}}}{1-tang\,\varphi\,.\,\dfrac{sin\,\varepsilon\,.\,sin\,l}{\sqrt{1-sin^2\varepsilon\,.\,sin^2 l}}}$$

Hieraus gilt es, $sin\,l$ und $cos\,l$ in $\varepsilon$, $q$, $\varrho$ und $\varphi$ auszudrücken und in X) einzusetzen, womit auch eine Parameterdarstellung für den Halazûn gefunden ist. Man findet aus II):

$$sin\,l = \frac{\dfrac{\varrho - q\,.\,tang\,\varphi}{q+\varrho\,.\,tang\,\varphi}}{sin\,\varepsilon\,.\sqrt{1+\left(\dfrac{\varrho-q\,.\,tang\,\varphi}{q+\varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2}}$$

und hieraus

$$cos\,l = \frac{1}{sin\,\varepsilon}\,.\,\sqrt{\frac{sin^2\varepsilon-\left(\dfrac{\varrho-q\,.\,tang\,\varphi}{q+\varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\varrho-q\,.\,tang\,\varphi}{q+\varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2}}$$

womit X) übergeht in

$$y = \frac{2\,\varrho}{sin^2\varepsilon}\,.\,\frac{\dfrac{\varrho-q\,.\,tang\,\varphi}{q+\varrho\,.\,tang\,\varphi}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\varrho-q\,.\,tang\,\varphi}{q+\varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2}}\,.\,\sqrt{\frac{sin^2\varepsilon-\left(\dfrac{\varrho-q\,.\,tang\,\varphi}{q+\varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2 cos^2\varepsilon}{1+\left(\dfrac{\varrho-q\,.\,tang\,\varphi}{q+\varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2}} \;\ldots\ldots\; \text{XI)}$$

für $x$ aber findet man aus $x = \varrho\,.\,cos\,2\,l = \varrho\,.\,(cos^2 l - sin^2 l)$:

$$x = \varrho \cdot \frac{1 - (1 + 2\,cotg^2\,\varepsilon)\,.\left(\frac{\varrho - q\,.\,tang\,\varphi}{q + \varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\varrho - q\,.\,tang\,\varphi}{q + \varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XII)}$$

Man erhält die Stellen, wo der Halazûn die $X$-Achse passiert, wenn man in XI) $y = 0$ setzt oder in II) der Reihe nach $l = 0°, 90°$ und $180°$ substituiert. Es findet sich für das zugehörige $\varrho$ resp.:

$$\varrho_1 = q\,.\,tang\,\varphi \qquad \varrho_2 = q\,.\,tang\,(\varphi + \varepsilon) \qquad \varrho_3 = q\,.\,(\varphi - \varepsilon)$$

Die Durchschnitte mit der $Y$-Achse ergeben sich, wenn man in XII) $x = 0$ setzt oder in II) für $l$ 45° und 135° substituiert. Man findet

$$\varrho_1 = q \cdot \frac{\sqrt{1 + 2\,cotg^2\,\varepsilon} + tang\,\varphi}{1 - tang\,\varphi\,.\,\sqrt{1 + 2\,cotg^2\,\varepsilon}} \qquad \varrho_2 = q \cdot \frac{\sqrt{1 + 2\,cotg^2\,\varepsilon} - tang\,\varphi}{1 + tang\,\varphi\,.\,\sqrt{1 + 2\,cotg^2\,\varepsilon}}$$

Eine weitere Diskussion des Halazûn ist mit Schwierigkeiten verknüpft: Für $\varphi = 0$ ist er viel leichter zu behandeln. Abul Hassan beschränkt sich ebenfalls auf den Fall $\varepsilon = 0$.

## III. Kapitel.

## Temporäre Stunden und Stundenlinien.

Eine temporäre Stunde ist, wie wir bereits wissen, der zwölfte Teil der Zeit, der zwischen Sonnenauf- und -untergang verfließt, mithin der 6. Teil eines halben Tages. Wir wollen zuerst für ihre Dauer einen allgemeinen Ausdruck ableiten.

Aus der Formel $cos\,s_0 = -tang\,\delta\,.\,tang\,\varphi$ folgt

$$s_0 = arc\,cos\,(-tang\,\delta\,.\,tang\,\varphi),$$

mithin ist der zu einer Temporärstunde gehörige Stundenwinkel

$$\frac{s_0}{6} = \frac{1}{6}\,arc\,cos\,(-tang\,\delta\,.\,tang\,\varphi)$$

Die Dauer einer solchen Stunde findet man daher, wenn man $\frac{s_0}{6}$ in Zeit verwandelt. Setzt man $r = 1$, so kommt auf 360° der ganze Kreisumfang oder $2\pi$ als Bogen, folglich ist der Stundenwinkel einer aequinoktialen Stunde $= \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$. Man hat daher folgende Proportion:

$$\frac{\text{Tempor. Stunde}}{\text{Aequinokt. Stunde}} = \frac{arc\,cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)}{6} : \frac{\pi}{12}$$

Also ist

$$1 \text{ Tempor. Stunde} = \frac{2\,.\,arc\,cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)}{\pi}\,.\,1 \text{ aequin. Stunde}$$

und wenn man die aequinoktiale Stunde zur Zeiteinheit wählt:

$$\text{Temporäre Stunde} = \frac{2\,.\,arc\,cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Zum leichteren praktischen Gebrauch verwandeln wir I) in eine Potenzreihe, unter Beachtung, daß $arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2} - arc\,sin\,x$ und $arc\,sin\,x = x + \frac{1}{2}\,.\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,\frac{x^5}{5} + \ldots$ ist. Dann ist:

$$\text{Temp. Stunde} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta + \frac{1}{2}\,.\,\frac{(tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)^3}{3} + \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{2\,.\,tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta}{\pi} + \frac{1}{3}\,.\,\frac{tang^3\,\varphi\,.\,tang^3\,\delta}{\pi} + \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Diese Reihe convergiert stark, wenn $\delta$ klein ist und auch $tang\,\varphi < 1$ ist. Sie convergiert nicht für $tang\,\varphi \,.\, tang\,\delta \geq 1$

Man kann auch wieder wie früher

$$tang\,\delta = \frac{sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l}{\sqrt{1 - sin^2\,\varepsilon \,.\, sin^2\,l}} = sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l\,(1 - sin^2\,\varepsilon \,.\, sin^2\,l)^{-\frac{1}{2}}$$

setzen, oder den Klammerfaktor nach dem binomischen Satz entwickelt:

$$tang\,\delta = sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l + \frac{1}{2}\,sin^3\,\varepsilon \,.\, sin^3\,l + \ldots$$

Bleibt man bei den 3. Potenzen stehen, so läßt sich II) leicht in die Form überführen:

$$\text{Temp. Stunde} = 1 + \frac{2\,tang\,\varphi \,.\, sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l}{\pi} + \frac{tang\,\varphi \,.\, sin^3\,\varepsilon \,.\, sin^3\,l}{\pi} + \frac{tang^3\,\varphi \,.\, sin^3\,\varepsilon \,.\, sin^3\,l}{3\,\pi} + \ldots \quad \text{III)}$$

Beide Formeln, II) und III) sind genügend genau zur Verwandlung der temporären Stunden in aequinoktiale und umgekehrt.

Wir gehen jetzt dazu über, die Gleichung der temporären Stundenlinien aufzustellen. Soviel mir bekannt ist, ist diese Aufgabe in völliger Allgemeinheit noch nicht gelöst worden. Am eingehendsten hat sich mit dem Gegenstand wohl Delambre befaßt in seiner Histoire de l' astronomie ancienne, tome II, pag. 476—82, wo es u. a. heißt: Voyons maintenant, s'il est vrai que les lignes des heures temporaires sont toujours des lignes droites, ou ce qui revient au même, si les courbes horaires sur la sphère sont toujours des arcs du grand cercle, ainsi que tous les auteurs le supposent tacitement.

Commandin et Clarius ont essayé de demontrer qu'en effet les arcs horaires appartiennent à des grands cercles. Montucla a dit, et Lalande a répété d'après lui, que les lignes horaires sont des courbes assez bizarres, et qu' on ne peut décrire exactement qu' en déterminant un grand nombre de points." Da aber die Araber diese Kurven durch gerade Linien ersetzten, so ist Delambre darauf geführt worden, zu untersuchen, wie groß der dabei begangene Fehler war. Er findet ihn bei der Deklination, welche die Sonne erreichen kann und für die verhältnismäßig niederen Breiten, innerhalb deren sich das mohammedanische Reich erstreckte, sehr gering. Indem er diese eigenartigen Linien aber weiter verfolgte, bemerkte er, „daß ihr Gestalt der eines Integralzeichens nicht unähnlich sei". Zeichnungen und mathematische Ableitungen gibt Delambre nicht bei, wiewohl er solche für sich ausgeführt haben muß.

Um in aller Strenge die Gleichungen der Kurven abzuleiten, die uns hier beschäftigen, gehen wir auf die Formeln IV) und V) des ersten Kapitels zurück. Sie bestimmen zusammen die Koordinaten eines Punktes der Tageshyperbel, der zu einem gewissen Stundenwinkel $s$ der Sonne gehört. Wählt man diesen Stundenwinkel $s$ so, daß er $= \frac{s_0}{6}, \frac{s_0}{3}, \frac{s_0}{2}, \frac{2s_0}{3}$ und $\frac{5s_0}{6}$ wird, so sind $x$ und $y$ der genannten Formeln die Koordinaten eines Punktes der ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften Temporärstundenlinie. Durch nachherige Elimination von $\delta$ erhält man die für alle Punkte einer solchen Kurve gültige Gleichung, die aber wegen ihres sehr hohen Grades in kartesischen Koordinaten nicht diskutabel ist. Indessen bietet sich auch hier eine Parameterdarstellung beinahe von selbst dar. Wie aus IV) und V) des 1. Kapitels ersichtlich, kommt die Variable $s$ in der Sinus- und Kosinusfunktion vor. Es gilt also aus

$$cos\,s_0 = -tang\,\delta \,.\, tang\,\varphi$$

$sin\,\frac{s_0}{6}$, $cos\,\frac{s_0}{6}$; $sin\,\frac{s_0}{3}$, $cos\,\frac{s_0}{3}$; $sin\,\frac{s_0}{2}$, $cos\,\frac{s_0}{2}$ usw. zu berechnen und in IV) und V) einzusetzen. Dies ist im allgemeinen keine einfache Aufgabe. Am leichtesten ist es noch, die Gleichung für die dritte Stundenlinie aufzustellen, wo $s = \frac{s_0}{2}$ wird. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} cos\,s_0 &= cos^2\frac{s_0}{2} - sin^2\frac{s_0}{2} \\ &= 2\,cos^2\frac{s_0}{2} - 1 \\ &= 1 - 2\,sin^2\frac{s_0}{2} = -tang\,\varphi \,.\, tang\,\delta. \end{aligned}$$

Mithin folgt

$$\sin\frac{s_0}{2} = \sqrt{\frac{1+\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta}{2}} \qquad \cos\frac{s_0}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta}{2}}$$

Setzt man diese Ausdrücke für $\sin s$ und $\cos s$ in IV) und V) ein, so findet man, wenn man vorher noch Zähler und Nenner der rechten Seiten mit $\cos\delta$ durchdividiert hat, folgende **Parameterdarstellung** für die dritte Stundenlinie:

$$\left.\begin{aligned} x &= q\,.\,\frac{\sin\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta}{2}}-\cos\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta}{\sin\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta+\cos\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta}{2}}} \\ y &= q\,.\,\frac{\sqrt{\frac{1+\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta}{2}}}{\sin\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta+\cos\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta}{2}}} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV)}$$

Dies ist der einfachste Fall, den wir nachher eingehender studieren werden. Aber auch hier würde die Elimination von $\text{tang}\,\delta$ (Parameter) schon zu einer Gleichung vom 8. Grade führen.

Schwieriger wird der Fall jedoch, wenn man $\sin\frac{s_0}{3}$ und $\cos\frac{s_0}{3}$ berechnen, d. h. die zweite Temporärstunde darstellen will. Bekanntlich ist

$$\left.\begin{aligned} 4\cos^3\frac{s_0}{2}-3\cos\frac{s_0}{3} &= \cos s_0 = -\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta \\ 3\,.\,\sin\frac{s_0}{3}-4\sin^3\frac{s_0}{3} &= \sin s_0 = \sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{V)}$$

so daß also die Errechnung von $\sin\frac{s_0}{3}$ und $\cos\frac{s_0}{3}$ aus den Formeln V) auf **kubische Gleichungen** führt.

Man kann aber auch ganz allgemein aus $\cos s_0 = -\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta$ $\sin\frac{m\,s_0}{n}$ und $\cos\frac{m\,s_0}{n}$ berechnen, wenn man vom **Moivreschen Satz** ausgeht. Man hat dann

$$\cos\frac{m\,s_0}{n}\pm i\sin\frac{m\,s_0}{n} = \left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta\pm i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Daraus ergibt sich

$$2\cos\frac{m\,s_0}{n} = \left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta+i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}+\left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta-i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$2\sin\frac{m\,s_0}{n} = \frac{1}{i}\left[\left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta+i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}-\left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta-i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$$

Die allgemeinsten Gleichungen von Temporärstundenlinien sind demnach diese

$$\left.\begin{aligned} x &= q\,.\,\frac{\frac{1}{2}\,.\,\sin\varphi\left[\left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta+i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}+\left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta-i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\delta\,.\,\text{tang}^2\varphi}\right)^{\frac{m}{n}}\right]-\cos\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta}{\sin\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta+\frac{1}{2}\cos\varphi\left[\left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta+i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}+\left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta-i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]} \\ y &= q\,.\,\frac{\frac{1}{2i}\left[\left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta+i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}-\left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta-i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]}{\sin\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta+\frac{1}{2}\cos\varphi\left[\left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta+i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}+\left(-\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\delta-i\,.\,\sqrt{1-\text{tang}^2\varphi\,.\,\text{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]} \end{aligned}\right| \;\text{VI)}$$

Wir sehen also, daß das Zifferblatt einer Bazithah in der Tat von sehr bizarren Linien hätte durchzogen sein müssen, wäre es mit der nötigen Genauigkeit konstruiert worden. Nach L. Am. **Sédillot**[1] enthielt

---

[1] Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes, Paris, 1841, pag. 221.

eine gute Sonnenuhr außerdem noch die Linie des Zohr (Zuhr) oder Dohr, welche dem heißesten Zeitpunkt jedes Tages entsprach, der $1^1/_2$ Stunden nach dem Durchgang der Sonne durch den Meridian eintrat. Für diese Linie ist also $s = \frac{s_0}{4}$; ihre Gleichung läßt sich mithin leicht aus derjenigen der dritten Stundenlinie entwickeln, wenn man beachtet, daß

$$\sin\frac{s_0}{4} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{s_0}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta}{2}}}{2}}$$

$$\cos\frac{s_0}{4} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{s_0}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}\delta\,.\,\operatorname{tang}\varphi}{2}}}{2}}$$

ist. Es ergibt sich damit folgendes Gleichungspaar für den Zohr

$$\left.\begin{aligned} x &= q\,.\,\frac{\sin\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta)}}{2}}-\operatorname{tang}\delta\,.\,\cos\varphi}{\sin\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta+\cos\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta)}}{2}}} \\ y &= q\,.\,\frac{\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta)}}{2}}}{\sin\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta+\cos\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta)}}{2}}} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{VII)}$$

Wenden wir uns jetzt zur näheren Diskussion der Gleichungen für die dritte Stundenlinie und machen wir dabei noch die vereinfachende Voraussetzung, daß $\varphi = 45°$, also $\operatorname{tang}\varphi = 1$ sei. (Für $\varphi = 0$ fallen die temporären Stunden mit den aequinoktialen zusammen). Zuerst ersehen wir aus dem Formelsystem IV), (oder auch VI) daß die Quadratwurzeln nur so lange reell sind. als $\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta < 1$ ist, die Sonne auf- und untergeht. Die Kurven endigen also, sobald $90° - \delta = \varphi$ geworden ist. Für die Mitternachtssonne fallen die temporären Stunden insofern wieder mit den aequinoktialen zusammen, als dann eine Stunde der ersten Art gleich zwei Stunden der zweiten ausmacht. Ist $\delta$ negativ, so wird $s_0 = 0$

$$\begin{aligned} \text{für} \quad 1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}(-\delta) &= 0 \\ \text{oder} \quad \operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}(-\delta) &= 1 \\ -\delta &= 90°-\varphi \end{aligned}$$

Dann ist aber nach der zweiten der Formeln IV) auch $y = 0$, woraus folgt, daß sich die temporären Stundenlinien um das Wintersolstitium am meisten nähern und sich für den eben gefundenen Wert von $\delta$ auf einen Punkt der $Y$-Achse (Mittagslinie) zusammendrängen, der aber nach $\text{IV}_1$) im Unendlichen liegt; denn sie geht, wie eine einfache Rechnung zeigt, über in

$$x = q\,.\,\frac{\sin\varphi+\cos\varphi\,.\,\operatorname{cotg}\varphi}{\sin\varphi\,.\,(-\operatorname{cotg}\varphi)+\cos\varphi} = \infty\ ,$$

ein Resultat, das übrigens *a priori* zu erwarten war.

### a) Bestimmung der wagerechten Tangenten.

Wir setzen in den Formeln IV) $\operatorname{tang}\delta = u$, so wird für $\varphi = 45°$:

$$\frac{y}{q\,.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}} \qquad\qquad \frac{x}{q} = \frac{\sqrt{1-u}-u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}}\ ,$$

und falls man den Nenner beider Gleichungen mit $N$ bezeichnet:

$$\frac{1}{y\,.\sqrt{2}}\cdot\frac{dy}{du} = \left[\left(\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}\right)\left(+\frac{1}{2\sqrt{1+u}}\right)-\sqrt{1+u}\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-u}}+\sqrt{2}\right)\right] : N^2$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{du} = \frac{-\sqrt{1-u}\,.\,(u+2)+\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}\,.\,N^2}\;;$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dx}{du} = \left[\left(\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}\right)\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-u}}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{1-u}-u\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1-u}}+\sqrt{2}\right)\right] : N^2$$

$$= \frac{(u-2)\,.\sqrt{2}}{\sqrt{1-u}\,.\,N^2}\;;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}-(2+u)\sqrt{1-u}}{\sqrt{2}\,(u-2)\sqrt{1+u}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{VIII)}$$

Die wagerechten Tangenten bestimmen sich aus der Gleichung

$$u^3+3u^2-2=0$$

Ihre Wurzeln sind:

$u_1 = -1,$ oder $\delta_1 = -45^\circ$

$u_2 = -1+\sqrt{3},$ oder $\delta_2 = +36^\circ\,12'.3$

$u_3 = -1-\sqrt{3},$ oder $\delta_3 = -69^\circ\,53'.8$

b) Für senkrechte Tangenten folgt aus VIII):

$$(u-2)^2\,.\,(1+u)=0,$$

woraus man zieht:

$u_1 = -1,$ oder $\delta_1 = -45^\circ$

$u_2 = +2,$ oder $\delta_2 = +63^\circ\,26'.1$

Hieraus ersieht man, daß nur der einen wagerechten Tangente $\delta_2 = 36^\circ\,12'.3$ eine geometrische Bedeutung zukommt; $\delta_1 = -45^\circ$ definiert eine Asymptote (Mittagslinie).

c) Für Wendepunkte muß $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 0$ sein.

Daraus folgt: $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{du} = 0$ und auch $\frac{du}{dx} = 0$

Man findet aus VIII), wenn man den Nenner mit $N_1$ bezeichnet:

$$\sqrt{2}\,.\,\frac{dy'}{du} = \left\{(u-2)\sqrt{1+u}\,.\left(\frac{2+u}{2\sqrt{1-u}}-\sqrt{1-u}\right)-\left[\sqrt{2}-(2+u)\sqrt{1-u}\right]\left(\frac{u-2}{2\sqrt{1+u}}+\sqrt{1+u}\right)\right\} : N_1^2$$

$$= \left\{(u-2)(1+u)\left(\frac{u+2}{2}-1+u\right)-\left[\sqrt{2(1-u)}-(2+u)(1-u)\right]\left(\frac{u-2}{2}+1+u\right)\right\} : N_1^2\,.\sqrt{1-u^2}$$

$$= \left\{(u^2-u-2)\,3u-\left[\sqrt{2(1-u)}+2-u-u^2\right]3u\right\} : 2N_1^2\,.\sqrt{1-u^2}$$

Dieser Ausdruck ist $= 0$, wenn es der Inhalt der geschwungenen Klammer ist.

Das gibt: $3u\left(2u+\sqrt{2(1-u)}\right)=0\,.$

woraus folgt:

$u_1 = 0;$ d. h. $\delta_1 = 0$

$u_2 = -1;$ d. h. $\delta_2 = -45^\circ$

$u_3 = \frac{1}{2};$ d. h. $\delta_3 = 26^\circ\,30'.4$

Ferner muß auch sein:

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \sqrt{1-u}\,.\left(u\sqrt{2}+\sqrt{1-u}\right)^2 = 0$$

Hieraus entnehmen wir:

$$u_4 = 1; \quad \text{d. h.} \quad \delta_4 = +45^\circ$$
$$u_5 = -1; \quad \text{d. h.} \quad \delta_5 = -45^\circ$$
$$u_6 = \frac{1}{2}; \quad \text{d. h.} \quad \delta_6 = 26^\circ\, 56.'4$$ [1]

Die dritte temporäre Stundenlinie für $\varphi = 45^\circ$ hat also nur 2 Wendepunkte, die geometrische Bedeutung haben ($\delta_1 = 0$, und $\delta_3 = 26^\circ\, 56.'4$). Wie die Zeichnung beweist, (Tafel I, Fig. 3) verlaufen auch die anderen Stundenlinien durchaus einfach und nicht „bizarr." Und dasselbe ist für andere Breiten (z. B. $\varphi = -80^\circ$) der Fall (Tafel II[2]). Man könnte auch ohne allzugroße Mühe die Differentialquotienten der Gleichungen IV) bilden, ohne die beschränkende Annahme, daß $\varphi = 45^\circ$ ist. Eine kurventheoretische Behandlung der Formeln VI) müssen wir jedoch den Mathematikern von Fach überlassen und uns hier damit begnügen, den allgemeinsten Gleichungen der Stundenlinien eine Form gegeben zu haben, die uns für ihre Diskussion am geeignetsten erscheint.[3]

Jetzt läßt sich auch die Frage nach den Hassanschen Häfirkurven, welchen temporäre Stunden zugrunde liegen, erschöpfend dahin beantworten, daß in die Gleichungen VIII) und IX) des zweiten Kapitels für *cos s* der Ausdruck einzusetzen ist, der sich auf S. 19 findet.

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch in Kürze eine Theorie jener merkwürdigen arabischen Wasseruhren geben, die wir schon in der Einleitung erwähnten, und die nach Carra de Vaux folgende Einrichtung hatten:

Einem Gefäß von Umdrehungsoberfläche entströmt durch ein am unteren Rande angebrachtes Ansatzrohr Wasser, wobei dasselbe jedoch nicht auf unveränderlichem Niveau erhalten wird, wie dies bei den gewöhnlichen Wasseruhren der Fall ist. Das Gefäß entleert sich, und eine seiner Außenseite entlang angebrachte Teilung läßt jederzeit erkennen, welcher Stunde die augenblickliche Wasserhöhe zukommt.

Diese Teilung kann nun zweierlei Art sein:

1) Sie entspricht den gleichen oder aequinoktialen Stunden,
2) Sie gilt den temporären oder ungleichen Stunden.

Es ist klar, daß die „Niveaucurven", wie sie A. Wittstein (a. a. O.) nicht unpassend nennt, bei den gleichen Stunden Kreise sind, die parallel zu einander und zum Horizont die Gefäßwand umziehen, und deren Abstände für die einzelnen Stunden nur von der Art der Rotationsfläche abhängen, welche man für die Wasseruhr gewählt hat.

---

[1] Daß $u_6 = \frac{1}{2}$ ist, obwohl es die Gleichung $u\sqrt{2} + \sqrt{1-u} = 0$ nicht befriedigt, ersieht man, wenn man sie auf die Form $\cos\varphi \,.\, \sqrt{2} + \sqrt{1 - \cos\varphi} = 0$ bringt, was erlaubt ist, da ja $u < 1$ sein muß. Es ergibt sich alsdann

$$\cos\varphi \sqrt{2} + \sin\frac{\varphi}{2} \,.\, \sqrt{2} = 0$$

oder
$$\cos\varphi + \sin\frac{\varphi}{2} = 0$$
$$\frac{\varphi}{2} = +60^\circ$$

[2] Diese Figur hat Herr Dr. Wedemeyer für den Verf. gezeichnet, wofür ihm an dieser Stelle herzlichst gedankt sei.

[3] Delambre hat dem II. Tome seiner Histoire de l'astronomie ancienne vor allem Text, sofort nach dem Inhaltsverzeichnis folgende Bemerkungen als Korrektion zu seinen Ausführungen auf S. 476 ff. über die temporären Stundenlinien vorangestellt:

„Depuis l'impression de ce chapitre, pour mieux connaître la figure de ces lignes, j'ai calculé un cadran pour le cercle polaire: j'en ai déterminé tous les points horaires pour toutes les déclinaisons de degré en degré et même pour quelques fractions de degrés de 23° à 23° 28'. Il en est résulté que les lignes horaires pour cette latitude ont à fort peu près la figure du signe d'integration ∫, c'est-à-dire que dans le voisinage du solstice d'hiver, la ligne a une courbure sensible; que pendant la plus grande partie de l'année, la ligne est sensiblement droite, et qu'elle acquiert de nouveau une courbure, mais moins sensible: vers le solstice d'été. Au solstice d'hiver, la durée du jour est = 0: toutes les lignes horaires doivent donc se confondre avec la méridienne. Aux environs de ce solstice, les lignes horaires sont si voisines, qu'il est presque impossible de les distinguer, quelque grande que soit l'échelle: en sorte qu'en cette partie le cadran est aussi inutile que difficile à tracer. Au solstice d'été, au contraire les lignes sont plus espacées que jamais, parceque le jour est de 24 heures équinoxiales, qui ne font que 12 heures temporaires. La construction est donc très-facile: au lieu que pour l'hiver le meilleur parti est de supprimer la portion de ces lignes qui ne peut être d'aucune utilité."

Ganz anders aber verhält sich dies wieder mit dem temporären Niveaukurven. Sie können in keiner Parallelebene zum Horizont verlaufen, da die temporären Stunden im Sommer viel länger sind als im Winter, folglich im Sommer während einer solchen Stunde bedeutend mehr Wasser ausfließt als im Winter. Die Niveaukurve sinkt deshalb, während die Sonne die astronomische Länge von 0° bis 180° hat, sich also vom Widder bis zur Wage bewegt, auf dem Mantel des Gefäßes herab, um sich zwischen der Sonnenlänge von 180° bis 360° wieder über das Niveau der gleichen Stunden hinauf zu heben.

Wir wollen den Sachverhalt an einer Kugeluhr näher studieren.

1) Um für die aequinoktialen Stunden die Schichtlinien ziehen zu können, nehmen wir an, die Kugel entleere sich in 12 solcher Stunden einmal. Sei das Wasser nach der ersten Stunde um $x$ Einheiten des Durchmessers $d = 2r$ gesunken, so muß $^1/_6$ des Rauminhaltes der Halbkugel ausgeflossen sein, $^1/_3$ nach 2 Stunden, $^1/_2$ nach 3 Stunden usw. Nun ist für das Volumen eines Umdrehungskörpers nach der Formel für die Kubatur:

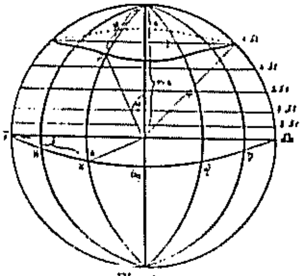


Fig 4.

$$V = \pi \cdot \int_0^r y^2 \cdot dx$$

Nach Fig. 4 hat man:

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (r-x)^2 \\ &= y^2 + x^2 - 2rx + r^2 \\ y^2 &= 2rx - x^2 \end{aligned}$$

Damit wird

$$V = \pi\left(r x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IX)}$$

Für die 1. Stundenlinie ist: $V_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{1}{9} r^3 \pi$

» » 2. » » : $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{9} r^3 \pi$

. . . . . . . . . .

. . . . . . . . . .

» » n. » » » $V_n = \frac{n}{6} \cdot \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{n}{9} r^3 \pi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad$ X)

Man findet also die Entfernungen der einzelnen Stundenmarken $x_1$, $x_2$, $x_3$ usw. vom obersten Endpunkt des Durchmessers durch Auflösung der folgenden kubischen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1^3 - 3 r x_1^2 + \frac{r^3}{3} &= 0 \\ x_2^3 - 3 r x_2^2 + \frac{2 r^3}{3} &= 0 \\ x_3^3 - 3 r x_3^2 + r^3 &= 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad &\vdots \\ x_n^3 - 3 r x_n^2 + \frac{n}{3} r^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XI)}$$

Um jedoch die Teilung auf der Oberfläche der durchsichtig zu denkenden Kugel anbringen zu können, wird man am besten den sphärischen Radius $\psi$ berechnen, mit welchem die einzelnen konzentrischen Schichtkreise zu ziehen sind. Die Fig. 4 gibt unmittelbar:

$$\cos \psi = \frac{r - x}{r}$$

$$x = r(1 - \cos \psi) = 2r \cdot \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

womit sich die Gleichungen XI) verwandeln in:

$$\left.\begin{array}{l} 8\,.\,sin^6\frac{\psi_1}{2}-12\,.\,sin^4\frac{\psi_1}{2}+\frac{1}{3}=0 \\ 8\,.\,sin^6\frac{\psi_2}{2}-12\,.\,sin^4\frac{\psi_2}{2}+\frac{2}{3}=0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 8\,.\,sin^6\frac{\psi_n}{2}-12\,.\,sin^4\frac{\psi_n}{2}+\frac{n}{3}=0 \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{XII)}$$

2) Da die Kugel keine in die Ebene abwickelbare Fläche ist, so lassen sich die Niveaulinien für die Temporärstunden nur an der Oberfläche der Kugel selbst punktweise konstruieren durch Berechnung der Kugelkoordinaten eines jeden Punktes einer solchen sphärischen Kurve. Zu dem Zweck teilen wir den Kugelumfang (Aequator) gemäß der Tierkreisbilder in 12 gleiche Teile, wie es Fig. 4 zeigt. Dann sind die Koordinaten des Punktes $P$, nämlich seine Länge $l$ und seine Poldistanz $\psi$ anzugeben, wodurch $P$ vollständig bestimmt ist. Die Länge $l$ ergibt sich aus dem Datum; $\psi$ findet sich durch folgende Ueberlegung:

Es verlangt 1 aequinoktiale Stunde $\frac{1}{9}r^3\pi$ des Kugelinhalts, folglich 1 temporäre Stunde

$$\frac{1}{9}r^3\pi\,.\,\frac{2\,arc\,cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)}{\pi}=\frac{2}{9}r^3\,arc\,cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)$$

des Kugelinhalts. Und da sich die Senkung des Wasserspiegels jeweils aus der kubischen Gleichung

$$\left(r\,x_n^2-\frac{x_n^3}{3}\right)\pi=\Gamma_n$$

ergibt, so hat man für die $n$.te Temporärstundenlinie

$$\left(r\,x_n^2-\frac{x_n^3}{3}\right)\pi=\frac{2\,n}{9}\,.\,r^3\,arc\,cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)\ ,$$

und wenn man wieder $x=r\,(1-cos\,\psi)=2\,r\,sin^2\frac{\psi}{2}$ setzt und außerdem, wie es zu Anfang dieses Kapitels gelehrt wurde, die Deklination $\delta$ der Sonne in ihrer Länge $l$ ausdrückt:

$$\left(2\,sin^4\,\frac{\psi_n}{2}-\frac{4}{3}\,sin^6\,\frac{\psi_n}{2}\right)\pi=\frac{n}{9}\,arc\,cos\left(-tang\,\varphi\,.\,\frac{sin\,\varepsilon\,.\,sin\,l}{\sqrt{1-sin^2\,\varepsilon\,.\,sin^2\,l}}\right)\ ,\ \ldots\ \text{XIII)}$$

aus der sich, wie zu erwarten war, der Radius der Kugel forthebt.

Wir behandeln noch die Frage, welche Niveaulinie mit ihrer tiefsten Stelle (Sommeranfang) den Aequator gerade berühre. Dann ist in XIII) $\psi=90°$ und $l=90°$ zu setzen. Für $\varphi=45°$ ergibt Gleichung XIII)

$$\pi\,.\left(2\,.\,\frac{1}{4}-\frac{4}{3}\,.\,\frac{1}{8}\right)=\frac{n}{9}\,arc\,cos\,(-tang\,\varepsilon)$$

$$\pi=\frac{n}{3}\,.\,arc\,cos\,(-tang\,\varepsilon)$$

$$cos\,\frac{3\,\pi}{n}=-tang\,\varepsilon$$

$$cos\left(180°-\frac{3\,\pi}{n}\right)=tang\,\varepsilon$$

$$n=4{,}7 \text{ (abgerundet)}$$

Für das Wintersolstitium ergibt sich auf gleiche Weise

$$n=8{,}4 \text{ (abgerundet).}$$

Ein gerader Kreiskegel oder -zylinder liefern für solche Tağars einfachere Verhältnisse, zumal sich die Niveaukurven bei abgerolltem Mantel als ebene Kurven konstruieren lassen. Verallgemeinernd könnte man irgend eine Rotationsfläche als Wassergefäß annehmen. Allein solche, wenn auch noch so reizvollen Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der antiken Zeitmessung liegen uns hier zu ferne, als daß ein näheres Eingehen auf dieselben in Rücksicht auf unseren Traktat angezeigt wäre.

## IV. Kapitel.

## Die Qibla, Kiblah, Kebla, Keble oder Kebleheh.

Zu den verbindlichsten Vorschriften des Korans gehört die Innehaltung der Qibla beim Gebet. Diese Orientierung nach dem Heiligtum ist übrigens nicht arabischen Ursprungs, sondern wurzelt im Judentum. Nach der Ueberlieferung ist sie so alt, wie der Tempel selbst. Die Weiherede, (Kön. I, 8, danach Chron. II, 6) noch deutlicher aber das Buch Daniel (VI, 11) zeigen uns dies. So heißt es in dem letzteren: „Als David nun vernahm, daß der Erlaß ausgefertigt war, begab er sich in sein Haus, in dessen Obergemach er in der Richtung nach Jerusalem geöffnete Fenster hatte, kniete täglich dreimal nieder, und betete zu seinem Gotte und dankte ihm, ganz wie er es bisher zu tun gepflegt hatte". Nach J. Hamburger: Real-Encyklopädie für Bibel und Talmud, 1883, II, pag. 1134, besteht für den Betenden folgende Vorschrift: Außerhalb Palästinas wendet sich der Gläubige diesem Lande zu, innerhalb Palästinas nach Jerusalem, in Jerusalem nach dem Tempel, im Tempel nach dem Heiligtum.

„Selbst in den Gebetsriten war Mohammed anfänglich von den Juden abhängig, er wandte sein Antlitz zeitweilig beim Gebet nach Jerusalem; die älteste Moschee in Medina ist nach Jerusalem orientiert. Aber der mächtigen Judenherrschaft gegenüber war der Liebe Mühen umsonst. Da trat am 16. Januar 624 nach Sonnenuntergang ein Mann in die Moschee und rief den zum Gottesdienst versammelten Gläubigen zu: ‚Ich komme vom Propheten und bringe Euch die Nachricht, daß Gott die Qibla abgeändert. wendet Euer Gesicht gegen die Ka'ba zu Mekka; denn diese ist von nun an Eure Qibla!' Alle drehten sich um, so daß die Kinder und Frauen, die sonst in den letzten Reihen standen, nun vorn waren. Die Neuerung machte großes Aufsehen: mit gutem Grund, weil sie endgültig mit dem Judentum brach und die Stiftung der arabischen Nationalkirche einleitete." (H. Nissen, „Orientation", I, p. 70—72).

Selbst ein religiös gleichgültiger Islamite weicht von dieser Vorschrift nicht ab. Carsten Niebuhr berichtet in seiner „Reisebeschreibung nach Arabien", (I. Bd., pag. 226) daß ihn in der Wüste herumschweifende Beduinen öfters angefleht hätten, ihnen die Qibla zu bestimmen, wenn sie ganz ohne Orientierung waren. Der Behauptung A. Müllers („Der Islam im Morgen- und Abendlande", 1880—1885, I. Bd., pag. 193), daß man im Zweifelsfalle die Richtung nach Mekka durch einen Blick auf einen zu diesem Zweck angefertigten Kompaß festzustellen pflege, steht folgende Angabe Carsten Niebuhrs (a. a. O. pag. 226) entgegen: „Die Direktion des Weges fand ich leicht nach einem kleinen Kompaß, ohne daß es die Araber merkten oder daß es einigen Argwohn erwecken konnte; denn, obgleich die mohammedanischen Gelehrten Kompasse haben, um danach die Keblah in ihren Mosquéen zu bauen, so schien doch keiner der herumstreifenden Araber den Gebrauch desselben zu kennen. Es ist also wohl nicht sehr zuverlässig, wenn man in den Beschreibungen von Arabien lieset, daß die Karawanen daselbst nach dem Kompaß reisen".

Wie schon in der Einleitung erwähnt, wurde die Qibla stets auf dem Zifferblatt der Horizontalsonnenuhr gezogen, aber auch in den Nischen aller Moscheen und auf öffentlichen Plätzen mit freier Aussicht pflegte ihre Festlegung zu geschehen.[1] Reiche Muselmänner lassen sich sogar die Qibla in ihrem eigenen Gebetszimmer (Oratoire) ziehen. Hier ist der Ort, auf die schöne Konstruktion der Qibla einzugehen, die sich in den Récréations mathématiques et physiques, 1790, Tome III, pag. 68 (nouvelle édition par M. Montucla) findet. Montucla behandelt die Aufgabe der sphärischen Trigonometrie: Gegeben 2 Seiten eines sphärischen Dreiecks und der eingeschlossene Winkel; einen der 2 anderen Winkel zu finden, und löst dieselbe in folgender Weise:

---

[1] Das reich ausgestattete Werk von Mudgea d'Ohsson: Tableau général de l'empire othoman, Paris, 1785 gibt auf Tafel XVI eine Abbildung eines solchen öffentlichen Gebetsplatzes. Ein pyramidenförmig zugespitzter Stein, dessen Vorderfläche mit der ewigen Lampe geschmückt ist, markiert die Qibla. Der Betende, der auf dem Gebetsteppich kniet und die Lampe anblickt, wendet damit von selbst sein Gesicht gen Mekka.

Es sei $\varphi_1$ die Breite des Ortes (z. B. Kairo), für welchen die Qibla zu ziehen ist, $\varphi_2$ diejenige von Mekka. Ebenso seien $\lambda_1$ und $\lambda_2$ bez. die Längen der beiden Orte. Man beschreibe mit möglichst großem Halbmesser einen Kreis, der den Horizont von Kairo vorstellt. Jetzt ziehe man 2 rechtwinklige Durchmesser $A\,B$ und $C\,D$ (Fig. 5) und mache $D\,N$ gleich der Poldistanz von Kairo; dann ist $M\,E \perp M\,N$ ein Stück des Aequators. $E\,K$ sei gleich der Distanz Mekkas vom Aequator. Darauf ziehe man $K\,F$ und $K\,G \perp M\,B$ und $M\,N$, fälle von $G$ das Lot $G\,O$ auf den Durchmesser $A\,B$ und verlängere es nach rechts und links. Nunmehr beschreibe man mit dem Radius $G\,K$ um $O$ als Zentrum den Halbkreis $R\,H\,Q$, welcher notwendig innerhalb des Kreises liegt. Von $H$ aus trage man auf $R\,H\,Q$ den Bogen $I\,H$ gleich dem Längenunterschied $\lambda_2 - \lambda_1$ der 2 Orte ab, fälle das Lot $I\,L$ auf den Durchmesser $R\,Q$, ziehe $H\,I$ bis zu einem Durchschnitt $P$ mit dem verlängerten Durchmesser, und ziehe endlich $P\,F$, welches $L\,I$ in $T$ schneidet. Dieser Punkt $T$ repräsentiert die Projektion von Mekka auf den Horizont von Kairo, und dementsprechend wird die Linie $M\,T$ mit $A\,B$ den gesuchten Richtungswinkel $\alpha$ bilden.

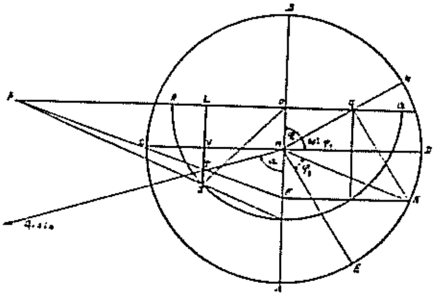


Fig. 5.

Wir geben den Beweis dieser schönen Konstruktion, der sich bei Montucla nicht findet, nachstehend wieder. In Fig. 6 seien $T$ und $M$ die 2 Orte mit den Breiten $\varphi_1$ und $\varphi_2$ und den Längen $\lambda_1$ und $\lambda_2$, $P$ sei der Nordpol, $A\,Q$ der Aequator, und $\sphericalangle\,\alpha$ repräsentiere die Qiblarichtung. Dann errechnet sich dieselbe leicht nach dem Kotangentensatz der sphärischen Trigonometrie. Man hat nämlich im sphärischen Dreieck $T\,M\,P$:

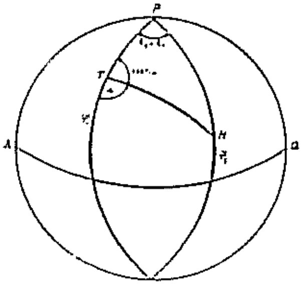


Fig. 6.

$$\cos(90^\circ - \varphi_1)\,.\,\cos(\lambda_2 - \lambda_1) = \sin(90^\circ - \varphi_1)\,.\,\operatorname{cotg}(90^\circ - \varphi_2) - \sin(\lambda_2 - \lambda_1)\,.\,\operatorname{cotg}(180^\circ - \alpha)$$

$$\sin\varphi_1\,.\,\cos(\lambda_2 - \lambda_1) = \cos\varphi_1\,.\,\operatorname{tang}\varphi_2 + \sin(\lambda_2 - \lambda_1)\,.\,\operatorname{cotg}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Aus dieser Gleichung I) läßt sich $\alpha$ bestimmen. Falls aber die Montuclasche Konstruktion richtig ist, muß sich I) aus ihr wieder ableiten lassen.

Tatsächlich ist:

$$\begin{aligned} T\,L &= T\,V + V\,L \\ &= V\,M\,.\,\operatorname{cotg}\alpha + M\,G\,.\,\cos\varphi_1 \\ &= O\,J\,.\,\sin(\lambda_2 - \lambda_1)\,.\,\operatorname{cotg}\alpha + r\,.\,\sin\varphi_2\,.\,\cos\varphi_1\,, \end{aligned}$$

wenn man $M\,E = r$ setzt, oder

$$T\,L = r\,.\,\cos\varphi_2\,.\,\sin(\lambda_2 - \lambda_1)\,.\,\operatorname{cotg}\alpha + r\,\sin\varphi_2\,.\,\cos\varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Andererseits ist auch

$$P\,O = O\,H\,.\,\operatorname{cotg}\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\,,$$

da die Winkel bei $H$ und $J$ im gleichschenkligen Dreieck $O\,J\,H$ jeweils $= 90^\circ - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$ sind, und da

$$O\,H = O\,J = r\,.\,\cos\varphi_2 \quad \text{ist:}$$

$$P\,O = r\,.\,\cos\varphi_2\,.\,\operatorname{cotg}\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\,,$$

und ebenso

$$\begin{aligned} P\,L &= L\,J\,.\,\operatorname{cotg}\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \\ &= r\,.\,\cos\varphi_2\,.\,\cos(\lambda_2 - \lambda_1)\,.\,\operatorname{cotg}\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \end{aligned}$$

In den ähnlichen Dreiecken $PLT$ und $POF$ besteht aber die Proportion:

$$\frac{LT}{OF} = \frac{PL}{OP} = \frac{r \,.\, \cos\varphi_2 \,.\, \cos(\lambda_2-\lambda_1) \,.\, \mathrm{cotg}\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}}{r \,.\, \cos\varphi_2 \,.\, \mathrm{cotg}\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}} \,,$$

woraus folgt:

$$LT = OF \,.\, \cos(\lambda_2-\lambda_1)$$

Nun ist ferner:

$$OF = GS = r \,.\, \sin\varphi_1 \,.\, \cos\varphi_2$$

Damit gewinnen wir für $TL$ einen zweiten Ausdruck

$$TL = r \,.\, \sin\varphi_1 \,.\, \cos\varphi_2 \,.\, \cos(\lambda_2-\lambda_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

Durch Komparation von II) und III) ergibt sich

$$r \,.\, \sin\varphi_1 \,.\, \cos\varphi_2 \,.\, \cos(\lambda_2-\lambda_1) = r \,.\, \cos\varphi_2 \,.\, \sin(\lambda_2-\lambda_1) \,.\, \mathrm{cotg}\,\alpha + r \,.\, \sin\varphi_2 \,.\, \cos\varphi_1 \,,$$

und, indem man linker und rechter Hand mit $r \,.\, \cos\varphi_2$ hebt:

$$\sin\varphi_1 \,.\, \cos(\lambda_2-\lambda_1) = \cos\varphi_1 \,.\, \mathrm{tang}\,\varphi_2 + \sin(\lambda_2-\lambda_1) \,.\, \mathrm{cotg}\,\alpha \,, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Eine so komplizierte Konstruktion der Qibla findet sich jedoch bei keinem der arabischen Astronomen; sie bedienten sich vielmehr sog. **Approximationsverfahren**, die der Wahrheit um so näher kamen, je geringer die Entfernung des fraglichen Ortes von Mekka war. **Al-Battâni** (vergl. C. **Nallino**: Opus astronomicum, Caput *LVI*, Azimut qiblae supputare, p. 187) geht von dem rechtwinkligen Kugeldreieck $ABC$ der Fig. 7 aus. Es sei $A$ die gegebene Stadt, deren Länge $\lambda_2$ und deren Breite $\varphi_2$ ist; $B$ bedeute Mekka mit der Länge $\lambda_1$ und der Breite $\varphi_1$. $BC$ sei ein Meridianbogen durch Mekka und $AB$ ein größter Kreis, der also die Distanz der 2 Städte darstellt. Bogen $AB$ werde als größter Kreis rechtwinklig zum Meridian $BC$ gezogen, so daß er also die Ost-Westlinie repräsentiert. Es ist unter Winkel $BAC$ das Azimut der Qibla zu verstehen. **Al-Battâni** setzt nun:

$$\sin\ (\text{Azimut}) = \frac{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}{\sin\ (\text{distantia})} \,,$$

was nur annähernd richtig ist; denn $BC$ kann nicht genau gleich dem Breitenunterschied $\varphi_2-\varphi_1$ der 2 Orte sein.

Außerdem lehrt er

$$\sin\ (\text{distantia}) = \sqrt{\sin^2(\varphi_2-\varphi_1) + \sin^2(\lambda_2-\lambda_1)} \,,$$

was in einer sphärischen Figur falsch ist.

Fig. 7.

Es ist kaum anzunehmen, fügt **Nallino** diesen **Battânischen** Berechnungen im Kommentar hinzu, daß der berühmte Astronom Falsches gelehrt habe, da er in ganz ähnlichen früheren Problemen richtige Formeln anwandte. Die Kenntnis des Azimuts der Qibla war aber für die Architekten, die die islamischen Tempel zu bauen hatten, unerläßlich. Die Nische in der Wand des Tempels, die den Betenden die Richtung nach Mekka wies, wurde bekanntlich **Mihrâb** genannt. Da aber ein Fehler von wenigen Graden kaum von Bedeutung ist, und die meisten der damaligen Architekten den trigonometrischen Kalkul nicht beherrschten, so wollte ihnen **Al-Battâni** eine bequeme, der Wahrheit nahe kommende Regel für die Konstruktion der Qibla geben.

Eine ähnliche Näherungsmethode lehrt auch **Al-Ǧagmînî**[1] (+ ca. 1240). Man zähle auf dem indischen Kreise vom Südpunkt aus die Differenz zwischen der Länge Mekkas und des gegebenen Ortes nach Westen zu ab, ebenso vom Nordpunkte aus und verbinde die beiden Schlußpunkte dieser abgegrenzten Kreisteile durch eine Grade $AB$ (Fig. 8).

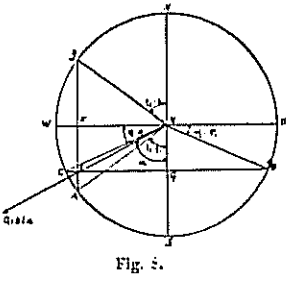


Fig. 8.

---

[1] **Rudolff** und **Hochheim**: Die Astronomie des Ǧagmînî, Leipzig 1893, pag. 61 ff.

4*

Desgleichen trägt man vom Westpunkt aus nach Süden zu den Gradunterschied der beiden Breiten ab, ebenso vom Ostpunkt aus und verbindet die beiden so fixierten Punkte durch eine Gerade $CD$, welche $AB$ in $K$ schneiden wird. Zieht man jetzt vom Mittelpunkt des Kreises aus nach $K$ eine Gerade, so hat man in ihr die gewünschte Qiblarichtung.

Aus diesem Verfahren würde rechnerisch folgen:

$$MF = r \,.\, \sin(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$MG = r \,.\, \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\tan g\, \alpha = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

Andererseits gibt das sphärische Dreieck der Fig. 7, wenn jetzt, wie es Ǧagmini verlangt, $\alpha$ am Meridian liegt,:

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \tan g(\lambda_2 - \lambda_1) \,.\, \cot g\, \alpha \,,$$

d. i.

$$\tan g\, \alpha = \frac{\tan g(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin(\varphi_2 - \lambda_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V)}$$

IV) und V) stimmen nur für kleine Längenunterschiede gut überein.

Auch von persischen Autoren kennen wir Methoden zur Bestimmung der Qibla. L. A. Sédillot[1]) berichtet, daß in dem persischen Manuskript Nr. 173 der Kgl. Bibliothek zu Paris auch ein Verfahren zur Ermittlung des Azimuts von Mekka auseinandergesetzt wird, dessen Autor Ali-Schah-Olai-al Munedjem von Buchara ist. In neuerer Zeit hat der persische Oberst A. Kržiž eine sehr interessante Arbeit[2]) veröffentlicht, die sich ebenfalls mit unserem Gegenstand befaßt.

Die Qiblafrage ist auch bereits Gegenstand kartographischer Studien geworden. In seinem Buche: The Theory of Map-Projections with special reference to the projections used in the Egyptian Survey Departement, Kairo, 1911, und schon früher erwähnt J. L. Craig eine „Mecca retroazimuthal projection“, die den Zweck hat, eine Karte herzustellen, in der auf jedem Punkte die Richtung der Qibla sofort abgelesen werden kann. Dabei sind die Meridiane als gleichabständige Geraden angenommen, wodurch selbstverständlich die Parallelkreise keine einfachen Kurven werden können[3]). E. Hammer gibt eine solche „gegenazimutale“ Karte in mittabstandstreuer Projektion. (Peterm. Mitt. 1910, S. 153).

## V. Kapitel.

## Das Aṣr. (Assr.)

Wenn schon die Qibla der arabischen Gnomonik einen gewissen fremdartigen Reiz verleiht, so tritt ihr exotischer Charakter in ein noch helleres Licht, wenn wir jetzt von jener merkwürdigen „religiösen Geometrie“ handeln, zu deren Ausbau die islamitische Religion den Astronomen, der, wie wir bereits wissen, gleichzeitig Diener der Religion war, veranlaßte. Die Verehrung Allahs geschieht durch das Gebet (Ssalât), zu dessen Verrichtung der gläubige Muselman fünfmal während des Tages verpflichtet ist: 1) bei Tagesanbruch vor Sonnenaufgang (Fadschr), 2) um Mittag (Zohr, Zuhr), 3) am Nachmittag (Assr[4]), 4) bei Sonnenuntergang (Maghrib), 5) am Spätabend (Jscha). Dazu kommt das obligatorische Wochengebet am Freitag Mittag (Ssalât aldschum'a). Es ist einleuchtend, daß die Gläubigen bei diesen genau zu erfüllenden Vorschriften zuverlässiger Zeitangaben bedürfen. Hierzu diente viele Jahrhunderte die Sonnenuhr.

---

[1]) L. A. Sédillot: Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux (Paris, 1845, pag. 323).

[2]) A. Kržiž: Beschreibung, wissenschaftliche Zergliederung und Gebrauchsweise des persisch-arabischen Astrolabiums; Archiv d. Math. u. Phys. Bd. 45, pag. 312 ff.

[3]) Eine streng mathematische Untersuchung derselben habe ich kürzlich in den Annalen d. Hydrographie u. maritim. Meteorologie (1913, pag. 33 ff.) veröffentlicht unter dem Titel: „Azimutale und gegenazimutale Karten mit gleichabständigen Meridianen“.

[4]) al-Aṣr = Nachmittag. Von Sédillot: Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes wird das Aṣr als „temps de la sieste“ bezeichnet (pag. 57).

Besonders um eine zweckmäßige Festsetzung des Aṣr war es den Religionsgelehrten und Astronomen vor allem zu tun, wurde doch dieser Tageszeit eine ganz besondere Bedeutung beigelegt.[1])

Uns interessiert hier vor allem die Frage nach der zeitlichen Festsetzung des Aṣr. Wir können aufgrund eingehender Nachforschungen hierzu folgendes berichten:

1) Bei Mudgea d'Ohsson (a. a. O. pag. 173) heißt es, daß nach dem Imâm Schafiy (764—819) die Gebetsstunde für das Aṣr in jenem Augenblick beginnen müsse, wenn die Sonnenuhr einen Schatten gleich der Länge des Zeigers wirft; dieser Zeitpunkt des Tages heißt Aṣr-ewel, erste Zeit, und der Moment der doppelten Schattenlänge Aṣr-sany, zweite Zeit.

2) Bei demselben Gewährsmann findet man (ohne Nennung eines Autors) die Stelle: (ibid.) „Das Ssalât Aṣr beginnt im Augenblick, wenn die Sonnenuhr einen Schatten gleich der doppelten Länge ihres Zeigers zeigt, und endigt mit Sonnenuntergang".

3) Nach dem Imâms Mâleh und Hambeleh ist das Aṣr jene Zeit des Nachmittags, die mit dem Augenblick eintritt, in welchem der Horizontalschatten gleich dem Mittagsschatten, vermehrt um die Länge $q$ des Gnomons ist. Es endigt, wenn der Gnomonschatten um die doppelte Höhe ($2\,q$) des Gnomons länger ist, als der Mittagsschatten. Diese Festlegung hat vor allem Eingang in die arabische Astronomie gefunden und wurde auch von Abul Hassan akzeptiert.

4) Nach dem bekannten Koraninterpreten Hanife ist es kein Verdienst, das Aṣr möglichst frühe zu vollziehen; er setzt deshalb seinen Beginn auf jenen Zeitpunkt fest, der mit dem Ende nach 3) identisch ist.[2])

5) Ibn Jûnis lehrt die Bestimmung des Aṣr an der Vertikalsonnenuhr, deren Zifferblatt in der Meridianebene steht. Dies ergibt sich aus Delambre: Histoire de l'astronomie du moyen âge, pag. 131, wo auseinandergesetzt wird, wie Ibn Jûnis einen solchen Verticalcadran berechnet. Delambre sagt wörtlich: „Quand l'ombre sera égale au style, c'est-à-dire vers le quart du jour, j'ignore si les Musulmans avaient quelque devoir religieux à remplir; mais on voit plusieurs vestiges de l'importance qu' ils attachaient à cette égalité, que les gnomonistes modernes négligent entièrement". Ibn Jûnis hat für alle Tage des Jahres den so signalisierten Zeitpunkt berechnet, der, wie wir später sehen werden, das ganze Jahr zwischen 3 und 4 Uhr nachmittags eintritt. Zweifellos ist damit das Aṣr gemeint.

Es ist auch nicht ausgeschlossen, daß diese Definition des Asrbeginns dieselbe ist, wie die unter 1) erwähnte, da ja jene für eine Sonnenhöhe von weniger als 45° für den Horizontalcadran versagt. Allerdings würde der frühe Eintritt des Aṣr (er liegt immer vor 3 Uhr) ganz im Sinne Mohammeds sein.

Bereits bei Abul Hassan ist die Festsetzung des Aṣr wie sie unter 3) angeführt ist, auf dem Zifferblatt der Bazithah durch eine Kurve veranschaulicht, die man leicht erhält, wenn man alle Tageshyperbeln mit den Kreisen zum Schnitt bringt, die man um den Fußpunkt des Gnomons als Mittelpunkt mit einem jeweiligen Radius: Mittagsschatten + Länge des Gnomons ($m + q$) beschreibt. Doch sind die Hassanschen Aṣr-Linien ganz unrichtig; auch scheint dem Marokkanischen Astronomen die Geometrie derselben vollständig fern gelegen zu haben. Ich habe drei Aṣr-Kurven in das Netz der Stundenlinien und Hyperbeln arabischer Sonnenuhren eingezeichnet und zwar für die Breiten $\varphi = 0°$, $\varphi = -30°$, $\varphi = 45°$. Nachstehend will ich eine analytisch-geometrische Behandlung dieser merkwürdigen geometrischen Orte versuchen, die sich m. W. noch nirgends findet. Die Gleichung der Aṣr-Kurve ist das Resultat der Elimination von $\delta$ aus der Gleichung der Tageshyperbel in Verbindung mit derjenigen des eben näher bezeichneten Kreises. Die erstere findet sich als VI) bereits im ersten Kapitel. Wir schreiben sie zur bequemeren Isolierung von $\delta$ in etwas veränderter Form und finden für unsere Kurve leicht folgendes Gleichungspaar:

$$x^2 (sin^2 \delta - cos^2 \varphi) + y^2 . sin^2 \delta + q . x . sin\, 2\, \varphi = q^2 (sin^2 \varphi - sin^2 \delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

$$\varrho = q\,[\,1 + tang\,(\varphi - \delta)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Unter Beachtung, daß $\varrho^2 = x^2 + y^2$ ist, findet man aus I):

$$sin^2 \delta = \frac{x^2 cos^2 \varphi + q^2 . sin^2 \varphi - q\, x\, sin\, 2\, \varphi}{\varrho^2 + q^2} \, ,$$

---

[1]) Vergl. hierzu J. Goldzieher: Die Bedeutung des Nachmittags im Islam (Archiv f. Religionswiss. IX. S. 293 ff.

[2]) E. W. Lane: „An account of the manners and customs of the modern Egyptians", London 1871, I. Vol. p. 91).

und aus II)

$$tang^2 \delta = \frac{sin^2 \delta}{1 - sin^2 \delta} = \left[\frac{q\,(1 + tang\,\varphi) - \varrho}{(\varrho - q)\,tang\,\varphi + q}\right]^2$$

Damit ergibt sich weiter:

$$\left\{\frac{q\,(1 + tang\,\varphi) - \varrho}{(\varrho - q)\,.\,tang\,\varphi + q}\right\}^2 = \frac{(x\,cos\,\varphi - q\,sin\,\varphi)^2}{\varrho^2 + q^2 - (x\,cos\,\varphi - q\,sin\,\varphi)^2}\,,$$

$$x\,cos\,\varphi - q\,.\,sin\,\varphi = \pm\frac{[\,q\,.\,(1 + tang\,\varphi) - \varrho\,]\,.\,\sqrt{\varrho^2 + q^2}}{\sqrt{[\,(\varrho - q)\,tang\,\varphi + q\,]^2 + [\,q\,(1 + tang\,\varphi) - \varrho\,]^2}}\,,$$

$$\left.\begin{aligned} x &= q\,.\,tang\,\varphi \pm \frac{1}{cos\,\varphi}\,.\,\frac{[\,q\,(1 + tang\,\varphi) - \varrho\,]\,.\,\sqrt{\varrho^2 + q^2}}{\sqrt{[\,(\varrho - q)^2 + q^2\,]\,.\,tang^2\,\varphi + 2\,q\,tang\,\varphi\,(1 - q) + (\varrho - q)^2 + q^2}} \\ y &= \sqrt{\varrho^2 - \left\{q\,.\,tang\,\varphi \pm \frac{1}{cos\,\varphi}\,.\,\frac{[\,q\,(1 + tang\,\varphi) - \varrho\,]\,.\,\sqrt{\varrho^2 + q^2}}{\sqrt{[\,(\varrho - q)^2 + q^2\,]\,.\,tang^2\,\varphi + 2\,q\,tang\,\varphi\,(1 - q) + (\varrho - q)^2 + q^2}}\right\}^2} \end{aligned}\right\} \ldots \text{III)}$$

Das Paar III) enthält eine Parameterdarstellung der Aṣrkurve, und es ist eine bemerkenswerte Tatsache daß diese Gleichungsform die arabische Gnomonik geradezu beherrscht. Zugleich aber zeigen diese verwickelten Formeln, daß eine allgemeine Diskussion derselben kaum angängig ist. Wir machen deshalb die vereinfachende Annahme, daß $\varphi = 0$ sei, womit wir zum Asr übergehen, das für einen am Aequator lebenden Mohammedaner gilt. Damit vereinfachen sich die Formeln III) sofort zu

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\,(q - \varrho)\,.\,\sqrt{\frac{\varrho^2 + q^2}{q^2 + (q - \varrho)^2}} \\ y &= \pm\,q\,.\sqrt{q}\,.\,\sqrt{\frac{2\,\varrho - q}{q^2 + (q - \varrho)^2}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV)}$$

und diese Ausdrücke sind es, die wir weiter behandeln wollen. Man findet aus ihnen:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \pm\,q\,.\,\frac{q^2 + (q - \varrho)^2 + (q - \varrho)\,(2\,\varrho - q)}{(q^2 + \varrho^2)\,q^2 + \varrho\,(q - \varrho)\left(q^2 + (q - \varrho)^2\right)}\,.\,\sqrt{\frac{q^2 + \varrho^2}{q\,(2\,\varrho - q)}}$$

Hieraus ergibt sich

a) Für wagerechte Tangenten:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 0, \quad \text{d. h.} \quad q^2 + (q - \varrho)^2 + (q - \varrho)\,(2\,\varrho - q) = 0$$

oder

$$\varrho^2 - q\,.\,\varrho - q^2 = 0\,,$$

$$\varrho = \frac{q}{2} \pm \frac{q}{2}\sqrt{5}\,,$$

und da $\varrho > 0$ sein muß

$$\varrho = \frac{q}{2}\,.\,(1 + \sqrt{5})$$

Man hat daher

$$x = \pm\frac{q}{2}$$

$$y = \pm\frac{q}{2}\,.\,\sqrt{2\,(1 + \sqrt{5})}$$

als Koordinaten der Berührungspunkte ($A$ und $A_1$). Tafel I, Fig. 4.

b) Für senkrechte Tangenten hat man die Faktoren des Nenners = 0 zu setzen. Das gibt:

$$\alpha)\quad 2\,\varrho - q = 0,$$

$$\varrho = \frac{q}{2}\,;$$

womit man für die Koordinaten der Berührungspunkte findet:

$$x = \pm\frac{q}{2}\,; \quad y = 0$$

$$\beta)\quad \varrho^4 - 3\,q\,\varrho^3 + 3\,q^2\,\varrho^2 - 2\,q^3\,\varrho - q^4 = 0 = \Delta$$

$$\text{Mit } \varrho = q \text{ findet sich } A = -2\,q^4\,,$$
$$\text{Mit } \varrho = 2\,q \text{ aber folgt } A = +\,q^4\,,$$

mithin liegt eine Wurzel $\varrho_1$ dieser Gleichung zwischen $q$ und $2\,q$, und zwar näher an $2\,q$. Der Ausdruck $\beta$) wird auch nahezu befriedigt für

$$\varrho_2 = -\frac{3}{4}\,q\,.$$

Die 2 anderen Wurzeln sind komplex. Den Werten für $\varrho_1$ und $\varrho_2$ kommt an der Kurve keine geometrische Bedeutung zu.

c) Für die **Wendepunkte** gilt

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d\left(\frac{d y}{d x}\right)}{d \varrho} \cdot \frac{d \varrho}{d x} = 0$$

Wenn man den Faktor $\frac{d \varrho}{d x} = 0$ setzt, so muß

$$\left[q^2 + (q-\varrho)^2\right]^{\frac{3}{2}} \cdot (q^2+\varrho^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ sein.}$$

Hieraus folgt:

$$\varrho_{1,2} = \pm\, i\, q$$
$$\varrho_{3,4} = q\,(1 \pm i)\,.$$

Diese Werte für $\varrho$ haben also keine geometrische Bedeutung.

Um nun auch $\frac{d y'}{d \varrho}$ zu bilden, schreiben wir

$$y' = \frac{d y}{d x} = (\varrho^2 - \varrho\, q - q^2)\,(\varrho^4 - 3\,\varrho^3 q + 3\,\varrho^2 q^2 - 2\,\varrho\, q^3 - q^4)^{-1} \cdot (\varrho^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2\,\varrho - q)^{-\frac{1}{2}}$$

Setzen wir diese Faktoren der Reihe nach $= u, v, w, z$, so ist nach einer bekannten Differentiationsregel:

$$\frac{d y'}{d \varrho} = u \,.\, v \,.\, w \,.\, \frac{d z}{\partial \varrho} + u \,.\, v \,.\, z \,.\, \frac{d w}{d \varrho} + u \,.\, w \,.\, z \,.\, \frac{d v}{d \varrho} + v \,.\, w \,.\, z \,.\, \frac{d u}{d \varrho}$$

In Anwendung auf unsern Fall folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d y'}{d \varrho} = 0 = {} & -(\varrho^2 - \varrho\, q - q^2)\,(2\,\varrho - q)^{-\frac{3}{2}} + \varrho\,(\varrho^2 - \varrho\, q - q^2)\,(2\,\varrho - q)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varrho^2 + q^2)^{-1} \\
& -(\varrho^2 - \varrho\, q - q^2)\,(2\,\varrho - q)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varrho^4 - 3\,\varrho^3 q + 3\,\varrho^2 q^2 - 2\,\varrho\, q^3 - q^4)\,(4\,\varrho^3 - 9\,\varrho^2 q + 6\,\varrho\, q^2 - 2\,q^3) \\
& + (2\,\varrho - q)^{\frac{1}{2}}\,(2\,\varrho - q) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V)} \\
= {} & (q^2 + \varrho\, q - \varrho^2)\,(\varrho^2 + q^2)\,(\varrho^4 - 3\,\varrho^3 q + 3\,\varrho^2 q^2 - 2\,\varrho\, q^3 - q^4) \\
& + \varrho\,(\varrho^2 - \varrho\, q - q^2)\,(\varrho^4 - 3\,\varrho^3 q + 3\,\varrho^2 q^2 - 2\,\varrho\, q^3 - q^4) \\
& + (q^4 + 2\,\varrho\, q^3 - 3\,\varrho^2 q^2 + 3\,\varrho^3 q - \varrho^4)\,(2\,\varrho - q)^2 \\
& + (\varrho^2 - \varrho\, q - q^2)\,(2\,\varrho - q)\,(\varrho^2 + q^2)
\end{aligned}$$

Multipliziert man die Klammern aus und ordnet nach Potenzen von $\varrho$, so findet man folgende Schlußgleichung 8. Grades:

$$\begin{aligned}
5\,\varrho^8 - 18\,\varrho^7 q + \varrho^6\,(19\,q^2 - 2) - \varrho^5\,(12\,q^3 - 7\,q) - \varrho^4\,(3\,q^4 + 9\,q^2) + \varrho^3\,(17\,q^5 + 7\,q^3) \\
- 9\,\varrho^2 q^6 + \varrho\,(3\,q^7 - q^5) + 2\,q^8 = 0 \;\ldots\ldots \quad \text{Va)}
\end{aligned}$$

Für $q = 1$ geht sie in die folgende über

$$5\,\varrho^8 - 18\,\varrho^7 + 17\,\varrho^6 - 5\,\varrho^5 - 12\,\varrho^4 + 24\,\varrho^3 - 9\,\varrho^2 + 2\,\varrho + 2 = 0 = B \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{Vb)}$$

Substituiert man in Vb) der Reihe nach für $\varrho$: 1, 2 und 3, so wird

$$B = +6 \text{ für } \varrho = 1\,, \qquad B = -156 \text{ für } \varrho = 2\,, \qquad B = +4220 \text{ für } \varrho = 3$$

Danach liegen zwischen $\varrho = 1$ und $\varrho = 2$, und zwischen $\varrho = 2$ und $\varrho = 3$ reelle Wendepunkte ($B$ und $B_1$, $C$ und $C_1$ der Fig. 4, Tafel I).

Für die Aṣr-Linie am Aequator ist die $X$-Achse eine **Asymptote**; denn setzt man in den Gleichungen $\varrho = \infty$, so wird

$$x = \pm \infty \qquad\qquad y = 0$$

Auch für beliebige Breiten wird $\varrho$ immer $= \infty$, wenn

$$-\delta + 90^\circ - \varphi = 90^\circ, \qquad\qquad \delta + \varphi = 0^\circ \quad \text{ist.}$$

Wir kommen jetzt zur Beantwortung der Frage: Wann tritt das Aṣr ein, und wann endigt es? Bei Beginn ist die Länge des Nachmittagsschattens

$$m = q\left[1 + tang\,(\varphi - \delta)\right],$$

und beim Ende

$$m_1 = q\left[2 + tang\,(\varphi - \delta)\right]$$

Das Schattendreieck gibt im ersten Fall

$$sin\ h = \frac{q}{\sqrt{q^2 + q^2\left[1 + tang\,(\varphi - \delta)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[1 + tang\,(\varphi - \delta)\right]^2}},$$

und für den zweiten:

$$sin\ h_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[2 + tang\,(\varphi - \delta)\right]^2}}$$

Andrerseits ist auch

$$sin\ h = sin\ \delta\,.\,sin\ \varphi + cos\ \delta\,.\,cos\ \varphi\,.\,cos\ s\ ,$$

und um jetzt die Zeiten zu finden, wann das Aṣr beginnt bezw. endigt, hat man die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left[1 + tang\,(\varphi - \delta)\right]^2}} = sin\ \delta\,.\,sin\ \varphi + cos\ \delta\,.\,cos\ \varphi\,.\,cos\ s\ , \\ \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left[2 + tang\,(\varphi - \delta)\right]^2}} = sin\ \delta\,.\,sin\ \varphi + cos\ \delta\,.\,cos\ \varphi\,.\,cos\ s_1 \end{array}\right| \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{VI)}$$

nach $cos\ s$, bezw. $cos\ s_1$ aufzulösen und diesen so gefundenen Stundenwinkel in Zeit zu verwandeln. Ist die Aṣr-Kurve bereits auf dem Zifferblatt eingezeichnet, so signalisiert der fortlaufende Schatten der Gnomonspitze beim Durchschreiten der Kurve Beginn und Ende dieser merkwürdigen Nachmittagszeit.

Um die Festsetzung des Aṣr nach **Schafiy** geometrisch darzustellen, hätte man um den Fußpunkt des Gnomons 2 konzentrische Kreise mit den Radien $q$ und $2q$ zu schlagen.

Wenden wir uns jetzt noch kurz zur astronomischen Bestimmung der übrigen Gebetszeiten. Es sind, wie schon früher erwähnt, vor allem die 2 **Dämmerungszeiten** und der **Mittag** (Zohr). Schon bei **Ibn Jûnis** findet sich eine ausführliche Bestimmung der Dauer der Dämmerung, (Cap. XVI der Hakimitischen Tafeln) wobei der Depressionswinkel zu Anfang oder am Ende derselben zu 18° angenommen wird. Einen erschöpfenden Traktat über diesen Gegenstand findet man auch bei **Abul Hassan** (a. a. O., pag. 295 und 296). Wir müssen uns jedoch hier darauf beschränken, für solch' geometrische Studien der Dämmerung, wie sie die Araber trieben, auf Spezialliteratur zu verweisen[1]).

Für das **Mittagsgebet** kommt die Zeit bis zum Aṣr in Betracht mit Ausnahme der 40 Minuten vor und nach dem Durchgang der Sonne durch den Meridian. Sind diese 40 Minuten $= \frac{2}{3}$ einer Temporärstunde, so läßt sich der Zohr durch eine solche Temporärstundenlinie darstellen, deren Stundenwinkel dann $= \frac{2}{3} \cdot \frac{s_0}{6} = \frac{s_0}{9}$ wäre. Ob der Dohr oder Zohr als „l'instant le plus chaud de la journée" mit dieser Gebetszeit irgendwie zusammenhängt, vermögen wir nicht zu entscheiden.

Wir haben hier deshalb einige Details über die Gebetszeiten vorgebracht, weil man solche in der europäischen Literatur kaum findet. Und doch haben wissenschaftliche **Muedsins** (Gebetsrufer) darüber viel geschrieben und zweifellos sehr bequeme Methoden ersonnen, mittels deren die arabische Sonnenuhr jahrhundertelang Allah verherrlichen half.

---

[1]) C. **Schoy**: Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben, Leipzig, 1910, S. 11 ff.

## VI. Kapitel.

## Die arabischen Vertikaluhren.

Sie alle zeichnen sich durch einen Stylus aus, der **senkrecht** auf der Uhrebene steht und niemals zum Himmelspol gerichtet ist. Daß bei den Islamiten neben dem Gnomon auch der Polos, das ist ein zur Weltachse paralleler Sonnenweiser, konstruiert wurde, ist eine öfters ausgesprochene aber nicht bewiesene Behauptung.[1] Wir haben bei der Lektüre derjenigen arabischen Astronomen, deren Schriften in europäische Sprachen übersetzt sind, von **Al-Battâni** bis auf **Abul Hassan** keinen einzigen Polos gefunden. Und doch sollen nach R. **Wolf**[1] sich abendländische Schriftsteller dahin ausgesprochen haben, daß sie die Kenntnis des Polos den Arabern verdanken.[2] Wir sind jedoch mit Marie[3] der Meinung, daß das mohammedanische Volk aus religiösen Gründen nur einseitig Gnomone konstruierte. Bereits im 1. Kapitel dieser Abhandlung erwähnten wir, daß wir uns über diese Frage in unserem Aufsatz: „Die arabische Sonnenuhr in ihrer Bedeutung usw." S. 246 schon eingehend geäußert hätten. Wir haben daselbst ausgeführt, daß ein eigener Beamter am Minareh oder auf dem freien Platz, wo sich eine Bazithah befand, diese unausgesetzt zu bewachen und dann durch Ausruf den Moment bekannt zu geben hatte, wo der Schatten des senkrechten Zeigers auf die Qibla fiel. Dann wies aber auch der Körperschatten eines jeden Gläubigen ihm von selbst die Richtung zur Ka'ba, und die in diesem Falle so einfache Orientierung wird ihm, falls er sich fern von der Moschee im Felde befand, bei der Verrichtung seiner täglichen Gebete von Nutzen gewesen sein. Außerdem würde ein Polos, besonders in sehr **niedren Breiten** durch seine geringe Neigung zum Horizont unpraktisch geworden sein; ein vertikaler Stab schien dem Muselmann bei der Erfüllung seiner religiösen Pflichten am zweckdienlichsten.

Die Vertikaluhren waren auch dem Altertum nicht unbekannt, und die Araber haben hinsichtlich derselben verschiedene Vorschriften von den Griechen übernommen. Die Gnonomik **Al-Battânis** weist jedoch nichts derartiges auf, erst bei **Ibn Jûnis** erfahren wir interessante Details. Alle gnomonischen Fragen an den Vertikaluhren, deren Ebenen in den 4 Kardinalrichtungen liegen, löst er ausschließlich mit Hilfe des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks; seine eigenartige Bestimmung des Aṣr, deren wir bereits gedachten, wird uns nächstdem noch eingehend beschäftigen. Er sagt, daß noch niemand vor ihm von einer solchen Behandlung der Vertikaluhren gesprochen habe. Zuletzt (Cap XXVI seiner Hakimitischen Tafeln, Vgl. **Delambre** a. a. O. pag. 129—131) gibt er noch Vorschriften für einen Vertikalcadran, dessen Deklination (Abweichung vom Meridian) bekannt ist.

Aber erst bei **Abul Hassan** treffen wir auch in dieser Hinsicht wiederum die nötigen Ausführlichkeit. Er behandelt gleichmäßig

1) Vertikale in der Meridianebene,
2) Solche über der Ost-Westlinie,
3) Von den Kardinalrichtungen um irgend ein Azimut $\alpha$ (Deklination) **abweichende** Vertikale (französ. Déclinants),
4) Zum Horizont inklinierende und zu den Kardinalrichtungen deklinierende Uhrebenen, wobei jedoch der Gnomon eine dem Horizont parallele Richtung hat.

Diese Gruppe von Sonnenuhren ist auch in modernen wissenschaftlichen Werken über Gnonomik schon behandelt worden. Man findet darüber näheres bei J. J. **von Littrow**: Gnomonik, 2. Aufl., Wien, 1838 (pag. 54 ff.) und bei J. **Mollet**: Gnomonique graphique, 7. Aufl., Paris 1884 (pag. 16 ff.). Allein

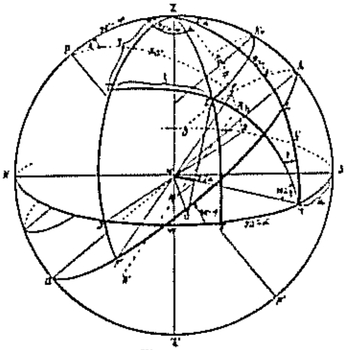
---

[1] Vergl. dazu: R. **Wolf**: Geschichte der Astronomie, München, 1877 pag. 149, sowie Handbuch der Astronomie, Zürich 1891—93, II. Bd., pag. 429, und auch: J. **Drecker**: Gnomone und Sonnenuhren, Aachen, 1909 S. 21.

[2] Möglich ist ja, daß die Araber den Polos wohl kannten, sowie ihnen schon von **Al-Battâni** ab die aequinoktialen Stunden bekannt waren, ohne daß sie sich ihrer bedienten. (Vergl. Opus astronom. I, p. 29 und 95) daß auch **Ibn Jûnis** mit den gleichen Stunden Bescheid wußte, folgt aus J. J. **Sédillot**: Traité usw. pag. 247. Nach R. **Wolf**: Geschichte der Astronomie, pag. 5, sollen schon die Chaldäer, Babylonier und Griechen die gleichen Stunden gekannt haben, doch sind seine Angaben ohne Quellennachweis und deshalb fast wertlos.

[3] Vgl. **Marie**: Histoire des sciences mathématiques et physiques (II. Vol. pag. 141).

wir vermissen sowohl eine durchsichtige Ableitung als auch — was in diesem Fall nicht unwesentlich ist — eine anschauliche Zeichnung. Wir wollen deshalb im folgenden eine neue Theorie der Vertikaluhren vortragen, die von den angedeuteten Mängeln frei ist. Voraussetzung ist für uns dabei, daß der Zeiger senkrecht auf dem Zifferblatt steht, da wir ja eine **arabische** Gnomonik schreiben. In allen anderen Werken ist solche Voraussetzung nicht gemacht.



Figur 9.

Zuerst entwickeln wir die Theorie des Déclinants, aus der sich dann die Formeln für die Vertikaluhren über den Kardinalrichtungen sehr einfach ergeben. Wir beziehen uns dabei auf die sehr anschauliche Figur 9, welche Herr Geheimrat Martus in **Halensee** vor 2 Jahren für den Verfasser zeichnete.[1])

a) Die Abbildung des Himmelsaequators auf dem Zifferblatt.

Das Zifferblatt dieser Uhr ist in der Ebene $D\,Z\,D'\,Z'$ enthalten, welche von der Aequinoctiale um den Winkel $\alpha$ abweicht. Der Gnomon $JM$ ist horizontal nach dem Punkte $G$ gerichtet. ($\sphericalangle\, S M G = \alpha$). Die Schnittlinie des Horizontes mit dem Déclinant ist $D\,D'$, über ihr steigt der Durchschnitt mit der Aequatorebene $F F'$ ostwärts an zu der Höhe $h$, welche sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $F\,D\,O$ mittels der Formel

$$tang\, h = sin\, \alpha\, .\, cotg\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

findet. Das nach Süden gewandte Zifferblatt dieser Sonnenuhr wird von der Sonne beschienen erst $t$ Stunden vor dem Mittagsaugenblicke $\left(t = \frac{s}{15}\right)$. Diese Zeit $t$ ergibt sich aus dem Dreieck $P\,Z\,F$ durch den Sinussatz zu

$$sin\, s = cos\, \alpha\, .\, cos\, h \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Um diese Zeit läuft der Schatten des Zeigers $MJ = q$ auf $MF'$ hin ins Unendliche. Wenn die Sonne das Azimut $\alpha$ hat, also in $L$ steht, kommt der Strahl $L\,M$ herab aus der Höhe $h'$, die aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $L\,G\,W$ hervorgeht durch

$$tang\, h' = cos\, \alpha\, .\, cotg\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

Der Schatten des Gnomons geht in diesem Augenblick senkrecht herab, also rechtwinklig gegen die Wagerechte $D\,D'$ und wird begrenzt von dem durch seine Spitze $J$ gehenden Sonnenstrahl, welcher parallel $L\,M$ ist. Also ist

$$\sphericalangle\, M J K = \sphericalangle\, L M J = h' \text{ (Wechselwinkel)}$$

Daher die Schattenlänge

$$M K = q\, .\, tang\, h' = q\, .\, cos\, \alpha\, .\, cotg\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

In der durch $K$ parallel mit $F F'$ gehenden Graden liegen zur Zeit der **Aequinoctien** die Endpunkte aller Schatten. Soviel zur Ablotung des Himmelsaequators.

b) Abbildung eines beliebigen Sonnenparallels.

Wir lösen jetzt die allgemeinere Aufgabe, die Schattenlinien des Zeigers für eine beliebige Stunde bei beliebiger Sonnendeklination zu finden. Es seien also gegeben: $s$, $\delta$, $\varphi$ und $\alpha$; gesucht sind Schattenrichtung und Schattenlänge, die der Stylus $q$ auf der Uhrebene des Déclinants verzeichnet. Zuerst wollen wir jedoch auch für diesen Fall Eintritt und Dauer der Besonnung eines solchen Zifferblattes berechnen. Wenn das Azimut des Stylus $= \alpha$ ist, so hat die Uhrebene das Azimut $\alpha_1 = 90° - \alpha$ (auf der Ostseite). Die Sonne möge beim Stundenwinkel $s$ $\left(t = \frac{s}{15}\right)$ dies Azimut erreichen. Dann ergibt sich $s$ aus der Gleichung:

$$sin\, \varphi\, .\, cos\, s = cos\, \varphi\, .\, tang\, \delta + sin\, s\, .\, cotg\, \alpha_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{V)}$$

---

[1]) Seit 9. September 1912 haben wir den Heimgang dieses ausgezeichneten Gelehrten zu beklagen.

Sie ist quadratisch, und die Auflösung nach *cos s* liefert die Wurzelwerte

$$\cos s = \frac{\sin\varphi \, . \cos\varphi \, . \operatorname{tang}\delta}{\sin^2\varphi + \operatorname{tang}^2\alpha} \pm \frac{\operatorname{tang}\alpha \, . \sqrt{\sin^2\varphi + \operatorname{tang}^2\alpha - \cos^2\varphi \, . \operatorname{tang}^2\delta}}{\sin^2\varphi + \operatorname{tang}^2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad \text{VI}),$$

wenn man in V) $\alpha_1$ durch $90^\circ - \alpha$, d. h. $\operatorname{cotg}\alpha_1$ durch $\operatorname{tang}\alpha$ ersetzt. Dabei entspricht das obere Vorzeichen offenbar dem Beginn, das untere dem Ende der Beleuchtung dieses Zifferblattes durch die Sonne. Die Dauer der Besonnung wird gefunden aus der Formel

$$s_1 - s_2 = \operatorname{arc\,cos}\left[\frac{\frac{1}{2}\sin 2\varphi \, . \operatorname{tang}\delta - \operatorname{tang}\alpha \, . \sqrt{\sin^2\varphi + \operatorname{tang}^2\alpha - \cos^2\varphi \, . \operatorname{tang}^2\delta}}{\sin^2\varphi + \operatorname{tang}^2\alpha}\right] -$$

$$\operatorname{arc\,cos}\left[\frac{\frac{1}{2}\sin 2\varphi \, . \operatorname{tang}\delta + \operatorname{tang}\alpha \, . \sqrt{\sin^2\varphi + \operatorname{tang}^2\alpha - \cos^2\varphi \, . \operatorname{tang}^2\delta}}{\sin^2\varphi + \operatorname{tang}^2\alpha}\right] \quad \ldots\ldots \quad \text{VII}),$$

die sich unter Anwendung des Additionstheorems für cyklometrische Funktionen nicht vereinfacht.

Der unseren Voraussetzungen entsprechende Sonnenort sei $\Sigma$. Von ihm sendet die Sonne einen Strahl herab, der, die Spitze des Gnomons in $J$ durchsetzend, in $U$ auf das Zifferblatt aufstößt. Nehmen wir $D\,D'$ und $Z\,Z'$ als Koordinatenachsen, und zwar $D\,D'$ als $X$-Achse, $Z\,Z'$ als $Y$-Achse, so ist die Richtung, welche die Stundenlinie $M\,U$ mit der $Y$-Achse bildet, $= \sphericalangle\, U M Z' = \eta$. Die Ebene der Uhr steht senkrecht auf der Gnomonsrichtung $M\,G$; $G$ ist also Pol des Zifferblattes der Uhr, und alle Großkreisbögen, die man von $G$ nach der Peripherie $Z'\,F\,D'\,Z$ dieser Ebene zieht, stehen senkrecht auf ihr, wie die Meridiane der Erdkugel auf dem Aequator. Ein solcher Vertikalkreis ziehe von $G$ durch den Sonnenort $\Sigma$ und treffe die Ebene des Déclinants in $T$. Dann ist Bogen $T\,Z = \eta$. Die Länge $M\,U$ des Schattens ist abhängig von der Erhebung der Sonne über die Uhrebene. Sie ist $=$ Bogen $T\,\Sigma = \xi$. Diese zwei Größen gilt es also in den bekannten Stücken $\alpha$, $\delta$, $\varphi$ und $s$ auszudrücken. Ist z. B. $\eta$ gefunden, so zieht man auf dem zu konstruierenden Zifferblatt einen Strahl durch $M$ unter eben diesem Winkel $\eta$ zur $Y$-Achse und trägt auf ihm die Schattenlänge $M\,U = q \, . \operatorname{cotg}\xi$ ab, womit ein Punkt $U$ der Schattenkurve gefunden ist. Setzt man für $s$ der Reihe nach 0°, 15°, 30° usw., so repräsentieren die entsprechenden $M\,U$, $M\,U_1$, $M\,U_2$ usw. die Stundenlinien. Der Vertikalkreis vom Zenit durch $\Sigma$ trifft den Horizont in V, und es werde Bogen $G\,V$ mit $\Delta\alpha$ bezeichnet. Aus dem bei $T$ rechtwinkligen sphärischen Dreieck $T\,Z\,\Sigma$ folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sin\xi &= \cos h \, . \cos\Delta\alpha \\ \cos\xi \, . \cos\eta &= \sin h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{VIII})$$

Die Anwendung des Sinus- und Kosinussatzes auf das Zenitpolsonne-Dreieck ergibt die 2 weiteren Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\delta}{\cos h} &= \frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin s} \\ \sin h &= \sin\delta \, . \sin\varphi + \cos\delta \, . \cos\varphi \, . \cos s \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IX})$$

Zur Berechnung von $\xi$ entwickeln wir erst $\text{IX}_1$):

$$\frac{\cos\delta}{\cos h} = \frac{\sin\alpha \, . \cos\Delta\alpha + \cos\alpha \, . \sin\Delta\alpha}{\sin s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{X})$$

Aus $\text{VIII}_1$) folgt:

$$\cos\Delta\alpha = \frac{\sin\xi}{\cos h}; \qquad \sin\Delta\alpha = \frac{\sqrt{\cos^2 h - \sin^2\xi}}{\cos h}$$

Setzt man diese Werte in X) rechter Hand ein, so wird

$$\cos\delta = \frac{\sin\alpha \, . \sin\xi + \cos\alpha \, . \sqrt{\cos^2 h - \sin^2\xi}}{\sin s}$$

Um hieraus $\cos^2 h$ zu eliminieren, benützen wir $\text{IX}_2$), aus welcher man zieht:

$$\cos^2 h = 1 - (\sin\delta \, . \sin\varphi + \cos\delta \, . \cos\varphi \, . \cos s)^2$$

Die Schlußgleichung zur Errechnung der Unbekannten $\xi$ ist demnach diese:

$$\sin s \, . \cos\delta = \sin\alpha \, ; \sin\xi + \cos\alpha \, . \sqrt{\cos^2\xi - (\sin\delta \, . \sin\varphi + \cos\delta \, . \cos\varphi \, . \cos s)^2}$$

Man findet hieraus

$$\sin\xi = \sin\alpha \,.\, \sin s \,.\, \cos\delta \pm \cos\alpha \,.\, \sqrt{1 + (\sin\delta \,.\, \sin\varphi + \cos\delta \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos s)^2 - \sin^2 s \,.\, \cos^2\delta} \quad \ldots \text{XI)}$$

Mit der Kenntnis von $\xi$ wird man dann leicht aus VIII$_2$) $\eta$ berechnen.

Um auch die Natur der Schattenkurve zu ermitteln, auf welcher $U$ liegt, gehe man von den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi \,.\, \cos s &= \cos\varphi \,.\, \mathrm{tang}\,\delta + \sin s \,.\, \mathrm{cotg}\,(\alpha + \Delta\alpha) \\ \sin s &= \frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha) \,.\, \cos h}{\cos\delta} \\ \cos s &= \frac{\cos\eta \,.\, \cos\xi - \sin\delta \,.\, \sin\varphi}{\cos\delta \,.\, \cos\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{XII)}$$

aus, deren letzte aus der Verbindung von VIII$_2$) mit IX$_2$) hervorgeht. Da die Schattenlinie für alle Stunden des Tages gilt, so ist ihre Gleichung das Resultat der Elimination von $s$ aus XII). Das gibt:

$$\sin\varphi \,.\, \frac{\cos\eta \,.\, \cos\xi - \sin\delta \,.\, \sin\varphi}{\cos\delta \,.\, \cos\varphi} = \cos\varphi \,.\, \mathrm{tang}\,\delta + \frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha) \,.\, \cos h}{\cos\delta} \,.\, \mathrm{cotg}\,(\alpha + \Delta\alpha) \quad \ldots \text{XIII)}$$

Aus der Figur liest man ohne Weiteres ab:

$$\mathrm{tang}\,\Delta\alpha = \frac{x}{q}\,,$$

woraus sich ergibt

$$\sin\Delta\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + q^2}}\,; \qquad \cos\Delta\alpha = \frac{q}{\sqrt{x^2 + q^2}}\,.$$

Ebenso ersieht man, daß

$$\cos\eta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,; \qquad \cos\xi = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + q^2}}$$

ist. Aus

$$\cos h = \frac{\sin\xi}{\cos\Delta\alpha}$$

findet sich

$$\cos h = \sqrt{\frac{x^2 + q^2}{x^2 + y^2 + q^2}}$$

Entwickelt man jetzt XIII) und ersetzt darin $\sin\Delta\alpha$, $\cos\Delta\alpha$, $\cos\eta$, $\cos\xi$ und $\cos h$ durch die eben gefundenen Werte, so folgt

$$\sin\varphi \,.\, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \,.\, \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + q^2}} = \sin\delta \,.\, \sin^2\varphi + \sin\delta \,.\, \cos^2\varphi + \cos\varphi \left[\frac{q \,.\, \cos\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x \,.\, \sin\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right] . \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + q^2}}$$

oder vereinfacht

$$\frac{y \,.\, \sin\varphi}{\sqrt{x^2 + y^2 + q^2}} = \sin\delta + \frac{q \,.\, \cos\alpha - x \,.\, \sin\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + q^2}} \,.\, \cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{XIV)}$$

Durch Quadrieren und Beseitigen der Nenner geht XIV) über in die Kegelschnittsgleichung

$$y^2 (\sin^2\varphi - \sin^2\delta) + x^2 (\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\varphi - \sin^2\delta) + x \,.\, y \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin 2\varphi - x \,.\, q \,.\, \cos^2\varphi \,.\, \sin 2\alpha - y \,.\, q \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin 2\varphi$$
$$+ q^2 \,.\, (\cos^2\alpha \,.\, \cos^2\varphi - \sin^2\delta) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{XV)}$$

Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem, wie aus der analytischen Geometrie bekannt.

$\Delta = (\sin^2\varphi - \sin^2\delta) \,.\, (\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\varphi - \sin^2\delta) - \sin^2\varphi \cos^2\varphi \,.\, \sin^2\alpha \gtrless 0$ ist, ein Ausdruck, der sich auch so schreiben läßt

$$\Delta = \sin^2\delta \left[\sin^2\delta - \sin^2\varphi\,(1 + \sin^2\alpha \,.\, \mathrm{cotg}^2\varphi)\right]$$

$\Delta$ kann, falls $\alpha$ sehr klein ist, $> 0$ sein unter der Bedingung, daß $\delta > \varphi$ ist. Es ist also die Schattenkurve nur in der heißen Zone eine Ellipse und auch dort nur für sehr schwach deklinierende Vertikaluhren, in der gemäßigten Zone ist sie stets eine Hyperbel.

Auf die Frage nach der Lage der Hauptachsen des durch XV) ausgedrückten Kegelschnitts gibt die Formel

$$tang\, 2\, \psi = \frac{sin\, \alpha \,.\, sin\, 2\, \varphi}{sin^2\, \alpha \,.\, cos^2\, \varphi - sin^2\, \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{XVI)}$$

näheren Aufschluß. Dabei bedeutet $\psi$ den Winkel, welchen die Hauptachsen mit unseren eingangs definierten Koordinatenachsen bilden. Man erkennt aus XVI), daß im allgemeinen ein mit der geographischen Breite wachsender Richtungsunterschied zwischen den Hauptachsen und den Koordinatenachsen vorhanden ist. $\psi$ ist $= 0$, wenn entweder

$\varphi = 0$ ist oder
$\alpha = 0$ angenommen wird (Ost-West-Vertikal)

Für $\alpha = 90°$ findet man

$$tang\, 2\, \psi = \frac{sin\, 2\, \varphi}{cos^2\, \varphi - sin^2\, \varphi} = \frac{sin\, 2\, \varphi}{cos\, 2\, \varphi} = tang\, 2\, \varphi \;,$$

$\psi = \varphi$ (Nord-Süd-Vertikal).

### Spezialfälle beim Déclinant:

1) Für $\delta = 0$ erhalten wir die Gleichung des Aequatorbildes. Man findet aus XIV) sofort:

$$y \,.\, sin\, \varphi = q \,.\, cos\, \alpha \,.\, cos\, \varphi - x \,.\, sin\, \alpha \,.\, cos\, \varphi \;,$$

d. i. die Gleichung der Geraden $R\,R'$, die also nicht durch den Koordinatenanfangspunkt geht, sondern die $Y$-Achse im Abstande $MK$ von $M$ durchsetzt. Für $x = 0$ folgt

$$y = MK = q \,.\, cos\, \alpha \,.\, cotg\, \varphi \;,$$

ein Resultat, welches wir bereits in IV), freilich auf ganz anderem Wege gefunden hatten.

2) Für $\alpha = 0$ gibt XV:

$$y^2\, (sin^2\, \varphi - sin^2\, \delta) - x^2\, sin^2\, \delta - y \,.\, q \,.\, sin\, 2\, \varphi + q^2\, (cos^2\, \varphi - sin^2\, \delta) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{XVII)}$$

Uns interessiert hier vor allem der Nord-Süd-Vertikal, für den also

3) $\alpha = 90°$ ist.

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung XV) gibt für diesen Fall

$$y^2\, (sin^2\, \varphi - sin^2\, \delta) - x^2 \,.\, sin^2\, \delta - y \,.\, q \,.\, sin\, 2\, \varphi + q^2\, (cos^2\, \varphi - sin^2\, \delta) = 0 \quad \ldots\ldots \text{XVIII)}$$

Dreht man die Achsen des durch XVIII) dargestellten Kegelschnittes um den Winkel $\varphi$, d. h. ersetzt $x$ durch: $y \,.\, sin\, \varphi + x \,.\, cos\, \varphi$ und $y$ durch: $y \,.\, cos\, \varphi - x \,.\, sin\, \varphi$, so erhält man ohne Schwierigkeit die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{q^2\, tang^2\, \delta} - \frac{y^2}{q^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{XIX)}$$

deren Halbachsen also $q \,.\, tang\, \delta$ und $q$ sind.

Wie schon erwähnt hatte Ibn Jûnis zur Bestimmung des Aṣr diesen Cadran erwählt. Nach den Festsetzungen des berühmten Astronomen begann das Aṣr bei Gleichheit von Stäbchen- und Schattenlänge. Damit diese Bedingung eintritt, muß $\xi = 45°$ sein. Aus Gleichung XI) folgt dann für den Beginn des Aṣr:

$$sin\, s = \frac{sin\; 45°}{cos\, \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{XX)}$$

Wie man sofort sieht, ist der Stundenwinkel $s$ von der Breite $\varphi$ unabhängig; alle Orte unter demselben Meridian haben zu gleicher Zeit Aṣr.

Freilich läßt sich das Ende des Aṣr nicht auf den Eintritt der doppelten Schattenlänge festsetzen, wie dies bei der Bazithah möglich war; denn man fände für diesen Zeitpunkt

$$sin\, s_1 \;\text{oder}\; sin\, (180° - s_1) = \frac{1}{cos\, \delta \,.\, \sqrt{5}} \;,$$

woraus folgt, daß das Ende des Aṣr entweder vor dessen Beginn erreicht würde, oder aber, da $s_1$ ein spitzer Winkel ist, erst nach 6 Uhr nachmittags eintreten müßte. Wahrscheinlich dauerte das Aṣr bis Sonnenuntergang.

Delambre (a. a. O. p. 181) teilt uns mit, daß Ibn Jûnis bereits eine Tafel erstellt habe, welche für alle Sonnenlängen des ganzen Jahres von Grad zu Grad den Stundenwinkel $s$ angibt, der dem Beginn des Aṣr entspricht. Nach den von Delambre vorgenommenen Stichproben ist die Tafel äußerst exakt.

Wie Formel XX) lehrt, ist $s$ für $\delta = 0$ gerade 45°, also $t = 3^h$. An allen anderen Tagen ist $t > 3^h$, da der $\cos(\pm \delta) < 1$ ist. Für $\delta = \varepsilon = 23° 30'$ findet sich $t = 3^h 20^m$. Der Beginn des Aṣr nach Ibn Jûnis liegt mithin innerhalb eines Intervalls von 20 Zeitminuten nach aequinoktialem Stundenmaß. - Die dritte Temporärstundenlinie durchschneidet die Ost-Westlinie (Aequinoktiale, $\delta = 0°$) beim Stundenwinkel $s = 45°$. Für die Breiten des mohammedanischen Reiches ($\varphi = 20° - 30°$) entfernt sich besagte Stundenlinie ungefähr um denselben Betrag von $t = 3^h$, wenn man $\delta$ bis $23^1/_2°$ wachsen läßt, wie das von Ibn Jûnis inaugurierte Aṣr. Es liegt deshalb die Vermutung nahe, daß Ibn Jûnis mittels der Formel XX) einen das ganze Jahr möglichst konstanten Augenblick in temporärem Zeitmaß fixieren wollte.

Ein Vergleich mit den Aṣr-Linien der verschiedenen Bazithas lehrt, daß das Aṣr nach Ibn Jûnis für $\varphi = 0°$ mit demjenigen der Imâme Mâleh und Hambeleh sich sehr gut deckt; für höhere Breiten dagegen das letztere stets später eintritt als das erstere.

## VII. Kapitel.

## Konstruktion arabischer Cylinder- und Kugeluhren.

Nach Delambre (a. a. O., pag. 522) findet sich vor Abul Hassan nichts derartiges in der arabischen Gnomonik. Ja, Abul Hassan ist sogar der Meinung, daß niemand vor ihm jemals eine Sonnenuhr auf krummer Oberfläche entworfen habe, aber Delambre entgegnet hierauf: „ . . . il est bien mal informé, ou il ne parle que des Arabes; car sans parler de Bérose, ni d'Aristarque de Samos, nous avons dans Vitruve et Stuart, la preuve qu'on avait fait des cadrans de toute espèce“. Zu bemerken ist, daß der Marokkaner sowohl auf die konvexe als konkave Oberfläche von Cylinder, Kegel und Kugel die Schattenlinien des Gnomons verzeichnet, welcher bei vertikal stehendem Cylinder und Kegel horizontal gerichtet ist, bei der Verzeichnung der Stundenlinien auf der konvexen Außenseite einer Halbkugel auf der Uhrfläche senkrecht steht, niemals aber die Richtung der Weltachse hat. Wir greifen aus den vielen Fällen, welche Abul Hassan behandelt, zwei heraus, nämlich

1) Eine Sonnenuhr auf dem konvexen Mantel eines vertikal stehenden Cylinders zu konstruieren,

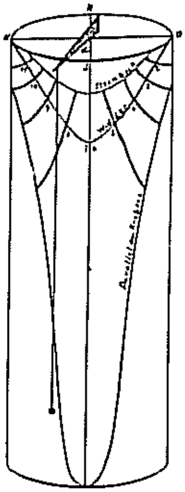
2) Dieselbe Konstruktion auf der Innenfläche einer Halbkugel auszuführen.

Sämtliche anderen Möglichkeiten weisen nur unwesentliche Unterschiede von den zwei vorstehenden Fällen auf.

Zur Konstruktion einer solchen Cylinderuhr, wie sie unter 1) angeführt ist, gibt Hassan folgende merkwürdigen Vorschriften:

Man entnehme für den Wendekreis des Krebses die Länge der Vertikalschatten, die man bei gegebener Ortsbreite und Gnomonshöhe — diese letztere betrug immer 12 Finger — berechnet hat, einer Tabelle und trage sie vom oberen Rande des Cylinders auf dessen Mantellinien nach unten ab. Zuvor aber sind die Deckkreise des Cylinders in 360 Grade eingeteilt. Die Zählung dieser Grade beginnt beim Südpunkt, so daß die fortschreitende Gradzahl gleichzeitig mit dem Azimut ($a$) der Sonne indentisch ist. Durch Verbindung gleicher Azimute erhält man auf dem Cylinder die eben besagten Mantellinien. Man hat also zu einem gegebenen Stundenwinkel erst das Azimut der Sonne zu bestimmen, vielmehr aus Azimuttabellen zu entnehmen und die Vertikalschattenlänge dem ihr entsprechenden Azimut zuzuordnen. Tut man dies für alle 12 (temporären) Stunden des Tages, so erhält man in der Verbindung aller Schattenenden auf dem Cylinderumfang das Abbild des Wendekreises des Krebses. Auf ganz dieselbe Weise ermittelt man das Bild des Steinbocks und des Aequators, welches natürlich keine gerade Linie sein kann.

Die Abbildungen dieser 3 Kugelkreise auf den Cylindermantel bestehen zunächst aus 12 Stundenmarken. Eine Stundenlinie ist die Verbindung aller aequihorären Punkte der Projektionen sämtlicher



Figur 10.

Parallelkreise. Wie ist nun eine solche Stundenlinie auf der krummen Oberfläche konstruiert? Auf diese Frage ist bei **Hassan** nicht näher eingegangen. Bei ihm liegen auch nur 3 zu verbindende Punkte vor. Er hat selbsverständlich das Netz der Schattenlinien auf dem abgerollten Cylindermantel gezeichnet, und in seiner diesbezüglichen Figur erscheinen die temporären Stundenlinien als Gerade.

Zur Benützung dieser Uhr bringt man auf der Cylinderachse über der Deckfläche einen beweglichen Gnomon an, wie ihn Figur 10 zeigt. Er ragt um die Länge von 12 Fingern über den Rand der Deckfläche hervor. Ein Bleilot ist an dem horizontalen Zeiger so befestigt, daß es den Mantel des Cylinders entweder tangiert oder doch nur einen sehr geringen Abstand von demselben hat. Will man nun die Zeit wissen, so dreht man zunächst den Zeiger der Uhr so weit, bis sein Schatten mit dem Faden des Bleilotes zusammenfällt. Die Stundenmarke, auf welche das Ende des Schattens fällt, gibt die augenblickliche Zeit an, während man aus der Größe der Drehung gleichzeitig das Azimut der Sonne an dem genau nach den Kardinalrichtungen orientierten Cylinder ablesen kann.

Es ist von Interesse, nach der Gleichung der Schattenkurven auf den Cylindermantel zu fragen, welche die **Hassansche** Konstruktion entstehen läßt. Wir nehmen (s. Fig. 10) $\alpha$ als Polarwinkel, $Z$ sei die Vertikale im Raum, die wir von der oberen Deckfläche aus nehmen wollen. Dann soll $z$ in $\alpha$, $\delta$ und $\varphi$ ausgedrückt werden. Hält man $\delta$ und $\varphi$ konstant, so bleibt die eine unabhängige Variable $\alpha$. Das liefert die Gleichung für die Abbildung eines Sonnenparallels auf den Zylindermantel. Durch Variation von $\delta$ erhält man das Netz aller Schattenlinien. Zunächst ist

$$z = q \,.\, tang\, h \dots\dots\dots\dots \quad \text{I)}$$

$$-\sin\varphi \,.\, \cos\alpha = \cos\varphi \,.\, tang\, h - \sin\alpha \,.\, colg\, s \dots\dots\dots\dots \quad \text{II)}$$

$$\sin\varphi \,.\, \cos s = \cos\varphi \,.\, tang\, \delta + \sin s \,.\, colg\, \alpha \dots\dots\dots\dots \quad \text{III)}$$

Aus II) folgt

$$colg\, s = \frac{\sin\varphi \,.\, \cos\alpha + \cos\varphi \,.\, tang\, h}{\sin\alpha}$$

Setzt man diesen Wert für *colg s* in III) ein, nachdem man erst mit *sin s* links und rechts durchdividiert hat, so findet sich die folgende quadratische Gleichung in *tang h*:

$$\sin\varphi \,.\, \frac{\cos\varphi \,.\, tang\, h + \sin\varphi \,.\, \cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\varphi \,.\, tang\, \delta \,.\, \sqrt{1 + \frac{(\cos\varphi \,.\, tang\, h + \sin\varphi \; \cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} + colg\, \alpha$$

Die Auflösung ergibt

$$tang\, h = -\frac{\cos\alpha \,.\, \sin 2\varphi \,.\, tang^2\delta}{\cos^2\varphi\, tang^2\delta - \sin^2\varphi} \pm \cos\alpha\, \frac{\sqrt{(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\, tang^2\delta)(\cos^2\varphi\, tang^2\delta - \sin^2\varphi) - \sin^2 2\varphi\, tang^2\delta}}{\cos^2\varphi \,.\, tang^2\delta - \sin^2\varphi}$$

Hierbei hat nur das positive Vorzeichen der Wurzel praktische Bedeutung. Dieser Ausdruck für *tang h* ist in I) einzusetzen, womit die Gleichung der räumlichen Schattenlinie auf dem Cylindermantel gefunden ist.

Was nun endlich die Kugeluhren anbelangt, die uns der marokkanische Gelehrte vorführt, so sind sie völlig identisch mit den sog. Hemicyklien und Skaphen der Alten, die nach **Bilfinger**[1]) bekanntlich den Zweck hatten, „die auffangende Fläche zum genauen Gegenbilde der Himmelshemisphäre, die Schattenwege zu genauen Abbildern der Sonnenwege zu machen. Es ist in Anbetracht dieser völligen Übereinstimmung zwischen antiken und arabischen Kugeluhren nicht anders denkbar, als daß Abul Hassan irgend welche griechischen Vorlagen gehabt haben muß.

---

[1]) **Bilfinger**: Die Zeitmesser der antiken Völker, Stuttgart, 1886, pag 27.

Diesen einfachen Grundgedanken bringt auch **Hassan** dadurch zum Ausdruck, daß er sich eine hohle Halbkugel erstellt, die im Nadirpunkte ihre feste Unterlage berührt, so daß ihr Grenzkreis mit dem Horizont des Ortes, für den die Uhr angefertigt werden soll, zusammenfällt. Vom Nadirpunkt steigt senkrecht der Gnomon auf, dessen Länge gleich dem Radius der Halbkugel ist. Denkt man sich jetzt die Halbkugel zur Vollkugel ergänzt, so kann man sie als Himmelsglobus auffassen und die Wendekreise mit dem Aequator einzeichnen, so wie diese 3 Kreise nach der gegebenen Ortsbreite liegen müssen. Läßt man dann alle Sonnenstrahlen, die das Stabende durchsetzen, bis auf die konkave Innenfläche der Halbkugel fallen, so erkennt man sofort, daß der Tagbogen der Sonne im Wendekreis des Krebses den Nachtbogen im Steinbock zum Abbild hat und umgekehrt. Diese Kreisbögen sind aber egal. Die zwei Schattenwege, Krebs und Steinbock, werden hierauf in 12 gleiche Teile geteilt und die einzelnen Teilpunkte durch Bogen größter Kreise miteinander verbunden. Dies sind die Stundenlinien. Wie man sieht, sind sie ebensowenig exakt, als jene Geraden, welche an der Bazithah aequihoräre Punkte der Krebs- und Steinbockshyperbel verbinden.

Wenn wir uns auf das sphärische Koordinatensystem Azimut-Höhe beziehen, ist es leicht, die Gleichung einer Stundenlinie auf der Kugeluhr anzugeben. Aus

$$-\sin\varphi\,.\cos\alpha = \cos\varphi\,.\,\mathrm{tang}\,h - \sin\alpha\,.\,\mathrm{cotg}\,s$$

folgt

$$\mathrm{tang}\,h = \frac{\sin\alpha\,.\,\mathrm{cotg}\,\frac{m}{n}\,.\,s_0 - \sin\varphi\,.\cos\alpha}{\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

Bildet man aus den im III. Kapitel, pag. 19 angegebenen Ausdrücken für $\sin\frac{m}{n}s_0$ und $\cos\frac{m}{n}s_0$ durch Division $\mathrm{cotg}\,\frac{m}{n}s_0$, und setzt den so erhaltenen Quotienten für $\mathrm{cotg}\,\frac{m}{n}s_0$ in die Gleichung IV) ein, so hat man schon die gewünschte Beziehung $\alpha$, $h$, $\delta$ und $\varphi$, welche wir aber wegen ihrer Kompliciertheit hier nicht anschreiben wollen.

Indem L. Am. **Sédillot** in seinen schon erwähnten Mémoiren, die er den Instrumenten der arabischen Astronomie widmet, besonders die Kugeluhren studierte, fand er, daß sie außer den temporären Stundenlinien auch noch aufweisen

1) Die Linie des Dohr,
2) Die Linie des Aṣr,
3) Die Linie des Morgenrots (Fadschr),
4) Die Linie der Abenddämmerung (Maghrib).

Die Linie des wahren Mittags heißt **Zaual**. Wir erwähnen noch, daß **Abul Hassan** auf jeder Art von Sonnenuhr das Aṣr angibt, natürlich so, daß sein Eintritt und Ende mit dem der Bazithah zusammenfällt. Alle Uhren zeigen daher zur gleichen Zeit Aṣr.

## Schlußbemerkung.

Zum Abschluß unserer Studie über die Gnomonik der Araber möchten wir die wichtigsten Ergebnisse derselben in Kürze folgendermaßen formulieren:

1) Die Entwicklung der arabischen Gnomonik ist vorzüglich durch religiöse Gebräuche bestimmt.
2) Der Zeiger oder Gnomon der Uhrfläche ist entweder horizontal oder vertikal, niemals aber zum Pol gerichtet.
3) In der Behandlung gnomonischer Fragen spielt das graphisch-konstruktive Element eine Hauptrolle.
4) Überträgt man die geometrischen Methoden der arabischen Astronomen in die Sprache der modernen Mathematik, so treten verwickelte Formeln auf, für die sich jedoch Parameterdarstellungen finden lassen.

# Arabische Gnomonik

Aus d. Archiv d. Deutschen Seewarte 1913, Nr. 1

Fig. 2

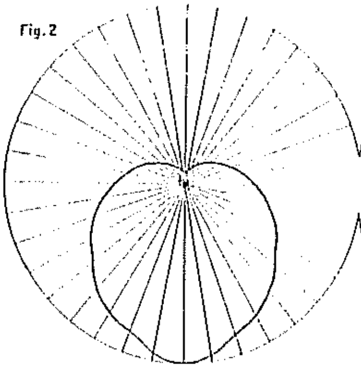


Fig. 1

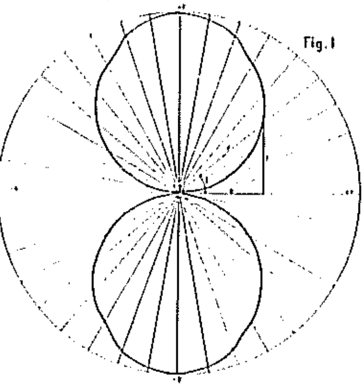


Fig. 3

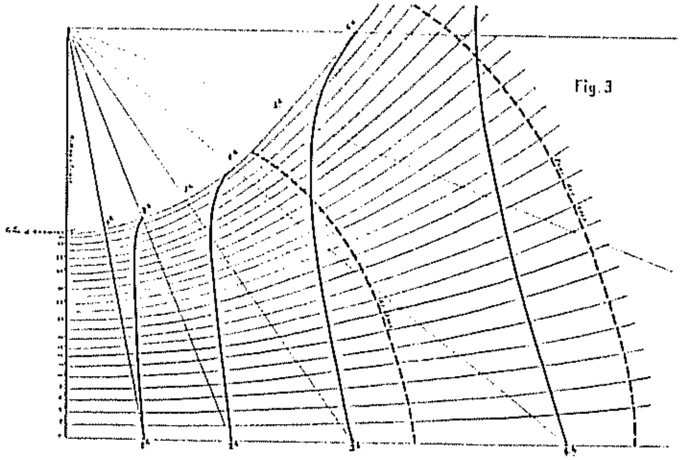
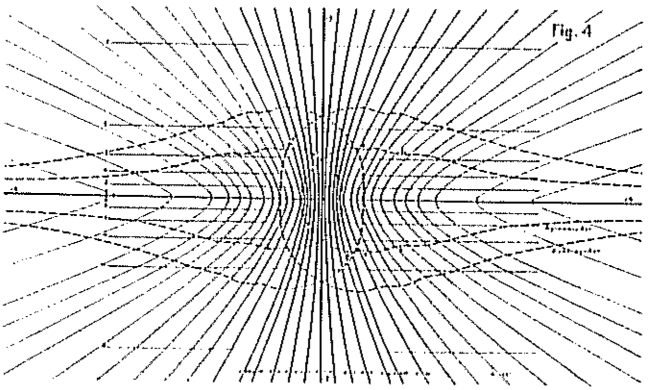


Fig. 4



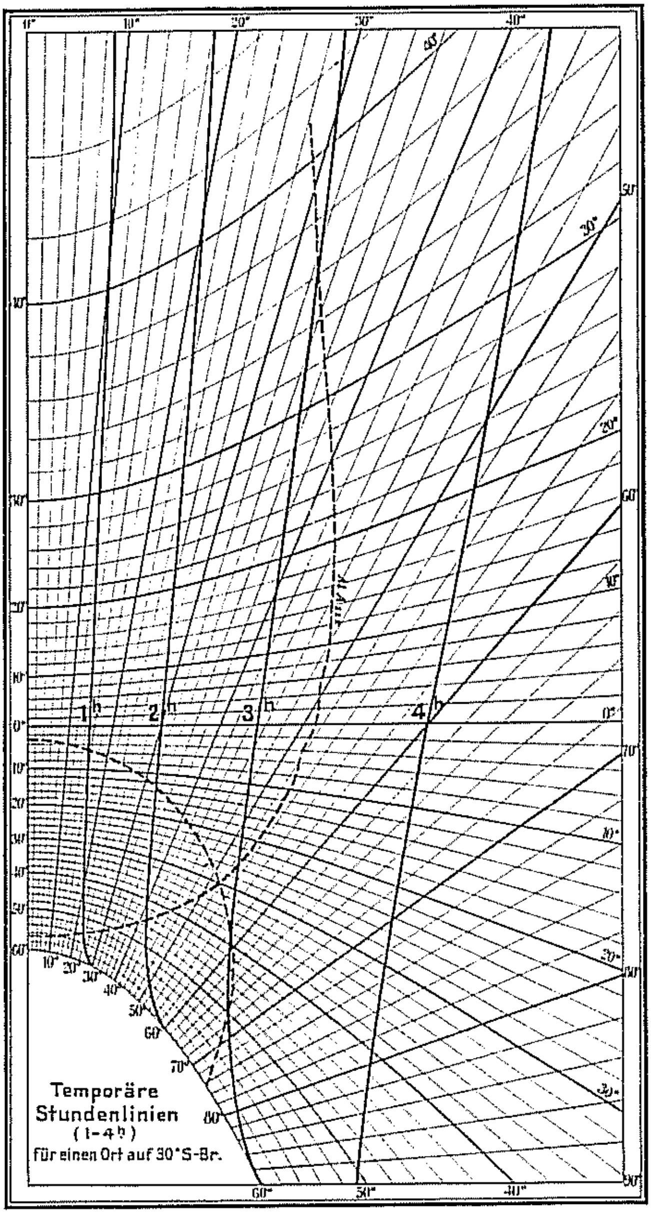
Tafel I

A.d.Archiv d.Deutsch.Seew.1913.Nr.1

Tafel 2

C. Schoy:

# Arabische Gnomonik



**Temporäre Stundenlinien (1–4ʰ)**

für einen Ort auf 30° S-Br.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift.

Neue Folge 14. Band; der ganzen Reihe 30. Band. | Sonntag, den 4. April 1915. | Nummer 14.

# Geschichtlich-astronomische Studien über die Dämmerung.

Von Dr. Dr. C. Schoy.

Mit 1 Abbildung.

## I.

Je mehr die Ägyptologen, Assyriologen und anderen Orientalisten das Dunkel zu entschleiern vermögen, das insbesondere noch über den einstigen Kulturvölkern des Euphrat und Nil lagert, desto deutlicher wird uns die hervorragende Bedeutung, die sie den täglichen und jährlichen Erscheinungen des Himmels beimaßen. Diese frühzeitige Ausbildung der Astronomie und Chronologie konnte freilich nur in südlicheren Breiten erfolgen, wo der Himmel klarer und ausdrucksvoller ist als bei uns. So leiteten auch die Griechen die Herkunft ihrer Sternkunde aus dem Süden ab. Alle Besucher des Niltales preisen begeistert die nächtliche Schönheit des ägyptischen Himmels, so Parthey,[1]) der nach der Schilderung des Mondglanzes in Nubien fortfährt: „Einen noch erhebenderen Eindruck macht in den mondlosen Nächten die unbeschreibliche Fülle des gestirnten Himmels; aber das Wort ist unzureichend für einen Anblick, der nur gefühlt, nur mit den innersten Tiefen der Seele ergriffen werden kann. Unmittelbar nach Sonnenuntergang fangen am östlichen Himmel die Sterne an zu funkeln, und je tiefer die Nacht herabsinkt, desto unzähibarer dringen die goldenen Lichter am hohen Gewölbe hervor, daß das erstaunte Auge nicht aufhört, eine Stelle nach der andern genau zu durchmustern, und der nachstrebende Geist sich versenkt in den unendlichen Reichtum der überall hervorquellenden Welten. Wohl erscheint dem Deutschen der italische Sternhimmel von einer ungewöhnlichen Klarheit, doch sieht man ihn zumal am Horizont nie ganz frei von trüben Dünsten; hier, in der trockenen Wüste, ist dieser letzte Schleier hinweggehoben von der nächtlichen Herrlichkeit Gottes, und man schaut sie in unverhüllter Schönheit, soweit dem unbewaffneten Auge vorzudringen möglich ist . . ."

Wir wissen auch, daß es nur den Bewohnern tropischer und subtropischer Himmelsstriche vergönnt ist, jenes reizvolle Vor- und Nachspiel zur Morgen- und Abenddämmerung in seiner ganzen Schönheit genießen zu können, das in der astronomischen Wissenschaft das Zodiakal- oder Tierkreislicht genannt wird. Es ist undenkbar, daß die besonders in der Astronomie so bewanderten alten Kulturvölker nicht auf dasselbe aufmerksam geworden sein sollten. Und in der Tat, wir haben heute bereits mehrere Belege, daß sie dasselbe wohl kannten. Außerordentlich geistreich in ihrer Idee muß entschieden die überzeugende Deduktion Hermann Grusons[1]) genannt werden, der da sagt, daß die pyramidale Gestalt des Tierkreislichtes — man sehe die zwei prachtvollen Farbentafeln und einige andere sehr sinnfällige Figuren in seinem Buche — den Ägyptern geradezu ein Vorwurf für ihre Pyramiden, Obelisken und gleichschenkligen Triangels war, welch letztere in allen Abbildungen das Haupt ihrer Lichtgötter schmücken. Die ägyptische Darstellung des Sonnenauf- und Untergangs, die sich auf einem sog. „Totenpapyrus" des Leydener Museums findet — vgl. deren Reproduktion auf Tafel VI und VII bei Gruson — spricht in dieser Hinsicht eine deutliche Sprache. Diese Gruson'sche Entdeckung von dem Zodiakallicht als Prototyp der Dreiecksgestalt bei den alten Pharaonen verhalf dem bekannten Ägyptologen H. Brugsch zur Entschleierung der wahren Bedeutung des auch in der Bibel vorkommenden Wortes Gosem. Nach dem koptischen Lexikon wurde es als Stadt der Dämmerung oder des Dreiecks gedeutet, was unter Beachtung der vor und nach der Dämmerung sich ausbreitenden Dreiecksgestalt des Zodiakallichtes mit seiner abgerundeten Spitze einen vollen und klaren Sinn erlangt. Noch mehr: „Das geheimnisvolle Dreieck der alten Ägypter, das uns bisher beschäftigt hat, dürfte vielleicht auch die Lösung eines Rätsels darbieten, das mit allgemein bekannten altjüdischen Vorstellungen über die symbolische Bedeutung eines Dreiecks zum Ausdruck des großen Jahwe oder Jehova im Zusammenhang steht . . . Sollte es gelingen, woran ich nicht zweifle, die Entstehung des Gottes-Dreiecks in eine etwas verhältnismäßig ältere Epoche zurückzuversetzen, so würde der Annahme nichts im Wege stehen, das Urbild desselben in dem Pyramidenlichte von Gosem wiederzuerkennen. Bei einem mehr als 400jährigen Aufenthalt der Kinder Israels gerade in dieser Provinz des alten Ägyptens konnte die Kenntnis und Bedeutung dieses Dreiecks nicht spurlos an ihnen vorübergehen." (Gruson a. a. O. S. 254).

Nach der lebendigen Schilderung dieser „lieblichen Erscheinung von dem milden Glanze, mit mit dem das Tierkreislicht pyramidal aufsteigend, einen Teil der immer gleich langen Tropennächte erleuchtet . . ." (Nach Alexander von Humboldt, im 1. Bande des „Kosmos" S. 142 ff.) ist zu erwarten, daß es auch den zivilisierten Völkern Mittel- und Südamerikas nicht verborgen bleiben konnte. Den eifrigen Bemühungen des großen Reisenden ist es denn auch

---

[1]) Wanderungen durch das Niltal, Berlin, 1840.

[1]) Im Reiche des Lichtes, Braunschweig, 1895.

gelungen, in der Kgl. Bibliothek zu Paris im Codex Telleriano-Remensis eine altaztekische Handschrift zu finden, wo von diesem in der Hochebene Mexikos im Jahre 1509 in 40 Nächten beobachteten Lichtschimmer die Rede ist.

Da diese Naturerscheinung, wie schon erwähnt, sich unmittelbar nach der Abenddämmerung (crepusculum) und vor der Morgendämmerung (aurora) zeigt, so ist zu verstehen, daß orientalische Dichter und Astronomen von einer falschen und wahren Dämmerung sprechen. Besonders die falsche Dämmerung war Gegenstand der arabischen, persischen und türkischen Lyrik, die — wohl wegen der länglich-runden Gestalt des Zodiakallichtes[1] — dafür die Namen „Wolfs-, Hunds- oder Gazellenschwanz" erfand, Ausdrücke, die dem naiven Gemüt der Hirten entsprangen, wenn sie in stiller Nacht „des Himmels goldne Schrift" anschauten.[2] Als aber der Koran den Islamgläubigen zur Pflicht machte, sich in der Morgendämmerung vor Sonnenaufgang (Fagr) zum ersten Mal im Gebet an Allah zu wenden, da wurde es zur Notwendigkeit, die falsche und wahre Morgendämmerung scharf auseinanderzuhalten. Ibn Iûnis sagt (Hakemitische Tafeln, z. T. übersetzt von Caussin, Notices et extr. de manuscr. de la bibl. nat. tome VII, pag. 76): „L'étude des corps célestes n'est point étrangère à la religion. Cette étude seule peut faire connaître les heures des prières, le temps du lever de l'aurore, où celui qui veut jeûner doit s'abstenir de bois et de manger (le jeûne des Mahométans commence selon le précepte du Coran, lorsqu'on peut distinguer un fil blanc d'un noir, ou, selon quelques auteurs, au lever de la seconde aurore, Coran, Sure 2) la fin du crépuscule du soir, le terme des veux et des obligations religieuses, le temps des éclipses, temps dont il faut être prévenu pour se préparer à la prière qu'on doit faire alors. (Les Mahométans font une prière publique pendant des éclipes de soleil et des prières particulières dans celle de lune.")

Wie sehr die arabischen Gebetszeiten von astronomischen Erscheinungen beherrscht sind, habe ich zu zeigen versucht in zwei früheren Aufsätzen dieser Zeitschrift: Die arabische Sonnenuhr in ihrer Bedeutung für die arabische Astronomie und Religion (1911) und die arabische Sonnenuhr im Dienste der islamitischen Religionsübung (1912).

## II.

Es ist gewiß von Interesse, zu erfahren, wo der eigentlichen oder wahren Dämmerung in der Literatur zum erstenmal Erwähnung getan wurde. Wohl weisen die lateinischen Wörterbücher das Wort „crepusculum" schon als vorklassisch auf und geben es mit „Dämmerung", „Zwielicht" wieder. Es ist ja ganz begreiflich, daß man schon in den ältesten Zeiten diese Übergangszeit vom Tag zur Nacht oder umgekehrt wohl unterschied; aber weder bei den Griechen noch den Römern und Indern wird in wissenschaftlicher Weise irgendwie von der Dämmerung als astronomischer Erscheinung gehandelt.[1]

So sind es in der Tat die Araber, bei denen wir den ersten näheren Aufschluß über das Krepuskularphänomen erhalten; war es doch eine religiöse Pflicht des Imâms, den zeitlichen Eintritt und die genaue Dauer der Dämmerung für jeden Tag zu bestimmen und danach die Gläubigen zum Gebet rufen zu lassen. Bekanntlich unterscheiden wir heute zwei Arten von Dämmerung: die bürgerliche und die astronomische. Erstere endigt abends, wenn die Sonne etwa $6^1/_2$° unter den Horizont hinabgesunken ist, so daß wir zur Verrichtung der häuslichen Arbeiten künstlichen Lichtes bedürfen; am Ende der letzteren steht die Sonne bereits 16°—18° unter dem Horizont, und der Sternhimmel ist in Erscheinung getreten. Die Aufmerksamkeit der Araber galt nur der astronomischen Dämmerung. Aber wie überall, so bekunden sie auch hier nicht nur ihre ausgezeichnete Beobachtungskunst, sondern auch ihre Fähigkeit, die Aufgabe richtig zu erfassen. Wir können deshalb nicht umhin, das, was wir bei dem Volke Allahs über die Dämmerung ermitteln konnten,, hier ausführlich mitzuteilen, da unseres Wissens über derartige Dinge noch nirgends in der europäischen Literatur gehandelt wurde.

Eine rein optische Studie über die Dämmerung ist in dem „Opticae thesaurus Alhazeni Arabis libri septem eiusdem liber de crepusculis et nubibum ascensionibus des Alhazen oder Ibn-al-Haitam enthalten (* Bassora 950?, † Kairo 1038), den F. Risner 1572 zu Basel in lateinischer Sprache erscheinen ließ (pag. 283—288). Die kurze Abhandlung hat Gerhard von Cremona zum Interpreten. Es ist darin von Alhazen der Versuch gemacht, aus den Dämmerungserscheinungen die Höhe der Erdatmosphäre zu ermitteln. Das Resultat ist dieses: Wenn der Umfang der Erde 24000 italische Meilen beträgt, so ist die Höhe der Atmosphäre 52 Meilen (1 italische Meile = 1000 geometrische Schritte). Für das Ende der Abenddämmerung und den Beginn der Morgendämmerung, die also nach Alhazen von gleicher Dauer sind, gibt er eine negative Sonnenhöhe von 19° an; jedoch kennt

---

[1] Daß die falsche Dämmerung der Orientalen faktisch nichts anderes ist als der Schimmer des Tierkreislichtes wurde durch die verdienstlichen Nachforschungen — mit zahlreichen brieflichen Belegen maßgebender Autoritäten, so auch vom Mufti von Damaskus — J. W. Redhouse's zur Gewißheit erhoben. (Vgl. J. W. Redhouse, „Identification of the ‚False Dawn' of the Muslims with the ‚Zodiacal Light' of Europeans." Journ. of the Roy. As. Soc. 1880, S. 327.)

[2] Vgl. J. W. Redhouse, „On the Natural-Phenomenen known in the East by the names Sub-hi-Kâzib etc. etc. Journal of the Royal Asiatic Society, 1878, S. 344.

[1] Freilich überliefern griechische und römische Schriftsteller einige Angaben über Dämmerung und Tiefenwinkel der Sonne — so Posidonius, Plinius, Strabo — allein ohne sich auf Beobachtungen oder irgendeine Theorie zu stützen. Vgl. für die geschichtliche Seite unsres Problems den gehaltvollen Aufsatz von G. Hellmann, „Beobachtungen über Dämmerung". Meteorol. Zeitschr. 1884, S. 57 und 152.

er, wie alle arabischen Astronomen, bereits den Farbenunterschied zwischen dem Crepusculum matutinum und vespertinum. Bei ersterem spricht er von einer albedo et claritas, von der Abenddämmerung aber sagt er, daß sie ad rubedinem aliquantulum vergit.

Ausführliche Belehrung über die meteorologischen und astronomischen Anschauungen der Araber hinsichtlich der Morgen- und Abenddämmerung bieten die beiden großen Übersetzungsarbeiten des Vaters und Sohnes J. J. Sédillot und L. Am. Sédillot. Der erstere lieferte eine französische Übertragung des Ms. 1147 der Kgl. Bibliothek zu Paris unter dem Titel Traité des instruments astronomiques des Arabes composé au treizième siècle par Aboul Hhassan Ali de Maroc, Paris 1834, die uns einen vollständigen Einblick in den Stand der arabischen Astronomie im 13. Jahrhundert gestattet. L. Am. Sédillot verarbeitete den Hauptinhalt der arabischen Mss. 1103, 1111, 1138, 1148 und 1157 zu dem stattlichen Folianten: Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes, Paris 1841. Die namentliche Vorführung der einzelnen Autoren wollen wir hier übergehen, sie findet sich bei A. Sédillot pag. 26. Dies letztere Werk gibt besonders über die meteorologische Seite unseres Problems Aufschluß, während man in der Übersetzung des Abul Hassan'schen Ms.' astronomische Ermittelungen des Beginns und der Dauer der Dämmerung findet. Wir geben die charakteristischen Stellen wörtlich wieder. Im Ms. 1103 (Perles répandues sur l'usage du quart de cercle) sagt der Autor (Schafeï): „Die Abenddämmerung ist die Röte, die am Westhimmel nach Sonnenuntergang verbleibt, und die Morgendämmerung ist die Weiße, die am Ende der Nacht am Morgenhimmel erscheint; diese beiden Erscheinungen rühren von der Durchdringung der Erdatmosphäre durch die Sonnenstrahlen her,[1] und die Ansichten der Beobachter über diesen Gegenstand sind sehr auseinandergehend. Die alten haben gesagt, daß die Abenddämmerung endige und die Morgendämmerung anfange, wenn die Sonne 18° unter dem Horizont stehe, aber einige neuere sagen anders. Besonders Abul Hassan Ali von Marokko. Er und alle jene, die ihm folgten, waren der Meinung, daß die Abenddämmerung mit dem Tiefenwinkel der Sonne von 16° endige, die Aurora bei einer solchen von 20° zu erscheinen anfange, was mehrere der geschicktesten neueren Astronomen bestätigt fanden, so der berühmte und hervorragende Scheik Ala Eddin, bekannt unter dem Namen Ibn Schâtir, dessen Ansicht viele Astronomen, nämlich Nasir el Tusi, Abul Wefa, Al-Birûni u. a. der späteren Zeit beipflichteten, denn sie fanden 18° für die hellste, 20° für die dunkelste Zeit (sc. tempus nitoris = hervorbrechender Tag), d. h. 18° liegt unter dem wahren Wert des Hissah,[1] 20° darüber. Die Wahrheit ist, daß die Vermehrung oder Verminderung des Hissah gemäß der geographischen Breite bedingt ist durch die Reinheit oder Trübung der Atmosphäre, durch die Anwesenheit oder Abwesenheit des Wasserdampfes, durch den geringen oder starken Luftdruck, durch die Anwesenheit oder Abwesenheit des Mondes am Himmel und die Sehschärfe oder geringe Sehkraft des Beobachters. Nun, diejenigen, welche in dieser Hinsicht die Wahrheit feststellten, haben 17° für das Crepusculum und 19° für die Aurora angenommen. Es sind jene, die wir soeben nannten, außerdem noch der Scheik Abu Taher u. a."

Hieraus ersehen wir, daß die Araber auch in diesem Punkt bereits zu einer Feinheit der Beobachtung gelangt waren, der die moderne Meteorologie kaum viel neues hinzuzufügen hat. Auch sie ist der Meinung, daß die von Schafeï bereits hervorgehobene Variation des Depressionswinkels der Sonne tatsächlich von jenen Variationen des Zustandes unseres Luftmeeres herrühren.[2]

Bemerkenswert ist auch die Äußerung Abul Hassans zu dieser Frage. Er sagt wörtlich: „Zu gewissen Zeiten gibt es Nebel über dem Horizonte, die das Licht verschlucken; dann ist die Dauer der Röte länger als sonst, und der Eintritt der Weiße am Morgen erfolgt früher. Man hat auch schon beobachtet, daß das Licht des Mondes die Röte vermindert oder gar verschwinden läßt, während es den Glanz der Aurora vermehrt.

Ausgenommen diese Tatsachen, gibt es nichts zu irgendeiner Zeit, was die gegebene Regel ungültig machen könnte und nichts, was auch nur eine Veränderung von einem Grad hervorzurufen imstande wäre. Wir haben uns davon selbst überzeugt an Orten, die unter ganz verschiedenen Breiten liegen und deren größte etwa 45°, deren kleinste etwa 20° war;[3] dabei haben wir immer das eben Gesagte bestätigt gefunden."

## III.

Wir gehen jetzt dazu über, die astronomische Berechnung des Beginns der Morgendämmerung oder des Aufhörens der Abenddämmerung darzustellen, so wie sie von den arabischen Astronomen gelehrt wurde. Bei Al-Battâni, einem der ältesten arabischen Astronomen († 929), dessen

---

[1] Bei Abul Hassan steht: „ces deux couleurs sont occasionnées par la réflexion des rayons du soleil sur la sphère terrestre" (pag. 295).

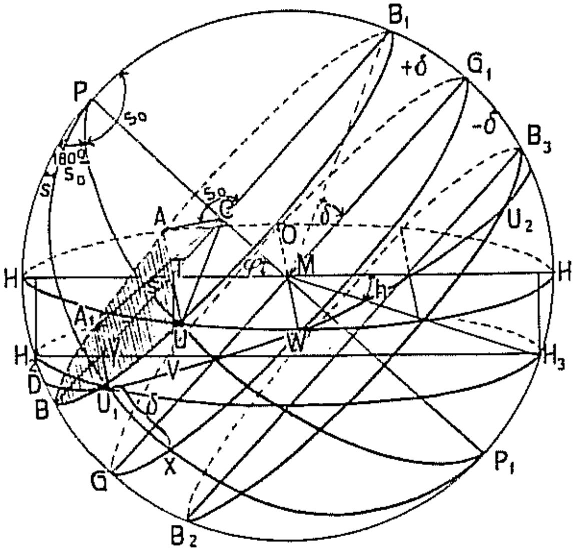
[1] Winkel, hier Tiefenwinkel der Sonne.

[2] Hellmann findet (a. a. O. S. 60) für den Anfang der Morgendämmerung der Sonne in Südspanien den Tiefenwinkel 17°52' und für das Ende der Abenddämmerung 15°40'. Gleichzeitig ersehen wir aus obigen Angaben, daß also die Araber die ersten gewesen sind, die für die Morgen- und Abenddämmerung eine verschiedene Dauer angenommen haben, nicht erst Riccioli im Jahre 1651, wie Hellmann (a. a. O. S. 63) glaubt.

[3] Für die Geschichte der arabischen Geographie ergibt sich hieraus die wichtige Tatsache, daß Abul Hassan bis zum 20.° nach Süden reiste, also in den Tropen weilte.

Werk: „Über die Bewegung der Sterne" wir in zwei lateinischen Ausgaben (von Plato v. Tivoli 1537 und von C. A. Nallino 1899—1907) findet sich nichts dergleichen; wohl aber löst Ibn Iûnis († 1009) in seinen Hakimitischen Tafeln die Aufgabe, anscheinend zum erstenmal. Hätte nicht glücklicherweise J. J. Sédillot in einer Randnote seiner Abul-Hassan-Ausgabe (S. 298) die Jûnisische Bestimmung des Eintritts der Dämmerung, die den Inhalt des 16. Kapitels des großen Werkes des Kairoaner Astronomen bildet, zum Vergleich mit dem Hassan'schen Verfahren dargestellt, würden wir die Priorität dem $2^1/_2$ Jahrhunderte später lebenden Marokkaner zuschreiben. Denn leider wissen wir von dem Werke des Ibn Iûnis noch recht wenig, da nur 3 Kapitel (III—V) von Caussin ins Französische übersetzt sind. Jedoch hat J. J. Sédillot das handschriftliche Material studiert und für Delambre einen Auszug aus der Jûnisischen Astronomie geliefert, den der letztere in seiner Histoire de l'astronomie du moyen âge benutzte; aber über das Kapitel „Dämmerung" berichtet Delambre nichts. So wollen wir denn die wichtigste Stelle wörtlich mitteilen. Ibn Iûnis sagt:

„Wenn ihr den Zeitpunkt des Aufgangs des Morgenrotes und des Verlöschens des Abendrotes erfahren wollt, so füget dem tatsächlichen Sonnenorte noch 6 Linien hinzu und ihr findet den Nadir dieses Ortes. Berechnet alsdann den Stundenwinkel für eine Höhe von 18°, nach einer Methode, die wir zur Auffindung des Stundenwinkels aus der Höhe angegeben haben; damit kennet ihr jenen Teil des Nachtbogens, welcher bis zum Ende der Abenddämmerung beschrieben sein muß und ebenso jenen, der noch zur Zeit des Anfanges der Morgendämmerung bleibt. Teilet die Gradzahl eines dieser Bogen durch die Anzahl der Grade, welche eine temporäre Stunde für die betreffende Nacht ausmachen, so wird euch der Quotient die Stunden, Minuten und Sekunden geben, welche schon von der Nacht bis zum Ende der Abenddämmerung verflossen sind, und dies wird auch die Zeit sein, welche noch von der Nacht zur Zeit des Beginns der Morgendämmerung bleibt. Bei gleichen Stunden ist der Stundenwinkel durch 15° zu teilen."



Zur Aufhellung dieser Vorschrift sei auf nebenstehende Figur verwiesen, die die Himmelskugel darstellt. HH$_1$ ist der Durchmesser des Horizontkreises, H$_2$H$_3$ jener des Grenzkreises (linea crepusculi) des Dämmerungsgürtels, der sich also nach Ibn Iûnis bis zu —18° ausdehnt. Unter Nadir versteht man in der arabischen Astronomie im allgemeinen den tiefsten (Nacht-)Punkt. Für die Sonne, die im Kreise um den Ort C (Mittelpunkt) läuft, kann nur Punkt B Nadir sein. Punkt C ergibt sich aus der geographischen Breite $\varphi$ des Beobachtungsortes und der Sonnendeklination $\delta$ für den Tag, an dem man das Ende der Abenddämmerung wissen will. Nach der Vorschrift des Textes sind zur Auffindung des Nadir von C aus sechs Linien abzutragen. Danach muß bei Ibn Iûnis der Radius irgendeines Kreises zu 6, der Durchmesser stets zu 12 Linien angenommen worden sein.[1]) (Sonst findet man in der älteren Mathematik gewöhnlich den Radius zu 60 partes-Teilen angegeben.)

Es sei nun für einen gegebenen Tag (Sonnendeklination $\delta$ bekannt) BB$_1$ der Durchmesser des Tageskreises der Sonne. Dann erhebt sie sich in A (Aufgang) über den Horizont HH$_1$ des Ortes M mit der bekannten geographischen Breite $\varphi$ und erreicht ihn abends wieder in U (Untergang); der halbe Tagesbogen der Sonne reicht also von A bis B$_1$ oder von B$_1$ bis U und entspricht dem Stundenwinkel $s_0$. Dieser ist aus dem bei H rechtwinkligen sphärischen Dreieck PUH sofort zu berechnen, da die eine Kathete $HP = \varphi$ und die Hypothenuse $UP = 90^\circ - \delta$ gegeben sind. Für den Nebenwinkel von $s_0$ ergibt sich

---

[1]) Der Text läßt uns hier im Unklaren. Möglich, daß die 6 Linien am Horizont nach unten abgetragen, zum Dämmerungskreis führen sollten.

$$\cos(180^0 - s_0) = \operatorname{cotg}(90^0 - \varphi)\cdot\operatorname{cotg}(90^0 - \delta)$$
$$= \operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta$$

Der hieraus ermittelte Bogen ist für temporäre Stunden (von denen bekanntlich immer 12 auf einen Tag und 12 auf die Nacht gehen) 6 Stunden gleichzusetzen, für gleiche Stunden aber durch 15 zu dividieren. Daraus erhält man den Zeitpunkt des Untergangs oder Aufgangs der Sonne. Wie wir sehen, hat Ibn Iûnis die Auffindung der Auf- und Untergangszeit der Sonne nicht näher illustriert, sondern als bekannt vorausgesetzt, sie findet sich bei ihm aber im vorhergehenden 15. Kapitel dargelegt.

Die Dämmerung währt so lange, bis die Sonne z. B. abends von U nach $U_1$ gelangt ist. Zu dieser Zeit gehört der Stundenwinkel

$$UPU_1 = 180^0 - s_0 - s.$$

Der Kairoaner Astronom bestimmt aber statt dieses Winkels erst den Rest des Nachtstundenwinkels $U_1PB = s$, und zwar in höchst origineller Weise. Diese hat ihren tieferen Grund darin, daß die Araber die Berechnung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke vermieden und stets versuchten, die gestellte Aufgabe auf die Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks zurückzuführen. Um dies zu erreichen, verbindet Ibn Iûnis den Westpunkt des Horizonts W (Durchschnitt des Himmelsäquators $QQ_1$ mit dem Horizont) mit dem Sonnenorte $U_1$, wo die Sonne also bereits $18^0$ tief steht und die Dämmerung aufhört. Da es von W bis zum Meridian $90^0$ sind, so steht der verlängerte Bogen $WU_1$ in D senkrecht auf dem Meridian, mithin ist Dreieck $U_1PD$ bei D rechtwinklig. Bogen $WU_1$ führt bei Ibn Iûnis den Namen baad und wird durch direkte Messung ermittelt. Das hierzu benutzte Instrument ist der Destur. Da aber $U_1$ unter dem Horizont liegt, so muß man in diesem Falle den Bogen $WU_1$ gleichen Bogen $WU_2$ messen. In $U_2$ steht die Sonne aber, wenn ihre Höhe $18^0$ über dem Horizont und ihre Deklination denselben negativen Betrag hat, der ihr am Beobachtungstag mit positivem Wert zukommt. (Also $^1/_2$ Jahr früher oder später.) Es ist nicht ausgeschlossen, daß Ibn Iûnis, um die Aufgabe zeitlich nicht auseinanderzureißen, sich in $U_2$ eines passenden Sternes bediente.

Mit der Kenntnis von $WU_1$ ist auch $BU_1 = 90^0 - WU_1 = 90^0 -$ baad bekannt. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $BPU_1$ folgt dann

$$\cos(90^0 - WU_1) = \sin(90^0 - XU_1)\sin s$$

d. i.

$$\sin \text{baad} = \cos\delta\cdot\sin s$$

woraus sich

$$\sin s = \frac{\sin \text{baad}}{\cos\delta}$$

ergibt.

Will man Bogen $UU_1 = AA_1$ in modernen Zeitstunden haben, so dividiert man seine Grundzahl durch 15; für temporäre Nachtstunden ist jedoch zu ermitteln, wieviel Stunden dem Bogen $UU_1$ zukommen, falls auf UB deren 6 entfallen. Damit dürfte die Iûnisische Regel zur Bestimmung der Dämmerung wohl genügend illustriert sein.

Wir wollen zum Schluß noch die rechnerische Ermittlung der Dämmerungsdauer erwähnen, wie sie sich bei Abul Hassan findet, der, wie wir bereits wissen, den Tiefenwinkel der Sonne für den Beginn der Morgendämmerung zu $20^0$, das Ende der Abenddämmerung zu $16^0$ angibt und ausdrücklich betont, daß die Morgendämmerung länger dauert als die Abenddämmerung. Seine kurze Lösung, der, wie allen seinen Vorschriften, jede Spur eines Beweises fehlt, ist diese:

„Für die Morgendämmerung: Ziehe jedesmal vom Sinus der Meridianhöhe des Nadirs der Sonne den Sinus von $20^0$ ab und teile den Rest durch den Assl des Nadir; der Quotient wird der Sinus versus des Stundenwinkels sein, der zwischen Mitternacht und Aufgang des Morgenrotes liegt; diesen ziehe man vom halben Nachtbogen ab, so wird der Rest gleich dem Stundenwinkel sein, der zwischen dem Beginn der Morgendämmerung und dem Sonnenaufgang liegt."

Für die Abendämmerung hat man nur den Tiefenwinkel h der Sonne von $20^0$ auf $16^0$ zu verringern.

Die Entstehung dieser Regel kann man sich etwa so denken: Wir fällen (s. Figur) von T, dem Durchschnitt der den Auf- und Untergang der Sonne verbindenden Linie AU mit dem Horizont $HH_1$, auf $H_2H_3$, das Lot TV und nennen den Durchschnitt des Parallelkreisdurchmessers $BB_1$ mit dem Durchmesser des Dämmerungskreises Y. Es ist nun leicht zu sehen, daß $CB = CB_1 = MB_1\cdot\cos\delta = \cos\delta$ ist, falls man den Radius der Himmelskugel gleich der Einheit setzt, wie das immer geschieht. Dann ergibt sich auch:

$$TV = \sin h = \sin 20^0 \text{ resp. } \sin 16^0$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck TVY liest man ab:

$$\frac{\sin h}{TY} = \cos\varphi, \text{ also } TY = \frac{\sin h}{\cos\varphi}.$$

Aus dem ebenfalls rechtwinkligen Dreieck CTA folgt $CT = CA\cdot\cos(180^0 - s_0) = \cos\delta\cdot\cos(180^0 - s_0)$, und ebenso aus dem rechtwinkligen Dreieck $CA_1Y$

$$CY = CA_1\cdot\cos s = \cos\delta\cdot\cos s.$$

Mithin ist

$$CY - CT = TY = \cos\delta\,\{\cos s - \cos(180^0 - s_0)\}$$
$$= \frac{\sin h}{\cos\varphi}.$$

Wir fanden aber

$$\cos(180^0 - s_0) = \operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta,$$

also läßt sich auch schreiben

$$\frac{\sin h}{\cos\varphi} = \cos\delta\,(\cos s - \operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta),$$

woraus durch Auflösen folgt:

$$\cos s = \frac{\sin h}{\cos\delta\cdot\cos\varphi} + \operatorname{tg}\delta\cdot\operatorname{tg}\varphi$$

Das ist

$$-\cos s = \frac{-\sin h - \sin\delta\cdot\sin\varphi}{\cos\delta\cdot\cos\varphi}$$

Wenn wir zu der letzten Gleichung links und rechts die Einheit addieren, folgt:

$$1 - \cos s = \frac{\cos \varphi \cdot \cos \delta - \sin \varphi \cdot \sin \delta - \sin h}{\cos \delta \cdot \cos \varphi}$$

oder

$$\sin \text{vers} \cdot s = \frac{\cos (\varphi + \delta) - \sin h}{\cos \delta \cdot \cos \varphi}$$

Diese letzte Gleichung gibt tatsächlich die Hassan'sche Vorschrift genau wieder. Es ist nämlich die Meridianhöhe des Nadir

$$\sphericalangle \text{HMB} = 90^0 - \varphi - \delta = 90^0 - (\varphi + \delta)$$

also

$$\sin [90^0 - (\varphi + \delta)] = \cos (\varphi + \delta);$$

hiervon ist sin h zu subtrahieren. Was nun den Assl (Wurzel) anbelangt, so ist dies eine von Abul Hassan in die arabische Astronomie eingeführte Bezeichnung für die halbe Summe der Sinuswerte jener Winkel, die eine Parallelkreissehne mit dem Horizonte bildet. Also Assl des Nadir:

$$\frac{\sin \sphericalangle \text{H}_1\text{MB}_1 + \sin \sphericalangle \text{H}_2\text{MB}}{2}$$

$$= \frac{\sin [90^0 - (\varphi - \delta)] + \sin [90^0 - (\varphi + \delta)]}{2}$$

$$= \frac{\cos (\varphi - \delta) + \cos (\varphi + \delta}{2} = \frac{2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta}{2}$$

$$= \cos \varphi \cdot \cos \delta.$$

Das ist aber das Produkt, das im Nenner steht. Daß $1 - \cos s$ ehemals als sinus versus und $1 - \sin s$ als cosinus versus bezeichnet wurde, lehrt jede Geschichte der Mathematik.

Wir werden ein anderes Mal Gelegenheit nehmen, einige interessante astronomische Instrumente der Araber zu besprechen.

# Längenbestimmung und Zentralmeridian bei den älteren Völkern.

Von C. Schoy.

(Mit 2 Textfiguren.)

## I.

Die Lösung der zwei Aufgaben der mathematischen Geographie, Länge und Breite irgendeines Punktes der Erdoberfläche in bezug auf ein sphärisches Koordinatensystem (Äquator und Nullmeridian) anzugeben, ist Gegenstand des geographischen Ortsbestimmungsproblems. Wenn auch Länge und Breite als gleichartige Größen (Stücke größter Kreise, Winkelbogen) definiert sind, so sind die Methoden zur Auffindung derselben doch in beiden Fällen durchaus verschieden. Das Messen der Höhe des Polarsternes über dem Horizont irgendeines Ortes, die identisch ist mit seinem Äquatorabstand, also seiner geographischen Breite, drängte sich von jeher dem astronomischen Beobachter als das zunächstliegende Mittel der Breitenbestimmung auf und in der Tat variieren vom Zeitpunkt der Erkenntnis dieser Tatsache nur noch die Methoden zur genaueren Ermittlung des Winkels der Weltachse zum Horizont. Indem also Horizont und Weltachse von selbst eine meßbare Winkelgröße darboten, war das Problem der Breitenbestimmung gewissermaßen auf eine gegebene Basis gebracht. Welche Beiträge die frühere Zeit zur Förderung dieses Teiles der Ortsbestimmung geliefert hat, habe ich des Näheren darzulegen versucht in der Schrift: „Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhenbestimmung bei den älteren Völkern". (Hamburg, 1911.)

Anders liegt der Fall bei der Längenbestimmung. Hier entbehren wir zunächst einer solchen Bezugsebene, die dem Horizont des jeweiligen Standortes entspräche, einer Ebene des Nullmeridians. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, irgendeinen passenden Meridian zur Ausgangslinie der Längenzählung zu wählen.

Indem die rotatorische Bewegung der Erde alle Längengrade in 24 Stunden der Sternzeit durch 360 Winkelgrade hindurchführt, wird das Problem der Längenbestimmung wesentlich zu einem solchen der Zeitmessung und hierin liegt ein weiterer fundamentaler Unterschied zwischen der astronomischen Breiten- und Längenbestimmung der älteren Zeit. (Von geodätischen Messungen soll hier nicht die Rede sein.) Tatsächlich haben die älteren Kulturvölker die Ermittlung der Längenunterschiede zweier Orte stets auf eine solche der Zeitunterschiede (wahre Ortszeiten) zurückgeführt, wenn nicht Schätzungen der Ortsabstände auf Reisen zur Längenbestimmung dienten.

Es entspricht der historischen Gerechtigkeit, wenn man bei Kritik der oft sehr ungenauen Längenbestimmungen der älteren Zeit auch die primitiven Zeitmeßwerke und abgerundeten Zeitangaben berücksichtigt, die $^1/_4$ bis $^1/_6$ Stunde an Genauigkeit nicht übertrafen. (S. Anm. *a* am Schlusse dieses Artikels.)

Ptolemäus erzählt im I. Buch, Kap. IV seiner Geographie, daß Hipparch als erster vor ihm damit begonnen hätte, die Elemente der exakten Geographie festzulegen. Er hatte bereits eine Anzahl von Orten nach ihrer geographischen Breite klassifiziert. Für ihre Placierung von Ost nach West hatte er die wenigen bis dato beobachteten Finsternisse benützt. Der Charakter der griechischen Winde (Etesien) hatte vielleicht dazu geführt, Punkte zu unterscheiden, die auf einer gemeinsamen Nordsüdlinie lagen, und so zum Begriff des Meridians zu gelangen. Vor Hipparch waren die Methoden der Ortsbestimmung ganz und gar unzulänglich. (Festsetzung der Lage eines Ortes nach Itinerarangaben, Reiseberichten, Klima, Auftreten gewisser Merkmale der Tier- und Pflanzenwelt, so bei Eratosthenes und Dikäarch.) Aber auch Ptolemäus und Marinus bedienten sich oftmals dieses von Hipparch als unwissenschaftlich bezeichneten Verfahrens, über dessen ausführliche Darstellung wir indes auf die „Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen" von H. Berger verweisen möchten. (2. Aufl. 1903, S. 417, 420, 610, 644.)

Wenden wir uns nun zu der exakten (astronomischen) Längenbestimmung durch Beobachtung von Finsternissen, so muß bemerkt werden, daß zwar im Almagest des Ptolemäus sowie in indischen und arabischen astronomischen Werken von der Berechnung der Finsternisse (Tafeln), der Größe der Verfinsterung der Mond- und Sonnenscheibe, sowie auch von der dadurch möglichen

Längenbestimmung ausführlich gehandelt wird, daß sich aber nirgendwo ein numerisches Beispiel findet, aus dem unzweideutig hervorgeht, daß und wie die Längenbestimmung tatsächlich ausgeführt wurde.

Seit 1913 besitzen wir eine deutsche Ausgabe der Ptolemäischen Astronomie, mit der uns K. Manitius beschenkt hat. Zahlreiche Anmerkungen und Zusätze suchen etwaige Unklarheiten des Textes zu beheben. Das 6. Buch des 1. Bandes handelt in der Hauptsache von den Finsternissen. Erwähnt werden die teilweisen Verfinsterungen des Mondes vom 30. April 174 v. Chr., deren Mitte in Alexandria $2^1/_3$ Äquinoktialstunden nach Mitternacht stattfand, sowie vom 27. Januar 141 v. Chr., deren Mitte $1^5/_6$ Äquinoktial- oder gleiche Stunden vor Mitternacht eintrat. Wie man sieht, macht Ptolemäus nur sehr abgerundete Zeitangaben, die auch Manituis beanstandet.[1] (a. a. O., Anhang, S. 450.) Auf eine Anwendung der Eklipsen auf Längenbestimmungen geht Ptolemäus nicht näher ein. (S. Anm. *b* am Schlusse dieses Artikels.)

Nähere Auskunft dagegen geben die astronomischen Systeme der Inder (Siddhântas), die allerdings noch in geringer Zahl in europäische Sprachen übersetzt sind. Das anscheinend älteste astronomische Lehrbuch der Inder ist der Sûrya Siddhânta oder die sichere Wahrheit enthüllt durch die Sonne, vermutlich gen Ende des 4. Jahrhunderts n. Chr. verfaßt und 1860 durch E. Burgess ins Englische übersetzt. Man findet im I. Kap., Vers 63—65 die Regeln für die Längenbestimmung mittels Mondfinsternissen. Sie lauten: „Wenn bei einer totalen Mondfinsternis der Beginn derselben nach der für die Verfinsterung berechneten Zeit statthat, dann liegt der Ort des Beobachters östlich vom Zentralmeridian, und wenn er vorher statthat, westlich. Dasselbe möge auf ähnliche Weise für den Austritt festgestellt sein. Alsdann multipliziere man mit der Differenz der 2 Zeiten in Nâḍis den Umfang des Parallels, auf dem sich der Beobachtungsort befindet, und dividiere durch 60. Das Resultat, in Yojanas, zeigt die Entfernung des Beobachters vom Meridian nach Westen oder Osten an."

Diese Regeln sind sofort verständlich unter Beachtung der Proportion:

---

[1] M. Reinaud sagt, daß die Güte einer älteren Zeitbestimmung $^1/_4$ Stunde nicht übertraf (Géographie d'Aboulféda, Tome I, pag. 2).

$$\frac{\text{Ganze Zahl in Nâḍîs im Tag (60)}}{\text{Intervall der Verfinsterung in Nâḍîs}}=\frac{2\,r\pi\,.\cos\varphi}{r\,.\,\lambda\,.\cos\varphi'}$$

woraus folgt

$$\frac{2\,r\pi\,.\cos\varphi\times\text{Intervall}}{60}=r\,.\,\lambda\,.\cos\varphi,$$

Hiebei bedeuten $\lambda$ und $\varphi$ Länge und Breite des Beobachtungsortes, $r$ den Erdradius. Man ersieht, daß die Entfernung des Ortes vom Meridian in Längenmaß ausgedrückt ist.[2]) Hingegen begegnet die genaue Festlegung des indischen Längenmaßes Schwierigkeiten. Es heißt in Vers 59, Kap. I:

„Zweimal 800 Yojanas sind gleich dem Erddurchmesser. Die Quadratwurzel aus 10 mal dem Quadrate desselben gibt den Erdumfang.“ Hieraus folgt: Umfang $=d\,.\,\pi=\sqrt{10d^2}=d\,.\sqrt{10}$, also $\pi=\sqrt{10}=3{,}1623$. Dieser indische Wert für $\pi$ weicht von dem wahren, 3,14159 . . . beträchtlich ab, womit eine Fehlerquelle in die Längenbestimmungen sich einschleicht.

Burgess fügt den obigen Versen hinzu: „Man sollte erwarten, daß so erfahrene Rechner, wie die Hindus sie sind, aus dem Zeitintervall direkt eine Längendifferenz machen würden, anstatt es erst in Yojanas zu verwandeln. Aber sie messen die Länge nicht wie wir in Graden, Minuten und Sekunden; es ist sonderbar, daß sie nie daran gedacht haben, das Winkelmaß auf die Erdkugel anzuwenden, wie sie es doch für die Himmelskugel tun; aber auch bei der Einteilung der Erde in Zonen reduzieren sie alle Entfernungen mühsam auf Yojanas.“[3]) (Über eine Probe der Güte indischer Längenbestimmungen s. S. 46.)

Bei den Arabern waren es nicht zum geringsten Teil religiöse Gründe, die sie zu exakteren Messungen und Berechnungen, besonders auch zur Erstellung astronomischer und geographischer Tafeln veranlaßten. Die Festsetzung der Qibla (Gesichtswendung zur Kaaba) war nur mit der Kenntnis von Breite und Länge des

---

[2]) Die indische Zeiteinteilung ist folgende: 1 Atemzug = 10 lange Silben; (4 Sekunden), 6 Atemzüge = 1 vinâḍî (24 Sekunden), 60 vinâḍîs = 1 nâḍî; (24 Minuten), 60 nâḍîs = 1 Tag.

[3]) Âryabaṭṭa (vgl. Colebrooke's Hind. Algebr. p. 38) setzt den Erddurchmesser = 1050 Yojanas, Bâskara (vgl. Siddhânt.-Çiromani VII, 1) = 1581 Yojanas. Nach Burgeß (Sur.-Siddh. I, 60) ist für den Durchmesser 1 Yoj. = 4·91, für den Umfang der Erde = 4·94 engl. Meilen zu setzen, so daß die Siddhântas die Erddimensionen zu groß, Âryabaṭṭa sie zu klein angibt.

in Frage kommenden Ortes möglich. Fünf Gebetszeiten zu bestimmten Tagesstunden, die Verpflichtung des Fastens, beginnend am Tage, wo im Monat ramadhan der Mond über den Horizont sich erhob, die Bewegungen von Sonne und Mond, machte für jedes Dorf, jede Familie Tafeln notwendig, die es ermöglichten, den zahlreichen religiösen Verpflichtungen nachzukommen. Solche Tafeln existierten wenigstens für alle größeren Städte und waren den bedeutenderen astronomischen Schriften gewöhnlich beigefügt. Zu den umfangreichsten Tafeln aus der ersten Zeit arabischer Wissenschaft zählen die des Alkwarizmischen Werkes Rasm-al-arḍ, (System oder Figur der Erde), in dem jeder Ort mit Länge und Breite aufgeführt ist. Wir erfahren darüber näheres durch einen der größten arabischen Astronomen, den Syrier Al-Battâni, so genannt nach seinem Geburtsstädtchen Battan. Seiner Religion nach war er Sabäer und starb auch als solcher. Sein ganzes Leben war der Astronomie gewidmet. Er schrieb auf Grundlage des Almagest ein Werk, dessen Prolegomena Plato von Tivoli, ein mittelalterlicher Gelehrter, unter dem Titel: de scientia stellarum lateinisch herausgab und welches auch 1537 in Nürnberg zusammen mit den Astronomischen Rudimenten des Alfraganus im Druck erschien.[4] Die Herausgabe besorgte J. Regiomontan, das Vorwort stammt von Melanchthon. In den Kapiteln 43 und 44 handelt Al-Battâni ausführlich von den Finsternissen; die Darstellung, die keine Anwendungen auf geographische Längenbestimmungen enthält, lehnt sich an die Ptolemäische an. Jedoch geben seine astronomischen Tafeln, die als Ms. in der Bibliothek zu Escurial sich befinden, den erwünschten Aufschluß. Sie sind reproduziert in der C. A. Nallinoschen Ausgabe des Al-Battâni (Opus astronomicum, II. Bd. 1907, vgl. Anm. c). Auch J. Reinaud (1795—1867) hat von diesem Ms., welches nach ihm das älteste geographische Exposé der Araber sein dürfte, Einsicht genommen. Eine für uns wichtige Stelle lautet: „Man hat gesagt, daß der Äquator zwischen Indien und Abessinien von einer Nordsüdlinie auf einer Insel geschnitten wird, welche den Norden vom Süden trennt. Diese Linie hat gleichen Abstand von den Inseln, die im westlichen Ozean liegen und den östlichen Provinzen Chinas.

---

[4] Auch die astronomischen Tafeln des Battâni hat Plato ins Lateinische übersetzt; sie finden sich als Ms. Nr. 7266 in der königl. Bibliothek zu Paris; 1645 erschien davon zu Bologna eine lateinische Ausgabe, die Reinaud jedoch recht mangelhaft findet.

Der Schnittpunkt dieser zwei Kreise ist es, was man die **Weltkuppel** nennt....[5]) Die Länge der Städte und ihre Breite sind im Buche über die Figur der Erde bestimmt worden. (Buch v. Alkwarizmi.) Die Länge ist die Distanz der Orte von West nach Ost; man läßt sie von den bewohnten Inseln ausgehen, die im westlichen Ozean liegen, und nach Osten fortschreiten, wie auch der Schatten bei Verfinsterungen des Mondes in diesem Sinne fortschreitet, Verfinsterungen, die für eine Stadt früher als für eine andere stattfinden. Ebenso hat man erkannt, daß auch der Mittag für gewisse Städte dem Mittag für jede andere Stadt vorausgeht, die westlich von jenen liegt, und dies nach gewissen Zeitteilen, welche in Äquatormaß gezählt wurden (gleiche Stunden). In der Tat ist die Dauer dieser Zeiten gleich der Zeit, die zwischen dem Augenblick der Verfinsterung des Mondes an zwei verschiedenen Städten verfließt. In dieser Hinsicht hat man also eine genaue Bestimmung der Länge im Vergleich zu einer weniger exakten Art, die Länge nach Reiseberichten festzulegen.

Diese Angaben haben wir (Al-Battâni) nach dem, was wir im Buch über die Figur der Erde gefunden haben, gemacht. Wir haben die mittleren Positionen der Städte und bekannten Länder angegeben, indem wir ihnen nach Art des Ptolemäus einen besonderen Platz anwiesen. Die Zahl der Regionen und Inseln (im liber figurae terrae) ist auf 93 angewachsen. Man begegnet jedoch im Buch über die Figur der Erde Irrtümern sowohl in Breite als Länge." (S. Anm. c am Schlusse dieses Artikels.)

Noch viel zu wenig wissen wir von einem der hervorragendsten arabischen Astronomen des 10. Jahrhunderts, von **Abul Hassan-Ali**, bekannter unter seinem Beinamen **Ibn Jûnis** oder Sohn des Jonas, des Namens seines Vaters. Er war in Kairo um die Mitte des 10. Jahrhunderts geboren und entstammte einer adeligen Familie. Von seinen Vorfahren zeichneten sich mehrere als Rechtsgelehrte und Schriftsteller aus. Ibn Jûnis lebte am Hofe der fatimidischen Kalifen **Aziz-billa** und dessen Sohn **Hakem**, und in Kairo und Umgebung hat er alle seine Beobachtungen angestellt. Sein Werk hat den Titel: Große Tafel oder Hakimitische Tafeln. Jedoch ist bis jetzt nur eine kleine Zahl der 81 Kapitel, die das Werk umfaßt — es soll 2 oder 4 Volumes enthalten —

---

[5]) Das ist wohl die früheste arabische Erwähnung von der Verlegung des ersten Meridians nach der Kuppel von Arin.

übersetzt. Die kgl. Bibliothek zu Paris besitzt nur Bruchstücke des Ms., ohne die des Beobachtungsmaterials. Ein vollständigeres Ms. befindet sich in der Bibliothek zu Leyden. Dieses hat Caussin benützt und einen Auszug des Inhalts sowie die Kapitel IV, V und VI in Übersetzung in den Notices et extraits de la bibliothèque nationale t. VII, p. 16—240 erscheinen lassen. Jean Jacques Sédillot (1777—1832) hat unter Benützung mehrerer arabischer Ms., besonders auch desjenigen von Ibn Schâtir,[6]) eine zusammenhängende Darstellung der Leistungen des Kairoe Astronomen gegeben, „mais savant modeste, aimant l'étude pour elle-même et d'ailleurs gravement infirme depuis bien des années, il se contenta de communiquer les résultats de ses recherches à M. Delambre, qui les a consignés dans son Histoire de l'astronomie du moyen âge", heißt es in dem kurzen Lebensabriß über diesen trefflichen Gelehrten auf der 1. Seite seines Werkes über Abul Hassan von Marokko (s. unten). Die Delambreschen Darlegungen über Ibn Jûnis finden sich in dem genannten Bande von Seite 76—156. Das VII. Kapitel der Hakimitischen Tafeln handelt von den geographischen Längen. Delambre sagt darüber nur die wenigen Worte (a. a. O. p. 98): „La Table des longitudes géographiques est pour le méridien du Caire à 55° du point le plus occidental, ou 125° du point le plus oriental. Nous ne dirons rien de ces longitudes; les Arabes pouvaient les avoir rendues moins défectueuses, mais ils n'avaient encore aucun moyen pour les rendre un peu passables." Dagegen hat J. Lelewel (Géographie du moyen âge, Bruxelles 1852, Tome I, p. 43 ff.) eine ausführliche Analyse der geographischen Tafeln des Ibn Jûnis mit sehr instruktiven Details gegeben, worüber wir auf Anm. *d* am Schlusse dieses Artikels verweisen müssen, da sie am Ende unserer Studie leichter verständlich sind.

Hingegen mögen hier noch die Mitteilungen Reinauds, die J. B. Biot nach Einsichtnahme des VII. Kapitels der Hakimitischen Tafeln, welches sich auf die terrestrischen Längen bezieht, machen konnte, Erwähnung finden. Biot gab dieselben in der Abhandlung: „Sur un mode d'énonciation des longitudes terrestres, particulier à

---

[6]) Beim 22. Kapitel endigt das Ms. von Leyden; die folgenden Kapitel sind Ibn Schâtir entnommen, dessen Ms. sich als Nr. 1112 in der Bibliothek zu Paris befindet; aber auch ihm mangeln verschiedene Kapitel, so 25, 27—30, 32 und 33, 45, 61—76, doch konnte Caussin die Überschriften aller 81 Kapitel geben.

certains écrivains arabes“ (Journal des Savants, 1841, p. 609) wieder: Gleich Ptolemäus und seinen arabischen Vorgängern nahm auch Ibn Jûnis für die Ostwestrichtung der bekannten Erde 180° in Länge an, aber in seinem Längensystem findet man eine Verschiebung des Nullmeridians um 10° nach Osten. So hat nämlich Kairo nach ihm 55° Länge vom äußersten Westen statt etwa 65° und 125° vom östlichsten Meridian, und entsprechend sind die Längen der meisten anderen Städte rektifiziert, ohne daß uns Ibn Jûnis dafür eine Aufklärung gibt. Sollte, so fragt Biot, Ibn Jûnis daran gelegen haben, den Anfangsmeridian im Westen durch Afrikas Küste gehen zu lassen statt durch die Kanarische Inselgruppe? Dazu genügte ja nach Ansicht der Araber eine Verschiebung des Gradsystems um 10° nach Osten.[7]) Im übrigen sind die Tafeln auch nach Reinaud erfüllt von Konfusion; denn Tanger, Cordoba, Toledo u. a. sind unter Längengraden aufgeführt, die einem nicht rektifizierten, sondern dem alten System des Ptolemäus entsprechen. Wie Ptolemäus, zählt Ibn Jûnis die Längen fortwährend von West nach Ost. Delambre sagt (a. a. O. p. 123) betreffend die geographischen Tafeln: „Outre les incertitudes inhérentes à ce genre de détermination (mit den primitiven Mitteln der damaligen Zeit), on remarque des négligences et des erreurs qu'on ne peut attribuer qu'aux copistes.“

Biot hat auch die Tafeln der geographischen Positionen des Nassir-Eddin und Ulug-Beg eingesehen, die von J. Gravius aus dem Persischen übersetzt und in London publiziert worden sind. Danach decken sich ihre Festsetzungen ganz mit

---

[7]) Eine Erklärung des Ibn Jûnisischen Verfahrens glaube ich in folgender Stelle gefunden zu haben: Al-Charaqqi sagt in seinem Werk: „Das Höchste, was man bei der Teilung der Sphären erreichen kann“: „Die Griechen begannen mit der Zählung der Längen an den ihnen zunächst gelegenen Grenzen der Welt, d. h. der westlichen. In diesem Fall ist die Länge eines Ortes sein Abstand von dem Westen. Aber auch über diese Grenze bestand bei ihnen ein Meinungsunterschied: Einige beginnen mit der Länge am westlichen Ozean und einige an den sechs Inseln, die in dem Meere nahezu 200 Parasangen (1 persische Parasange = 30 Stadien) versteckt liegen. Sie heißen Inseln des Glücks. Sie liegen gegenüber von Al-Magrib. Deshalb findet man manchmal in den Büchern für einen Ort zwei Längen angegeben, die um 10° (Daraga) verschieden sind; um dies zu unterscheiden, bedarf man Scharfsinn und Übung. Dies alles stammt von Al-Bîrûnî.“ (Nach E. Wiedemann: Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften, Erlangen 1912, XXVII, S. 9.)

Ptolemäus. (Zählung von West nach Ost, von den glückseligen Inseln angefangen.) Die drei Städte Ormus, Schiras und Asterabad liegen fast unter demselben Meridian, dem Zentralmeridian, von dem noch ausführlicher die Rede sein soll. Beide Autoren erwähnen nichts von der ebenfalls noch zur Sprache kommenden Kuppel von Arin, was um so bemerkenswerter ist, als der Meridian, unter dem sie lag, durch die Besitzungen der Familie Ulug-Beg geht.

Christmann, einer der Erklärer des Alfraganus, behauptet, in der Palatinischen Bibliothek ein Manuskript Arzachels (ca. 1080 zu Toledo) gesehen zu haben, welches Toledo auf den $28\frac{1}{2}^0$ östlich vom äußersten okzidentalen Meridian verlegt. Reinaud hat diese von Christmann zitierte Stelle in den handschriftlichen Übersetzungen des Arzachels, welche die königl. Bibliothek zu Paris besitzt, nicht wiedergefunden, aber er machte dabei eine andere gleich wertvolle Entdeckung: Die Handschriften machen für die Länge von Toledo immer eine doppelte Längenangabe: eine mit 11° vom Anfangsmeridian wie bei Ptolemäus, die andere mit $28\frac{1}{2}^0$. Man muß also annehmen, daß dies Prinzip der Rektifikation der Längen, welches diesen Unterschied bedingt, zu jener Zeit allgemein bekannt war. Im übrigen findet sich in den Tafeln Arzachels dieselbe Konfusion wie bei Ibn Jûnis. (S. Anm. 6 am Schlusse dieses Artikels.)

Endlich behauptet Christmann, auch mehrere Ms. der Alfonsinischen Tafeln[6]) eingesehen zu haben, wo Arîn ausdrücklich als Mittel- (Zentral-) Meridian zwischen dem äußersten Ost- und Westmeridian angegeben ist. Reinaud hat diese Stelle in den Mss. der königl. Bibliothek wiedergefunden.

Wie in der Frage der Breitenbestimmung, so gewährt uns das Werk des Spätarabers Abul Hassan Ali von Marokko auch in der der Längenmessungen die meiste Auskunft. Es führt den Titel: Das Ganze, welches den Anfang mit dem Zweck vereinigt. J. J. Sédillot hat das Ms. 1147 der königl. Bibliothek zu Paris ins Französische übersetzt. Die Herausgabe

---

[6]) Von den einstmals berühmten Alphonsi regis auspiciis Tabulae astronomici, 1252 handelt beispielsweise Delambre, Hist. de l'astr. du moyen âge, p. 248—258. Ausgaben von 1488, 1492, 1517. 1524 von Gauricus, 1545 und 1553 von Paschasius Hamellius. Gearbeitet haben daran die maurischen, jüdischen und christlichen Astronomen Ibn Ragel, Alcabit, Ibn Musius Mohammed, Abuphali, Abumu u. a. Uns lag außer den libros del Saber (spanische Ausgabe, Madrid, 1863/67) diejenige von 1545 vor.

im Druck besorgte dessen Sohn L. Amélie Sédillot (1808 bis 1875). Der stattliche Foliant, der 1834 zu Paris erschien, führt in der Übersetzung den Titel: Traité des instruments astronomiques des Arabes. Über das Leben Abul Hassans wissen wir so gut wie nichts. Geboren ist er etwa um das Jahr 1200. Nach Lelewel dürfte sich Hassan wahrscheinlich eines langen Lebens erfreut haben und vielleicht erst 1282 gestorben sein, hat aber schon im jugendlichen Alter (1229—1230) seinen astronomischen Traktat geschrieben. Die Kopie des Originals stammt aus dem Jahre 1410. Entsprechend der Gepflogenheit der damaligen Gelehrten ist Abul Hassan viel gereist. Er durchquerte das mittlere Spanien und ganz Nordafrika vom Atlantischen Ozean bis zu den Ufern des Nils. Dabei hat er die Polhöhen von 41 und die geographische Länge von 43 Städten bestimmt. Erst L. A. Sédillot hat in seiner Schrift: Mémoire sur les systèmes géographiques des Grecs et des Arabes, Paris 1842, darauf hingewiesen, daß solche Reisenden imstande waren, Längenbestimmungen durch Itinerarien zu machen. Dies hat Hassan auf seinen Reisen sicher oftmals getan. So erklärt sich auch die eigenartige Breitenbestimmung desselben Gelehrten aus den Dimensionen der Sonnenuhren, die wesentlich von der Ortsbreite abhängen. Die Kenntnis der früheren Autoren, der wir bei dem marokkanischen Astronomen begegnen, ist ganz erstaunlich. Noch zwei andere Schriften über den neuen Mond, der für den bürgerlichen Kalender der Araber so wichtig ist, und über die Kegelschnitte hat er verfaßt. Während Sédillot ihn als einen Geometer rühmt, den unserigen nicht inferior, der als theoretischer und praktischer Astronom gleich tüchtig ist und stets Wert auf Präzision des Ausdruckes legt, schätzt ihn Biot (a. a. O. p. 605) viel niedriger ein, indem er sagt: „Das Werk Abul Hassans ist voller Anzeichen, daß er selbst kein astronomischer Beobachter,[9]) sondern nur ein simpler Kon-

---

[9]) Mit dieser Behauptung steht die Tatsache im Widerspruch, daß Abul Hassan nach seinem eigenen Zeugnisse an 41 Orten die Polhöhe selbst bestimmt hat; er hat in seiner Breitentabelle von 135 Orten diejenigen mit roter Tinte eingetragen, wo er selbst beobachtete (a. a. O. p. 200) auch betont er an derselben Stelle, daß er die Tabelle noch um vieles hätte vermehren können, dies aber unterlassen habe, weil er über sie keine ganz exakten Angaben machen könnte und niemanden zu ermitteln vermochte, der in der Astronomie genügend versiert wäre, um ihm mit ganz zuverlässigen Details zu dienen. Dies spricht doch für eine recht erfreuliche Gewissenhaftigkeit und Gründlichkeit unseres Gelehrten.

strukteur und Beschreiber von Sonnenuhren war, der nur einige praktische geometrische Begriffe und astronomische Rechenkenntnisse hatte.“ Wer jemals in die oft ganz originellen Darlegungen Abul Hassans tiefer eingedrungen ist und versucht hat, die Beweise zu den kurzen und bündigen Vorschriften zu geben, der kann sich niemals diesem harten und ungerechten Urteil Biots anschließen.

Auch bei Abul Hassan steht in der Längenbestimmung eines Ortes die Beobachtung der Mondesfinsternisse obenan. Unser Gewährsmann äußert sich S. 314 ff. also:

„Die terrestrische Länge ist ein Bogen des Äquators zwischen dem Meridian des in Frage kommenden Ortes und dem westlichen Horizont von Khobbet Arine,[10]) Man zählt die geographische Länge auch vom Meridian der Inseln der Glückseligen (Kanaren), aber in diesem Werke befolgen wir die erste Methode.

Wenn man also die Länge eines Ortes wissen will, so wird man sich aus den Tafeln die Zeit des Beginnes der Finsternis in Khobbet Arîne entnehmen und dann die Zeit ihres Eintrittes für das Land beobachten, wo man sich befindet. Wenn der Zeitpunkt des Anfanges auf die Mitternacht fällt, so wird er zu Arîne entweder um 12 Uhr nachts oder vor oder nach 12 Uhr statthaben. Wenn das zur Mitternacht ist, dann wird die Länge des Ortes = 90° sein, wenn es aber vor oder nach Mitternacht sich ereignet, so bemerke man genau diese Zeitdifferenz mit der Mitternacht (verwandle sie in Grade gemäß der Überlegung, daß 15° = 1 Äquinoktialstunde sind) und nenne diese Grade das Argument.

Wenn die Verfinsterung in Khobbet Arîne vor Mitternacht beginnt, so füge man das Argument zu 90° hinzu, man ziehe es von 90° ab, wenn sie nach 12 Uhr beginnt. Das Resultat der Addition oder Subtraktion wird die Länge des Beobachtungsortes geben.

Wenn an diesem Orte die Verfinsterung des Mondes vor oder nach Mitternacht beginnt, so nenne man die Zeitdifferenz zwischen Beginn und Mitternacht die ‚erste Größe‘ (le premier conservé); beginnt alsdann dieselbe Eklipse zur Mitternacht für Arîne, so füge man die erste Größe zu 90° hinzu, falls die Verfinsterung an dem Orte, wo man beobachtet, nach Mitternacht

---

[10]) Dieser steht 90° vom wahren Okzident ab.

eintritt, im umgekehrten Fall subtrahiere man die erste Größe von 90°. Das Resultat der Addition oder Subtraktion wird die Länge des Beobachtungsortes geben.

Wenn aber die Verfinsterung in Khobbet Arîne vor oder nach 12 Uhr nachts anfängt, so nenne man die Zeitdifferenz zwischen Beginn und Mitternacht ‚zweite Größe', und falls erste und zweite Größe einander gleich sind und beide vor oder nach Mitternacht liegen, so wird die Länge des Ortes = 90° sein. Wenn aber die zweite Größe nicht gleich der ersten ist, die Zeiten beide aber vor oder nach Mitternacht liegen, so füge man die Differenz der beiden Größen zu 90° hinzu, falls der Anfang der Verfinsterung für den Beobachter vor Mitternacht liegt, im anderen Fall subtrahiere man die Differenz von 90°. Wiederum wird das Resultat dieser Addition oder Subtraktion die Länge des Beobachtungsortes ergeben.

Wenn endlich der Anfang einer Eklipse an einem der zwei Orte vor, am anderen nach Mitternacht eintritt, so nehme man die Summe der zwei Größen und füge sie, falls der Beginn an dem Ort, dessen Länge man sucht, nach Mitternacht stattfindet, zu 90° hinzu und ziehe sie im entgegengesetzten Falle von 90° ab. Das Resultat der Addition oder Subtraktion wird abermals die Länge des Beobachtungsortes ergeben."

Nach diesen Darlegungen folgen (S. 315) die Längenangaben von 131 Orten.

Es ist eine Eigenart Abul Hassans, bei jeder derartigen Frage (z. B. auch bei der Ermittlung der Breite) alle denkbar möglichen Fälle zu behandeln, auch wenn sie vielleicht zunächst in der Praxis nicht anwendbar sind. Das bekundet uns, mit welcher mathematischen Akribie Hassan vorging, ganz anders als es ein „simpler Konstrukteur" getan hätte. Uns scheint es, als habe sich Biot durch die Lektüre dieses (66.) Kapitels des ersten Buches zu der Äußerung verleiten lassen, es seien Hassans Vorschriften, die Länge aus Mondesfinsternissen zu bestimmen, eine „rein mathematische Konzeption", aus der man nicht, wie dies J. J. Sédillot tat (siehe weiter unten!), folgern dürfe, daß die Araber wirklich Tafeln, die auf den Meridian von Khobbet Arîne eingerichtet waren, besessen hätten. Um z. B., so meint Biot, die für Alexandria hergestellten Tafeln des Ptolemäus einem anderen Meridian anzupassen, hätte man nur das zwischen Alexandria und dem fraglichen Meridian liegende Zeitintervall hinzuzufügen oder abzuziehen. „Aber dies alles sind nur ideale geistige Schöpfungen: Weder die Ptolemäischen, noch die arabischen Tafeln waren genau genug, um mit ihrer Hilfe auch nur einigermaßen genaue Längen zu ermitteln“ (a. a. O. p. 604).

Dies ist aber doch eher der Standpunkt des modernen Astronomen als des Historikers. Die Mangelhaftigkeit der älteren Finsternistabellen ergab eben auch entsprechend ungenaue Resultate. Warum sollten sie den Alten deren Benützung verwehrt haben?

Wir kommen nunmehr zu einem Spezialfall der geographischen Längenbestimmung, der auf Seite 323 des 1. Buches von Abul Hassan gelehrt wird, und der letzten Endes auf eine Zeitbestimmung hinausläuft, ähnlich wie sie die moderne sphärische Astronomie kennt. Da uns eine ähnliche Methode in der älteren Astronomie nirgendwo begegnet ist, so tragen wir dieselbe ausführlich vor. Die vollständige Lösung der Aufgabe ist in den zwei Kapiteln 69 und 65 enthalten. Wir geben zuerst den Wortlaut von 69 mit der Überschrift: Bestimmung von Länge und Breite eines beliebigen Ortes, wenn sein Azimut und die Höhe seines Zenits in dem gegebenen Orte bekannt sind.

„Wenn es sich ereignet, daß ein Stern in das Zenit eines Ortes kommt, dessen Länge und Breite man sucht, und wenn dann (für den Beobachtungsort) Azimut und Höhe dieses Sternes bekannt sind, so findet man nach den Regeln des 65. Kapitels seine Deklination und seine Meridiandistanz (Stundenwinkel). Alsdann wird die Deklination des Sternes gleich der Polhöhe des unbekannten Ortes, seine Meridiandistanz gleich der Längendifferenz dieses und des Beobachtungsortes sein. Um daher die Länge selbst zu haben, wird man die Längendifferenz zur Länge des bekannten Ortes hinzufügen oder von ihr abziehen, je nachdem der zu bestimmende Ort östlich oder westlich von dem bekannten liegt.“

Zur Erläuterung dieses Textes verweisen wir auf umstehende Figur. Das Zenit eines Ortes $A$ ist also durch einen Stern ersetzt, der in $A$ im Zenit steht. Da ein Stern in unendlicher Ferne von $A$ zu denken ist, so sind die Gesichtslinien nach dem Stern in $A$ und $B$ parallel im Raum. Die Gesichtslinie in $B$ bildet mit dem Horizont in $B$ aber den Winkel $h$, der gleich der Höhe des Sternes in $B$ ist. Was nun das Azimut des Ortes in $A$ in dem gegebenen Orte $B$ anbelangt, so bemerke man folgendes: Die Gesichtslinie nach dem Stern geht in $A$ durch dessen Zenit, also auch durch den Meridian von $A$ (mithin bildet die Sehlinie in $A$ kein Azimut zum dortigen Meridian). Anders liegt der Fall in $B$. Wenn man dort durch die Sehrichtung nach dem Stern eine Ebene senkrecht zum Horizont in $B$ legt, so wird ihre Spur $BC_1$ mit der dortigen Meridianrichtung einen Winkel bilden, der die

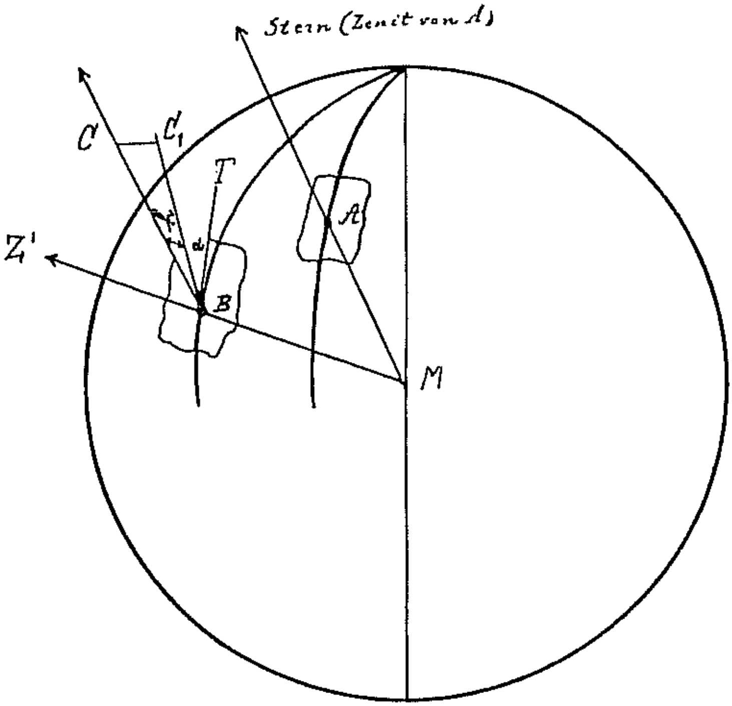


Fig. 1.

Abweichung der Sehrichtung in $B$ vom Meridian in $B$ angibt, d. i. aber das Azimut des Sternes im Orte $B$. Also sind die Daten der Überschrift identisch mit Höhe und Azimut eines Sternes zu einem Augenblick, wo er an einem Ort im Zenit stand. Somit kann die Aufgabe des 65. Kapitels Anwendung finden (S. 311).

Bestimmung der Deklination und der Meridiandistanz eines Sternes, falls dessen Höhe und Azimut bekannt sind. Seine Lösung lautet also:

„Man multipliziere den Kosinus der Höhe des Sternes mit dem Kosinus seines Azimuts, das Produkt ist der Sinus primordial.[11]) Multipliziere den Sinus der Höhe mit 60 und teile das Produkt durch den Kosinus primordial, so wird der Quotient gleich der Meridianhöhe des Primordials sein.

Wenn alsdann die Äquatorhöhe an dem Ort, für welchen die Rechnung ausgeführt wird, von derselben Benennung ist wie die Höhe des Sternes, so beobachte man, ob die Meridianhöhe des Primordials gleich oder nicht gleich der Äquatorhöhe im Meridian ist. Sind beide gleich, so hat der Stern keine Deklination, sind sie ungleich, so ziehe die kleinere von der größeren ab und nenne den Rest ‚Unterschied' (équation).

Wenn die Meridianhöhe des Äquators an einem gegebenen Orte nicht von derselben Benennung ist wie die Höhe des Sternes, so zähle man die Meridianhöhe des Äquators zur Meridianhöhe des Sternes und ziehe die Summe von 180° ab. Der Rest wird der Unterschied sein.

Multipliziere den Kosinus primordial mit dem Sinus des Unterschiedes, so wird das Produkt die (?) Deklination des Sternes darstellen. . . . Multipliziere hierauf den Sinus primordial mit 60 und dividiere das Produkt durch den Kosinus der Deklination des Sternes: Der Quotient wird der Sinus der Meridiandistanz des Sternes sein. . . .“

Der Aufhellung dieser Regeln wollen wir vorausschicken, daß die arabischen Sinustabellen nicht durchweg echte Brüche enthalten, sondern daß jeder Sinus mit einem Radius $r = 60^p$ multipliziert in der Tafel auftritt.[12]) Es ist also $\sin 90^0 = 60^p$ ($= r$). Wir setzen $r = 1$, lassen also den Faktor 60 fort.

Fällt man jetzt von $B$ (Fig. 2) ein Lot auf den Meridian, so entsteht das bei $F$ rechtwinkelige sphärische Dreieck $A'BF$. In diesem ist

$$\cos BF = \cos \text{primord.} = \sin (90^0 - h) . \sin (90^0 - \alpha) = \\ = \cos h . \cos \alpha \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad \text{I)}$$

---

[11]) Nach **Sédillot** ist diese Benennung des Bogens $BF$ (Fig. 2) eine mehr spezielle, die vom Arabischen ûlâ = prior = antérieur kommt.

[12]) Siehe z. B. Al-Battânis Sinustafel (Ausgabe von Nallino, II. Band, S. 55 und 56).

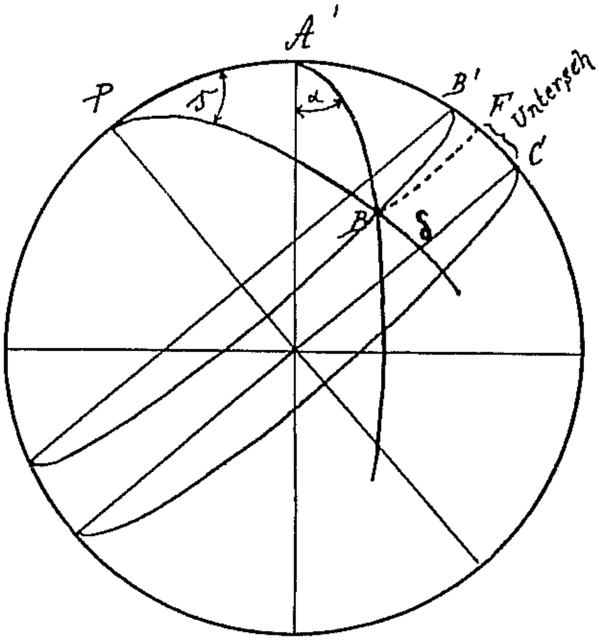


Fig. 2.

Mithin ist $BF$ der Primordialbogen und das Azimut ist von Westen gegen Süden gezählt. Sodann hat man

$$\cos (90^0 - h) = \cos A'F \, . \, \cos BF,$$
$$\sin h = \cos A'F \, . \, \cos \text{primord.},$$
$$\cos A'F = \frac{\sin h}{\cos \text{primord.}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Ferner ist

$$\cos (90^0 - \delta) = \cos \text{primord.} \cos (90^0 - \text{Unterschied})$$
$$\sin \delta = \cos \text{primord.} \sin \text{Unterschied} \quad \ldots\ldots \quad \text{III)}$$

Wie man sieht, ist bei dem von uns beigefügten Fragezeichen im Text das Wort Sinus ausgelassen. Endlich ist

$$\sin BF = \sin s \, . \, \cos \delta,$$
$$\sin s = \frac{\sin \text{primord.}}{\cos \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

womit sämtliche Vorschriften Hassans klargestellt sind.

Wie man sieht, ist Abul Hassan bestrebt, alle Fragen mit Hilfe des rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes zu beantworten, auch der Verwendung der Tangens- und Kotangensfunktion auszuweichen,[13]) ganz ähnlich, wie dies Ibn Jûnis tat. Ein Vorteil dieser Methode der Längenbestimmung besteht darin, daß sie nicht die Kenntnis der Polhöhe des gegebenen Ortes voraussetzt.

## II.

Und welche Genauigkeit erreichten die Längenangaben in den Tafeln der Griechen und Araber? Diese Frage ist keineswegs absolut richtig zu beantworten. Wohl haben wir heutzutage von vielen Orten der Erde genaue Positionsangaben, die sich auf den Äquator und einen gegebenen Meridian (Paris, Greenwich) beziehen. Wollten wir die Längenangaben der älteren Völker mit unseren modernen vergleichen, so müßten wir die genaue Lage jenes Meridians in bezug auf den von Paris oder Greenwich kennen, von wo aus sie ihre Längen zählten. Wir wissen, daß die Griechen und verschiedene arabische Gelehrte den Nullmeridian durch die Kanarischen Inseln gehen ließen, eine besonders für die damalige unzureichende Kenntnis der Ostwestausdehnung Afrikas viel zu ungenaue Angabe. Eher ließe sich vielleicht die Lage jenes Meridians annähernd bestimmen, der durch die Mitte zwischen den Kanaren und dem östlichen Grenzmeridian der alten Welt ging, dem also im Ptolemäischen System die Länge von 90° zukommt (Zentralmeridian), da er durch die doch damals besser bekannten Weltregionen ging. Einen solchen Versuch hat Biot (a. a. O. p. 768) gemacht, indem er sieben Längenangaben nach Ptolemäus mit solchen sieben modernen verglich, deren Identifizierung mit den ersteren unzweideutig gelang, und daraus einen mittleren Wert für die Differenz des Ptolemäischen Zentralmeridians mit dem Meridian von Paris ableitete. Wir geben die Biotsche Tabelle hier wieder.

---

[13]) A. v. Braunmühl sagt im ersten Bande seiner trefflichen Geschichte der Trigonometrie, Leipzig 1900, S. 84, daß Abul Hassan häufiger als seine Vorgänger die Tangenten und Kotangenten in Anspruch nehme. Wir konnten jedoch bei seinen sphärisch-trigonometrischen Berechnungen nirgends eine Verwendung der Tangenten und Kotangenten finden. Etwas anderes ist es freilich bei Bestimmung der Schattenlänge (Horizontal- und Vertikalschatten).

| | Name nach Ptolemäus | Moderner Name | Länge nach Ptolemäus | Wahre Länge (Paris) | Ergänzung zu 90° für die Länge nach Ptolemäus | Daraus resultierende Länge des Ptolemäischen Zentralmeridians |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Βαβυλών. . . . . | Babylon . . . . | 79° | 41° 41′ 40″ | +11° | 52° 41′ 40″ |
| | | | *12°* | *9° 4′ 50″* | | |
| 2 | Περσέπολις . . . | Persepolis . . . | 91° | 50° 46′ 30″ | − 1° | 49° 46′ 30″ |
| | | | *1°* | *2° 44′ 0″* | | |
| 3 | Ἀλεξάνδρου<br>ἡ καὶ Ἀρακία . . | Insel Kism | 90° | 53° 30′ 30″ | 0° | 53° 47′ 30″ |
| | | | | *0° 34′ 06″* | | |
| | | „ Larach | | 54° 4′ 36″ | 0° | |
| | | | *3°* | *2° 41′ 24″* | | |
| 4 | Κορόδανον ἄκρον . | Cap Ras al-Had | 93° 0° | 56° 46′ 0″ | − 3° | 53° 46′ 0″ |
| | | | *3°* | *2° 38′ 0″* | | |
| 5 | Σύαγρος ἄκρα . . | Cap Sangra . . | 90° | 54° 8′ 0″ | 0° | 54° 8′ 0″ |
| | | | *4° 10′* | *2° 25′ 0″* | | |
| 6 | Διοσκορίδου νῆσος | Sokotra . . . . | 85° 50′ | 51° 33′ 0″ | + 4° 10′ | 55° 43′ 0″ |
| | | | *5° 50′* | *8° 42′ 24″* | | |
| 7 | Ἀραβίας ἐμπόριον | Aden . . . . . . | 80° 0′ | 42° 50′ 36″ | +10° | 52° 50′ 36″ |

Mittlerer Wert für die Länge des Ptolemäischen Zentralmeridians, östlich von Paris, 53° 14′ 45″

Die Subtraktion der Werte der Kolumne III von 53° 14′ 45″ sollte etwa die Werte der Kolumne II ergeben. Man findet für die Ptolemäischen Längen in bezug auf den Meridian von Paris:

1. 42° 14′ 45″ statt 41° 44′ 40″, mithin 0° 30′ 05″ östl. Differenz
2. 54° 14′ 45″ „ 50° 46′ 30″, „ 3° 28′ 15″ „ „
3. 53° 14′ 45″ „ 53° 47′ 30″, „ 0° 32′ 45″ westl. „
4. 56° 14′ 45″ „ 56° 46′ 0″, „ 0° 31′ 15″ „ „
5. 53° 14′ 45″ „ 54° 8′ 0″, „ 0° 53′ 15″ „ „
6. 49° 4′ 45″ „ 51° 33′ 0″, „ 2° 28′ 15″ „ „
7. 43° 14′ 45″ „ 42° 50′ 36″, „ 0° 24′ 9″ östl. Differenz

Hiernach würden nur Persepolis und Sokotra auffallende Differenzen zwischen ihrer wahren Länge und der durch Ptolemäus bestimmten ergeben. Aber L. A. Sédillot äußert (Mem. sur le syst. géogr., p. 700 und 703) nicht unberechtigte gewichtige Bedenken gegen dieses Biotsche Verfahren. Wir haben mit Kursivziffern in der Tabelle (S. 44) die Längenunterschiede zwischen den aufeinanderfolgenden Orten für die Länge nach Ptolemäus und die wahre Länge eingefügt. Diese Zahlen sprechen zur Genüge gegen Biot. Bemerkt sei auch hier schon, daß bei Ptolemäus kein Meridian als Zentralmeridian ausgezeichnet ist.

Was taten die Inder? Indem sie glaubten, im Mittelpunkt der Welt zu sein, eine Vorstellung, die man auch bei anderen Völkern antrifft — so hielten die Griechen den Olymp für die Mitte der Welt, die Juden Jerusalem[14]) usw. — waren sie auch dazu berechtigt, sich einen ersten Meridian zu geben, der über ihrem Haupt dahinzog. Er ging vom Südpol aus und traf am Äquator die Insel Lanka, wo nach der Sage beim Ursprung der Welt die Konjunktion der sieben Planeten stattgehabt hätte.[15]) Dann passierte er die Stadt Odjeni, die Hauptstadt von Malva und endigte am Nordpol im Berge Meru. . Es heißt im Vers 62 des Sûrya-Siddhânta: „Auf der Linie, welche den Aufenthaltsort der bösen Geister und den Berg, der Sitz der Götter ist, geht, sind Rohîtaka und Avantî sowie der angrenzende See gelegen.“ Burgess fügt diesem Vers folgende Erläuterung hinzu:

---

[14]) Georgii: Alte Geographie, Stuttgart 1838, I, S. 2.

[15]) Eine gerade Linie gezogen von Lanka durch den Erdmittelpunkt würde den ersten Stern des Widders getroffen und das Zentrum der Sonne und der sieben Planeten passiert haben (Sédillot: Mém. sur les syst., p. 688).

„Der Wohnsitz der Dämone ist Lanka.[16]) . . . Nach dem Epos Râmâyana und der allgemeinen Vorstellung der Hindus ist Lanka die Insel Ceylon; in der mathematischen Geographie jedoch ist es eine Stadt, die auf dem Äquator liegt. (Vgl. auch Vers 39 des Kap. XII: „. . . Nach Süden im Klima Bhârata ist in gleicher Weise die große Stadt Lanka gelegen.') Inwieweit diejenigen, welche den Meridian einführten, die gegenwärtige Lage als identisch mit der von Lanka betrachtet haben, dürfte nicht leicht zu entscheiden sein. Der Sitz der Götter ist der Berg Meru, auf dem Nordpol gelegen. Der Meridian wird gewöhnlich als der von Lanka bezeichnet, und ‚at Lanka' ist ein Ausdruck, der eine Lage ohne Länge und Breite anzeigt.[17]) Aber der Umstand, welcher die Position des ersten Meridians wirklich festlegt, ist die Lage der Stadt Ujjayinî, das Ὀζήνη der Griechen, das moderne Odjein, in alten Büchern Avanti genannt, nach Warren 75° 47′ östlich von Greenwich gelegen."

Hingegen ist die Lage von Rohîtaka nicht so klar. Es gibt kein Werk über die alte Geographie von Indien, wo es erwähnt wäre. Thoronton (Gazetter of India, London 1867, p. 836) nennt Rohtuk westlich von Delhi (76° 38′ oder 76° 51′ ö. v. Gr.) und dies ist wahrscheinlich identisch mit Rohîtaka, der angrenzende See ist nach Bhâskara die Gegend von Kurukschetra (Sidd.—Sirom. VII, 2). Er sagt, daß die Linie, die durch Lanka, Ujjayinî und die Gegend von Kurukschetra geht, als Zentralmeridian (madhyarekhâ) der Erde betrachtet werde. Wenn also Odjeni und Rothuk auf demselben Meridian liegen sollen, so hätten wir hier einen Maßstab für die Genauigkeit der indischen Längenbestimmungen. Es bliebe eine Differenz von 76° 38′ (51′)—75° 47′ = 0° 51′ (1° 4′).

Interessant sind auch die Ausführungen Abulfedas über eine indische Ansicht in dieser Frage. (Vgl. M. Reinaud: Géographie d'Aboulféda.) Im I. Band dieses Werkes, der den Titel führt: Introduction générale à la Géographie des Orientaux, Paris 1848, p. 213 liest man, daß die Inder die Erde in vier Quadranten geteilt hätten, von denen jeder einen Raum von 90° einnimmt. Unter dem Äquator und dem Meridian der Inder lag eine Insel,

---

[16]) Siehe auch Georgii: Alte Geographie I, S. 303.

[17]) Manchmal wird die Kuppel von Arîn auch als Adam al Arḍ (Nichtvorhandensein der Breite) beschrieben, z. B. bei al Charaqqî († 1138, das Höchste, was man bei den Teilungen usw.), E. Wiedemann, S. 9.

genannt Lanka. 90° westlich von Lanka findet man Romaka oder das Land der Römer, und 90° östlich von Lanka Yamacota, d. i. wahrscheinlich Japan. Endlich war bei den Antipoden von Lanka Siddapur oder die Stadt der Wahrheit, welche in Wirklichkeit Amerika entsprach, und welche für die Inder etwa dasselbe war, was die insulae fortunatae für die Griechen und Römer. Der Berg Meru findet sich von den genannten Orten um 90° nach Norden entfernt (Sumeru).

Auch Albîrûnî (973—1038), der alle seine Werke in Indien schrieb, geht auf einzelne Details über die Insel Lanka ein. (Vgl. sein India, geschrieben 1031, englisch herausgegeben von E. C. Sachau, London 1888, 2 Bände, 1. Band, Kap. 29 und 30, einige Kapitel hat auch Reinaud in französischer Sprache im Septemberheft des Journal asiatique, 1844 veröffentlicht.) Er sagt darüber etwa das, was im Sur.—Siddh. steht, glaubt aber nicht, daß Lanka identisch mit Ceylon sei. Er gibt auch eine Abbildung des Schlosses von Lanka. Auch ein ehemaliger persischer König soll ein Schloß erbaut haben, das Kangdiz genannt ward. Der König hieß Kaï-Kosru. Nachdem er durch mehrere Königreiche nach Osten bis China vorgedrungen war, habe er das Schloß oder diese Stadt gebaut, wo nachher auch mehrere chinesische Kaiser residierten. Auch soll sich nach Reinaud im 2. Buche der Zendavesta (der heil. Schrift der Parsen) die Angabe finden, daß in der Richtung von Korassan,[18]) mitten im Meer, ein Land des Namens Kangdiz und anderes Vardjem guerd.[19]) liege. Djem guerd bezeichnet nach Reinaud im Persischen das Schloß des Djem, und diese Benennung ist identisch mit derjenigen von Yamacota oder Schloß von Yama.[20]) So finden wir über dies Eiland unter dem Äquator bei Indern und Persern dieselbe Le-

---

[18]) Kor ist Synonym von Sonne, und man hat es daher in Zusammenhang mit den Orten gebracht, wo die Sonne sich erhebt. assan = Ort der Ruhe. (Also Korassan vielleicht = Sitz der Sonne.)

[19]) Guerd erinnert an die persische Bezeichnung Darabguerd (Schloß des Darius) und an die armenische Tigranocerte (Schloß von Tigrane).

[20]) „In dem persischen Lexikon Borhani-cathi liest man: ‚Kang ist der Name einer in der Mitte des Meeres gelegenen Insel im Osten von Khatay. Die Tage und Nächte sind dort immer gleich lang, die Temperatur ist äußerst gemäßigt; man genießt dort einen ewigen Frühling. Dort findet sich das Schloß Kang-diz.' Und an einer anderen Stelle liest man: ‚Kang-diz ist ein im äußersten Osten der Welt gelegener Ort und wird Kuppel der Welt genannt. Es ist der Aufenthalt der Feen.' (Reinaud: Géogr. d'Aboulf., p. 223.)

gende. In der Tat soll auch der persische Astronom **Abul Mascher**, der im 9. Jahrhundert lebte, die geographische Länge vom Schloß Kang-diz aus gezählt haben.[21]

Damit werden wir von selbst zum **arabischen** Zentralmeridian hinübergeführt, über dessen Lage man sich nicht leicht einig werden dürfte. Wie er wohl in die arabische Geographie hineingetragen wurde, schildert uns überzeugend **Reinaud**:

„Als die ersten indischen Werke unter dem Kalifat Al-Mansors arabisch interpretiert wurden, da fiel den arabischen Geistern diese Art des Zentralmeridians lebhaft auf. Man hatte nur noch eine vage Idee vom östlichen Asien, aber man zögerte nicht mit der Erkenntnis, daß die Ptolemäische Geographie in vielen Punkten reformbedürftig sei. Die Existenz eines Zentralmeridians hatte für sehr viele Autoren etwas Verlockendes, und der Ort, von dem man vermutete, daß er vom Zentralmeridian geschnitten würde, empfing den Namen „Kuppel der Welt". In der Sprache der Araber und Perser hat das Wort Kuppel eine sehr ausgedehnte Bedeutung. Es bedeutet ein Zelt, einen Pavillon, mit einem Wort alles, das die Nachbarschaft überragt, sei es ein Gewölbe oder sonst ein Punkt. Noch mehr, es bedeutet einen Ort, der andere Örter überragt und unter denselben eine Art dominierender Stellung (suprématie) einnimmt. So kam es, daß Mekka von den frommen Muselmanen Kuppel der Welt genannt wurde. In diesem Sinne verdiente auch Lanka mit vollem Recht den Namen Kuppel der Welt,[22] und mit Rücksicht auf den Eifer, mit dem die Araber die Idee eines Zentralmeridians aufnahmen, war seine Supposition nur zu natürlich; erlaubte er doch, auf einmal die Längen nach Ost und West zu zählen. Noch heute bedienen sich unsere Nautiker des ersten Meridians in doppeltem Sinne."

Fragt man nun aber nach der genaueren Lage des Meridians von Arin, so erhält man aus den darauf bezüglichen Literatur-

---

[21] Man kennt auch **persische Karten** mit der Weltkuppel. **De Santarem** sagt in seinem trefflichen Essai sur l'histoire de la cosmographie et de la cartographie pendant le moyen-âge, Paris 1848, t. I, p. 374: „. . . wie wir sie (die Weltkuppel) auf einer persischen Weltkarte sehen, welche man in dem pers. Ms. Nr. 62 d. königl. Biblioth. nat. zu Paris findet, wovon ich eine Kopie besitze, die mir Herr de **Slane** gegeben hat. Man sieht dort die Weltkuppel als eine Insel in der Mitte der Welt erhaben über ihre Umgebung dargestellt, westlich von Indien, östlich von Arabien. Man sieht die Erde rings vom Ozean umflutet und diesen wiederum durch die Berge von Kaf begrenzt."

[22] Von **Albirûni** auch so genannt.

angaben nicht ohne weiteres die gewünschte Aufklärung. Dies hat uns veranlaßt, etwas eingehendere Nachforschungen über Arîn anzustellen, das in der ausländischen Literatur öfters, in der deutschen kaum genannt wird.

A. v. Humboldt schrieb 1837 an L. Am. Sédillot: „Je mehr Schriften wir zusammenbringen, desto dunkler wird die geographische Lage von Khobbet Arîne; das ist etwas beschämend für uns; denn wir wissen das nicht mehr, was zur Zeit eines Christoph Columbus noch im Gedächtnis aller Völker des Abendlandes war, denen die Wissenschaft von den Arabern zufloß.“ Und im 3. Bande seines Werkes über Zentralasien (Asie centrale, Recherches sur les chaînes de montagne et la climatologie comparée, Paris 1843, p. 292) gesteht Humboldt, sechs Jahre hindurch sich eifrig um Aufklärung über die Kuppel von Arîn bemüht zu haben. Wir kommen auf die Humboldtschen Nachforschungen weiter unten zurück.

Schon vorher, 1834, gab J. J. Sédillot dem 69. Kapitel des I. Bandes seiner Herausgabe Abul Hassans folgende Anmerkung bei: „Khobbet Arîne bezeichnet Kuppel von Arîn, und unser Autor läßt uns in der größten Ungewißheit über die Lage dieses Ortes, an dessen Westhorizont er seinen ersten Meridian verlegt. Man sieht nur, daß seine Methode der Längenzählung auch von mehreren anderen Astronomen und Geographen des Orients mußte adoptiert worden sein, da zu seiner Zeit noch Finsternistafeln existierten, die für Arîn berechnet waren, und der Vergleich der Hassanschen Längenangaben mit unseren modernen zeigt, daß Arîn etwa 80° östlich von der Insel Ferro gelegen sein mußte. Ich möchte daher vorschlagen, es mit der Stadt Arîn-Giân zu identifizieren, die in der Provinz Samarkand gelegen ist. Sie scheint dem Längensystem Abul Hassans zu genügen. Diese Frage scheint mir der vollen Aufmerksamkeit des Instituts[23]) wohl würdig, weil sie sich auf ein geographisches System bezieht, dessen Ursprung zu kennen höchst merkwürdig wäre und dessen Durchforschung einiges Licht auf den Stand der Geographie in Asien zu einer Zeit werfen könnte, wo es eingeführt wurde.[24])

---

[23]) Gemeint ist wohl das Bureau des longitudes.

[24]) „Khobbet Arîne ist vielleicht auch ein Beiwort von Balkh in Korassan, das auch den Beinamen Khobbet-al-Sélam = la Tour du Salut hat“ (Séd.).

In diese Unsicherheit suchte ein geistreicher Versuch **Biots** Aufklärung zu bringen. In der uns schon bekannten Abhandlung will er zahlenmäsig den Beweis seiner Behauptung erbringen, „daß der Zentralmeridian des Ptolemäus identisch ist mit demjenigen, unter den Abul Hassan den reellen oder ideellen Ort Khobbet Arîne stellt“. Dazu dient ihm die Längentabelle Abul Hassans, die bekanntlich 131 Orte umfaßt. Von diesen vermochte **Reinaud** 43 mit Sicherheit wiederzuerkennen. Wenn nun, so argumentiert **Biot**, sich aus diesen 43 Daten dieselbe Lage für den arabischen Zentralmeridian ergibt, wie er ihn aus den sieben Orten der Ptolemäischen Tafeln errechnete, so ist damit ohne weiteres einleuchtend, daß der Ptolemäische und arabische Zentralmeridian identisch sind. Daß **Ptolemäus** auch von einem solchen Zentralmeridian ausging, suchte **Biot** durch die Tatsache zu stützen, daß Alexandria nach Ptolemäus der $60^1/_2$ Längengrad eignet, während er sonst in seiner Längenzählung nur um ganze Grade fortschritt (?). Dieser Zwischenwert kann zweifellos nur aus dem Intervall resultieren, welches **Ptolemäus** zwischen Alexandria und seinem Zentralmeridian zuließ, lag doch nach Boit nichts näher und natürlicher, als die am besten bekannten Orte zunächst um Alexandria zu gruppieren und dann für die definitive Konstruktion des Weltbildes einen Zentralmeridian zu wählen. Auch für die Abhängigkeit der Araber von Ptolemäus gibt Biot verschiedene Belege. Sie waren nicht imstande, sein System durch ein völlig neues zu ersetzen. Ihre Vervollkommnungen bestanden nur in kleineren quantitativen Zutaten und Verbesserungen des Ptolemäischen Materials. So behielten sie auch die 180° Ostwestausdehnung bei; indem sie aber die ungenaue Lage des ersten Meridians erkannten, selbst aber nicht bis zu den Kanarischen Inseln kamen, um die Irrtümer des Ptolemäus in dieser Hinsicht zu rektifizieren, lag für sie nichts näher, als von einem reelleren, inneren Meridian aus die Längen zu zählen. Und dazu schien ihnen zweifellos der Zentralmeridian des Ptolemäus am geeignetsten.

Selbst Abul Hassans Tabelle weist noch auf griechischen Ursprung hin. Auch Hassan zählt von West nach Ost. Aber der eklatanteste Beweis sind zwei Angaben Hassans über jene Längengrade, die Turkestan und China durchziehen. Für sie finden sich die zwei nämlichen falschen Werte (120°, respektive 177°) wie bei Ptolemäus, die beweisen, daß sich Hassan hier einfach die griechische Angabe zu eigen machte,[25]) was er um so eher konnte, als er zweifellos den Ptolemäischen Zentralmeridian auch zu dem seinigen machte. Daß trotzdem bei den Arabern sich kein Hinweis auf diesen griechischen Mittelmeridian findet, erklärt sich nach Biot damit, daß sie denselben zu verschleiern suchten, von dem Wunsche beseelt, sich ein geographisches System zu schaffen, welches ihrer Nation eigen ist. Reinaud vermochte aus der Längentabelle Abul Hassans 43 Orte mit modernen zu identifizieren. Aus deren Längen nach Hassan und nach modernen Angaben berechnete Biot die mittlere Länge der Kuppel von Arin zu 55° 47′ 38″ östlich von Paris. Daß dieser Wert nicht weit von demjenigen des Ptolemäischen Mittelmeridians abweichen würde, war eigentlich vorauszusehen. Damit ist nach unserer Meinung keine neue Erkenntnis gewonnen, die zu den Biotschen Schlüssen zwingt, abgesehen davon, daß es nicht unbedenklich ist, Längenangaben, nach denen die Westostausdehnung Kanarien—China 180° umfassen soll, während sie in Wirklichkeit nur 140—150° beträgt, mit unserem modernen Längengradsystem zu verknüpfen.

Diesen nicht vollständig überzeugenden und von modernen mathemathischen Anschauungen durchsetzten Darlegungen Biots möchten wir die Lösung der Arînfrage durch M. Reinaud gegenüberstellen, die nach unserem Dafürhalten durchaus ungezwungen und natürlich ist. Reinaud geht von der Tatsache aus, daß die Araber bei der Übersetzung indischer Werke leicht der Gefahr ausgesetzt waren, ein Wort in veränderter Form und damit auch Bedeutung in ihre Sprache zu übertragen. „Man sah, daß die Inder ohne Unterschied ihrem ersten Meridian die Bezeichnung von Lanka oder Odjein gaben, und diese letzte Bezeichnung war es, die in die arabischen Übersetzungen überging. Und nun wird das dj der Inder im Arabischen sowohl durch dj als auch durch z wiedergegeben. Die arabischen Übersetzer schrieben Ozein.[26])

---

[25]) Dies tun fast alle arabischen Astronomen mit den Tafeln ihrer Vorgänger.

[26]) Ein ähnlicher Fall liegt bei dem Worte sinus vor. Die Inder gebrauchten für die halbe Sehne das Wort dschyâ oder dschîva und schrieben es dem Wortlaut nach dschiba. Durch Vergessen der sogenannten diakritischen Punkte ist die Möglichkeit gegeben, auch dschaib zu lesen, eine Lesart, die den Arabern um so näher lag, als dschaib ein wirkliches arabisches Wort ist, das Busen, Herz, Bausch, Tasche bedeutet. Ein der Mathematik wenig kundiger mittelalterlicher Übersetzer arabischer Schriften ins Lateinische gab dann dschaib durch sinus wieder.

Vor ihnen hatte **Ptolemäus** in seiner Geographie 'Οζήνη geschrieben. Aber in arabischen Mss. läßt man oft die Vokale aus und die Mehrzahl der Leser, denen der Name der Stadt Odjein nur ein Wort ohne Inhalt und daher gleichgültig war, gewöhnte sich, Azin auszusprechen. Nun gab es Mss., wo der Kopist den Punkt vergessen hatte, der das z von r unterscheidet, so daß man auch Arin statt Azin lesen kann. Von da ab verloren die arabischen Autoren die Korrelation, die zwischen Azin, Arin und Odjein besteht,[27] ganz aus den Augen. Odjein, dessen Name unbekannt war, ward als ein fiktiver Ort aufgefaßt, der am Rande des Meeres unter dem Äquator lag.“ (**Reinaud**, a. a. O. S. 240.)

Eine sehr bemerkenswerte etymologische Herleitung des Wortes Arin gab neulich O. A. **Nallino** in seiner „Geschichte der Astronomie bei den Arabern im Mittelalter“, Rom 1911/12, S. 155,[28] wo es heißt: „Die Araber nennen die Stadt Uggajinî Uzain. Im Anschluß an das Werk Sindhind bemerkten sie, daß die Längen vom Meridian von Uzain aus gezählt wurden; dann identifizierten sie irrigerweise Uzain mit Qubbat al Arḍ (Kuppel der Erde). Endlich schrieben sie dies Wort falsch und sprachen von Arîn und Qubbat Arîn.“ (Nach E. **Wiedemann**, Beiträge, XXVII, S. 13.)

Damit glauben wir auch der Frage nach der Etymologie Arîns genügt zu haben.[29] Vom **geographischen** Standpunkt aus interessieren vielmehr die Fragen: Hatte Ptolemäus wirklich einen mittleren Meridian seines Weltbildes ausgezeichnet und ihm bewußt eine wissenschaftliche Bedeutung beigelegt? Haben die Araber von Ptolemäus die Idee eines Zentralmeridians übernommen, wie **Biot** glaubt? Und welcher moderne Längengrad

---

[27] Nach **Reinaud** schreibt sich im Arabischen Ozein = أُزينْ; Azin = أزين; Arin = أرين.

[28] Leider ist dies Werk des trefflichen Gelehrten nur in arabischer Sprache erschienen; es ist aus Vorträgen entstanden, die Nallino zu Kairo hielt.

[29] Andere etymologische Erklärungsversuche von Arîn gehen z. B. auf die Insel Arions, des Sohnes von Neptun, oder auf das einfache persische Wort arim (= erste), oder auf Iran (Persien) zurück. Vgl. besonders auch den Versuch von **Perron** in einem Briefe an L. A. **Sédillot** (7. Mai 1849), worin er nachweisen will, daß Arin unter dem Meridian von Arianie (auch Montagne d'Uranos) liege, der nahe der Insel Sokotra vorbeigeht. (L. A. **Sédillot**: Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux, Paris 1849, t. II, p. 665 et 748.)

dürfte sich am ehesten mit demjenigen decken, der durch die einstige Weltkuppel der Araber ging? (Siehe Anm. *f* am Schlusse dieses Artikels.)

Bekanntlich ließ Ptolemäus für die Ausdehnung der damals bekannten Welt durch 225 Längengrade (nach Marinus) deren nur 180 zu. Diese glatte Zahl von zweimal 90 Graden und die Wahl einer Kegelprojektion für die Darstellung der Erde sind Gründe, die wohl zu einem Mittelmeridian drängen, um den sich das Weltbild gruppieren kann. Allein Ptolemäus ließ diese Momente unbeachtet; er spielte nicht die fortschrittliche Rolle als Geograph, die ihm Biot gerne zuerteilen möchte. Dies ergibt sich deutlich aus dem zweiten Buche seines Almagest, wo er davon spricht, daß es nun noch nötig sei, die bemerkenswertesten Orte nach ihrer Länge und Breite zu placieren, die nach cölestischen Phänomenen bestimmt sind, und wobei er vom Meridian von Alexandria ausgeht. (Almag. I, S. 129.) Er würde sicherlich hier von der Längenreduktion auf den Zentralmeridian gesprochen haben; statt dessen macht er seine Längenangaben nach Marinus von Tyrus, den er bis zum 125. Grad getreulich kopiert.

Hingegen mußte sich den Arabern notwendigerweise die Idee eines Mittelmeridians durch die Kenntnis der indischen Wissenschaft aufdrängen. Allein er konnte niemals mit dem von Biot statuierten Ptolemäischen identisch sein. Als die Araber nach Nordafrika und Spanien vordrangen, da wurde ihnen die allzugroße westöstliche Ausdehnung des Mittelmeeres nach Ptolemäus klar. Indem sie jedoch an den 180 Längengraden des griechischen Meisters festhalten wollten, sahen sie sich gezwungen, den Nullmeridian weiter über die Kanarischen Inseln hinaus in den Atlantischen Ozean zu verlegen und somit die 180° Länge, die Ptolemäus zwischen den Kanarischen Inseln und China zuläßt, nochmals zu verringern.[30]) Die Araber glaubten, von diesen 180 Graden 17° 30′ wegnehmen zu müssen, so daß nunmehr der 90. Längengrad des Ptolemäus nach ihren Festsetzungen nur 72° 30′ von den Kanarischen Inseln nach Osten abstand. Ihr Null-

---

[30]) Wir folgen hier den lichtvollen Ausführungen L. A. Sédillots in seinem Mémoire sur les systèmes géographiques des Grecs et des Arabes. Der anscheinend viel zu wenig gekannte Traktat findet sich sowohl im 7. Teil des 2. Bandes des Sédillotschen Werkes Matériaux pour servir etc. (p. 660—727), als auch als selbständige Schrift, Paris 1842, in 4°. Wir zitieren nach den Matériaux.

meridian lag damit im Atlantischen Ozean. Sie nannten ihn den wahren, den Meridian durch die Kanaren den bewohnten Okzident. Jetzt ist uns auch die bereits bei Arzachel konstatierte doppelte Längenangabe von Toledo verständlich[31] (11° in bezug auf die Kanaren, $28\,^1/_2{}^\circ$ in bezug auf den wahren Okzident). Freilich hatten die Araber nicht längs ihres ganzen Reiches, also durch ganz Nordafrika und Arabien hindurch eine entsprechende Reduktion der Ptolemäischen Längenangaben vorgenommen, sondern hauptsächlich im Westen, das durch einen regen Handel und Verkehr mit den östlicheren und südlichen Gebieten in Verbindung stand. Durch zahlreiche Reisen, auch von Fachgelehrten, sind die geographischen Positionen vieler Orte gegenüber Ptolemäus sehr verbessert worden, wie die folgende Tabelle (nach Sédillot) zeigen wird. Aus dieser ist auch zu erkennen, daß eine Anzahl Orte eine nahezu konstante Differenz (etwa $16\,^1/_2{}^\circ$) mit den Ptolemäischen Längenangaben aufweist.

| Name der Städte | Differenz der arab. und griech. Längen | Differenz der arab. und modern. Längen |
|---|---|---|
| Sala . . . . | +17° 20′ | −0° 17′ |
| Cadix . . . . | +18° 50′ | +0° 3′ |
| Tanger . . . | +17° 40′ | −0° 22′ |
| Méquinez . . . | +16° 45′ | −0° 42′ |
| Fez . . . . . | +16° 45′ | −0° 35′ |
| Ceuta . . . . | +17° 50′ | −0° 38′ |
| Sevilla . . . . | +18° 25′ | +0° 17′ |
| Tlemcen . . . | +16° 9′ | −0° 55′ |
| Oran . . . . | +16° 40′ | +0° 10′ |
| Tunis . . . . | +18° 0′ | +0° 50′ |
| Alger . . . . | +16° 30′ | +0° 46′ |
| Constantine . . | +10° 30′ | +0° 3′ |
| Bizerte . . . . | + 7° 18′ | +0° 28′ |
| Kairowan . . . | + 7° 45′ | +0° 5′ |

---

[31] A. v. Humboldt macht darauf aufmerksam (Asie centrale), daß auch in den Alfonsinischen Tafeln von dieser Duplizität die Rede ist. Die hierauf bezügliche Stelle lautet: „Nach Übereinkunft der Astrologen gibt es zwei Okzidente, einen bewohnten, der um $72\,^1/_2{}^\circ$ von der Stadt absteht, welche unter dem Äquator liegt. Auf der anderen Seite nehmen sie einen gegen den Okzident gewandten Okzident an einem Ort an, der von der Stadt Arîn 90° absteht, und diesen nennen sie den wahren Okzident; denn von diesem bis zum Orient sind es 180°. Der wahre Okzident liegt $17\,^1/_2{}^\circ$ jenseits des bewohnten Okzidents."

Der Ausgangspunkt für die Zählung der modernen Längen ist nach Sédillot die Insel Fayal in den Azoren.

Wenn man das von den Arabern statuierte Arîn unter $72^1/_2{}^0$ östlich der Insulae fortunatae gelegen annimmt, so geht nach Sédillot sein Meridian nur 30′ neben Tovin (Tébènes) vorbei, welches auch als Ausgangspunkt der Längenzählung bei den Persern betrachtet wurde. Da dieser Meridian östlich von Afrika den Indischen Ozean durchschneidet, so kann der Weltkuppel der Araber in Wirklichkeit keine Stadt und keine Insel entsprochen haben.[32])

Noch sei zum Schluß unserer Darlegung der Geschichte des Meridians von Arîn jener mittelalterlichen Erklärungsversuche gedacht, die kurz vor der Entdeckung von verschiedenen Gelehrten des Abendlandes gemacht wurden. Sie beweisen, daß keiner derselben jemals die Grenzen der im Altertum bekannten Welt überschritt. Tonangebend scheint Roger Bacos Opus Majus gewesen zu sein, wo es (Londoner Ausgabe, 1733) p. 195 heißt:

„In Wahrheit kommt der weit ausgedehnte Meridian Indiens vom Wendekreis des Steinbockes herunter, schneidet den Äquator beim Berg Maleus und den ihm angrenzenden Regionen und durchschreitet Syene, welches jetzt Arym genannt wird; denn im Buch über den Lauf der Planeten wird gesagt, daß es zwei Syene gebe, eines auf dem nördlichen Wendekreis, das andere auf dem Äquator. Von letzterem ist jetzt die Rede, und dies ist die Stadt Arym, welche die Mathematiker in die Mitte der Welt unter den Äquator verlegen und welche gleichweit vom Osten und Westen, Norden und Süden absteht.“

Ähnliches soll sich nach A. v. Humboldt auch in den Schriften des scholastischen Philosophen und Kosmographen Peter von Ailly (1350—1426; Petrus de Aliaco, auch de Aylliaco, Pedro de Heliaco) finden, so in dessen Imago Mundi, Kap. IV und in den Mappae Mundi, Artikel de figura terrae. (S. Anm. *g* am Schlusse dieses Artikels.) Es ist sehr wahrscheinlich, daß auch Christoph Columbus den Begriff von der Kuppel von Arîn

---

[32]) Auch in den Mafâtîh finden sich mehrere geographisch interessante Stellen, z. B.: „Bârah (nach Ibn Baṭûṭa: Bârah Nagar, vielleicht die Nikobaren?) ist der Name einer Stadt auf einer Insel des größten Meeres in der Nähe der Qubba. Ihr liegt von diesen unseren Orten gegenüber Chuganda“ (in Transoxanien mit einer Länge von 90° 35′ vom wahren Okzident [Azoren]). (Vgl. E. Wiedemann, a. a. O. S. 29.)

aus den Werken des Kardinals d'Ailly erhielt, der einen großen Einfluß auf die Pläne des Columbus ausübte, obgleich seine Werke nur ein Abglanz des Opus Majus waren. Auch von Columbus selbst weiß Humboldt ein Dokument anzuführen, das sich auf Arin bezieht. Es ist ein Brief an die Königin Isabella (1498), dessen Inhalt Humboldt in seinem Examen critique de l'histoire de la géographie du nouveau continent et des progrès de l'astronomie nautique au XV et XVI siècle (Paris 1814—1834, 5 Bände, tome III, p. 64) näher analysiert.[33])

Dies zweite Syene unter dem Äquator haben nach der Meinung Reinauds (a. a. O. p. 244) Baco und d'Ailly nach dem Vorgang Gerhards von Cremona erfunden, der ein doppeltes Cadix annimmt, das eine im Osten, das andere im Westen.[34]) Ferner denkt Reinaud an die Möglichkeit, daß die Erwähnung einer Insel unter dem Äquator "Εσσινα ἐμπόριον durch Ptolemäus (Geogr., lib. IV, cap. VII) durch die frappante Ähnlichkeit des Namens mit dem ägyptischen Syene den abendländischen Kosmographen Anlaß zur Einführung eines zweiten Syene gegeben hätte. (Vgl. auch Reinaud: Mémoire géographique historique et scientifique sur l'Inde, Paris 1849, p. 380.)

Aber mit der Entdeckung der neuen Welt versank die Kuppel der alten im Meere, und all die Legenden von dem rätselhaften Arin, das niemand je geschaut, fielen der Vergessenheit anheim. Den französischen Orientalisten J. J. Sédillot, L. Am. Sédillot und Reinaud, im Verein mit Humboldt, Santarem und Biot gebührt das Verdienst der Wiederbelebung dieses eigenartig interessanten Kapitels der Geschichte der mathematischen Geo-

---

[33]) In demselben macht Columbus eine Anspielung auf die Theorie der Nichtkugelgestalt der Erde, indem er der irregulären Figur der Westhemisphäre und des Atlantischen Ozeans, wo eine sanfte Hervorragung der Meeresoberfläche das Ende des Orients markiert, die Osthemisphäre gegenüberstellt: „Die alte Welt vom Kap St. Vincent bis Kattigara hat Arin unter dem Äquator zum Mittelpunkt und ist sphärisch, aber die andere Hälfte hat die Form einer halben Birne; 100 Meilen westlich von den Azoren hebt sich die Erde unter dem Äquator und die Temperatur ist erfrischend. Der höchste Teil, d. h. der Stiel der Birne, liegt bei der Insel Trinidad, gegenüber der Orinokomündung."

[34]) Die hierauf bezügliche Stelle hat Christmann in seinen Alfragani elementa, Francfort 1618, p. 64 publiziert; sie findet sich in den lat. Mss. der königl. Bibliothek zu Paris als Nr. 7421 und lautet: „Arim distat ab utrisque Gadibus, scilicet Alexandri et Herculis aequaliter. Distat enim a Gadibus Alexandri positis in oriente, 90 gradibus, et a Gadibus Herculis, positis in occidente 90 gradibus et ab utroque Polo 90°."

graphie, von dem man in der deutschen Literatur so gut wie nichts findet. Möchte unser Traktat dazu beitragen, daß es in künftigen Werken über Geschichte der Erdkunde wieder das ihm gebührende Plätzchen findet!

## Anmerkungen und Zusätze.

*a)* Besonders Wasser- und Sanduhren dienten zur Zeitbestimmung bei Nacht. Über Wasseruhren, die durch allerlei oft wunderbare Vorrichtungen die (gleichen) Stunden anzeigten, vgl. E. Wiedemann: Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften (Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät, Erlangen, Heft III, S. 255, V, S. 408, VI, S. 11, X, S. 348), daselbst (V, S. 411) sind auch die rätselhaften Uhren, die alle Stunden Kugeln werfen, aufgeklärt, worüber ich in meiner Arabischen Gnomonik nur die nicht recht verständliche Übersetzung Carra de Veaux' anzuführen wußte. Besonders sei noch auf die Beschreibung der wunderbaren Uhr hingewiesen, die den Palast des Königs von Tlemcen schmückte. (Wiedemann, V, S. 414.) Nach Wiedemann zeigten die Uhren nachts dadurch die Zeit an, daß Kerzen oder Lampen nacheinander zwölf Stundenringe beleuchteten. Auch bei den Chinesen bestimmte man die Stunden mit der Wasseruhr. Dies folgt aus Ed. Biots: Traduit et Examen d'un ancien ouvrage chinois intitulé Tscheou-pei (Journal asiatique, Juniheft 1841, p. 622). Ptolemäus unterscheidet bürgerliche und gleiche Stunden (Almagest I, S. 98, Ausgabe von Manitius). Erstere sind $^1/_{12}$ des Tagbogens der Sonne, letztere entsprechen einem Stundenwinkel von 15°. Die Verwandlung der einen in die andere geschieht sehr einfach durch Benutzung von Tabellen. Ptolemäus gibt Bruchteile von Stunden in Graden des Stundenwinkels an; die Araber scheinen die ersten gewesen zu sein, die die Sexagesimalrechnung auf die Stundenrechnung anwandten. In der Genauigkeit der Zeitangaben scheint Ptolemäus über $^1/_4$ bis $^1/_6$ Stunde nicht hinauszugehen (bei der Charakteristik der Zonen zwischen verschiedenen Parallelkreisen nur von $^1/_4$ Stunde zu $^1/_4$ Stunde, Almagest S. 71). Vgl. auch G. Bilfinger: Die antiken Stunden, Stuttgart 1888 (S. 89—109, Stundenbrüche). Bilfinger glaubt (S. 89), daß Albîrûnî im Osten zuerst das Sexagesimalsystem auf die Stunden anwandte. Ich finde es bei Ibn Jûnis ebenfalls erwähnt in einer Mitteilung J. J. Sédillots in seinem Traité des instruments etc., I. Bd., S. 299, die uns über die Ermittlung der Dauer der Dämmerung bei **Ibn Jûnis** aufklärt. Nach **Delambre** (Hist. de l'astr. du moyen âge, S. 21) wandten die Araber die temporären Stunden noch ausschließlich bis gegen 900 an; auch **Al-Battâni** verwandelte die Stunden stets in Grade wie **Ptolemäus**. Von **Delambre** erfahren wir ferner, daß **Ibn Jûnis** die Zeit des Beginnes einer Finsternis nach der augenblicklichen Höhe eines bekannten Sternes (z. B. Aldebaran, Arktur), die er mit dem Astrolabium ermittelte, bestimmte. Dies war nur in ganze Grade geteilt. Daraus ist die Genauigkeit der Messung zu ersehen. Mit dieser ziemlich ungenauen Höhe, die noch durch die Refraktion entstellt war, wurde dann der Stundenwinkel des Sternes und damit die Zeit gefunden, jedoch nicht nach dem Kosinussatz, sondern mit Kenntnis des Azimuts aus dem Sinussatz. (Über Astrolabien bei den Arabern vgl. E. **Wiedemann**: Beiträge X, S. 32 und 33, woselbst noch mehr Literatur angeführt ist. Astrolabium kommt von aṣtar = Stern und lâbûn = Anblick.)

Auch **Abul Hassan** lehrt die Verwandlung der gleichen Stunden in ungleiche und umgekehrt (I. Bd., S. 248) durch eine einfache Proportion. Will man jedoch einen allgemein gültigen Ausdruck für die Dauer einer Temporärstunde bei beliebiger geographischer Breite des Beobachtungsortes und gegebener Sonnendeklination haben, so kann man in folgender Weise verfahren: Der halbe Tagebogen $s_0$ findet sich bekanntlich aus der Gleichung

$$\cos s_0 = - \operatorname{tang} \varphi \,.\, \operatorname{tang} \delta,$$
$$s_0 = \operatorname{arc} \cos (- \operatorname{tang} \varphi \,.\, \operatorname{tang} \delta),$$

mithin ist der zu einer Temporärstunde gehörige Stundenwinkel

$$\frac{s_0}{6} = \frac{1}{6} \operatorname{arc} \cos (- \operatorname{tang} \delta \,.\, \operatorname{tang} \varphi).$$

Dieser ist in Zeit zu verwandeln. Für den Einheitsradius kommt auf 360° der ganze Kreisumfang oder $2\pi$ als Bogen, mithin ist der Stundenwinkel einer äquinoktialen Stunde $= \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$. Man hat daher folgende Proportion:

$$\frac{\text{Temp. Stunde}}{\text{Äquinokt. Stunde}} = \frac{\operatorname{arc} \cos (- \operatorname{tang} \varphi \,.\, \operatorname{tang} \delta)}{6} : \frac{\pi}{12},$$

Also ist

$$1 \text{ Temp. Stunde} = \frac{2 \operatorname{arc} \cos (- \operatorname{tang} \varphi . \operatorname{tang} \delta)}{\pi} . 1 \text{ Äquinokt. Stunde}$$

$$= \frac{2 \operatorname{arc} \cos (- \operatorname{tang} \varphi . \operatorname{tang} \delta)}{\pi},$$

wenn man die äquinoktiale Stunde zur Zeiteinheit wählt. Diesen Bruch verwandeln wir in eine Potenzreihe unter Beachtung, daß $\operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin x$ und

$$\operatorname{arc} \sin x = x + \frac{1}{2} . \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} . \frac{x^5}{5} + \ldots$$

ist. Dann folgt

$$\text{Temp.Stunde} = \frac{2}{\pi} . \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{tang} \varphi . \operatorname{tang} \delta + \frac{1}{2} . \frac{\operatorname{tang}^3 \varphi . \operatorname{tang}^3 \delta + ..}{3} \right)$$

$$= 1 + \frac{2 \operatorname{tang} \varphi . \operatorname{tang} \delta}{\pi} + \frac{1}{3} . \frac{\operatorname{tang}^3 \varphi . \operatorname{tang}^3 \delta}{\pi} + \ldots$$

Die indische Astronomie unterscheidet zwischen Sonnen- und Sterntag (Sur. Siddh. XIV, 14, 19). Ersterer ist die Zeit zwischen zwei sukzessiven Sonnenaufgängen, letzterer die Zeitdauer einer scheinbaren Rotation des Himmelsgewölbes. Zur genaueren Bestimmung der Zeit führen die Siddhântas eine ganze Menge Instrumente an. So die Anwendung des Quecksilbers beim „wonder-causing-instrument", welches als eine rotierende Maschine, die durch Merkur getrieben zu werden schien, zu denken ist, den Gnomon, Stab, Bogen, das Rad, die Wasser- und Sanduhren usw., über welche die Siddhântas zum Teile im unklaren lassen (vgl. Sur. Siddh. XIII, Vers 19—24 und Siddh.-Çiromani, IX, astr. Instrumente). Es ist interessant, einer frappanten Ähnlichkeit zwischen arabischen und indischen Uhren zu begegnen. Erstere hatten oft Vögel (Raben), die alle Stunden Kugeln aus dem Schnabel in ein Metallbecken warfen. Von den Indern erfahren wir, daß an ihren Uhren Pfauen und Affen Sand und dergleichen aus dem Schnabel, beziehungsweise Maul träufeln ließen. Der Sur. Sidd. nennt den Gebrauch solcher Instrumente zum Teil schwierig und betont, daß das beste Zeitmeßwerk der

Gnomon bei klarem Sonnenschein sei. Jedoch ist hier zu bemerken, daß die Inder keine eigentliche Sonnenuhr mit Stundenlinien kannten, sondern ähnlich den Chinesen eine Schnur von der Spitze des Gnomons zur Erde spannten, so daß dieselbe schattenlos war und dann die Richtung zur Sonne angab. Wir werden über diese Dinge in unserer „Geschichte der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie" ausführlich handeln.

*b)* Ptolemäus stellt im Almagest ausführliche Breiten- und Längenangaben in Aussicht, die er am Schluß seiner Γεωγραφικὴ ὑφήγησις bringt. Sie belaufen sich auf nicht weniger als 350 Städte und andere wichtige Punkte (VIII. Buch), die Längen sind auf den Meridian von Alexandria bezogen. Selbst auf Ceylon nennt er 20 Städte und zählt 19 Malediven und Lakadiven; im ganzen kommen in der Ptolemäischen Geographie an 8000 Namen vor. Es ist nicht richtig, wenn das Brockhaussche und Meyersche Konversationslexikon angeben, daß der Anhang des I. Buches von Georgiis Alter Geographie (1838) eine deutsche Übersetzung der Ptolemäischen Geographie sei. Diese Übersetzung ist nie erschienen. Desgleichen ist die andere Angabe derselben Lexika unrichtig, es habe Halma eine französische Ausgabe dieser Geographie besorgt. Halma hat nur das 1. Buch (math. Geogr.) und einen Teil des 7. ins Französische übertragen (Paris 1828). Freilich gibt er in dem 41 Seiten langen Vorwort eine sumarische Übersicht über den Inhalt der 8 Bücher.

*c)* Von diesen 93 Angaben lassen sich verschiedene mit solchen des Ptolemäus identifizieren. C. A. Nallino hat im 2. Band seiner Albâttani-Ausgabe sehr wertvolle Winke zu ihrer genaueren Bestimmung gegeben (S. 33—36), unter vielfacher Benützung des J. Lelewelschen Werkes: Géographie du moyen âge (Bruxelles 1852, tome IV, p. 64—93). 1898 gab Nallino heraus: Le tabelle geografiche d'al-Battâni, Torino. Solche Tafeln finden sich in fast allen astronomischen Werken der Araber. In den Adnotationibus (II. Band, p. 209) stellt Nallino sehr lehrreiche Vergleiche an, aus denen unter anderem hervorgeht, daß Al-Battâni in seinem Werke über die Längendifferenz derselben zwei Orte verschiedene Angaben macht. So setzt er in tomo I, p. 56 die Längendifferenz zwischen seinem Beobachtungsort ar-Raqqah und Antiochia

amplius $10^{m}$ = 2° 30',
p. 57 aber fere $^{1}/_{4}$ horae = 3° 45',
in den Tafeln 73° 15' — 69° = 4° 15',
während der wahre Unterschied = 2° 55' ist.

Ferner gibt er in tomo I, p. 42 für die Längendifferenz ar-Raqqah —Alexandria an
$^{2}/_{3}$ horae = 10°,
in den Tafeln aber
73° 15' — 60° 30' = 12° 45'.
Der wahre Unterschied ist etwa = 9° 12'.

Nach Nallino sind von den in den Albâttanischen Tafeln aufgeführten 172 Städten 68 der Geographie des Ptolemäus, 57 den Tafeln al-Khowarezmis entnommen, und 47 stammen aus anderen arabischen Quellen (ca. 10 von Battâni selbst).

*d)* Bei J. Lelewel: Géographie du moyen âge, t. I, p. 43 steht, daß Delisle in den Notices et extraits ect. VII, p. 16 et suiv. eine französische Übersetzung des Ibn Jûnisischen Ms. gegeben hätte (!). Lelewel verschaffte sich eine Kopie der Tafeln des Ibn Jûnis. Nach dieser gibt er eine Analyse derselben und im Anhang zu tome I die arabische Kopie selbst. Dieselbe enthält 290 geographische Positionen, von denen 12 oder 13 doppelt aufgeführt sind. Damit verbleiben 277, von denen wiederum 51 verdorben sind, so daß noch 226 für die Konstruktion einer Karte verwendbar sind; aber nach Lelewel bietet das Leydener Ms. besondere Schwierigkeiten (oftmaliges Fehlen der diakritischen Punkte). Viele Angaben decken sich mit denen des Buches über die Figur der Erde (Rasm) von Khowarezmi. Für Kairo gibt Ibn Jûnis 55° Länge an, Khowarezmi 54° 40'. Nr. 7 des Lelewelschen Atlasses enthält die Weltkarte nach Ibn Jûnis. Lelewel versucht auch eine Aufklärung der abweichenden Jûnisischen Längenangabe von Kairo (55° statt 54° 40'), aber für sie wie für nähere Details möchten wir auf Lelewel selbst verweisen (tome I, p. 43—62). Nach Lelewel nahm auch Ibn Jûnis die astronomische Längenbestimmung durch Finsternisse vor. Von der Kuppel von Arîn erfahren wir nichts.

*e)* Auch über Arzachel findet man näheres bei Lelewel (I, p. 79), der dessen Tafel ebenfalls einsehen konnte. Chasles besaß eine Kopie des Werkes von Arzachel, die lateinische Übersetzung durch Gerhard von Cremona befindet sich in der Bibl. nat. (Nr. 7421).

*f)* Freilich, von dem „Nabel der Erde“ (ὀμφαλὸς Θαλασσῆς der Griechen, umbilicus terrae der Römer, der Khobbet-al-Arḍ) sprach man schon im Altertum, aber diese Idee ist ganz und gar verschieden von jener eines oder mehrerer Punkte einer ausgezeichneten Linie, von denen jeder als Weltkuppel betrachtet werden konnte.

*g)* Über Pierre d'Ailly und seine Werke vgl. besonders Lelewel, tome II, p. 71—78, der davon sagt: „L'ouvrage a été imprimé en 1480, suivante les apparences à Louvain chez de Westfalie. Quantité d'autres ouvrages sont en manuscrits.“ Außer der Abhandlung über das Planisphär scheint alles andere nur Ms. zu sein.

# Mittagslinie und Qibla

## Notiz zur Geschichte der mathematischen Geographie

von Oberlehrer Dr. Dr. C. Schoy, Essen a. d. R.

Unsere Lehrbücher der mathematischen Geographie behandeln in dem Kapitel „Orientierung" oder „Bestimmung der 4 Kardinalrichtungen", (Weltgegenden) gewöhnlich nur das Verfahren zur Auffindung der Mittagslinie mittels der sog. indischen Kreise. Selten erfährt man dabei den Grund dieser Benennung; von einem anderen Orientierungsverfahren oder gar von der Festsetzung der Qibla (Gesichtswendung gen die Ka'ba zu Mekka) ist überhaupt nicht die Rede. Es wäre aber durchaus wünschenswert, daß auch bei diesen zwei eng zusammenhängenden Kapiteln der astronomischen Erdkunde der bewährte Grundsatz befolgt würde, dem Lernenden auf historischem Wege die Einsicht in das Wissensgebiet zu vermitteln. Aber mehr als anderswo scheint es hier unseren Autoren an geschichtlichen Kenntnissen zu mangeln. Diese Vermutung veranlaßt mich, einmal kurz darzulegen, wie mannigfaltig die Lösung der vorstehenden Orientierungsaufgaben in früheren Zeiten war.

## I. Das Ziehen der Mittagslinie.

1. Das angeblich ägyptische Verfahren. Nach H. Nissen (Orientation, Berlin 1906—10, S. 43) weichen die Seitenflächen der großen Pyramiden von Memphis von den 4 Kardinalrichtungen nur um wenige Bogenminuten ab. Eine derartige Genauigkeit der Orientierung erforderte ein äußerst zuverläßiges Verfahren zur Auffindung der Mittagslinie. Zweifellos haben die alten Ägypter ein solches angewandt. J. B. Biot (1774—1862) denkt sich dasselbe also[1]: „Man beobachte an einem beliebigen Tage die Stelle des Sonnenaufgangs am östlichen Horizont und bringe beim Hervorblitzen des oberen Sonnenrandes ein Lineal (Meßlatte) in die Richtung des ersten Sonnenstrahls. Dies ist auf einer zuvor geebneten, erhöht liegenden Fläche ein Leichtes, da sich der Horizont bei der ungewöhnlichen Reinheit der ägyptischen Luft ringsum scharf abzeichnet. Dieselbe Operation vollführe man des Abends bei Sonnenuntergang, nur visiere man diesmal mit der Meßlatte nach dem zuletzt verschwindenden Sonnenrand. Markiert man nachträglich durch gerade Linien die zwei erhaltenen Richtungen auf der oberen Unterlage und halbiert ihren Zwischenwinkel, so wird man zur Zeit der Solstitien die Meridianrichtung auf diese Art sehr genau, zu anderen Zeiten mit einem Fehler von wenigen Minuten erhalten". Eine Quelle, aus der Biot schöpfte, teilt er uns nicht mit; er fügt seiner Darlegung den Schlußsatz hinzu: „C'est le procédé qui indique Proclus". Ich habe jedoch in der Schrift des Proclus, die hierfür nur in Frage kommen könnte, nämlich in „Procli Diadochii Hypotyposis Astron. Positionum [2]", nichts dergleichen gefunden. Zur Korrektion des geringfügigen Fehlers, der dem Verfahren bei Anwendung außerhalb der Solstitalzeit anhaftet, bemerkt Biot: „Man könnte diesen Fehler korrigieren, indem man die Beobachtung am folgenden Morgen wiederholt und eine Mittellinie zwischen den beiden Aufgangsrichtungen zieht, die man mit der Abendbeobachtung vergleichen könnte." (a. a. O. S. 47)

Soll aber das Resultat auf die hier angedeutete Weise wirklich so genau

---

[1] Biot: Mémoire sur divers points d'astronomie ancienne, Paris, 1846. S. 47.

[2] Griechisch und deutsch von K. Manitius, Leipzig 1909.

werden, so müssen Anforderungen an die Reinheit der Luft gestellt werden, wie sie nur ein ägyptischer Himmel zu erfüllen vermag.

2. **Die Methode der indischen Kreise.** Ist dies ein Verfahren gewesen, das man auf vorher geebneter horizontaler Fläche mit senkrechtem Schattenwerfer je nach Bedarf anwandte, oder war der indische Kreis ein fertiges Instrument? Der Astronom und Orientalist L. **Amélie Sédillot** (1808—1875) spricht sich an mehreren Stellen für die letztere Annahme aus, so in seinen „Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux" (Paris 1845—1849. I. S. 297), wo es heißt: „Der indische Kreis war ein regelrechtes Instrument und nicht bloß ein Verfahren wie M. Biot gedacht hat." Desgleichen finden sich in seinem „Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes" (Paris 1841, S. 17) ganz dieselben Worte mit dem Zusatz „ . . . die arabischen Texte gestatten, wie man weiterhin sehen wird, in dieser Hinsicht keinen Zweifel".

Und ist der indische Kreis wirklich eine Erfindung der indischen Astronomen? Er begegnet uns bei den Chinesen sowohl als den Indern und Griechen, und es läuft die Frage darauf hinaus zu entscheiden, ob die indische Astronomie hier nicht eine Anleihe bei der griechischen Wissenschaft machte, und wenn ja, darzutun, daß die chinesische wiederum unter indischen Einflüssen stand. Wenn wir den chinesischen und indischen astronomischen Werken nicht das hohe Alter beimessen, das sie nach orientalischen Traditionen haben sollen, so läge obige Vermutung nähe.

Wir führen im folgenden die Originalstellen an, die sich auf die sog. indischen Kreise bei den Indern, Chinesen und Griechen beziehen:

Die älteste indische Quelle in dieser Hinsicht ist wohl der **Surya — Siddhânta** (sichere Wahrheit enthüllt durch die Sonnè), ein astronomisches Lehrbuch, das Lâṭa zum Verfasser hat. Seine Entstehungszeit dürfte etwa in das 3. oder 4. Jahrhundert n. Chr. zu verlegen sein. Dieser Siddhânta ist ins Englische übertragen und von **E. Burgess** mit einem ausführlichen Kommentar veröffentlicht worden[1]).

Die Regeln und Vorschriften der indischen Astronomie sind alle in Verse gefaßt. Für uns sind Vers 1—4 S. 239 des Surya-Siddhânta von Wichtigkeit; wir führen sie wörtlich an:

1. **Vers:** „Auf einer (steinartigen) harten wagerechten Fläche oder auf einem harten Pflaster schlage einen genauen Kreis mit einem Radius gleich der verlangten Zahl Finger (angula) des Gnomons (çanku).

---

[1]) Journ. of the American oriental Soc., New-Haven 1860.

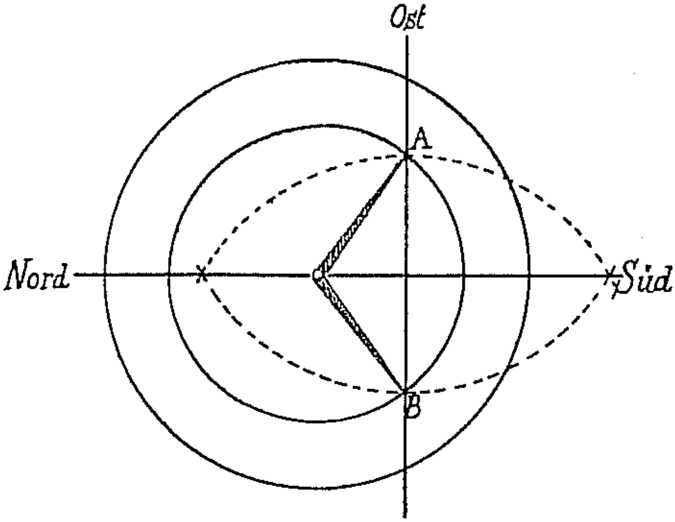
2. Vers: In seinen Mittelpunkt stelle den Gnomon von 12 Fingern Länge, und wo die Enden seines Schattens am Vor- und Nachmittage auf die

3. Vers: Kreisperipherie fallen, dort fixiere 2 Punkte und nenne sie Vor- und Nachmittagspunkte. Mitten zwischen ihnen durch ziehe mittels einer Fischfigur (timi) die Nordsüdlinie.

4. Vers: Mitten zwischen der Nordsüdrichtung ziehe mittels Fischfiguren (matsya) die Ostwestlinie und auf dieselbe Art mit Hilfe von Fischfiguren zwischen den 4 Kardinalrichtungen noch andere Direktionen."

Dies die Methode der indischen Kreise in ihrer ursprünglichen Fassung. Gewöhnlich waren mehrere solcher Kreise um den Fußpunkt des Gnomons gezeichnet. Die sog. Fischfigur entstand dadurch, daß die Inder durch A und B (Fig. 20) Bogen mit AB als Radius beschrieben. Diese Bogen schnitten eine linsen- oder fischähnliche Fläche aus, an der man Kopf und Schwanz unterschied.

Abbild. 20.



Die ältesten Quellen über chinesische Astronomie sind der Tschëu-Pei (Gnomon im Kreise) und der Tschëu-Li (Riten der Tschëu) beide von Edouard Biot (1803—1850) ins Französische übertragen. Die Übersetzung des ersteren findet sich im Journal asiatique, 1841; die Riten der Tschëu sind in 2 selbständigen Bänden 1851 in Paris erschienen. Über die Zeit der Entstehung dieser Schriften ist man sehr geteilter Ansicht. Während J. B. **Biot** durch exakte astronomische Berechnungen glaubt einwandfrei feststellen zu können, daß die ersten chinesischen Schattenmessungèn am Gnomon um das Jahr 1100 v. Chr. erfolgt sein müssen[1]), neigen andere Historiker, wie **Delambre** (1749—1822) und L. Am. **Sédillot** dazu, die Kenntnisse ehemaliger chinesischer Astronomen für sehr gering zu halten, ja **Sédillot** geht sogar so weit, der chinesischen Astronomie jede Selbständigkeit und Originalität und damit auch ein hohes Alter abzusprechen[2]). An den in der Fußnote genannten Stellen ist auch darauf hingewiesen, daß chinesische Astronomen sich von indischen Bonzen und arabischen Gelehrten Kenntnisse aneigneten.

Im Tschëu-pei steht (S. 624): „Wenn die Sonne zu erscheinen beginnt errichte eine Beobachtungsstange und beobachte deren Schatten. Bei untergehender Sonne beobachte den Schatten wiederum. Die 2 sich entsprechenden Hauptschattenpunkte bestimmen Ost und West. Ziehe durch die Mitte ihres Abstandes und den Fußpunkt des Gnomons eine Gerade, so wirst du Nord und Süd bestimmt haben." Die Hauptschattenpunkte sind die Durchschnittspunkte der zwei Schatten beim Auf- und Untergang der Sonne mit mehreren Kreisen, die man um den Fußpunkt des Gnomons als Zentrum schlug. (Der Tschëu-Pei führt in der Abbildung S. 615 sieben solcher conzentrischer Kreise auf; der innerste entspricht dem kürzesten Schatten im Sommersolstiz, der äußerste dem Mittagsschatten zur Wintersonnenwende). Ganz ähnlich spricht sich der Tschëu-Li aus (II. Bd. S. 555). Nur dadurch, daß die Schatten bei auf- und untergehender Sonne die Kreisumfänge schnitten, war eine Halbierung der Strecke, die zwischen den Durchschnittspunkten lag, möglich, und damit die hier angegebene Bestimmung der Nordsüdlinie.

Daß auch den **Griechen** die Methode der sog. indischen Kreise geläufig war, ergibt sich aus der schon erwähnten Schrift des **Proklus** (410 bis 485 n. Chr.). Er sagt wörtlich (S. 51): „Die Mittagslinie wird gewonnen, indem man senkrecht auf die erwähnte ebene Fläche einen Gnomon stellt und um den Fußpunkt desselben als Zentrum einen Kreis beschreibt. Alsdann beobachtet man, wann vor Mittag das Schattenende des Gnomon auf den Kreis fällt und legt den Punkt genau fest, und dann wieder, wann dies nach Mittag geschieht und legt auch diesen Punkt in gleicher Weise fest. Nun zieht man mittels Anlegens eines genauen Lineals eine Gerade

---

[1]) Journal des Savants. 1861, S. 618—622.

[2]) **Delambre**: Histoire de l'astronomie ancienne, Paris, 1817, tome I, S. XVII und 372; **Sédillot**: Matériaux pour servir ect. tome II, S. 644—45 und Prolégomènes des Tables astronomiques d'Oloug—Beg, Paris, 1853, XIX.

von dem vor Mittag gewonnenen Punkt bis zu dem nach Mittag gewonnenen und halbiert diese Linie, worauf man mittels Anlegens desselben Lineals von dem Halbierungspunkte bis zum Mittelpunkte des Kreises eine Gerade zieht und bis zür Peripherie verlängert. Mit dieser Geraden wirst du die Mittagslinie ermittelt haben, welche an allen Orten diese Bezeichnung führt, weil im Moment des Mittags die von den Gnomonen geworfenen Schatten auf sie fallen".

Natürlich ist auch bei arabischen Astronomen des öfteren die Rede von diesem noch heute geübten Verfahren, so bei Ibn Jûnus,[1]) der aber ausdrücklich bemerkt, daß der Gnomon den Schatten des oberen Sonnenrandes gibt, ferner bei Abu'l Hassan Ali von Marokko[2]) und endlich bei Olug-Beg (vgl. Prolégomènes des Tables ect. S. III.)

Für ein viel höheres Alter der indischen Kreise in Europa haben wir noch zwei römische Zeugnisse, und es ist fast sicher, daß sie noch einer weit früheren griechischen oder babylonischen Periode ihren Ursprung verdanken. Vermutlich knüpft sich ihre Entstehung an die Erfindung der Sonnenuhr überhaupt. Das erste Zeugnis stammt von Vitruvius, der diese Methode in de architectura I, Cap. 6 um das Jahr 15 vor Chr. beschreibt. Das zweite verdanken wir dem römischen Gromatiker (Feldmesser) Hyginus, der etwa um 100 n. Chr. lebte[3]).

3. Aus drei beobachteten ungleichen Schattenlängen die Mittagslinie zu finden. Mit diesem merkwürdigen Verfahren macht uns Hyginus bekannt[4]); dessen Ausführung setzt aber mathematische Kenntnisse voraus, wie wir sie bei Römern nicht suchen dürfen; auch diese Methode dürfte ihren Heimatschein aus Griechenland haben. Sie ist zwar nicht populär geworden, hat aber im Laufe der Zeiten eine oftmalige Behandlung in verschiedenen Varianten erfahren. Wir nennen: Christini[5]) und Muzio Oddi, der ebenfalls eine Lösung unserer Aufgabe gab[6]), als ältere Autoren, sodann vor allem die höchst bemerkenswerte Behandlung

---

[1]) Cap. XXV der hakimitischen Tafeln, s. Delambre: Histoire de l'astronomie du moyen âge, Paris, 1819, S. 129.

[2]) Traité des instruments astronomiques des Arabes, aus dem arabischen übersetzt von J. J .Sédillot (1777—1832), 2 vol., Paris 1834—35, t. II. S. 417.

[3]) Vgl. Gromatici veteres ex recensione Caroli Lachmanni, oder die Schriften der römischen Feldmesser, lateinisch herausgeg. v. F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff, Berlin 1848, I. Bd., S. 188.

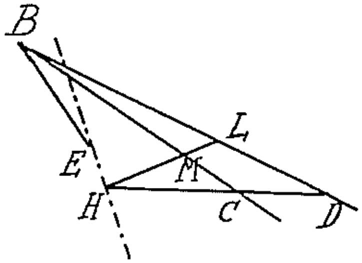
[4]) Die Schriften d. röm. Feldm. I. Bd. S. 189 ff.

[5]) Methodus inveniendae meridianae lineae ex tribus umbris, simul cum paraphrasi in similem methodum conscriptum ab Hygino Augusto Liberto, Turin 1605. (Hygin soll ein Freigelassener unter Kaiser Augustus gewesen sein.)

[6]) Gli Orologi solari delle superficie piane, Mailand 1611.

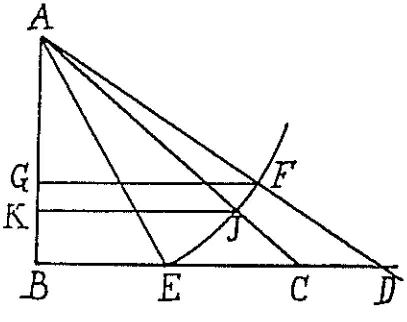
des Problems durch **Mollweide**[1]. Er teilt 4 verschiedene Lösungen mit, von denen wir seine rein konstruktive Behandlung der Aufgabe vorführen wollen; auch das Originalverfahren Hygins bespricht **Mollweide** (S. 406 ff.) und gibt dazu noch einen wertvollen sprachlichen Kommentar. Bei **M. Cantor**[2] findet sich die graphische Lösung **Mollweides**, als die einfachste, ebenfalls reproduziert. Endlich hat Schreiber dieser Zeilen in seinen Beiträgen zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben[3] eine zeichnerische Lösung der vorstehenden Aufgabe mittels Zentralperspektive und in seinen Vermischten Aufgaben aus der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie[4] eine rechnerische Behandlung desselben Problems gegeben.

Abbild. 21.



Diese Literaturangaben dürften jeden Geographen, resp. Verfasser einer mathematischen Geographie, in den Stand setzen, sich mit einer ihm zusagenden Behandlung der Frage bekannt zu machen.

Abbild. 22.



Nun zu der klaren und durchsichtigen Auflösung durch **Mollweide**. Sie lautet wörtlich (a. a. O. S. 397): „Die Ebene der Zeichnung (Fig. 21) stelle die horizontale Ebene vor, in welcher die im Fußpunkte B des senkrechten Zeigers oder Stiftes zusammenlaufenden Schattenlinien B D, BC, B E sind, unter denen BE die kleinste, BD die größte sey. Man ziehe in irgend einer Ebene (Fig. 22) willkürlich eine gerade Linie DB, und trage auf dieselbe von einem ihrer Endpunkte B aus die drey Schattenlängen BE, BC, BD, errichte in B

---

[1] „Erläuterung einer in den Scriptoribus rei agrariae pag. 176 u. 177 edit. Goesii gegebenen Vorschrift, aus drei beobachteten ungleichen Schattenlängen die Mittagslinie zu finden", in d. monatl. Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde von F. v. **Zach**, Gotha, 28. Bd., 1813, S. 396—425.

[2] „Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Feldmeßkunst", Leipzig 1875, S. 68—69.

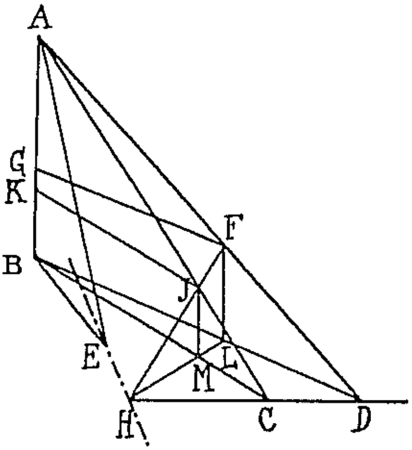
[3] Leipzig 1910, S. 24.

[4] Hamburg 1913, S. 17. Man vergleiche auch meine Ausführungen in der Zeitschrift f. mathemat. u. naturwiss. Unterr. XLV, 1914, S. 535—542 „Über die Anwendung der Geometrie auf elementare Aufgaben der mathem. Geographie".

auf BD den Perpendikel BA von der Höhe des Zeigers, und ziehe AE, AC, AD. Mit der kleinsten derselben AE beschreibe man aus A einen Kreisbogen, welcher AD in F und AC in J schneide, und ziehe durch F und J Parallelen mit der BD, die der AB in G und K begegnen. Die dadurch erhaltenen Linien FG, JK trage man in der horizontalen Ebene (Fig. 21) von B aus auf die zustimmenden Schattenlinien BD, BC, d. h. man nehme BL=FG, BM=JK, ziehe LM und durch die Endpunkte der Schattenlinien DC, verlängere LM und DC bis zu ihrem Durchschnitte H; so ist, wenn der Endpunkt E der kleinsten Schattenlinie mit H verbunden wird, EH der Ostwest-Linie parallel, folglich eine durch B darauf geführte senkrechte die Mittagslinie.

Um den Grund dieses Verfahrens einzusehen, denke man sich die rechtwinkligen Dreiecke ABD, ABC, ABE der dritten Zeichnung über den Linien BD, BC, BE der ersten senkrecht auf die Ebene dieser Linien aufgerichtet, wie es Fig. 23 darstellt, so fällt A in die Spitze des Zeigers; ABD, ABC, ABE sind die Vertikalflächen, in denen sich die Sonne befand, als der Stift AB die Schatten BD, BC, BE warf, und DA, CA, EA gehen nach dem Mittelpunkte der Sonne, liegen also in der Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Spitze A, Grundfläche aber der Tagekreis der Sonne ist. Da nach der Konstruktion AF=AE=AJ, so sind die Punkte F, J, E im Umfange eines Kreises, der dem Tagekreise der Sonne, folglich auch dem Äquator parallel ist, und FJ ist eine Sehne dieses Kreises. Weil ferner FG der BL gleich und parallel ist, so ist auch, wenn man FL verbindet, solche der BG gleich und parallel. Ebenso ist JM der BK parallel und gleich. Da also FL und JM der AB folglich auch einander parallel sind, so liegen sie in einer Ebene, in welcher auch FJ, so wie LM, ist. FJ ist aber auch in der Ebene ADC, und LM in der horizontalen Ebene BCD, folglich ist FJ der Durchschnitt der Ebene FJML mit der Ebene ADC, und LM der Durchschnitt derselben Ebene mit der horizontalen BCD. Nun schneidet die Ebene ADC die horizontale Ebene in der DC, welche verlängert der gleichfalls verlängerten LM in H begegnet, folglich ist H in der Ebene ADC und auch in der Ebene

Abbild. 23.



FJML, folglich ein Punkt des gemeinschaftlichen Durchschnittes beider Ebenen, d. h. der verlängerten FJ. Diese aber liegt ganz in der Ebene des Kreises durch F, J, E, also ist H in dieser Ebene, aber auch in der horizontalen Ebene BDC, folglich ein Punkt des gemeinschaftlichen Durchschnittes beyder Ebenen. Nun ist auch E ein solcher, folglich die verbundene EH der Durchschnitt einer der Äquators-Ebene parallelen Ebene mit der horizontalen Ebene, mithin der Ostwestlinie parallel.

Es ist nicht gerade notwendig, zum Halbmesser des aus A beschriebenen Kreisbogens (Fig.22) die kleinste der drey Linien AE, AC, AD zu nehmen, man kann auch jede der beyden andern dazu wählen. Der kleinsten ist hier der Vorzug gegeben, weil dadurch die Konstruktion einfacher wird, indem man alsdann nicht nötig hat, AB und AE oder AE und AC, so wie auch BE, oder BE und BC (Fig.22) zu verlängern, wie es der Fall ist, wenn man AC oder AD zum Halbmesser nimmt."

4. Zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche (Frühlings- und Herbstäquinoktium) ist der vom Endpunkt eines Gnomons beschriebene Schatten bekanntlich eine gerade Linie (Abbild des Himmelsäquators), die in die Ostwestrichtung fällt. Senkrecht auf dieser Schattenspur steht die Nordsüdrichtung. Auch dieser Möglichkeit, die 4 Kardinalrichtungen zu finden, wird einige Male gedacht, so im Surya-Siddhânta, wo es a. a. O. in Vers 7 heißt: „Ziehe auf gleiche Weise eine Ostwestrichtung durch die Enden des Äquinoktialschattens", und bei Abu'l Hassan (a. a. O. S. 418) wo man liest: „Errichte einen Gnomon senkrecht auf dem Horizont und markiere zu irgend einem Zeitpunkt das Ende seines Schattens, darauf nach einiger Zeit ein anderes Ende in einiger Entfernung; alsdann ziehe eine Gerade durch diese beiden Punkte: sie wird die Ostwestlinie sein; errichte auf dieser Linie eine Senkrechte, so wird sie die Nordsüdrichtung darstellen.

Aber diese Methode ist nur annähernd richtig, weil die Sonne während eines Tages nicht genau den Äquator beschreibt."

5. Wir handeln jetzt von jener speziell arabischen Methode zur Auffindung der Meridianlinie, bei der sich mit der Konstruktion bereits die Rechnung verbindet. Zuerst begegnet man ihr $\alpha$) bei Ibn Jûnus[1]. Dort heißt es: Die Meridianlinie zu finden nach der Höhe der Sonne, falls deren Azimut = 30° ist. Die Lösung ist die folgende: OE sei die Ostwestlinie, an der die Araber — im Gegensatz zu uns — das Azimut immer beginnen ließen. Es sei also (Fig. 24) Winkel EOC = 30° und OC der in jenem Augenblick beobachtete Schatten, wo man durch Rechnung und eine gute Uhr genau weiß, daß das Azimut desselben = 30° ist (also 60° von der Nordsüdlinie). Um O beschreibt man mit beliebigen Radius einen Kreisbogen (a m D) und trägt von a aus den Strahl Oa gen D. Dadurch

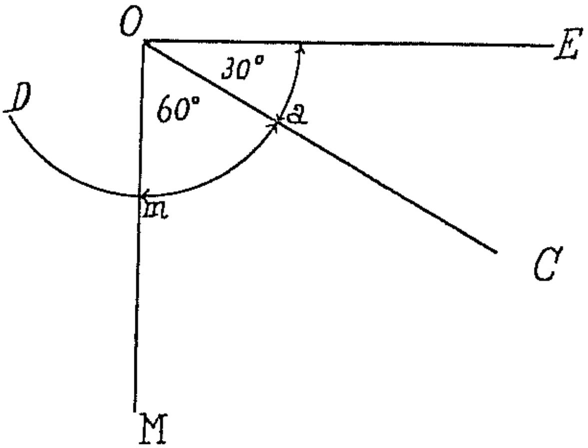
---

[1] Hakimitische Tafeln, Cap. XXIV; Delambre a. a. O. S. 129.

erhält man auf Bogen a m D den Punkt m, und OmM wird die gesuchte Meridianlinie sein. Der Autor fügt dieser Lösung hinzu, daß man die Mittagslinie auch noch durch andere Höhen, deren Azimute bestimmt werden können, finden kann. Er nennt im Ganzen 10 solcher Höhen. Delambre meint, die in Frage kommenden Azimute könnten (sowohl am Vormittag als Nachmittag jeweils) 36°, 45°, 60°, 72° und 90° betragen haben; wahrscheinlich sind diese Winkel gewählt, um jedesmal die Mittagslinie OmM mittels einer rein planimetrischen Konstruktion finden zu können.

Was den rechnerischen Teil der Aufgabe anbetrifft, so ist zunächst bekannt das Azimut $a$ (= 60° von Süden), die Sonnendeklination $\delta$ und die geographische Breite des Beobachtungsortes $\varphi$. Mit diesen Daten findet man aus dem Zenit — Pol — Sonnedreieck mittels des Kosinussatzes die zugehörige Sonnenhöhe h. Es ist nämlich

Abbild. 24.



$$\sin \delta = \sin \varphi \cdot \sin h - \cos \varphi \cdot \cos \cdot h \cos a.$$

Kennt man h, so gibt der Sinussatz den Stundenwinkel s:

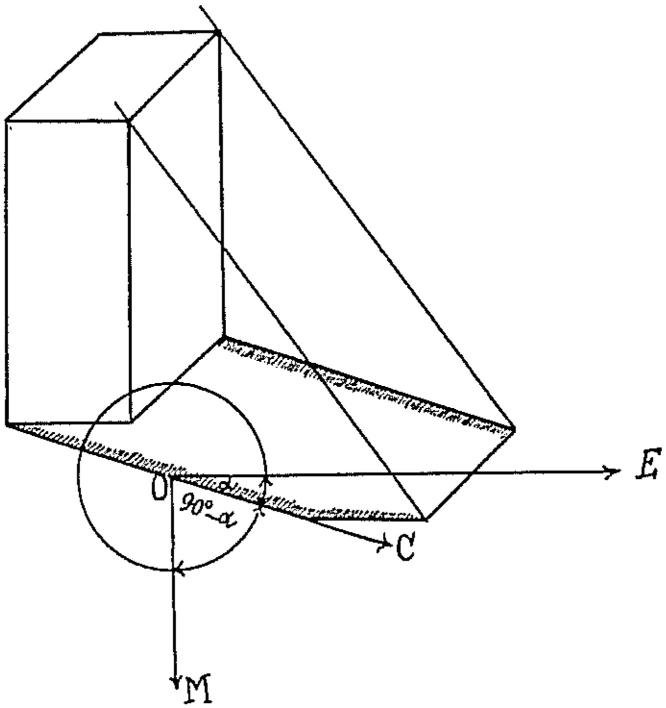
$$\sin s = \frac{\sin a \cdot \cos h}{\cos \delta}.$$

Es war also abzuwarten, bis eine gut gehende Wasseruhr die errechnete Zeit zeigte, dann war $a$ von selbst genau 60° usw.

Wie Ibn Jûnus die Rechnung ausführte, wissen wir nicht; er kannte zwar den Sinussatz, nicht aber den Kosinussatz in obiger Gestalt. Gewöhnlich zerlegten die Araber in solchen Fällen ein allgemeines sphärisches Dreieck in 2 rechtwinklige.

$\beta$) Allgemeiner ist die Frage bei Abu'l Hassan gelöst (a. a. O. S. 418). Es heißt dort: „Kennt man den Ort der Sonne in der Ekliptik, so stelle man auf einer Ebene, die dem Horizont parallel ist, ein rechtwinkliges Paralleleppiped auf und ziehe durch den gemeinsamen Schnitt seines Schattens und der Sonnenstrahlen eine gerade Linie. Nunmehr ermittle man das Azimut der Sonne für den Augenblick, wo man die Gerade zog und beschreibe einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf dieser Geraden liegt und dessen Peripherie von ihr geschnitten wird. Vom Schnittpunkt, der gegen die Meridianseite liegt, trage man auf der Peripherie einen Bogen ab, der dem Komplementwinkel des Azimuts gleichkommt. Durch den Endpunkt dieses Bogens und das Zentrum des Kreises lasse man eine Gerade gehen; sie wird die gesuchte Mittagslinie sein (Fig. 25). Aber die erste Konstruktion ist vorzuziehen, (indischer Kreis) besonders, wenn die Sonne nahe beim Solstitium 2) ist und wenn man die Schattenenden mit einem der Kreise bei einer Sonnenhöhe von etwa 6° zum Schnitt bringt."

Abbild. 25.



---

2) In der französischen Übersetzung der astronom. Tafeln des Olug-Beg durch L. Am. Sédillot steht irrtümlicherweise, daß die geeignetste Zeit diejenige der Äquinoktien sei.

Unter gemeinsamem Schnitt des Schattens und der Sonnenstrahlen kann nur die Schattenkontur einer Seitenkante des Parallelepipeds verstanden sein. Abu'l Hassan benützte stets kegelförmige Gnomone; ein solcher wäre aber in diesem Fall gänzlich ungeeignet. Mit Kenntnis der Zeit s, der Sonnendeklination $\delta$ und Polhöhe $\varphi$ findet man die Sonnenhöhe h aus dem Kosinussatz:

$$\sin h = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s$$

und damit nach dem Sinussatz das zugehörige Azimut.

$\gamma$) Auf einen möglichst geradlinigen und scharf abgegrenzten Schattenwurf in diesem Falle nimmt Olug-Beg Bedacht. Er lehrt (a. a. O. S. 112):

„Wenn die Sonne nahe am Horizonte ist, hänge man ein Bleilot auf und verzeichne seinen Schatten. Im gleichen Momente messe man mit einem guten Instrumente die Höhe der Sonne und berechne daraus ihr Azimut. Dieses trage man, entsprechend seinem Zeichen, vom Fußpunkte des Lotes an die gezogene Schattenlinie an; der nicht mit letzterer zusammenfallende Schenkel ist die Ostwestlinie, eine Senkrechte zu derselben die Mittagslinie, und man erkennt ihren nördlichen und südlichen Abschnitt aus der Schattenlinie; denn das Bleilot vertritt hier den Gnomon usw."

6. Weitere Möglichkeiten zur Bestimmung der Nordsüdlinie finden sich bei Abu'l Hassan kurz angedeutet (S. 419 und 608—11). Die eine beruht darauf, aus der von der Stabspitze an einem beliebigen Tag des Jahres beschriebenen hyperbolischen Schattenlinie deren Axen zu ermitteln, die bekanntlich mit den 4 Kardinalrichtungen zusammenfallen. Abu'l Hassan sagt, daß er die Konstruktion dieses Kegelschnittes mittels eines eigenen Instrumentes, genannt al-burkar-al-tâmme, in seinem Buche über Kegelschnittskurven (nicht mehr vorhanden) gelehrt habe. (Wie man in dem Fall, wo 3 Stundenlinien einer Sonnenuhr bekannt sind, aus der Schattenkurve deren Hauptaxen rein zeichnerisch finden kann, habe ich in meinen Beiträgen zur konstruktiven Lösung usw. S. 25 ff. gezeigt.)

Abu'l Hassan sagt ferner, daß er im 4. Teile des Werkes[1]), aus dem wir schöpfen, noch eine ganz andere Methode zur Bestimmung der Mittagslinie lehren werde; allein die ganze französische Ausgabe besteht nur aus 2 Teilen; in L. A. Sédillots: Mémoire sur les instruments ect., welcher als eine Fortsetzung und Ergänzung des Traité ect. angesehen wird, habe ich nichts Neues in dieser Hinsicht finden können.

7. Endlich lehrt Abu'l Hassan bei Besprechung einiger höchst merkwürdiger Sonnenuhren noch mehrere Methoden zur Auffindung der Meridianlinie. Allein ihre Theorie erfordert eingehende Studien über arabische Sonnenuhren, wie sie zu geben hier nicht der Ort ist. Auch ist mir bei den

---

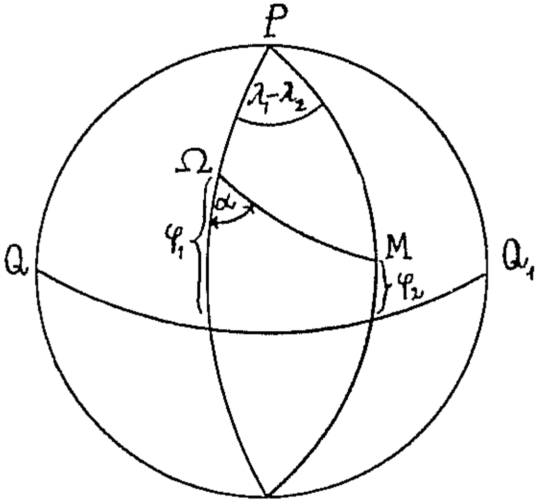
[1]) Traité des instruments etc.

knappen Textangaben des Marokkanischen Meisters, denen jede Figur fehlt, einiges noch nicht ganz klar, so daß ich mich für jetzt auf diese wenigen Andeutungen beschränken möchte.

## II. Die Festsetzung der Qibla.

Die Gesichtswendung nach dem Heiligtum während des Gebetes findet sich zuerst im Judentum. Für den betenden Israeliten besteht folgende Vorschrift: Außerhalb Palästinas wendet sich der Gläubige diesem Lande zu, innerhalb Palästinas nach Jerusalem, in Jerusalem nach dem Tempel, im Tempel nach dem Heiligtum selbst. Nachdem Mohammed längere Zeit dem jüdischen Gebrauch gehuldigt hatte, änderte er i. J. 624 die Qibla dahin ab, daß er den Gläubigen die Gesichtswendung zur Ka'ba in Mekka zur Pflicht machte. Heute noch weicht selbst ein religiös gleichgültiger Mohammedaner von dieser Vorschrift nicht ab. Kaum hatte die Pflege der exakten Wissenschaft bei dem Volke Allahs Wurzel geschlagen, als sich auch schon die ersten arabischen Astronomen um die Festsetzung der Qibla eines Ortes bemühten. Dazu bedarf man der Kenntnis der beiden geographischen Koordinaten des in Frage kommenden Ortes und Mekkas. Verfügt man über diese Daten, so läßt sich der Winkel $\alpha$ ermitteln, den der Großkreis, der den Ort $\Omega$ mit Mekka M verbindet, mit dem Meridian von $\Omega$ bildet, und dieser Winkel ist identisch mit der Qiblarichtung in $\Omega$ (Fig 26),

Abbild. 26.



Im sphärischen Dreieck $\Omega$MP schließen die Meridiane durch $\Omega$ und M am Pol P den Winkel des Längenunterschieds der 2 Orte $(\lambda_1 - \lambda_2)$ ein; die einschließenden Seiten $\Omega$ P und MP sind den Komplementwinkeln der Ortsbreiten gleich $(\Omega\, P = 90° - \varphi_1;\ MP = 90° - \varphi_2)$. Aus Dreieck $\Omega$MP findet man mittels des Kotangentensatzes

$$\sin\varphi_1 \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_2) = \cos\varphi_1 \cdot \operatorname{tang}\varphi_2 + \sin(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \operatorname{cotg}\alpha,$$

woraus folgt:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin\varphi_1 \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_2) - \cos\varphi_1 \cdot \operatorname{tang}\varphi_2}{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)} \quad \ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Oft drückt man das Azimut der Qibla auch durch den Sinussatz im selben Dreieck aus, wobei man dann die Distanz der 2 Orte als bekannt voraussetzt. Man hat dann

$$\sin\alpha = \frac{\cos\varphi_2}{\sin(\text{dist.})} \cdot \sin(\lambda_1 - \lambda_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Noch sei hier bemerkt, daß **Montucla** (1725—1799) eine rein zeichnerische Bestimmung der Qibla lehrt [1]) die er gelegentlich eines Schiffbruches, der ihn nötigte, längere Zeit auf der Insel Sokotra zu verweilen, für einen dortigen frommen Muselman ersann. Diese Konstruktion habe ich samt Beweis vor einiger Zeit gegeben [2]). Das erste derartige Kartogramm, aus dem das Azimut der Qibla für jeden durch Länge und Breite gegebenen Ort sofort abgelesen werden kann, stammt von I. L. **Craig** (Cairo), das er in seinen „Map Projections" ) und dann wiederum in seinem größeren theoretischen Werke entwickelte [4]). Man kann an ein solches Kartogramm auch noch die Forderung der Mittabstandstreue stellen, wie dies E. **Hammer** tat [5]). Dies Kartogramm habe ich einer mathematischen Behandlung unterzogen [6]). Endlich erwähne ich für unser Thema noch die Arbeit des persischen Obersten A. **Kržiž**: „Beschreibung, wissenschaftliche Zergliederung und Gebrauchsweise des persisch-arabischen Astrolabiums [7]).

Im Folgenden seien einige der bemerkenswertesten Methoden zur Ziehung der Qibla angeführt, so wie sie uns arabische und persische Astro-

---

[1]) Récréations mathématiques et physiques" (frühere Auflagen von Ozanam), Tome III, S. 63 ff.

[2]) „Azimutale und gegenazimutale Karten mit gleichabständigen parallelen Meridianen" (Annalen d. Hydrographie und maritimen Meteorologie, 1913, S. 35 ff.)

[3]) Kairo 1909.

[4]) „The Theory of Map Projections with special reference to the projections used in the (Egyptian) Survey Departement", Kairo 1911.

[5]) Gegenazimutale Projectionen, Peterm. Mitt. 1910. S. 153.

[6]) Die gegenazimutale mittabstandstreue Karte in konstruktiver und theoretischer Behandlung, Ann. d, Hydrogr. u. marit. Meteorol., 1913. S. 466 ff.

[7]) Archiv d. Mathem. u. Phys., 45. Bd., S. 312 ff.

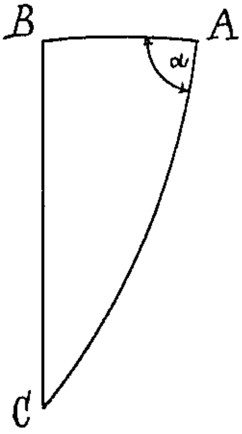
nomen lehrten. Es sind fast lauter Approximationsverfahren, die der Wahrheit umso näher kamen, je geringer die Entfernung des fraglichen Ortes von Mekka war.

1. Die Methode Al-Battânis, eines der ältesten arabischen Astronomen, († 929) dessen astronomische Tafeln C. A. Nallino unter dem Titel Opus astronomicum (Mailand 1899—1907), neu herausgab, besteht in Folgendem[1]). Es sei A (Fig. 27) die gegebene Stadt, deren Länge $\lambda_1$ und deren Breite $\varphi_1$ ist. C bedeute Mekka mit der Länge $\lambda_2$, und der Breite $\varphi_2$. BC sei ein Meridianbogen durch Mekka und AB ein Stück eines größten Kreises, der rechtwinklig zum Meridian BC gezogen ist. Es ist unter BAC das Azimut der Qibla zu verstehen. Al-Battâni setzt nun

$$\sin(\text{Azimut}) = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\text{distant.})},$$

was nur annähernd richtig ist, denn BC kann nicht genau gleich dem Breitenunterschied von A und C sein.

Abbild. 27.



„Es ist kaum anzunehmen", fügt Nallino dieser Battânischen Formel im Kommentar hinzu, „daß der berühmte Astronom Falsches gelehrt habe, da er in ganz ähnlichen früheren Problemen richtige Formeln anwandte. Die Kenntnis des Azimuts der Qibla war aber für die Architekten, die die islamischen Tempel zu bauen hatten, unerläßlich. Da indessen ein Fehler von wenigen Graden kaum von Bedeutung ist, und die meisten der damaligen Architekten den trigonometrischen Kalkul nicht beherrschten, so wollte ihnen Al-Battâni eine bequeme, der Wahrheit nahe kommende Regel für die Konstruktion der Qibla geben".

2. Auch Ibn-Jûnus handelt in seinen Hakimitischen Tafeln (Kap. XXVIII.) von der Auffindung der Qibla. Leider besitzen wir keine Ausgabe dieses astronomischen Werkes in irgend einer europäischen Sprache. Nur wenige Kapitel (III, IV und V) hat Caussin ins Französische übertragen, doch konnte er die Überschriften aller 81 Kapitel desselben angeben.[2]) Das 28. Kapitel fehlt in den Handschriften. Von der Berechnung der Qibla für Fostat (neben Kairo, dem Wohnort des berühmten Astronomen) durch Ibn-Jûnus handelt G. W. S. Beigel[3]).

---

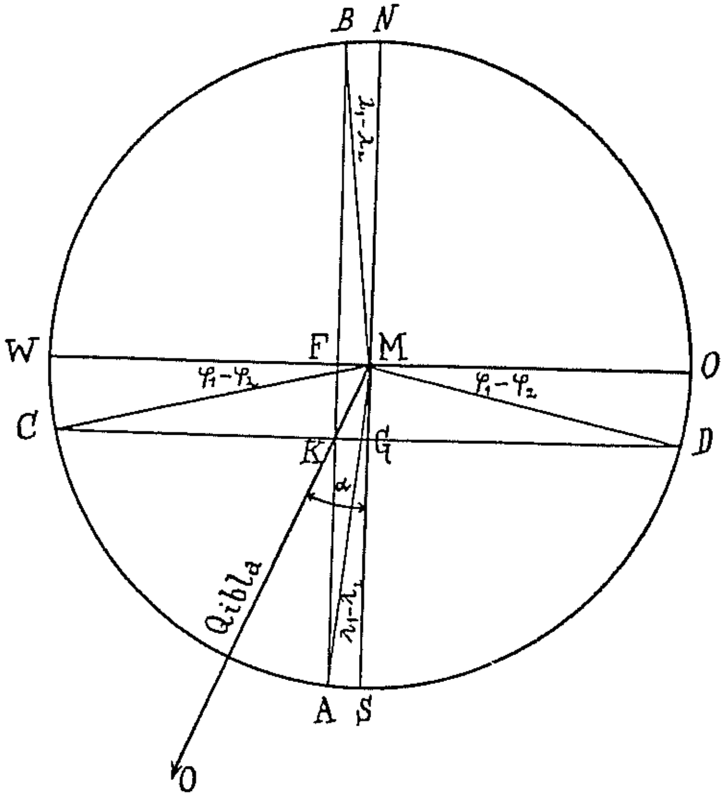
[1]) Vgl. Caput. LVI, Azimut qiblae supputare, I. tomus p. 137.

[2]) Notices et extraits des manuscrits de la bibl. nat, Tome VII, S. 16 ff.

[3]) „Fundgruben des Orients" (I. Bd., S. 409: „Bemerkungen über die Gnomonik der Araber".)

3. Eine andere Näherungsmethode lehrt uns der Astronom **Al-Ğagmini**, dessen Schrift über Astronomie G. **Rudloff** und A. **Hoohheim** ins Deutsche übersetzt haben[1]). Leider weiß man weder Wohnort noch Lebenszeit dieses Astronomen anzugeben. Vermutlich hat er um die Mitte des 13. Jahrhunderts gelebt. Der Autor sagt (a. a. O. S. 61 ff): „Man zähle auf dem indischen Kreise vom Südpunkt aus die Differenz zwischen der Länge Mekkas und des gegebenen Ortes nach Westen zu ab, ebenso vom Nordpunkt aus und verbinde die beiden Schlußpunkte dieser abgegrenzten Kreisteile durch die Gerade AB (Fig. 28). Desgleichen trägt man vom Westpunkt aus nach Süden zu den Gradunterschied der beiden Breiten ab, ebenso vom Ostpunkt aus und verbindet die beiden so fixierten Punkte

Abbild. 28.



---

[1]) Zeitschr. d. deutsch. Morgenländ. Gesellsch., Leipzig 1893.

durch eine Gerade CD, welche AB in K schneiden wird. Zieht man jetzt vom Mittelpunkt des Kreises aus nach K eine Gerade, so hat man in ihr die gewünschte Qiblarichtung."

L. Am. **Sédillot** macht uns mit dem Verfahren des persischen Astronomen **Ali-Schah-Olaï-al-Munedjem** zur Ziehung der Qibla bekannt, das im persischen Ms. Nr. 173 der Kgl. Biblioth. zu Paris beschrieben wird[1]). Daraus erkennt man, daß es sich mit demjenigen **Al-Ğagimins** vollständig deckt. In der letzteren Schrift führt Sédillot die zeichnerische Lösung der Aufgaben an Fig. 13 aus für das Beispiel

Hamadan — Mekka (das sich im persischen Ms. findet).

$\lambda_1 = 83°$ $\lambda_2 = 77°10'$ (von den glückseligen Inseln gerechnet)

$\varphi_1 = 35°10'$ $\varphi_2 = 21°40'$.

Aus diesen Daten folgt:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 5°50'; \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = 13°30'.$$

Die genaue Berechnung nach dem Kotangentensatz liefert

$$\alpha = 22°15'$$

die Ğagmînische Konstruktion ergibt rund

$$\alpha = 23°$$

und die Berechnung nach dieser Konstruktion $\left(\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}\right)$

$$\alpha = 23°3',$$

so daß die Konstruktion eine sehr brauchbare zu sein scheint. Nach der Sédillotschen Zeichnung wird

$$\alpha = 30°.$$

Das ist ein von der Wahrheit sehr abweichendes Ergebnis, woran aber nicht das hier vorgetragene Verfahren, sondern **Sédillots** ungenaue Konstruktion schuld ist. (Fig. 28 ist mit den richtigen Winkelwerten gezeichnet.)

4. Am ausführlichsten ist die Bestimmung der Qibla bei **Olug-Beg** erörtert (a. a. O. S. 120 ff.). Er sagt: „Inbezug auf die Lage eines Ortes zu Mekka kann man 5 Fälle unterscheiden. Der 1. ist derjenige, wo die Länge beider Orte dieselbe ist, der 2. jener, wo die Längendifferenz kleiner als 90°, der 3., wo sie genau 90° ist, der 4., wo sie mehr als 90°, jedoch weniger als 180° beträgt, endlich im 5. Fall ist der Längenunterschied gerade 180°.

Im 1. **Fall** ist die Qibla nach dem Nordpunkt des Horizontes gerichtet, wenn der Ort eine nördliche Breite hat, die kleiner ist als jene Mekkas im anderen Fall ist der Südpunkt die Qibla.

Im 5. **Fall** ist es der Nordpunkt, wenn die Breite des fraglichen Ortes eine nördliche und geringer als die von Mekka ist; es ist der Südpunkt,

---

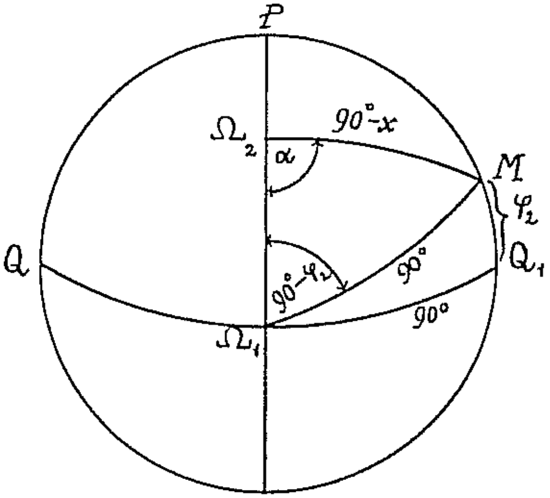
[1]) Vgl Matériaux pour servir ect. S. 323 und Mémoire sur les instruments ect. S. 99.

wenn die Ortsbreite südlich und größer als jene von Mekka ist; ist endlich die Breite jener von Mekka gleich, so ist das Azimut der Qibla dort unbestimmt; denn nach welcher Seite auch immer der ‚Muselli' sich wendet, stets blickt er nach Mekka.

Im 3. Fall ist für einen Ort des Äquators das Komplement der Breite Mekkas gleich der Abweichung der Sehlinie nach Norden von derjenigen nach Mekka. (Oder besser: die Abweichung der Qibla vom Äquator ist gleich der Breite Mekkas, weil die Entfernung Mekkas von diesem Orte = 90° ist.)

Für einen Ort mit der beliebigen Breite $\varphi_1$ multipliziere man in diesem Fall den Sinus dieser Breite mit dem Sinus der Breite Mekkas; das Produkt wird einem Sinus gleich sein, dessen zugehöriger Bogen sich aus den Tafeln ermitteln läßt; alsdann dividiere man den Kosinus der Breite von Mekka durch den Kosinus dieses Bogens, so hat man den Sinus des Azimuts der Qibla.''

Abbild. 29.



Während Fall 1 und 5 durch Anblick eines Erdglobus sofort als richtig erkannt werden, bedarf der 3. Fall einer zeichnerischen und rechnerischen Erläuterung (vgl. Fig. 29). Ein Ort des Äquators ist Pol zum Meridian von Mekka, falls der Längenunterschied = 90° ist. Die Entfernungen des Ortes von Mekka und vom Durchschnitt des Äquators mit dem Meridian von Mekka sind daher gleich und = 90°, mithin mißt der Bogen zwischen Mekka und dem Äquator, also $\varphi_2$ auch den Winkel M $\Omega_1$ $Q_1$.

Wenn der Ort $\Omega_2$ die Breite $\varphi_1$ hat, so verbinde man $\Omega_2$ mit M durch einen Großkreisbogen. Dieser habe die Gradzahl 90°—x. Mittels des Kosinussatzes folgt alsdann aus dem sphärischen Dreieck $\Omega_1$ M $\Omega_2$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos 90^\circ \cdot \cos \varphi_1 + \sin 90^\circ \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos (90^\circ - \varphi_2)\\ &= \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha)\end{aligned}$$

Nach dem Sinussatz hat man aus demselben Dreieck:

$$\frac{\sin (90^\circ - x)}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin (90^\circ - \varphi_2)}{\sin a},$$

woraus man zieht:

$$\sin a = \frac{\cos \varphi_2}{\cos x} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

Die Formeln $\alpha$) und $\beta$) sind der mathematische Ausdruck der obigen Textregeln.

Im 2. und 4. Falle wird die Anwendung unserer Formel II., also diejenige des Sinussatzes, gelehrt. Dabei werden wiederum die verschiedenen Bogen des Ortes $\Omega$ auf dem Meridian berücksichtigt.

Man erkennt hieraus, daß Olug-Beg den zur Berechnung des Azimuts der Qibla erforderlichen trigonometrischen Kalkul vollständig beherrscht; von Approximationsverfahren ist keine Rede mehr.

Mitteilungen
zur
Geſchichte der Medizin und der Naturwiſſenſchaften.

Nr. 71/72. 1917. XVI. Bd. Nr. 2/3.

## I. Originalabhandlungen.

# Über einige dem Arabischen entlehnte Benennungen in den exakten Wissenschaften.

Von Dr. phil. nat. et rer. techn. C. Schoy, Essen.

Veranlassung zu dieser kurzen Notiz gab mir ein Aufsatz von Dr. Arnim Wittstein, Leipzig, der schon vor 33 Jahren, nämlich 1884, unter dem Titel: „Über einige aus dem Arabischen entlehnte Sternennamen“ in der Zeitschrift für Mathematik und Physik erschien (Histor.-liter. Abtlg. S. 169/174), und nach welchem sich, wie ich beim Verfolg der neueren Literatur sehe, die der arabischen Sprache nicht kundigen Forscher der exakten Wissenschaften des öfteren gerichtet hatten, und dies mit um so mehr Recht als Wittstein der Unterstützung erwähnt, die ihm durch Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Krehl, Leipzig, bei Abfassung seines Aufsatzes zuteil wurde. Wittstein erläutert in der Hauptsache ein Dutzend der bekanntesten arabischen Sternennamen, sich dabei auf die Arbeiten von F. W. V. Lach und L. Ideler stützend. Aber nebenbei kommt Wittstein auch auf die Etymologie astronomischer und geodätischer Ausdrücke wie Zenit, Azimut, Nadir, Alhidade, Almukanṭarât zu sprechen, die er — wohl ohne Hilfe von Professor Krehl — nicht richtig erläutert.

Da ich von einer diesbezüglichen Richtigstellung nirgends etwas habe finden können, so möchte ich sie bei dieser Gelegenheit nachholen und anschließend einige Ergänzungen bringen.

1. **Zenit und Azimut.** Was die Etymologie dieser 2 Worte betrifft, so kann ich mir keine bessere Darlegung des Sachverhaltes denken als diejenige von G. W. Beigel (Fundgruben des Orients, I. Band, S. 409: „Bemerkungen über die Gnomik der Araber“), die deshalb hier wörtlich angeführt werden möge:

„Zenit ist das arabische سمت, semt, oder nach spanischer, französischer und englischer Schreibart, Zemt, so wie der Name der Stadt فاس, Fâs, in Afrika, in gedachter Sprache Fez geschrieben wird (von Deutschen unrichtig Fets ausgesprochen). Durch die Schuld der Abschreiber ward Zemt in Zenit verwandelt, so wie sie aus der Stadt حمص, Hems, in der alten lateinischen Übersetzung des Fergani (Alfraganus, Norimb. 1537 Cap. IX) Henis und dann weiter Henit machten. Mit dem Artikel Al ward daraus Alzenit, und weil das l des Artikels in vielen Fällen mit dem Buchstaben, vor welchem es steht, zusammenschmilzt, so entstand daraus Azenit oder Azenith. In dieser Form brauchte man es in allen Fällen, wo im Arabischen das Wort Semt, Richtung, vorkam, z. B. Azenith capitis, Azenith orientalium et occidentalium circuli horizontalis, d. i. Richtung (oder Gegend) der Auf- und Untergangspunkte am Horizont, im 7. Kap. des Al-Battânî; (ALBATEGNIUS, Norimb. 1537, Index) im Texte selbst wird das A weggelassen, und von Zenit occasus cancri et capricorni im Horizonte gehandelt; so heißt auch die Überschrift des 17. Kapitels in Jo. Schoneri Globo stellifero A. 1533: „Zenith seu distantiam horizontalem solis vel stellae etc. ab initio alicujus quartae etc. deprehendere". Der erste Artikel allein betrifft den Scheitelpunkt; hingegen die 3 letzten bloß die Richtungen, die durch einen Bogen des Horizontes gemessen werden. Allmählich aber kam es bei den europäischen Astronomen zu einer stillschweigenden Übereinkunft, das Wort Zenit ausschließlich vom Scheitelpunkt zu gebrauchen, woran folgender Umstand Schuld war: Der im Arabischen sog. gebrochene Plural von semt heißt سموت, simût, spanisch oder französisch Zimûth geschrieben, mit dem Artikel Alzimuth, mit der Verschmelzung Acimuth. Nach einer Eigenheit der arabischen Sprache wird der gebrochene Plural mit einem Adjektiv, das im Singular steht, konstruiert. Deshalb konnte ein Übersetzer den Plural für eine Singularform halten, und so war der Übergang zur Annahme des Wortes Alzimut, Azimut in der Bedeutung von Horizontalrichtung im Singular nicht schwer. So hat man also in Europa Zenit und Azimut als zwei verschiedene Wörter in verschiedener Bedeutung in die Kunstsprache der Astronomie aufgenommen, die im Arabischen nur ein Wort von einer Bedeutung ausmachen."

2. **Nadîr** ist das arabische نظير, naẕîr. ظ (ẕâ) ist ein dumpfes, am oberen Gaumen ausgesprochenes z; dieses wird in der spanischen Sprache im Anlaut durch t, inlautend durch d wiedergegeben, und

in der Schreibweise mit d ist das Wort نظير auf uns gekommen. [Vgl. C. F. Seybold im Grundriß der Romanischen Philologie von Gust. Gröber, Straßburg 1904, I. Bd. (2. Aufl.), S. 519: „Das Arabische in den romanischen Ländern"].

Wittstein, der offenbar die richtige Schreibweise aus arabischen Astronomen nicht kannte, ließ sich von der abendländischen Aussprache verleiten, النظير unter النضير, an-naḍîr im Wörterbuch aufzuschlagen, wodurch er auch als Sacherklärung folgendes fand: „en-naḍîr drückt eine Wechselseitigkeit in optischem Sinne aus, wie von 2 entgegengesetzten Punkten: der eine sieht den andern an. Hieraus punctum oppositum, Fußpunkt, Nadîr[1]." [Vgl. auch Caussin de Perceval in Notices et extraits d. mscr. de la bibl. nat., t. VII p. 90. „. . . Ils (die Araber) disent de même semt al cadam (سمت القدم tractus pedis)[2] pour indiquer la partie du ciel située sous nos pieds. Ils l'appellent aussi al nadir النظير (le nadir), mot que nous avons conservé et qui signifie en arabe situé à l'opposite".]

3. **Al'iḍâde.** Wittstein erklärt: „Unser Alhidade kommt von الحداد, al-ḥidâd, ‚Grenzmesser'." Aber man kann sich wirklich schecht vorstellen, was ein „Grenzmesser" sein soll. Schon einleuchtender sind die Ableitungen des Wortes von العدادة al-'adâde, der Zähler. So findet man Alhidâde z. B. bei H. J. Klein (Populäre astronomische Enzyklopädie, Berlin 1871 S. 12) und auch von Montucla erklärt. Bei letzterem heißt es in seiner „Histoire des Mathématiques", daß Alhidâde von عدّ, 'adda, numeravit, abgeleitet sei. Doch trifft auch dies nicht das Richtige. Vielmehr heißt es العضادة al-'iḍâde, zu deutsch Pfeiler, Säule, Pfosten. Diese richtige Schreibweise findet sich in R. Wolfs Handbuch der Astronomie' ihrer Geschichte und Literatur, Zürich 1891—93, II. Bd., S. 19. Doch ist dies nicht die Entdeckung, die man in einer „damals erst zugänglichen Handschrift" machen konnte, sondern al-'iḍâde (mit ض = ḍâd) findet sich bei den älteren arabischen Astronomen des öfteren, so z. B. bei Al-Battânî (vgl. Nallino: Opus astronomicum, Mailand 1899—1907, Textum arabicum ١٣٧, ١٣٨, ١٨٥ und in der pars secunda, wo es S. 346 heißt: alhidada = dioptra, *ὄργανον παραλλακτικόν*, regulae parallacticae, triquetrum.)

---

[1] Das Lexikon gibt jedoch, beim richtigen Wort aufgeschlagen, النظير an-naẕîr oder نظير السمت naẕîr as-semt: „nadîr, Fußpunkt".

[2] القدم, al qadam, der Fuß.

9*

Es ist eigentlich falsch, von „die Alhidade zu sprechen“ da al schon der Artikel ist. Die Alhidade ist ein Bestandteil des Astrolabs. „Sie gleicht einem Lineal; sie hat 2 Vorsprünge, sie heißen Libna (Klötze, Ziegelsteine). In der Mitte eines jeden von diesen befindet sich ein Loch. Diese Alhidade befindet sich auf dem Rücken des Astrolabs. Mit ihr bestimmt man die Höhe der Sonne und der Gestirne“ (E. Wiedemann: Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften XVII und XVIII, Erlangen 1909, S. 34).

C. F. Seybold macht (a. a. O. S. 521) von al-ʿiḍâde folgende interessante Bemerkung: „al(h)idade, alhadida = règle mobile dans l'astrolabe, arabisch al-ʿiḍâda, aus welchem Worte wohl auch unser

**4. Theodolith** entstellt ist, früher alydeday, dann athelida, französisch alidade mit englischem Artikel the (vgl. tother = the other?)“ Über das Wort Theodolith mit seinem ganz griechischen Gepräge ist schon viel spekuliert worden. Eine frappante Übereinstimmung mit dem jetzigen Wortbild erzielte L. Am. Sédillot in folgender griechischen Ableitung … „et si l'on fait venir théodolite de *ϑεῶ* (dimin. de *ϑεάω*, *ϑεάομαι*, je regarde) et de *δόλιχος*, un long espace, c'est bien avec permutation d'une seule lettre, le théodolite, instrument, dont on se sert pour les opérations géodésiques etc.“ (L. Am. Sédillot: Histoire des Arabes, Paris 1877, II p. 210).

**5. Almuqanṭarât** erklärt Wittstein folgendermaßen: „ein kleiner, dem Horizont paralleler Kreis der Himmelskugel. Das Stammwort ist ein verbum quadriliterum قنطر, qantara, opes possedit, per talenta oder besser coacervavit, er hat aufgehäuft.“ Die Zuhilfenahme des vierradikaligen Verbums scheint mir wenig zweckdienlich und auch überflüssig, da man im Wörterbuch direkt aufschlägt: مقنطرات, muqanṭarât, Gewölbebogen, Parallelkreis des Horizonts, مقنطر, muqanṭar heißt bogenförmig, gewölbt, auf Bogen ruhend (Brücke), Sonnenuhr. Zweifellos liegt ihm قنطرة, qantara, Brücke, Wölbung, Bogen, Aquäduct zugrunde. (Davon auch das spanische Alcántara und das am Suez-Kanal gelegene El-Ḳanṭara, wo von alters her über die sog. „Brücke“ [Landenge] zwischen dem Menzaleh-See und dem Balaḥ-See die große Heerstraße von Ägypten nach Syrien führt. S. Baedeker: Ägypten, 1913, S. 177).

Einer besonderen Pflege erfreut sich die Gnomonik (Sonnenuhrkunde) bei den arabischen Astronomen, da die Sonnenuhr in der islâmischen Religion eine große Rolle spielte. Gewöhnlich waren die Stundenlinien der Uhr auf einer Marmorplatte verzeichnet, weshalb die Sonnenuhr bei den Arabern schlechtweg

6. **Al-ruchâma**, الرخامة, der Marmor hieß. Doch unterschied man im besonderen die ebenen Uhren von den Zylinder-, Kegel- und Kugeluhren. Nur die ebene Uhr diente religiösen Übungen (Gebeten). Sie hieß die

7. **Basîṭa**, بسيطة, von بسيط basîṭ, ausgebreitet. Von demselben Worte leitet sich der Name der spanischen Stadt Albacete (البسيط albasîṭ, die weite Ebene, das offene Land) ab. Tatsächlich trifft diese Bezeichnung in bezug auf die Lage von Albacete das Richtige. Auf der horizontalen Uhrfläche war dann stets die

8. **Qibla**, قبلة, eingetragen, eine nach Mekka weisende gerade Linie, die zur richtigen Gesichtswendung des Betenden diente. Qibla dürfte sich von قبل qibal, Seite, Richtung ableiten. Das Verbum اقبل aqbala heißt: „er hat das Gesicht gewendet“. اقبل عليه بوجهه, aqbala 'alaihi biwağhihi, er hat ihm sein Gesicht zugewendet. Ebenso استقبل القبلة istaqbala alqibla er nahm die Richtung zum Gebet gen Mekka. Bemerkenswert ist auch Reinauds Erklärung: „Or, la Mekke (= la Mecque) est au midi de la Syrie ainsi que d'une partie de la Mesopotamie et de l'Égypte le mot Ḳiblah est devenue pour les musulmans de ces contrées, le synonyme de midi, et il a été employé ailleurs avec la même acception“. (Introduction dans la géographie d'Aboulféda, CXCV.) Tatsächlich heißt Qibla auch Südseite und قبلىّ, qiblijj, südlich, تقبّل, taqabbala, er reiste nach Süden x. x. Der Zeiger oder Gnomon der Sonnenuhr heißt

9. **Miqjâs** مقياس, (von قياس, qjâs Messen). Dies kann auch Nilmesser (Nilometer), überhaupt Meßinstrument heißen. Da die Sonnenuhren also stumme Stundensager waren, so verstehen wir, daß auch sie den Namen مواقت mawâqit hatten. Der an den großen Hauptmoscheen angestellte Beamte, der die Zeit bestimmte, hieß

10. **Muwaqqit**[1] موقّت, er ist verschieden von dem Gebetsrufer, dem

11. **Mu'aḏḏin** مؤذّن (Muezzin).

Wie sehr aber die Gestalt eines Instrumentes für seine Benennung maßgebend sein konnte, ersehen wir an der soeben von

---

[1] Von الوقت, al-waqt, die Zeit.

E. Wiedemann und J. Würschmidt beschriebenen kegelförmigen Sonnenuhr, welche

**12. Mukḥula, مكحلة,** hieß. Dies bedeutet in der gewöhnlichen Sprache ein Instrument, in dem man den Kuḥl[1] (den als Augenschminke benutzten feingepulverten Spießglanz) aufbewahrte. (Vgl. Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, 7. Bd., 1916, S. 359—376).

Noch sei zum Schluß auf einige Ausdrücke der Mathematik hingewiesen, die arabischen Ursprungs sind.

**13. Algebra**; arabisch الجبر, al-ǧabr, die Vereinigung des Getrennten, Reduktion der Brüche, oder auch جبر ومقابلة ǧabr wa muqâbala, Wiedereinrichten und Vergleichen. (Die Algebra)

**14. Ziffer**, vom arabischen صفر, ṣifr, Zeichen der Null. صفر صحر, sifr ṣiḥr, ganz leer.

„Besonders interessant ist das Zurückgehen der Bezeichnung der Unbekannten durch

**15. X** auf xei, arabisch schai', شى, Sache, res, ‚cosa' [xei abgekürzt in x = ش (š) = شى]" (Seybold a. a. O. S. 521).

Viele astronomische (Stern-)Namen sind erläutert von E. Wiedemann: „Über die Astronomie nach den Mafâtîḥ al 'Ulûm" (Schlüssel der Wissenschaften, von فتح fataḥa er hat geöffnet und علم 'ilm Wissenschaft) Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften, XLVII, Erlangen 1915.

---

[1] Über Alkohol und Alkohl vgl. den Aufsatz gleichen Namens von J. Ruska (Aus der Natur, 1913, S. 97—111).

# Die Mekka- oder Qiblakarte.

## (Gegenazimutale mittabstandstreue Projektion mit Mekka als Kartenmitte.)

(Mit zwei Abbildungen im Text und einer Karte.)

Von Dr. Carl Schoy, Essen a. d. R.

Als eine der vornehmsten Pflichten des Islâmgläubigen lehrt der Qur'ân die Gesichtswendung zur Ka'ba (= Würfel, Kubus) in Mekka während des Gebetes. Allerdings ist die Orientierung nach dem Heiligtum nicht arabischen, sondern jüdischen Ursprungs. Anfänglich wandte auch Muhammed sein Antlitz beim Gebet nach Jerusalem; ja die älteste Moschee zu Medina ist nach Jerusalem orientiert. Erst am 16. Januar 624 änderte der Prophet die Qibla, d. h. die Gesichtswendung zur hl. Stätte, dahin ab, daß von jetzt ab sich alle Muslime bei den fünf täglichen Gebeten nach der Ka'ba zu Mekka richteten. Das Wort Qibla dürfte sich von *qibal*, Seite, Richtung ableiten. Daß indes Qibla am besten mit Gesichtswendung zur Ka'ba definiert wird, ergibt sich aus der Sprache eines der hervorragendsten arabischen Astronomen, des Ibn Jûnus († 1009 zu Kairo). Die Überschrift des 28. Kapitels seiner berühmten Ḥâkimitischen Tafeln, *Kitâb al-ziǧ al-Kabîr al-Ḥâkemji* = Buch der großen ḥâkemitschen Tafeln[1]) lautet: *fî ma'rifat semt al-qibla wa huwa'l-tawaǧǧuh ilâ 'l Ka'ba* = wie man die Richtung der Qibla oder die Gesichtswendung zur Ka'ba findet. Trefflich ist folgende Bemerkung Reinauds: „... Or, la Mekke est au midi de la Syrie ainsi que d'une partie de la Mesopotamie et de l'Égypte. Le mot Kiblah est devenu pour les musulmans de ces contrées, le synonyme de midi, et il a été employé ailleurs avec la même acception“ (Introduction dans la géographie d'Aboulféda CXCV). So heißt „südlich“ auch قبلى, *qiblijj*.

Von der Vorschrift, sein Antlitz beim Gebete gen Mekka zu wenden, weicht selbst ein religiös gleichgiltiger Muslim kaum ab. Carsten Niebuhr bemerkt in seiner heute noch immer lesenswerten Reisebeschreibung von Arabien, daß ihn öfters in der Wüste herumschweifende Beduinen angefleht hätten, ihnen die Qibla zu bestimmen, und wie inständig der fromme Muselman Yahia auf der Insel Sokotra den französischen Mathematiker Montucla einst bat, ihm auf dem Boden seines Gebetszimmers die rechte Qibla zu ziehen, erzählt dieser selbst in seinen Récréations mathématiques et physiques, 1790, T. III, p. 63.

Schon frühzeitig wurde die Mekkarichtung auf dem Zifferblatt der Horizontalsonnenuhren vom Astronomen, der gleichzeitig Diener der Religion war, für den öffentlichen Gebrauch verzeichnet. Gewöhnlich befand sich eine derartige Sonnenuhr auf einem Gebetsplatz. Sie ließ aus der Lage des Schattens ihres Zeigers die Zeiten der fünf täglichen Gebete erkennen. Unsere Abb. 1 stellt einen solchen öffentlichen Gebetsplatz dar[2]). Ein pyramidenförmig zugespitzter Stein, dessen Vorderfläche mit der ewigen Lampe geschmückt war, markierte die Qibla. Der Betende, der auf dem Gebetsteppich (*saǧǧâda*, سجادة) kniet und die Lampe anblickt, wendet damit von selbst sein Gesicht gen Mekka. Über die genaue Festsetzung der Qibla irgendeines Ortes, zu der man bekanntlich der Kenntnis der geographischen Breiten Mekkas und des fraglichen Ortes sowie des Längenunterschiedes derselben bedarf, haben sehr viele arabische Astronomen geschrieben. Ich habe die wichtigsten diesbezüglichen Methoden, welche zur Anwendung kamen, zusammengestellt und erläutert in dem Aufsatz: „Mittagslinie und Qibla“ (Ztschr. d. Ges. f. Erdk. Berlin 1915, S. 13 ff.).

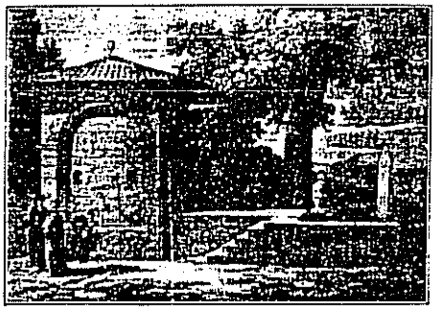


Abb. 1.

In neuester Zeit ist die Qiblafrage auch Gegenstand kartographischer Studien geworden. In seinem Buche: „The Theory of Map-Projections with special reference to the projection used in the Egyptian Survey Department“, Kairo 1911, und schon früher erwähnt I. Craig eine „Mecca retroazimuthal projection“, die den Zweck hat, eine Karte herzustellen, in der auf jedem Punkte die wahre Richtung der Qibla sofort abgelesen werden kann. Dabei sind die Meridiane als gleichabständige Geraden angenommen. E. v. Hammer schlug vor, zur Gegenazimutalität noch die Mittabstandstreue als weitere Eigenschaft hinzuzufügen, da die Karte dann außerdem auch direkt die kürzeste Entfernung eines Ortes von Mekka abzugreifen gestattet. (Vgl. Hammer in Peterm.

---

[1]) Ich hoffe, in friedlicheren Zeiten eine deutsche Ausgabe dieses leider noch immer unübersetzten Werkes besorgen zu können.

[2]) Nach Muradgea d'Ohsson: Tableau général de l'empire othoman. Paris 1788. Tafel XVI.

Mitt. 1910, S. 153.) In diesem Falle geht aber die Geradlinigkeit der Meridiane verloren. Ich habe dieses immerhin merkwürdige Kartogramm einer mathematischen Behandlung unterzogen in meiner Studie: Die gegenazimutale mittabstandstreue Karte in konstruktiver und theoretischer Behandlung. (Annalen d. Hydrographie und maritimen Meteorologie, 1913, S. 466 ff.)

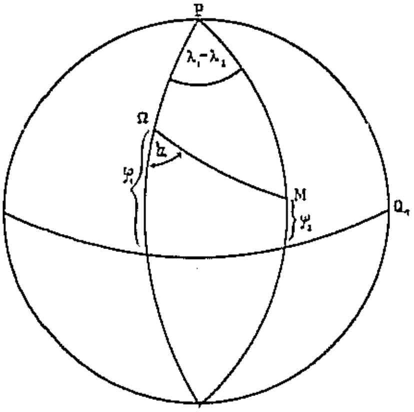


Abb. 2.

Hier möchte ich einen ausgeführten Netzentwurf ohne jedes mathematische Beiwerk geben. Nur mit wenigen Worten soll die Entstehung der Karte beschrieben werden. In Fig. 2 ist $M$ Mekka und $\Omega$ der fragliche Ort, dessen Gegenazimut $\alpha$ ermittelt werden soll. $P$ sei der Nordpol, $Q\,Q_1$ der Erdäquator. Die Qiblarichtung ist dann identisch mit dem Winkel, den der Großkreisbogen $\Omega\,M$ in $\Omega$ mit dem dortigen Meridian bildet. Da sich der Bogen $\Omega\,M$ längentreu abbilden soll, so wurde er zuerst berechnet nach der Formel:

$$\cos(\Omega\,M) = \cos\delta = \sin\varphi_1 \,.\, \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \,.\\ \cos\varphi_2 \,.\, \cos(\lambda_1 - \lambda_2),$$

wo $\varphi_1$ und $\varphi_2$ und $\lambda_1$ und $\lambda_2$ beziehungsweise die Breiten und Längen von $\Omega$ und $M$ sind. Ebenso findet sich $\alpha$ mittels des Kotangentensatzes:

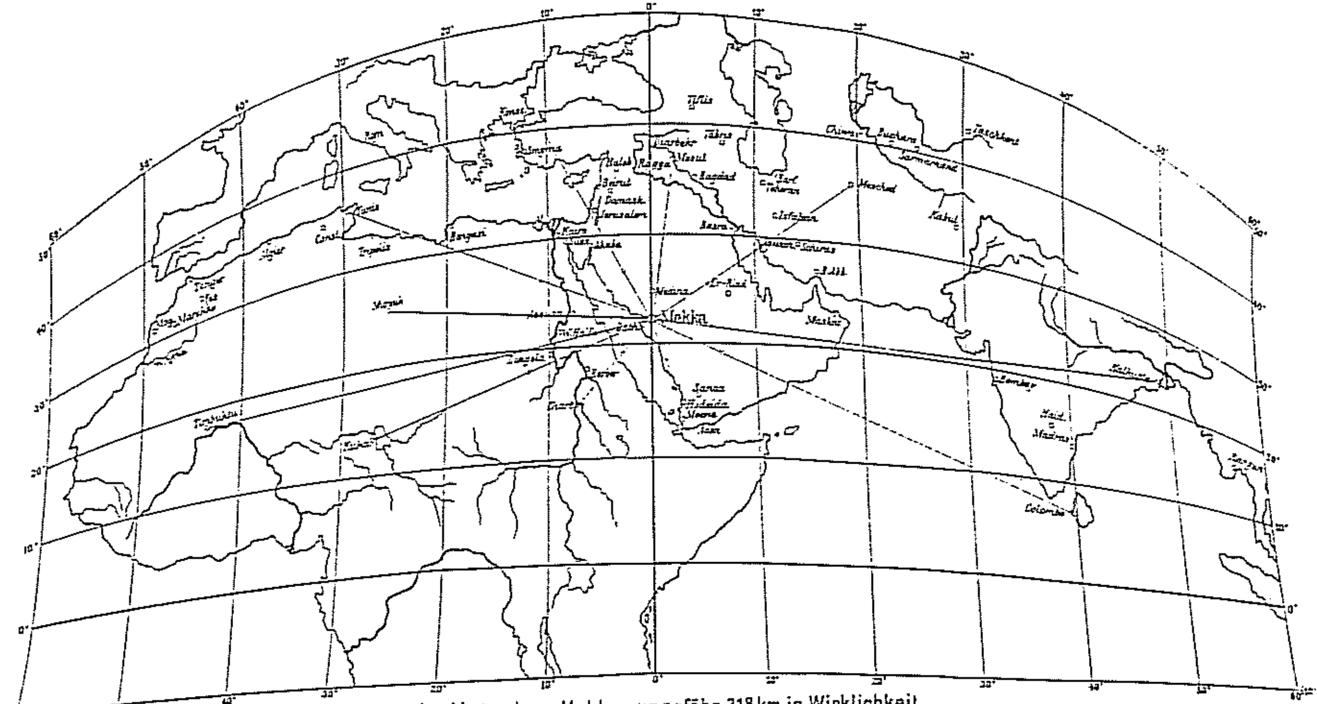
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin\varphi_1 \,.\, \cos(\lambda_1 - \lambda_2) - \cos\varphi_1 \,.\, \operatorname{tang}\varphi_2}{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

Nachdem ich für die Breiten und Längen von 10° zu 10° $\delta$ und $\alpha$ ermittelt hatte, beschrieb ich um Mekka als Mittelpunkt konzentrische Kreise mit den bezüglichen Werten von arc $\delta$ (in Linearmaß) als Radien und trug dann im Kartenmittelpunkt an den geradlinigen Mittelmeridian die bezüglichen Werte der Gegenazimute ($\alpha$) an, da ja in unserem Falle das Azimut nach der Kartenmitte in dieser selbst abgelesen werden kann. So erhielt ich eine Reihe von Punkten der Parallelkreise, die auch gleichzeitig Punkte der Meridiankurven sind. Die Verbindung aller Netzschnittpunkte durch stetige Kurven ergab ein Kartennetz mit konvex zum Mittelmeridian gekrümmten Längengraden. Wie ein Blick auf die Karte lehrt, sind die Verzerrungen der Winkel gegen den Ost- und Westrand sehr beträchtlich, und es könnte deshalb diese Art der Abbildung für stark in der Ostwestrichtung ausgedehnte Ländergebiete nicht in Frage kommen. Das Kartogramm hat ja auch nur einen speziellen Zweck.

---

# Quiblakarte

Kartogr. u. Schulgeogr. Zeitschrift 1917



1cm gerader Abstand von Mekka = ungefähr 318 km in Wirklichkeit

Verlag: Anstalt G. Freytag & Berndt, Ges. m. b. H., Wien

# Erdmessungen bei den Arabern.

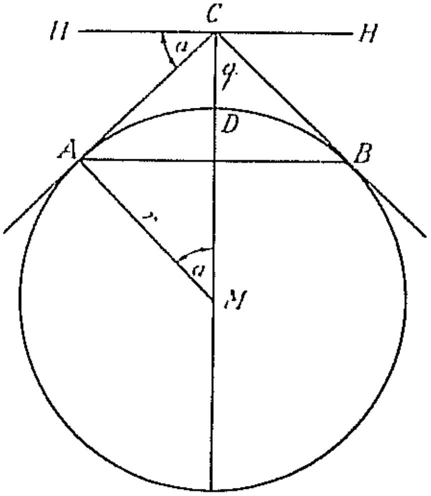
Von C. Schoy.

## I.

## Die Bestimmungen des Erdumfangs nach Al-Bîrûnî.

Allgemein werden unter den arabischen Gradmessungen jene verstanden, die auf Befehl des Chalifen Al-Ma'mûn von arabischen Astronomen ausgeführt wurden. Indessen berichten uns sowohl Maḥmûd-Bey[1]) als auch Eilhard Wiedemann[2]), daß der hervorragende arabische Gelehrte Abû'l-Raiḥân al-Bîrûnî (973—1048) u. a. schon auf eine Art und Weise eine Erdmessung vornahm, die uns heute als die Methode der Messung der Horizontaldepression bekannt ist[3]) und darin besteht, daß von einer bekannten irdischen Erhebung CD = q aus der Tiefenwinkel $\alpha$ instrumentell bestimmt wird, welchen die die Erde tangierenden Sehstrahlen CA und CB mit einer horizontalen Richtung HH bilden. Daraus folgt für den gesuchten Erdradius r:

Abbild. 32.



$$\cos \alpha = \frac{r}{r + q}, \quad r = \frac{q \cdot \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = q \cdot \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}$$

Bîrûnî wandte wohl zum ersten Mal diese Methode an, um dadurch die Richtigkeit der Al-Ma'mûnschen Resultate zu prüfen. Der ägypti-

---

[1]) Le système métrique actuel d'Égypte comparé au système français, les Nilomètres tant anciens que modernes et les antiques coudées de l'Égypte. Copenhague 1 72.

[2]) Bestimmungen des Erdumfanges von Al-Bîrûnî. (Archiv f. d. Gesch. d. Naturwiss. u. d. Technik, 1008, S. 66 ff.)

[3]) Vgl. z. B. S. Günther: Handbuch d. mathematischen Geographie, Stuttgart, 1890, S. 216.

sche Astronom Maḥmûd-Bey erzählt darüber (a. a. O. S. 42—43) folgendes: „L'erreur des astronomes d'Almamoun doit être très minime dans leur mesurage du degré terrestre: tous nos anciens astronomes l'attestent; Abou' Elraîhân Al-Beirouni en avait fait la vérification pour sa satisfaction personnelle et aussi pour s'assurer de l'exactitude de mesurage des astronomes d'Almamoun: il s'est servi d'une méthode indirecte n'ayant pas d'aides, comme il le dit lui-même dans son grand ouvrage intitulé Alkanoun al Masoudi. Dans les Indes, du sommet d'une montagne, qui dominait la mer et une plaine se terminant au niveau de la mer, il a déterminé géométriquement la hauteur du sommet au dessus de l'eau et il l'avait trouvée de six cent cinquante deux coudées et la moitié d'un dixième d'une coudée, savoir 652.$^{m}$ 05[1]; il a mesuré ensuite l'angle que forment la ligne visuelle dirigée vers l'horizon et la ligne horizontale partant du même sommet; cet angle s'est trouvé de 34 minutes. D'après ces éléments, notre astronome a calculé le rayon de la terre et, ensuite, la longueur du degré terrestre; il l'a trouvé de 58 milles.

Après être arrivé à ce résultat Beirouni dit: ,Ce résultat se rapprochant de celui des astronomes d'Almamoun, le touchant même, le coeur s'en tranquillise et nous nous en servons; car leurs instruments avaient plus de précision et ils se donnèrent plus de peine pour l'obtenir d'une manière exacte."

Die Methode selbst beschreibt Bîrûnî nach Wiedemann in seiner Schrift über das Astrolab. Er empfiehlt, von der Spitze des Berges aus nach der auf- oder untergehenden Sonne zu visieren und alsdann mit dem Astrolab den Tiefenwinkel oder die Depression zu bestimmen. Auch die oben angegebene Formel für die Berechnung des Erdradius kennt Bîrûnî. Ich möchte jedoch für nähere Details auf die anschaulichen Darlegungen in Wiedemanns kurzem Aufsatz selbst verweisen, der ja leicht zugänglich ist.

Das zweite Verfahren zur Ermittlung der Länge eines Erdgrades, das uns Bîrûnî lehrt, ist das übliche von den Astronomen Al-Ma'mûns befolgte, von dem im folgenden noch näher gesprochen werden soll. Man findet die Übersetzung der hierauf bezüglichen Stelle bei Wiedemann (a. a. O. S. 66/67).

Es dürfte von Interesse sein, das von Bîrûnî erhaltene Resultat von 58 Meilen auf seine Genauigkeit zu prüfen. Diese ist bedingt durch die Genauigkeit bezw. Feinheit der Kreisteilung des Astrolabs und die der benutzten Sinustafeln. Wohl sagt schon Al-Battânî († 929) im Opus astronomicum inbezug auf die Umfangsteilung eines Quadranten: - - - et in intervallo unius gradus quot minuta potes nota"[2]. Aber bei Astrolabien

---

[1] Dies muß natürlich Ellen (coudées) heißen.

[2] Albattânî sive Albatenii Opus astronomicum editum a. C. A. Nallino. Milano 1903.

dürften die Intervalle der Grade höchstens Drittelgrade gewesen sein[1]. Auch über die Berechnung der Sehnen im Kreise (Sinus) schrieb Bîrûnî[2]. Von welcher Güte die von ihm bei derartigen Berechnungen wie der obigen benützten Sinustafeln waren, wissen wir nicht. Die genaueste, die der Kairiner Astronom Ibn Jûnis († 1009) erstellt hatte schritt von 10 zu 10 Minuten fort[3]. Selbst wenn Bîrûnî im Besitz dieser Jûnisischen Tafel gewesen wäre, hätte sein Resultat nicht genau werden können. Tatsächlich gibt die Rechnung:

$$r = 625{,}05 \cdot \frac{\cos 34'}{2 \cdot \sin^2 17'} \text{ Ellen},$$

und da die Meile 4000 Ellen hatte, folgt

$$\text{also } r = 3254 \text{ Meilen (rund)},$$

und hieraus $$1^\circ = \frac{r \cdot \pi}{180} = \frac{3254 \cdot 3{,}14}{180} = 57 \text{ Meilen (rund)}.$$

Nach Wiedemann[4] gibt Bîrûnî den Durchmesser der Erde zu $2163^2/_3$ Parasangen, den Umfang zu 6800 Parasangen an. Da eine Parasange 3 Meilen betrug, so war $r = 6491$ arabischer Meilen und hienach $1^\circ = 56^2/_3$ Meilen. Wie Bîrûnî auf die Zahl 58 Meilen kommt, wissen wir nicht; wahrscheinlich infolge seiner ungenauen trigonometrischen Tafeln. Die arabischen Astronomen und Geographen haben ja zumeist den Erdgrad zu $56^2/_3$ Meilen angenommen. Danach wäre der Wert, der aus Bîrûnîs Methode folgte, im Vergleich zu den Fehlerquellen, die einem solchen Verfahren anhaften, ein sehr guter zu nennen[5].

## II.

## Die eigentlichen arabischen Gradmessungen.

Wir haben über dieselben in der Hauptsache zwei Zeugnisse arabischer Autoren, die in Übersetzung nach dem Abendland gelangt sind und sich

---

[1] Notices et extraits des mscr. de la biblioth. nat. t. VII . 91 u. 92. Delambre: Histoire de l'astronomie du moyen âge, Paris 1819, p. 78 ff.

[2] H. Suter: Die Mathematiker u. Astronomen d. Araber u. ihre Werke, Leipzig, 1900, S. 100.

[3] Delambre: Hist. de l'astr du moy. âge, p. 122.

[4] Anschauungen der Muslime über die Gestalt der Erde. (Archiv f. d. Gesch. d. Naturw. u. d. Techn., 1909, S. 319.)

[5] Nach S. Günther (a. a. O. S. 219) soll der bekannte Geodät Clarke auf diese Weise auch vom Gipfel des schottischen Berges Ben Nevis aus einen ganz guten Näherungswert für r erhalten haben.

auszugsweise in fast allen diesbezüglichen Schriften wiederfinden[1]. Ich möchte jedoch in dieser Studie die Belegstellen ins Deutsche übertragen wörtlich wiedergeben. Die zuverlässigste Berichterstattung ist wohl die des Astronomen Ibn Jûnis[2]. Sie lautet: „Send [Sened] ibn 'Alî berichtet, daß Al-Ma'mûn ihm und Châled ibn 'Abdelmalik Al-Merwarrûḏî befahl, einen Grad auf einem Großkreis der Erde zu messen. Wir reisten zusammen für diese Aufgabe (franz. object). Er gab selbst seine Vorschriften an 'Alî ibn 'Îsâ al-Asṭerlâby und an 'Alî ibn al-Bohtorî, welche nach der anderen Seite sich begaben. Wir, fährt Send fort, begaben uns in die Gegend zwischen Wamia [im Arab. gewöhnlich Famia oder Afamia genannt, Mas'ûdî nennt Raqqa und Tadmor (Anmerk. v. Caussin de Perceval, dem Übersetzer)] und Tadmor und bestimmten dort das Maß eines Grades, welches sich zu 57 Meilen ergab. 'Alî ibn 'Îsâ und 'Alî ibn al-Boḥtorî fanden dieselbe Größe, und die zwei übereinstimmenden Resultate wurden zu gleicher Zeit eingebracht.

Ahmed ibn 'Abdallâh, genannt Ḥabaš, berichtet in seiner Beschreibung der Beobachtungen, die zu Damaskus für die Verfasser der „erprobten Tafeln" angestellt wurden, daß Al-Ma'mûn ihnen befahl, einen Grad eines Großkreises zu messen. Sie begaben sich in die Ebene von Singâr und sahen zu, daß die am gleichen Tag beobachteten Meridianhöhen um 1° differierten. Sie maßen hierauf die Entfernung der 2 äußersten Punkte und fanden sie 56¼ Meilen gleich; jede Meile enthält 4000 schwarze Ellen, ein von Al-Ma'mûn adoptiertes Maß. [Voyez les notes de Golius sur Alfragan p. 72 (Anmerkung von Caussin)][3].

Um eine solche Messung richtig auszuführen, ist es unbedingt nötig, daß die Beobachter vor allem immer in derselben Meridianebene verbleiben. Dazu ist erforderlich, einen Meridian in dem Orte zu ziehen, wo man die Messung beginnt, und 2 Meßschnüre zu nehmen, jede etwa 50 Ellen lang, das Ende der

---

[1] Vgl. z. B. S. Günther: Studien zur Geschichte der mathemat. u. physikal. Geographie, Halle, 1877, S. [illegible]9. O. Peschel. Geschichte d. Erdkunde bis auf A. v. Humboldt u. Carl Ritter, München 18[illegible]5, S. 121 (2. Aufl. v. S. Ruge, 1877, S. 131). Vivien de St.-Martin: Hist. de la géographie, Paris, 1873, p. 250 (ausführlicher). Jordan geht in seinem später noch näher zu besprechenden Artikel: Die Gradmessung der Araber im Jahre 827 n. Chr. (Ztschr. f. Vermessungswesen. 1889. S. 100 ff.) auf die Darstellung von Snellius in „Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate", Lugduni Batavorum, 1617, zurück und nicht auf Abû'l-fedâ', dessen Geographie uns seit 1848 durch Reinaud zugänglich gemacht worden ist. (Géogr. d'Aboulféda t. II p. 17.)

[2] Notices et extr. des manuscr. d. la bibl. nat. t. VII p. 94.

[3] Die Astronomie des Al-Ferġânî ward u. a. auch von Jakob Golius arabisch und lateinisch 1669 zu Amsterdam mit zahlreichen Anmerkungen und Zusätzen herausgegeben. Der lateinische Titel des trefflichen Buches lautet: Muhammedis fil. Ketiri Ferganensis qui vulgo Alfraganus dicitur Elementa Astronomica,

ersten auf dem Meridian aufzulegen, das Ende der zweiten auf die Mitte der ersten zu legen, dann die erste Elle aufzuheben, ihr Ende auf die Mitte der zweiten zu verbringen usw. So wird man sich nicht aus der Meridianrichtung entfernen, und wenn man mit zwei guten Instrumenten, welche genau die Minute ablesen lassen, einen Meridianhöhenunterschied von 1° wird ermittelt haben, so wird man die Distanz der zwei Orte messen. Man kann sich auch statt der 2 Meßschnüre dreier im Meridian gerichteter Körper bedienen. Man wird dann den ersten nahe beim Auge aufheben, um ihn voranzutragen, hierauf den zweiten, den dritten usw."

Ich lasse hier gleich den Bericht des großen Historikers und Geographen Abû'l-fedâ' (1273—1331) folgen, wie er sich in seinem geographischen Werk Taqwîm al-buldân (Die Ordnung der Länder) findet, das Reinaud, Mac Guckin de Slane und Guyard bearbeitet haben. Die französische Übersetzung hat den Titel: Géographie d'Aboulféda. Für unseren Gegenstand kommt folgende Stelle (tome II, partie I, p. 17) in Betracht: „Mehrere Gelehrte des Altertums, so Ptolemäus, der Verfasser des Almagest, u. a. haben sich um die Kenntnis des Wertes eines Grades bemüht, und sie haben den Grad eines größten Kreises zu $66^2/_3$ Meilen geschätzt.

Später, unter der Regierung Al-Ma'mûns wollten einige Gelehrte diese Schätzung auf ihre Richtigkeit prüfen. Auf Befehl des Chalifen begaben sie sich in die Ebene von Sinǧâr und nach Messung der Polhöhe an dem Orte, wo sie vereinigt waren, teilten sie sich in 2 Abteilungen. Die einen rückten gen den Nordpol, die anderen gen den Südpol vorwärts, indem sie in möglichst gerader Richtung marschierten, bis daß der Nordpol des Himmels sich für die nach Norden Gewanderten um 1° gehoben hatte, für die, welche sich nach Süden begeben hatten, aber um 1° gesunken war. Zuletzt kamen sie alle wieder im Orte des Ausgangs zusammen, und es fand sich, daß die einen für den Grad $56^2/_3$ Meilen, die anderen aber 56 Meilen ohne Bruch markiert hatten. Man einigte sich dahin den größten dieser 2 Werte zu adoptieren etc."

Endlich kommt auch der bekannte arabische Geograph Al-Mas'ûdî († 956 zu Altkairo) in seinem Werke Murûǧ aḏ-ḏahab (Goldwäschereien, weniger richtig Goldwiesen) an mehreren Stellen[1]) flüchtig auf die arabische Gradmessung zu sprechen. Er sagt: „Der Astronom Ḥosein, Verfasser des Werkes ‚Astronomische Tafeln', berichtet nach Châled b. 'Abd al-Malik (al-Merrûḏî) und anderen Gelehrten, welche auf Befehl Al-Ma'mûns die Sonnenhöhe in der Ebene von Sinǧâr, der Gegend von Diâr Rabî'a (in Mesopotamien), gemessen hatten, daß das Maß eines Grades des Erdumfangs 56 Meilen betrage" und fügt dem

---

[1]) Maçoudi, Les prairies d'or, texte et traduction par C. Barbier de Meynard, Paris 1861—77, t. I, p. 189 und 190—91, sowie Auszüge aus verschiedenen arab. Mss. von de Guignes in den Not. et extr. ect. t. I p. 48—55.

nachträglich bei: „Um dieses Maß (gemeint sind die Angaben des Ptolemäus über einen Längengrad) zu finden, maß man die Höhe des Nordpols in zwei Städten, die auf demselben Längengrade liegen, nämlich in Tadmor (Palmyra), das in dieser Ebene die Wüste 'Irâq von Syrien trennt, und in Raqqa. Man fand, daß diese Höhe in Raqqa $35^1/_3{}^\circ$ und in Tadmor 34° betrug, was eine Differenz von $1^1/_3{}^\circ$ darstellt. Darauf maß man die Entfernung zwischen diesen 2 Städten, welche man gleich 67 Meilen fand. Der Meridiangrad, den man beobachtet hatte, entsprach daher einer Bodenfläche (superficie terrestre?) von 67 Meilen[1])."

## III.

## Diskussion der verschiedenen arabischen Berichte.

Zunächst sei ein augenscheinlicher Fehler in der obigen Mas'ûdîschen Darstellung verbessert. Wenn $1^1/_3$ Meridiangraden die lineare Entfernung von 67 Meilen zukommt, so ergibt sich daraus für 1° die Zahl von $50^1/_4$ Meilen. Vermutlich wollte jedoch Mas'ûdî aus der arabischen Gradmessung ein Resultat deduzieren, das dem Ptolemäischen möglichst gleichkam. Dieser nahm den Erdumfang bekanntlich zu 24 000 Meilen, mithin die Länge eines Grades zu $66^2/_3$ Meilen an. Nimmt man den Meridiangrad zu 67 Meilen, so entspricht ihm ein Erdumfang von 24 120 Meilen. Dieses Maß oder ein diesem annäherndes ist der arabischen Geographie durchaus nicht fremd; sogar in späteren Zeiten begegnet man noch derlei Angaben, so bei Al-Khwârizmî[2]), Al-Battânî[3]), Abû'l-Ḥasan 'Alî al-Marrâkošî[4]), Abû'l-fedâ'[5]) und 'Alî Qôšǧî[6]). Ich möchte jedoch für nähere Details über arabische Meilen, die in den Varianten 75, $66^2/_3$ und $56^2/_3$ pro Méridiangrad auftreten, auf die treffliche Spezialstudie von C. A.

---

[1]) Statt Bodenfläche muß es natürlich irdische Länge heißen.

[2]) Die astronomischen Tafeln des Muhammed ibn Mûsâ al-Khwârizmî, herausg. u. kommentiert von H. Suter (Mém. de l'académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, 7 ^me^ série, sect. des Lettres, t. III n° 1, Copenhague 1914, p. 43).

[3]) Opus astronomicum, I, p. 17—19 u. 167, wonach Al-Baṭṭâni für 180° der terra habitab. 13 500 Meilen, also für 1° 75 Meilen annimmt (vgl. auch: Il valore metrico etc. p 9).

[4]) Traité des instruments astronomiques des Arabes, 2 Bände, Paris 1834/35. (Ausg. Abû'l Ḥasans von J.-J. Sédillot, t. I p. 325, chap. LXX ($66^2/_3$ Meilen)

[5]) Ausgabe v. Reinaud, t. I p. CCLXXXIX und CDLXII.

[6]) J. Lelewel: Géographie du moyen âge, Breslau, 1852—54, t. I. S. 155: „Sous son règne (des Olug-Beg) l'astronome Ali Koschgi, mort 1437, vérifia, dit-on, la mesure du degré et de la grandeur du globe. Le résultat de cette opération donna au grand cercle 8000 parasanges, au diamètre 2545. C'est juste la grandeur comme de Ptolémée. Koschgi savait que la parasange est composée de 3 milles etc." Hieraus ergibt sich für den Grad wiederum $66^2/_3$ Meilen.

Nallino: Il valore metrico del grado di meridiano, Torino, 1893, p. 6—12 verweisen.

Sodann stellen wir die Frage: Ist der Breitenunterschied zwischen Raqqa und Tadmor von den arabischen Gradmessern richtig angegeben, und liegen die Orte, um die es sich bei den arabischen Messungen handelt auf demselben Meridian? Auf die erste gibt Al-Mas'ûdî[1] eine Antwort. Man fand, daß die Polhöhe in Raqqa $85^{1}/_{3}$ Teile (parties) und in Tadmor 84 Teile betrug, was einen Unterschied von $1^{1}/_{3}$ Teilen zwischen beiden ausmacht. Dann maßen sie (die Astronomen) die Entfernung zwischen Raqqa und Tadmor und fanden sie zu 37 Meilen. „Ich weiß nicht, welcher Natur diese Teile sind, von denen es zwischen Raqqa und Tadmor $1^{1}/_{3}$ gibt", führt Lelewel fort, um daran eine Berechnung anzuschließen, die in ihren Grundlagen zweifellos verfehlt ist, und die ich deshalb nicht wiedergeben will, zumal sich die ganze Ungereimtheit dieser Stelle sofort weghebt, wenn man einen Fehler des Kopisten der Handschrift vermutet, die de Guignes vorlag. Es kann statt $85^{1}/_{3}$ und 84 nur $35^{1}/_{3}$ und 34 heißen, d. h. der Kopist schrieb irrtümlich ح statt ج, indem er den diakritischen Punkt vergaß, und ebenso lese man statt 37 Meilen 87 Meilen, wo also ج statt ح stand. Dann wären nach Mas'ûdî $1^{1}/_{3}{}^{\circ} = 87$ Meilen, woraus für 1° die Länge von 65¼ Meilen, also nahezu der Ptolemäische Wert $66^{2}/_{3}$ Meilen folgen würde. Auch Nallino hat sich (a. a. O. S. 16) mit dieser unklaren Stelle beschäftigt, ohne jedoch eine Aufhellung versucht zu haben; statt dessen reproduzierte er die auch astronomisch ganz unhaltbare Rechnung Lelewels. Doch gibt Nallino bei dieser Gelegenheit die genauen Breiten und Längen der 2 in Frage kommenden Orte an, welche (nach Prof. Guido Cora) die folgenden sind:

| Raqqa | Tadmor | $\varphi_1 - \varphi_2$ | $\lambda_1 - \lambda_2$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi_1 = 35^{\circ}\,55'\,35''$ | $\varphi_2 = 34^{\circ}\,32'\,30''$ | $1^{\circ}\,22'\,5''$ | $0^{\circ}\,49'\,7''$ |

Daß die parties (parti) bei den Arabern stets Bogengrade sind, weist Nallino (a. a. O. S. 17) quellenmäßig nach.

Aber schon zur Blütezeit arabischer Astronomie scheint man Raqqa und Tadmor nicht dieselbe Länge zugeschrieben zu haben. Dafür bringt Nallino (a. a. O. S. 18) folgende zwei Zeugnisse bei.

| | Länge v. Raqqa | Länge v. Tadmor | Unterschied |
|---|---|---|---|
| Nach Abû 'Awn Isḥâq b. 'Alî | 64° 0′ | 63° 15′ | 0° 45′ |
| Nach einem anonymen pers. Astronomen (nach Abû'lfedâ') | 63° 15′ | 62° 0′ | 1° 15′ |

---

[1] Notices et extr. etc. T. I p. 52, nicht wie bei Lelewel (a. a. O. S. 17) steht: T. II S. 55. Überhaupt ist die Géographie du moyen âge des polnischen Gelehrten, was Literaturangaben, Rechnungen und arabische Zitate anbelangt, mit Vorsicht zu gebrauchen. Diese Behauptung könnte ich durch verschiedene Belege stützen.

wonach diese Längenunterschiede vom wahren nicht beträchtlich abweichen.

Es ist kaum glaublich, daß die Astronomen Al-Ma'mûns, wenn sie die von Ibn Jûnis empfohlenen Vorsichtsmaßregeln oder ähnliche beim Durchmessen des Geländes beobachteten, von Raqqa aus so sehr von der wahren Nordsüdrichtung abgewichen sein könnten, daß sie nach 1$^1/_3$° zurückgelegter Breite einen Fehler von ca. $^4/_5$° Länge begangen hätten; es sei denn, daß sie, ohne die Richtung der Mittagslinie einzuhalten, sich einfach nach Tadmor gewandt hätten. Wie jedoch aus der Darstellung des Ibn Jûnis hervorgeht, ist statt Raqqa ein anderer Ort als Ausgangspunkt der Gradmessung angeführt, den Caussin Wamia, Famia oder Afamia gelesen hat. In diese Unklarheit dürfte L.-A. Sédillot Licht gebracht haben. Er äußert darüber folgendes[1]: Die Lektüre orientalischer Handschriften gibt bei der Interpretation oft zu Irrtümern Anlaß. So findet man bei Mas'ûdî[2], daß Sened-ben-'Alî und Châled ihre Beobachtungen zwischen Raqqa und Tadmor angestellt hätten, während Caussin nach Ibn Jûnis Tadmor und Wamia, das er für Apamea hält, genannt hat, allein der Ort, um den es sich hier handelt, muß unter dem Meridian von Tadmor liegen, um 1° nördlich oder südlich davon, während Apamea in Syrien ungefähr 2° westlich von Tadmor liegt. Wenn man sich nur an die Rechtschreibung des Wortes hält und die geographische Lage nicht berücksichtigt, ist ein Irrtum fast unvermeidlich. Der Name ist übrigens so geschrieben, daß man auch Waset (Wâsiṭ) lesen kann. Dies bezeichnet einen Ort nahe bei Raqqa, der den verlangten Bedingungen genügt[3].

## Von den arabischen Längenmaßen.

Und welche Zahl wurde für den Erdgrad aus den verschiedenen Messungen gewonnen? Auch auf diese Frage gibt es mehrere Antworten, wie sie schon im Text angedeutet sind. Man hielt anscheinend an dem Wert von 56$^2/_3$ arabischen Meilen für die Länge eines Meridiangrades fest. Nach den Angaben des Ibn Jûnis waren dem Chalifen Al-Ma'mûn zwei Ergebnisse gemeldet worden: 57 und 56¼ Meilen. „Man nahm nun aus beiden ungefähr

---

[1] L.-Am. Sédillot: „Sur les déterminations d'arc du méridien terrestre et les mesures de superficie des Arabes." (Lettre de M. Sédillot à M. de la Roquette; Bull. d. l. Soc. de Géographie, IV. série, 1851, t. I, p. 230—31.)

[2] Not. et extraits des manuscrits ect. T. I, p. 51 u. 52.

[3] „Infatti, tra le 15 località che portavano il nome di Wâsiṭ si trova anche Wâsiṭ ar-Raqqah, grossa borgata sulla riva destra dell' Eufrate, di rimpetto a Raqqah." (Nallino a. a. O. S. 18; vgl. auch die dort von Nallino beigebrachten Belegstellen aus Yâqûts geogr. Wörterbuch.)

das Mittel und setzte die Länge eines Grades zu $56^2/_3$ Meilen an.[1])" Dies ist eine nicht unberechtigte Vermutung, wenn man nur die von Ibn Jûnis berichteten Werte in Betracht zieht. Doch stehen im Ganzen die vier Resultate von 56, 56¼, $56^2/_3$ und 57 Meilen zur Diskussion, deren Mittelbildung zu der Zahl 56,48 Meilen führt. Auch Nallino nennt $56^2/_3$ Meilen den mittleren Wert (a. a. O. S. 20) und weist quellenmäßig nach, daß eine Anzahl arabischer Astronomen und Geographen wie Al-Farĝânî, Al-Bîrûnî, Abû Naṣîr al-Qomî, Abû'l-fedâ', Šams ad-dîn ad-Dimašqî u. a. denselben akzeptiert hatten. Die Zahl $56^2/_3$ folgt auch nahezu aus der Division von 9600 Meilen durch 170. Nach Al-Iṣṭaḫri und Ibn Ḥauqal war die Längenausdehnung der bewohnten Welt zwischen dem 180. oder äußersten östlichen Meridian (China) und dem 10. Längengrad, den man durch den Anfang der terra habitabilis — die insulae fortunatae — gehen ließ, 9600 Meilen auf dem Äquator, woraus für 1° der Quotient aus $\frac{9600}{170} = 56^8/_{17}$ resultiert[2]). Daß ein gewisser mittlerer Wert irgend einem Einzelwert vorzuziehen sei, dessen waren sich die arabischen Gelehrten wohl bewußt[3]).

Jedenfalls ist die Angabe mehrerer verschiedener Werte für die Länge eines Meridiangrades eine Stütze für die Annahme der tatsächlichen Ausführung der Gradmessungen, deren bloße Fingierung und Vortäuschung mit Kenntnis der Ptolemäischen Zahl ein Leichtes gewesen wäre. Mit einiger Vorsicht ist indessen der Bericht des Seneḍ ibn 'Alî aufzunehmen, wonach beide Gruppen von Feldmessern genau dasselbe Resultat von 57 Meilen erhalten haben sollen. Dazu bemerkt Delambre treffend[4]): „Cette parfaite conformité pourrait rendre le récit un peu suspect; nous aimerions mieux y voir quelque petite différence. Si les deux groupes se sont contentées des milles sans fraction, l'accord parfait des deux mesures sera moins étonnant, mais les mesures n'en seraient pas meilleures."

Aber religiöse Gründe schon dürften die arabischen Gradmesser

---

[1]) Vgl. H. Suter (Die Mathem. u. Astronom. usw.) S. 209, Peschel-Ruge a. a. O. S. 131/135, S. Günther a. a. O. S. 60; Vivien de Saint-Martin rechnet (a. a. O. S. 252) die Größe eines Meridiangrades mit 56¼ und 57 arabischen Meilen aus, ohne einem der Resultate den Vorzug zu geben.

[2]) Dazu sei folgende Stelle aus Nallino (a. a. O. S. 20) angemerkt: „Nella parte en geografica dei noti manuali رسائل, rasâ'il (= Abhandlung), degli Ichwân aṣ-ṣafâ' (= اخوان الصفا) o Compagni Fidi, specie di liberi pensatori stabiliti nel 'Irâq nel X sec. d. Cr., il diametro della terra è valutato a $2167^7/_{11}$ parasanghe, ossia $6502^{10}/_{11}$ migliá, onde risultano per la circonferenza del globo 20. 429, 5392 miglia e pel grado $56^{17}/_{11}$.

[3]) Nallino a. a. O. S. 21.

[4]) Hist. de l'astronomie du moyen âge S. 97.

vor einem derartigen Schwindel bewahrt haben, war die Förderung der Wissenschaft doch ein religiöses Verdienst in den Augen der Muslime[1]).

Nach dem Obigen liegt kein Bedenken vor, den mittleren Wert von $56^{2}/_{3}$ arabischen Meilen für die Länge eines Meridiangrades der weiteren Rechnung zugrunde zu legen. Es fragt sich nur, welche Lineargröße man der arabischen Meile zuschreiben soll. Und diese metrologische Frage ist es, die leider auch heute noch nicht befriedigend beantwortet ist. Außer Zweifel steht, daß die betreffende Meile aus 4000 Ellen bestand. Dies bezeugen eine Anzahl astronomischer und geographischer Schriftsteller, so Ibn Jûnis[2]), Al-Mas'ûdî[3]), Jâqût[4]), Abû'l-fedâ'[5]) u. a. öfters mit dem ausdrücklichen Zusatz, daß darunter die schwarze Elle (ذراع السوداء, dirâ' as-saudâ') zu verstehen sei, die der Länge des Unterarms einer Negersklavin Al-Ma'mûns gleich war. Die Elle selbst war wieder in eine Anzahl Finger (اصبع, iṣba') geteilt. Für die schwarze Elle wird in dieser Hinsicht von Nallino (a. a. O. S. 28) das Vorkommen von nicht weniger als den 9 Werten von 20, $23^{2}/_{3}$, 24, $25^{2}/_{3}$, $25^{5}/_{27}$, 27, $27^{1}/_{3}$, $29/^{3}_{11}$ und $33^{1}/_{11}$ Fingern quellenmäßig belegt, von denen jedoch für unsere Frage nur die 3 Werte von 24, $25^{2}/_{3}$ und 27 Fingern ernstlich in Betracht kommen. Ja, nach dem Qânûn al-Mas'ûdî des Bîrûnî[6]), von dem Nallino Einsicht nehmen konnte, ist es fast sicher, daß die schwarze Elle Al-Ma'mûns aus 24 Fingern bestand und daß 4000 solcher Ellen eine arabische Meile ausmachten; denn Bîrûnîs Angaben gehören zu den zuverlässigsten der arabischen exakten Wissenschaft.

Sehr beachtenswerte Versuche, die verschiedenen arabischen Ellen möglichst genau zu definieren, hat der schon genannte ägyptische Astronom

---

[1]) Nallino führt dafür in seiner Schrift: Il valore metrico pag. 4 folgende Belegstelle aus al-Ġazzâlî: احياء علوم الدين (ihjâ' ulûm ed-dîn = Belebung der Wissenschaften der Religion), Lucknow, 1281, vol. II, p. 137 an: „Chi esce dalla propria casa per cercar la scienza, si trova sulla strada di Dio fino al suo ritorno" und „A colui che segue una strada per cercar la scienza, Iddio renderà facile la via del Paradiso"

[2]) Not. et extr. ect. t. VII, p. 96.

[3]) Prairies d'or, t. I, p. 183.

[4]) Geograph. Wörterbuch, herausgeg. v. F. Wüstenfeld, Leipzig 1866—71, Bd. I, S. 38.

[5]) Géographie, p. 17—18.

[6]) Ein astronomisch-geographisches Werk, das der Verfasser dem Ghaznawiden Mas'ûd ben Maḥmûd widmete.

Maḥmûd-Bey[1]) angestellt. Er ist dadurch zu dem Ergebnis gekommen, daß die für die arabische Erdmessung in Betracht kommende Elle 0,4932 m, somit die arabische Meile 4000·0,4932 m = 1972,8 m beträgt und demnach der Meridiangrad zwischen Tadmor und Raqqa die Länge von 111 792 m hat, so daß also bei dieser Gradmessung der Meridiangrad nur um 854 m zu groß gefunden wurde. Zu der Zahl 0,4932 m kommt Maḥmûd-Bey dadurch, daß er

1. bei 30 Menschen eine genaue Messung der Unterarmslänge vornahm und deren Elle im Mittel = 0,48 m fand,
2. durch genaue Messung von je 4 Fingerbreiten bei denselben Menschen die Zahl 0,494 m für eine schwarze Elle fand (6.4 = 24 Finger sind eine schwarze Elle).
3. endlich das Experiment mit den 144 aneinander gelegten Gerstenkörnern, die ja bekanntlich auch eine Elle geben, 4 mal nacheinander richtig und möglichst genau ausführte, und damit die Zahlen 0,495, 0,501, 0,4858 und 0,488 fand, deren Mittel 0,492 m gab.

Damit nicht genug, befragte unser Gewährsmann

4. die Quellenschriften älterer Historiker und Theologen, wo von Meilenangaben zwischen heute noch bestehenden Orten die Rede ist, und fand durch Vergleich mit den besten modernen Karten die Werte 0,4949 m. resp. 0,4922 m und 0,4955 m für eine Elle.

Das Mittel aus all diesen Einzelresultaten führte ihn zu der Zahl 0,4932 m.

Auch Nallino errechnet durch Mittelbildung aus den Zahlenangaben verschiedener sehr glaubwürdiger muslimischer Schriftsteller ein ganz ähnliches Endergebnis. Nach ihm ist die schwarze Elle = 0,49289625 m, somit eine arabische Meile = 1971,585[2]) m und der Meridiangrad = 111720,9 m, was sich wiederum von der wahren Länge, die (nach Bessel) einem Meridiangrad in der Breite von 35°—36° zukommt, nur um 882,9 m unterscheidet (Nallino a. a. O. S. 33 und 39).

Erwähnt sei noch, daß Maḥmûd Bey auch die Ellenangaben an mehreren Nilmessern genau untersucht hat und für jenen der Insel Rauḍa den Betrag von 0,5404 m, für den des alten Nilmessers zu Asuân denselben Betrag fand, während er für das Nilometer zu Edfû 0,53 m ermittelte. Daraus ist der Schluß zu ziehen, daß es sich bei all diesen Nilometern um ein und dieselbe Elle handelt, die jedoch nicht identisch ist mit der obigen schwarzen Elle. Trotzdem haben abendländische Schriftsteller die Elle der Nilmesser, besonders desjenigen zu Rauḍa, für die schwarze Elle Al-Ma'mûns erklärt. Schon

---

[1]) Le système métrique ect. p. 34 ff.

[2]) Nicht 1973,2 m, wie bei Nallino steht, und deshalb auch nicht 111814,67 m für die Länge des Meridiangrades, wo Nallino allerdings mit der unrichtigen Zahl 1973,2 m für eine arab. Meile operiert.

in dem gewaltigen Überschuß von 10742 m, den man bei Zugrundelegung dieses Maßes über die wahre Länge eines Erdgrades (121 680 m statt 110 938 m) erzielt, wurzelt ein gewichtiges Bedenken gegen diese Annahme. Indessen hält auch Vivien de St.-Martin (a. a. O. p. 255) einen größeren Irrtum der arabischen Geodäten für wahrscheinlich und sagt angesichts der Ausführungen Maḥmûd-Beys: „Malheureusement les inductions d'où Mahmoud Bey tire sa valeur de l'ancienne coudée arabe sont d'une nature fort incertaine et ne permettent pas d'accepter avec toute sécurité les conclusions du savant astronome égyptien." Diesem Urteil des bekannten französischen Geographen kann ich mich nach eingehendem Studium der Schrift Maḥmûd Beys nicht anschließen; auch Nallino, gegenwärtig wohl der kundigste Forscher auf dem Gebiete arabischer Astronomie, spricht sich keineswegs gegen Maḥmûd-Beys Deduktionen aus. Hingegen kann auch Nallino der historisch wenig tiefgehenden Art, wie in neuerer Zeit der Geodät W. Jordan die Frage nach der Länge der schwarzen Elle entscheiden wollte, keinen Beifall zollen (Nallino a. a. O. S. 36/37). Der von Jordan in der Zeitschrift für Vermessungswesen (1889 S. 100 ff.) erschienene Aufsatz: „Die Gradmessung der Araber, 827 n. Chr." ist ja so leicht zugänglich, daß ich hier von einer näheren Analyse desselben absehen kann. Nur einige Bemerkungen seien gestattet. Warum Jordan bei der Erzählung der Ausführung der Gradmessung durch die Araber nicht auf einer arabischen Quelle (in Übersetzung), sondern auf Snellius basiert, ist nur verständlich unter der Annahme, daß er quellenmäßige Belege nicht kannte. Mit nur so geringen sprachlichen und geschichtlichen Kenntnissen wie sie Jordan offenbar zu Gebote standen, kann man in rebus historicis kaum „die Wissenschaft vermehren".

Auch Jordan hält die Elle am Nilmesser zu Rauda (مقياس miqiâs) für die schwarze Elle Al-Ma'mûns. Da ihm aber ein Fehler von ca. 11 km für einen Erdgrad offenbar zu groß erscheint, sucht er die Länge der Elle am Nilmesser auf 0,5218 m oder 0,5158 m zu reduzieren, und zwar auf Grund einer flüchtigen Messung, die er am 16. April 1874 an Ort und Stelle machte. Mit diesen zwei verschiedenen Längen, deren Möglichkeit durch einen Ablesefehler bei der Messung gegeben war, findet er für einen Erdgrad die Werte von 118 275 m, resp. 116 913 m. Aber eine sorgfältige Nachmessung aller 16 einzelnen Ellen desselben Nilometers durch Dr. Reiß (Cairo) im gleichen Jahre (vgl. dessen Aufsatz: „Der Nilometer bei Cairo", Ztschr. f. Vermessungswesen 1889, S. 439 ff.) ergab als Mittelwert für die Elle des Nilmessers die Zahl 0,53987 m, also ein Resultat, das auch dem außerordentlich nahekommt, welches eine Kommission der französischen Expedition in Ägypten im Jahre 1826 ermittelte, worüber man insbesondere die Angaben im Band 18, I der Description de l'Égypte (II$^{e}$ édition, Paris 1826, p. 595—

645, Mém. sur la vallée du Nil et le nilomètre de l'île de Roudah) nachlesen mag[1]). Das Resultat ist, daß das Mittel aus den 16 gemessenen Ellen, die auf der Marmorsäule oder Miqjâs eingraviert sind, 0,541 m beträgt. Das heute noch sehr lesenswerte Werk verdient in seinen Einzelangaben durchaus Vertrauen, und so möchte auch ich die Zahl von rund 0,54 m für die mittlere Elle des Nilometers zu Rauḍa als die einzig richtige ansehen. Aber auch einer anderen Behauptung Jordans, daß die Länge einer arabischen Elle 144 Gerstenkorndicken gleichgesetzt, in dieser Definition kaum auf 30% sicher ist, kann man folgende Äußerung Maḥmûd-Beys (a. a. O. 0. 36) gegenüberstellen: „Les 144 grains d'orge mis à plat et en large les uns à la suite des autres donnent pour les expériences que j'ai faites sur des grains pleins, mais de grosseur moyenne: 0,495 m, 0,501 m, 0,4858 m et 0,488 m, dont la moyenne est de 0,492 m etc." Das sind Zahlen, die doch nur wenige Prozent voneinander verschieden sind.

Daß die Festsetzung der Elle mittels der 144 Gerstenkörner, trotz sorgfältigster Ausführung der Operation allerdings auch zu sehr wenig befriedigenden Ergebnissen führen kann, läßt eine Angabe des russischen Forschers N. Khanikoff erkennen, die er bei Übersetzung der Khâzinîschen Schrift كتاب ميزان الحكمة (Kitâb mîzân al ḥikma = Buch von der Wage der Weisheit) (book of the balance of Wisdom)[2]) macht: „... I will observe that the radius of a sphere equal in volume to the spheroid of the earth is 637 028 metres; this would give us one mile = 1962,048 metres, and one cubit (Elle) = 490,512 millimetres; that is to say if these measures admitted of a rigorous comparison; but Laplace has very justly observed that the errors of which the geodetical operations of the Arabs were susceptible do not allow us to determine the length of the measure which they made use of, for this advantage can only be the result of the precision of modern operations. I have endeavored to measure the thickness of six grains of barley placed side by side, and in sixty trials. I have obtained as maximum thickness 17,3 mm and as minimum 13 mm, the average of the sixty determinations being 15,31 mm, which would give us for the length of the cubit 367,44 mm, a result evidently inexact, by reason of the want of delicacy of the standard by which the valuation was made---"

Anscheinend hat Khanikoff zu seinen Versuchen keine vollen, sondern ausgetrocknete Gerstenkörner genommen, da er selbst mit der Maximalzahl (17,3 mm) den viel zu geringen Wert 0,42 m für eine schwarze

---

[1]) Vgl auch Bd. 6 (p. 1—24: mém. sur le nilomètre d'Éléphantine et les mesures égyptiennes), sowie Bd. 15 (p. 1—135: mém. sur le meqyas de l'île Roudah).

[2]) Journal of the american oriental society, vol. VI, New Haven, 1860 S. 79.

Elle erhalten haben würde[3]). Es muß zugegeben werden, daß die Festsetzung eines Maßes nach der Dicke der Gerstenkörner keine sehr geeignete genannt werden kann bei einer gerade so ausgesprochen hygroskopischen Getreideart.

Noch sei zum Schluß einer sehr bemerkenswerten Methode zur Bestimmung der Länge der schwarzen Elle gedacht, die N. Khanikoff durchführte. Es berichtet Al-Khâzinî im Buch der Wage der Weisheit, daß Abu-r-Raiḥân (Albîrûnî) das Gewicht einer Kubikelle Wassers zu Ghazna in Afghanistan zu 28605,647 mitqâls bestimmt hätte. Khanikoff nimmt die Meereshöhe von Ghazna zu 2134 m, dementsprechend den mittleren Barometerstand zu 582 mm, die Erdschwere zu 9,78951 m, die mittlere Temperatur in jener Gegend zu 17,88° C an. Nach vielen Angaben, die er sich über den Gewichtswert eines mitqâls in persischen, muslimischen und russisch-armenischen Provinzen machen ließ, berechnete er dessen Mittelwert zu rund 4,5 g (a. a. O. S. 81; genauer zu 4,527 g). Somit betrüge das Gewicht einer arabischen Kubikelle 128 725 g (genauer 129 272 g). Nach Reduzierung des Gewichtes einer Kubikelle Wassers auf den Horizont von Paris (760 mm mittlerer Barometerstand) und die Temperatur von 4° C, bei der ein Kubikmeter Wasser bekanntlich 1 Million g wiegt, kann man das Verhältnis der Gewichte des Kubikmeters und der Kubikelle Wasser dem Verhältnis der dritten Potenzen der Seiten dieser Wasserwürfel gleichsetzen. Dies Gewichtsverhältnis berechnet Khanikoff (a. a. O. S. 82) zu 0.1291 und findet hieraus durch Ausziehung der Kubikwurzel: 1 schwarze Elle = $\sqrt[3]{0{,}1291}$ m = 0,505408 m, welch letztere Zahl er auf 0,500 m abrundet. Daraus würde folgen:

$$1 \text{ arabische Meile } 4000 \cdot 0{,}500 \text{ m} = 2000 \text{ m}$$

und demnach 1° = $56\,^2/_3$ Meilen = $113\,333\,^1/_3$ m, sodaß nach dieser Bestimmung der Erdgrad den wahren Wert (nach Bessel) um $2395\,^1/_3$ m übertreffen würde.

Das Endergebnis dieser Betrachtungen läßt sich in folgendem Satz aussprechen:

Nach den 3 Forschern Maḥmûd-Bey, N. Khanikoff und C. A. Nallino, die mittels ihrer arabischen Sprachkenntnisse Einsicht von den Handschriften der maßgebenden, arabischen Autoren nehmen konnten, dürfte sich die für uns in Frage kommende arabische Meile nicht weit von dem Betrage von 2000 m

---

[3]) Auch von Snellius sagt Nallino (a. a. O. S. 34): „La prova sperimentale coi grani d'orzo era già stata tentata, ma con esito non soddisfacente, da Villebrordo Snellius. Vedi W. Snellius: Eratosthenes Batavus de terrae ambitus vera quantitate, Lugduni-Batavorum, 1617, p. 110."

entfernen. Dann wäre die arabische Gradmessung eine außerordentlich genaue zu nennen, falls wirklich $56^1/_2$ Meilen auf einen Meridiangrad kamen.

### V. Schlußbemerkung.

Man begegnet bei der Diskussion der Frage nach der Genauigkeit der Meridianhöhenmessungen, die zur Ermittlung der Gradlänge notwendig waren, vielfach der Meinung, daß es sich dabei um eine eigentliche Polhöhenbestimmung handelte. Zu dieser Auffassung konnte allerdings Abû'l-fedâ's und Mas'ûdîs Darstellung Veranlassung geben, die von der Höhe des Nordpols, die ja bekanntlich der geographischen Breite des Beobachtungsortes gleich ist, sprechen. Aber bei Ibn Jûnis steht nichts dergleichen. Er spricht nur von Meridianhöhen, und es liegt wohl die Annahme am nächsten, es sei fortwährend die Kulminationshöhe irgend eines vereinbarten hellen Fixsterns von beiden Gruppen der Feldmesser beobachtet worden, bis beim weiteren Vorwärtsschreiten dessen Höhe sich genau um 1° vermehrt oder vermindert hatte. Dazu eignete sich vielleicht ein anderer Fixstern weit eher als der Polarstern, der ja auch damals nicht genau die Stelle des Weltpols einnahm. An Sonnenbeobachtungen mit dem Gnomon, wie Peschel will, ist kaum zu denken, auch nicht an die Bestimmung der Meridianhöhe der Sonne mit dem Astrolab oder dgl. Die Kulminationshöhe der Sonne drückt sich bekanntlich durch die Formel

$$H = 90° - \varphi \mp \delta$$

aus, wo $\delta$ die täglich — besonders um die Zeit der Tag- und Nachtgleichen recht stark — sich ändernde Sonnendeklination ist. Und sicher sind die Geodäten zur Durchwanderung von ca. 111 km 5—6 Tage marschiert, so daß schon aus diesem Grunde die letzte endgültige Messung der Sonnenhöhe bei beiden Gruppen an ein und demselben Tage, wie Ḥabaš berichtet, kaum möglich gewesen wäre.

# Der Gnomon

## Notiz zur Geschichte der mathematischen Geographie

Von Oberlehrer Dr. Ing. Dr. C. SCHOY in Essen a. d. R.[1])

Mit drei Abbildungen

Längst bevor die Griechen den Sonnenzeiger oder Schattenwerfer kannten und Gnomon benannten, was zunächst nur Zeiger oder Anzeiger (ὁ γνώμων) heißt, ward dieses einfachste aller Beobachtungsinstrumente schon anderweitig bewußt in den Dienst der Zeit- und vielleicht auch Ortsbestimmung gestellt. Daß sein Gebrauch in altersgraue Zeit hinaufreichen soll, ist eine häufig wiederkehrende Behauptung, die sich besonders auf indische und chinesische Überlieferungen stützt. Aber man weiß jetzt, wie sehr die alten Kulturvölker des fernsten Ostens zur Übertreibung in den Zahlenangaben neigten, die man deshalb mit Vorsicht aufzunehmen hat[2]). Freilich, die Erkenntnis, daß der Schatten eines jeden aufrecht stehenden Gegenstandes, also auch der des menschlichen Körpers selbst, durch seine Richtung und Länge über den Sonnenstand und damit die Tageszeit aufzuklären vermag, hat sich zweifellos sehr frühe und bei verschiedenen Völkern unabhängig voneinander eingestellt, so daß man, um mit Delambre zu reden, „den Gebrauch des Gnomons bis zur Erschaffung der Welt zurückdatieren“ könnte. (Delambre: Histoire de l'astronomie ancienne, Paris 1816, t. I S. 17). Im Folgenden ist nur von der Einrichtung und Verwendung des Gnomons bei älteren Völkern die Rede.

### I. Gnomone der alten Ägypter

Der Gnomon diente den alten Ägyptern wohl nicht wie den Chinesen und Indern zur Bestimmung der Mittagslinie und geographischen Breite, sondern er war ihnen ein rein chronologisches Hilfsmittel. Ihre Pyramiden und Obelisken waren z. T. nichts anderes als riesige Sonnenuhren. Aber so, wie der gewaltige Zeiger einer weithin sichtbaren Turmuhr sich nicht zum Sekundenmesser eignet, so maßen auch die enormen Steinmassen am Nil nicht kurze Zeitabschnitte; erst wenn wieder ein Jahr an ihrem harten Granit zerschellt war, da erglänzte zum ersten Mal die Nordfront im Lichte der aufgehenden Sonne. Dann passierte die Sonne den Himmelsäquator: die ägyptischen Priester verkündigten den eintretenden Frühling. Wir halten uns bei Angabe näherer Details an die lichtvollen Ausführungen von J. B. Biot[3]). Zweifellos dienten nach Biot die großen Pyramiden von Memphis astronomischen Zwecken. So haben die Untersuchungen des Obersten Wyse, entsprechend auch dem Nachweis der Geschichte, ergeben, daß die Seitenflächen mit einer Einfassung von glänzendem Stein geschmückt waren, derart, daß diese Zier 4 hervortretende Ebenen bildete, von denen

---

[1]) Mit Rücksicht auf die Bedürfnisse unseres Leserkreises sind aus dem Aufsatz die mathematischen Entwickelungen fortgelassen. Der Verfasser behält sich vor, diese später in einer mathematischen Zeitschrift zu veröffentlichen. (Anmerkung der Schriftleitung).

[2]) Näheres hierüber s. besonders bei M. Canton: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1907, 3. Aufl. I, S. 668/69.

[3]) Mémoire sur divers points d'astronomie ancienne, Paris 1846, pag. 57 ff.

2 fast senkrecht zur Nordsüdrichtung ziehen, während die beiden anderen der Ostwestrichtung rechtwinklig begegnen[1]). Der Neigungswinkel der schrägen Seitenflächen ist ein wenig größer als 52°. Die größte dieser Pyramiden erhebt sich auf einer Anhöhe, so daß der Blick frei nach allen Seiten schweift wie auf hoher See. Nach den Ermittlungen Nouets ist die geographische Breite ihres Standortes fast genau 30°. Diese ungeheure Steinmasse hat seit den Tagen ihrer Entstehung — mit oder ohne Absicht ihres Erbauers — die Rolle eines riesigen Gnomons gespielt, der durch das Erglänzen und Verschwinden des Sonnenlichtes auf seinen verschiedenen Flächen jährlich die Tag- und Nachtgleichen, sowie die Sonnenwenden anzeigte, und zwar die ersteren mit einem Fehler von weniger als 1 Tag, letztere mit einem solchen von weniger als $1^3/_4$ Tag. Die Beobachtung dieser einfachen Ereignisse führte ohne jede Wissenschaft zur Kenntnis der Dauer des Sonnenjahres. Die Beleuchtung der Seitenflächen spielte sich im besonderen in folgender Weise ab: Von der Wintersonnenwende bis zum Eintritt der Frühlingsnachtgleiche beschien die Sonne beim Aufgang die nach Süden gewandte Seite, während sie die Nordwand gänzlich im Schatten ließ. Vom Augenblick des Frühlingsäquinoktiums an war der Sachverhalt jedoch gerade umgekehrt. Die aufgehende Sonne beleuchtete jetzt die nach Norden gewandte Front der Pyramide und ließ die südliche gänzlich unbeschienen. Der Eintritt des astronomischen Frühlings muß daher zwischen jenen zwei Tagen liegen, wo sich dieser Wechsel der Beleuchtung bei aufgehender Sonne vollzieht. Ganz auf dieselbe Weise, nur in umgekehrter Folge, führt dieser Beleuchtungswechsel zur Erkenntnis des Herbstäquinoktiums. Aber noch ein anderer interessanter Umstand war es, der den Beobachter mit Aufmerksamkeit den Jahreszeitenlauf verfolgen ließ: vom Wintersolstitium bis etwa zum 21. Tag vor der Frühlingsnachtgleiche erleuchtete die Sonne vom Aufgang bis zum Untergang nur die Südseite. Von da ab traf zum ersten Mal ein flüchtiger Mittagsstrahl auch die Nordwand. Indem nun die Tagesbögen der Sonne und damit auch ihre Mittagshöhen sich mehr und mehr vergrößerten, verweilte der Sonnenschein auch für längere Stunden auf der Nordfront, und endlich, nach eingetretenem Äquinoktium, den ganzen Tag vom Aufgang bis zum Untergang. Vom Herbstäquinoktium ab wiederholte sich dieselbe Erscheinung als Lichtabnahme auf der Nordseite, bis etwa 20 Tage später der letzte Sonnenstrahl von ihr verschwand. Es genügte nun, das Zeitintervall der 2 Äquinoktien zu halbieren, um auch die Solstitien zu finden. Sollten diese Pyramiden vielleicht auch ursprünglich nicht zu astronomischen Zwecken erbaut worden sein, so ist es doch undenkbar, daß in den Jahrtausenden, während deren ägyptische Priester den Lauf der Sonne auf das Sorgfältigste zu überwachen hatten, — man denke nur an die heliakischen Auf- und Untergänge — sie nicht auf dies einfache und zuverlässigste Hilfsmittel der Chronologie gekommen sein sollten[2]).

---

[1]) Nach H. Nissen (Orientation, Berlin 1906—10, S. 43) betragen die Abweichungen der Seitenflächen von den Kardinalrichtungen kaum einige Bogenminuten.

[2]) Eine Stelle, die darauf hinweist, daß die Pyramiden der alten Ägypter tatsächlich mit ihrem Sonnenkult im Zusammenhang standen, findet sich bei Biot (a. a. O. pag. 61): „Dans le texte annexé aux planches No. 28 du Panthéon égyptien, Champollion dit que, parmi les objects retirés des catacombes d'Égypte on trouve souvent de petites pyramides votives, dont les quatres faces sont recouvertes de sculptures toujours relatives au culte du soleil, considéré sous les diverses formes divines représentatives de ses phases principales . . “. (Vgl. auch Biot, a. a. O. pag. 155—158).

Wie die Ägypter aber die Kardinalrichtungen selbst fanden, um ihre Pyramiden richtig zu orientieren, ist uns ebenfalls von Biot (a. a. O. pag. 46 ff) auseinandergesetzt worden:

„Man beobachte an einem beliebigen Tag die Stelle des Sonnenaufgangs am östlichen Horizont und bringe beim Hervorblitzen des oberen Sonnenrandes ein Lineal (Meßlatte) in die Richtung des ersten Sonnenstrahls. Dies ist auf einer vorher geebneten erhöht liegenden Fläche ein Leichtes, da sich der Horizont bei der ungewöhnlichen Reinheit der ägyptischen Luft ringsum scharf abzeichnet. Dieselbe Operation vollführe man des Abends bei Sonnenuntergang, nur visiere man diesmal mit der Meßlatte nach dem zuletzt verschwindenden Sonnenrand. Markiert man nachträglich durch gerade Linien die 2 erhaltenen Richtungen auf der ebenen Unterlage und halbiert ihren Zwischenwinkel, so wird man zur Zeit der Solstitien die Meridianrichtung auf diese Art sehr genau, zur Zeit der Äquinoktien mit einem Fehler von wenigen Minuten erhalten. So lehrt es Proclus[1], und diese Methode zur Auffindung der Mittagslinie ist weit genauer als jene der gleichen Gnomonschatten an den indischen Kreisen, wovon später noch die Rede sein wird.“

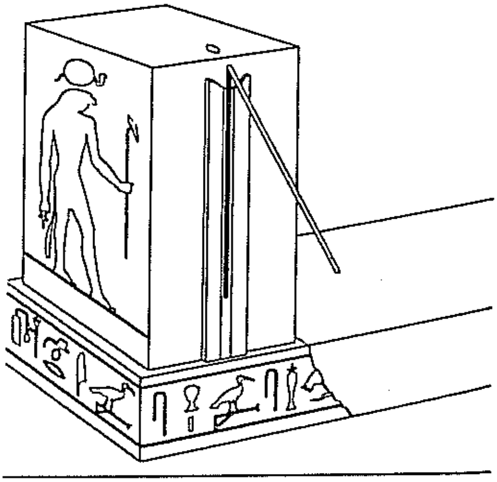


Abb. 1

Daß die Ägypter aber auch den eigentlichen Gnomon, als schattenwerfenden Stab, im Gebrauch hatten, freilich bei anscheinend nur ganz subtilen Messungen, bestätigt uns eine Entdeckung Champollions, die er im Museum zu Turin machte. Dies Instrumentchen, zweifellos für Sonnenbeobachtungen bestimmt, gehörte einem Hierogrammatiker zu, dessen Name an seinem Fuße in Hieroglyphenschrift sehr sorgfältig eingemeißelt war. Wir geben die Abbildung desselben in nebenstehender Abb. 1 wieder, da es anscheinend in deutschen Fachkreisen ganz unbekannt ist. Es unterscheidet sich in mehrfacher Hinsicht von einem griechischen Gnomon. Ein Parallelepiped aus schwarzem Basalt ruht auf einem horizontalen Plättchen; eine Seitenwand trägt in ganzer Abbildung das Bild des Sonnengottes Phre. Zwar ist der Stylus oder Gnomon verloren gegangen, aber die runde Öffnung, in die er genau hineingepaßt war, ist deutlich erkennbar und nach den Messungen des Turiner Astronomen Plana

---

[1] In dem einzigen für diese Behauptung in Frage kommenden Quellenwerk Procli Diadochi Hypotyposis Astron. Positionum, griech. und deutsch von K. Manitius, Leipzig 1909, habe ich nichts dergleichen gefunden. Biot zitiert nach einer Ausgabe von Halma die mir trotz mehrfacher Bemühungen nicht zu Gesicht kam.

etwa unter 46° zu der Vertikalwand geneigt, die den Schatten auffing. Ist das Instrument richtig orientiert, so zieht im Augenblick des Mittags der Schatten des Zeigers lotrecht an der Wand entlang. Um diese Schattenstellung mit möglichster Schärfe zu erhalten, sind 2 parallele schnurgerade vertikal laufende Rinnen von äußerster Feinheit in den Basalt eingemeißelt, zwischen denen die Fläche einen etwas erhabenen Streifen aufweist. Beide Rinnen liegen genau symmetrisch zur Achse des Gnomons. Kein Beobachter wird den Vorteil dieser Einrichtung zur genauen Ermittlung der Sonnenkulmination unterschätzen, wissen wir doch alle aus Erfahrung, daß sich die Halbierung eines schmalen senkrechten Bandes mit viel größerer Genauigkeit abschätzen läßt als die Bedeckung einer Linie durch einen Schattenwurf1). Die nebenstehende Abbildung (1) stellt das Instrumentchen nach seiner Rekonstruktion durch Biot dar.

## II. Gnomone der Chinesen

Über die Frage, ob bei den Chinesen die Astronomie schon viele Jahrhunderte v. Chr. eine eifrige Pflege gefunden hätte, ob sie ihr geistiges Eigentum war oder von Nachbarvölkern in einer verhältnismäßig späteren Zeit Eingang über die chinesischen Mauern fand, endlich ob die Chinesen dieselbe selbständig weitergebildet hätten, ist schon oft gehandelt worden, ohne daß eine völlige Klärung erzielt worden wäre. Große Verdienste um die Erschließung der chinesischen Wissenschaften für das Abendland haben sich die französischen Missionare Gaubil und Souciet erworben, indem sie Auszüge aus den ältesten chinesischen Überlieferungen bewerkstelligten. (Vgl. Souciet: Observations mathématiques, astronomiques, géographiques, chronologiques et physiques, Paris 1829/31 und R. Gaubil: Traité d'Astronomie chinoise, Lyon 1819 2)). Andrerseits hat die Übersetzung altchinesischer Werke, so des Tscheou-Pei (Gnomon im Kreise, Journal asiatique, 1841) und des Tscheou-Li (Rites des Tscheou, 2 Tomes, Paris 1851) durch Edouard Biot dargetan, daß der chinesischen Astronomie doch einige fremdartige Züge innewohnen, die wir jetzt, wenigstens was den Gebrauch des Gnomons bei den Chinesen anbelangt, kennen lernen wollen.

Der vertikale Gnomon war ursprünglich ein Bambusstab von 8 Fuß Höhe (nach dem Tscheou-li, 2. Bd. S. 562, waren 8 chinesische Fuß = 1 m 60 cm)3)), der auf vorher geebneter Fläche aufgerichtet ward. Diese Länge von 8 Fuß wurde wie eine heilige, durch uralten Gebrauch vorgeschriebene Zahl betrachtet, die sich schon in sehr frühen Werken findet. Der erste chinesische Astronom, der von dieser Vorschrift

---

1) J. Drecker berichtet, daß auch in der Kirche zu S. Petronio in Bologna die Mittagslinie durch einen beiderseits von weißen und roten Marmorstreifen eingefaßten Bronzestreifen kenntlich gemacht ist, so daß sich der Mittag auf 1/4 Sekunde genau bestimmen läßt. (Gnomone und Sonnenuhren, Aachen 1909, S. 5).

2) Über die anderen astronomischen und chronologischen Schriften Gaubils, die den chinesischen Wissenschaften gewidmet sind, vgl. Journal des Savants, 1861, pag. 286, ferner die Literaturangaben bei F. K. Ginzel: Handbuch d. math. u. techn. Chronologie, Leipzig 1906, I. Bd. S. 497; endlich für die chinesische Astronomie überhaupt die trefflichen Darlegungen von L. Am. Sédillot: Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux, Paris 1845/49, Tome II pag. 563—651.

3) Vielleicht hatte die Wahl dieser Höhe ihren Grund darin, daß sie mit der Größe eines mittleren Mannes übereinstimmt. Genauer war 1 Fuß des Tscheou = 0,197 m. (Tscheou-li II, pag. 557).

abwich, war Ko-chu-king, ein geschickter Beobachter des 13. Jahrhunderts unserer Zeitrechnung, dessen Werke Gaubil einsah und daraus folgendes mitteilt: Um genauere Schattenmessungen machen zu können, gab Ko-chu-king seinem Gnomon eine Höhe von 40 Fuß, das Fünffache der geheiligten Zahl 8. Er beobachtete die Sonnenwenden in den Jahren 1277—1280, und mit diesem Gnomon und einer noch zu besprechenden sinnreichen Verbesserung erreichte er eine Genauigkeit, die selbst diejenige der 300 Jahre späteren Messungen Tycho Brahes übertraf[1]). (Ko-chu-king war Schüler der Araber, wie aus der Schrift L. Am. Sédillots: Prolégomènes des Tables astronomiques d'Oloug-Bég, Paris 1853, hervorgeht: „On constate également le rapport intime des travaux de Co-cheou-king avec les traités des astronomes musulmans . . ." (XIX, Lettre à M. de Humboldt). (Vgl. auch Matériaux pour servir etc. II, pag. 644/645).

Die Connaissance des Tems vom Jahr 1809 bringt S. 382ff einen Auszug aus einem Ms., das Pater R. Gaubil 1734 aus China an Delisle gesandt hatte. Es führt 10 Schattenmessungen vor, die in China im Laufe der Zeiten mit einem 8 füßigen Gnomon zumeist zur Zeit der Sonnenwenden gemacht worden sein sollen. Dieselben lieferten außer der geographischen Breite des Beobachtungsortes auch gleichzeitig die jedesmalige Ektiptikschiefe. Indem die erste Schattenmessung für letztere $\varepsilon = 23^0\ 54$, ergibt, ist sie ins Jahr 1100 v. Chr. zu verlegen. Durch sehr exakte Berechnungen, die J. B. Biot anstellte, glaubt er den fast unwiderleglichen Beweis erbracht zu haben, daß wir an der Echtheit dieser chinesischen Überlieferungen nicht mehr zweifeln dürfen. (Journal des Savants, 1861, pag. 618—622).

Wir geben jetzt die wichtigsten Stellen wieder, die sich auf den Gebrauch des Gnomons beziehen: Im Tscheou-pei steht (S. 624): „Wenn die Sonne zu erscheinen beginnt, errichte eine Beobachtungsstange und beobachte deren Schatten. Bei untergehender Sonne beobachte den Schatten wiederum. Die 2 sich entsprechenden Hauptschattenpunkte[2]) bestimmen Ost und West. Ziehe durch die Mitte ihres Abstandes und den Fußpunkt des Gnomons eine Gerade, so wirst du Nord und Süd bestimmt haben." In der Histoire abrégée de l'astronomie chinoise, Recueil de Souciet, Paris 1729/32, t. II, pag. 5 macht Gaubil folgende Angaben: „Man bediente sich eines Gnomons von 8 Fuß, um zu allen Jahreszeiten den Mittagsschatten der Sonne zu messen, man zog vermittelst der Schatten die Mittagslinie, und indem man das Instrument auf den Meridian einstellte, bemerkte man die Sterne und Sternbilder, welche den Himmelsmeridian passierten. Mit Wasseruhren[3]) maß man die Zeit zwischen dem Durchgang eines Sterns durch den Meridian und dem Auf- und Untergang der Sonne, die Länge der Tage, die Zeit, während welcher die Planeten über dem Horizonte sichtbar waren, die Dauer der Dämmerung des Abends und Morgens usw.

Auch aus Fußnote[2]) S. 283 erkennen wir, daß der Gnomon in einem Kreise stand, dessen Umfang die Chinesen, entsprechend der Zahl der Jahrestage, in 365 $^1/_4$ Teile

---

[1]) Vgl. J. B. Biot: Précis de l'histoire de l'astronomie chinoise. (Journ. d. Sav. 1861 pag. 421).

[2]) „Ils observent les ombres du soleil levant et du soleil couchant. Leurs extrémités indiquent la direction de l'occident et de l'orient. Aux instants du lever et du coucher du soleil ils marquent l'extrémité de l'ombre portée. Ils tracent un cercle en joignant le dedans (de l'ombre) aux deux extrémités. Ils mesurent sur le cercle, l'intervalle des deux points de coïncidence (d'intersection). Ils divisent cet intervalle en deux parties, et s'alignent sur le poteau. C'est la direction du midi et du nord". (Tscheou-Li, II, pag. 555).

[3]) Über ihre Einrichtung siehe Tscheou-Li, II, livre XXX, pag. 201—203.

teilten; dann durchmaß die Sonne auf ihrer Bahn in der Ekliptik täglich etwa einen solchen Teil des Kreisumfanges. Der Tscheou-pei führt in der Abbildung S. 615 sieben solcher Kreise auf, die alle ihr Zentrum im Fußpunkt des Gnomons haben; der innerste entspricht dem kürzesten Schatten im Sommersolstiz, der äußerste dem Wintersonnenwendeschatten. Nur dadurch, daß die Schattenrichtungen bei auf- und untergehender Sonne die Kreisumfänge schnitten, war eine Halbierung der Strecke, die zwischen ihren Schnittpunkten lag, möglich und damit eine Bestimmung der Nordsüdlinie, wie sie in obiger Fußnote ausgesprochen ist.

Während das bis jetzt Gesagte den ägyptischen Orientierungsregeln nicht unähnlich ist, erfahren wir aber im Tscheou-pei (S. 605) von einer chinesischen Neuerung am Gnomon, nämlich vom „Gnomon à trou“. Über ihn heißt es: „Man nehme jetzt einen Bambusstab, und steche in der Höhe von 8 Fuß ein Loch, dessen Durchmesser $^1/_{10}$ Fuß [1]) ist. Dann suche man den Schatten und beobachte ihn. Diese Öffnung wird in gerader Sehlinie die Sonne bedecken, und die Sonne wird der Öffnung entsprechen [2])“. Durch dieses Lichtbildchen ist eine viel schärfere Bestimmung der Schattenlänge möglich als beim Gnomon, der in eine Spitze endigt [3]).

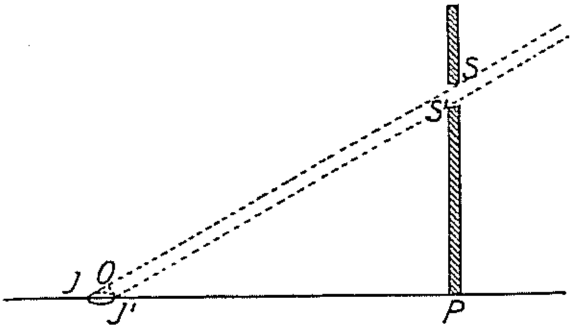


Abb. 2

Die Chinesen ermittelten die „Inklination zur Sonne“, nämlich die Hypotenuse I S' (Abb. 2) durch Anwendung des Pythagoräischen Satzes auf das rechtwinklige Dreieck: Gnomon, Schatten und Sonnenstrahl. Die Längen drückten sie dabei durch „li“ aus. Dann war der Gnomon 80 li hoch, und der

---

[1]) Das wäre 2 cm.

[2]) Bei L. Am. Sédillot liest man jedoch: „Ce furent les Arabes qui se servirent les premiers du gnomon à trou, comme nous le demonterons plus loin“. (Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes; Paris 1841, pag. 12 und 37), ja J. E. Böttcher scheint die Erfindung des Gnomons mit Lichtöffnung einer noch viel späteren Zeit zuzuschreiben, wie sich aus seinen nachstehenden Worten ergibt: „Den Übelstand ferner, daß die Stabspitze immer nur einen verschwommenen Schatten liefert, beseitigt aufs Beste das Verfahren, welches schon im Ausgang des 15. Jahrhunderts Paolo Toscanelli anwandte, bei jenem berühmten Sonnenweiser an der Kathedrale zu Florenz. Es wird nämlich einfach die Spitze des Stabes ersetzt durch ein Loch in der Mitte“. (J. E. Böttcher: Beobachtung des Sonnenlaufs durch die Schüler, Ztschr. f. math. u. nat. Unt. 1885, S. 165). In dem sehr beachtenswerten Aufsatz von J. Sageret: „Le Gnomon, son rôle dans l'ancienne astronomie“, Revue scientifique (revue Rose), 1910 pag. 524—30 steht, daß man den Gnomon à trou auch bei den Griechen und Römern fand, wie das Dictionnaire des antiquités grecques et romaines par Darenberg et Saglio in dem Artikel „Horologium“ (von E. Ardaillon) beweise. Da mir dieses Dictionnaire trotz großer Bemühungen nicht zugänglich war, konnte ich diese Behauptung nicht nachprüfen.

[3]) Dieselbe Verbesserung hatte auch Ko-chu-king angewandt.

Durchmesser des Loches betrug 1 li. Auch berechneten sie die Größe des Sonnenbildchens $II'$ mittels der Proportion

$$SP:IS = OI':II'$$

Daß sie dann graphisch den Winkel $PI'S'$ bestimmten, oder gar eine Art Cotangententabelle hatten, aus der sie bei bekannter Gnomonhöhe und Schattenlänge die augenblickliche Sonnenhöhe anzugeben wußten, ist so gut wie ausgeschlossen; sie machen keine Winkelangaben, sondern plazieren ihre Beobachtungsorte nach Schattenlängen, ähnlich wie die Griechen. Ich füge hier ein Urteil Delambres ein, der ihre mathematischen Kenntnisse nicht hoch bewertet: . . . „enfin qu'à l'arrivée des Jésuites, le président du Tribunal des Mathématiques, et le tribunal tout entier, étaient incapables de calculer pour un jour donné, quelle devait être la longueur de l'ombre d'un gnomon . . .". (Discours prélim. zur Histoire de l'astronomie ancienne, t. I pag. XVII).

Auch nach den Sternen visierte man am Gnomon. Die Regel lautet: „Am Tage des Wintersolstitiums zur Stunde yeu (abends $6^h$) errichtet eine Beobachtungsstange von 8 Fuß. Nehmet eine Schnur und befestiget sie oben an der Stange. Erwartet und beobachtet den großen Stern in der Mitte des Nordpols. Strecket die Schnur bis zur Erde und bestimmet den Punkt, wo sie dieselbe berührt. Beim Anbruch des Morgens zur Stunde mao (morgens $6^h$) strecket die Schnur abermals, erwartet und beobachtet den Stern, die Spitze der Stange und die Schnur bis zur Erde, und bestimmet den Punkt, wo sie den Boden erreicht. Die gegenseitige Abweichung der 2 so auf dem Boden fixierten Hauptpunkte ist $2\,{}^3/_{10}$ Fuß. Durch diese 2 Punkte ist der Osten und Westen bestimmt". (Tscheou-pei, pag. 621/22).

Dies ist es ungefähr, was sich über den Gebrauch des Gnomons bei den Chinesen quellenmäßig nachweisen läßt. Anscheinend gingen sie nicht über die Bestimmung der vier Himmelsgegenden und der Jahreszeiten hinaus. Die Klimate des Landes setzten sie nach Solstitialschattenlängen fest.

Aber einer nicht unbedeutenden Fehlerquelle scheint dieser oder jener chinesische Astronom auf die Spur gekommen zu sein, deren Vermeidung unsere vollste Anerkennung verdient: Bekanntlich ändert sich die Deklination der Sonne um die Solstitien herum fast gar nicht, so daß die Meridianschatten sich 10 Tage lang nahezu gleich sind. Wohl wurde versucht, diese Ungewißheit über das wahre Datum der Sonnenwende dadurch zu beseitigen, daß man die Mitte der unveränderlichen „Schattentage" als Solstitialtag ansprach[1]. In den schon erwähnten 10 Observationen am Gnomon, mit denen uns Gaubil vertraut machte, finden sich bei der des Jahres 173/174 n. Chr. als korrespondierende Daten der Beobachtung des Mittagschattens der 9. November 173 und der 7. Februar 174; der erstere Schatten war zu 10, der andere zu 9,6 Fuß gefunden. Tatsächlich ändern sich im mittleren China um diese Tage die Mittagsschatten der Sonne am raschesten,

---

[1] „On ne mesurait l'ombre qu'au jour que l'on réputait celui du solstice: Hoching-Tien imagina le premier d'observer l'ombre plusieurs jours de suite, pour en conclure la véritable ombre solsticiale et l'instant vrai du solstice. Il trouva de cette manière, qu'à Nanking, l'an 442, le solstice d'hiver eut lieu le 20 décembre à $2^h\,32^m$ du matin, suivant notre manière de compter. Il est surprenant, ajoute Gaubil, que les Chinois aient commencé si tard à se servir d'une méthode si naturelle et si simple. L'auteur de cette pratique avait eu des conférences avec un bonze indien. On ne dit pas si elles roulaient sur l'astronomie, mais on est en droit de le soupçonner". (Delambre, Hist. de l'astr. anc. t. I, pag. 372).

sind also ihres großen Unterschiedes wegen den Solstitialschatten vorzuziehen, indem sie über das Datum der Beobachtung keinen Zweifel lassen. Die zeitliche Mitte zwischen diesen 2 Daten mit gleicher Mittagsschattenlänge würde dann dem Wintersolstitium sehr nahe kommen.

## III. Konstruktion und Gebrauch des Gnomons bei den Indern

Auch bei den Hindus scheint der Gebrauch des Sonnenzeigers in altersgraue Vorzeit hinaufzureichen. Quellenmäßige Belehrung in dieser Hinsicht erhält man aus den Siddhântas, d. i. astronomischen Systemen der Inder, deren es mehrere gibt. Die Entstehungszeit des ältesten (Sûrya-Siddhânta = sichere Wahrheit, enthüllt durch die Sonne), dürfte etwa in die ersten Jahrhunderte n. Chr. zu verlegen sein. Dieser Siddhânta ist ins Englische übertragen und 1860 von E. Burgess mit einem vorzüglichen Kommentar im Journal of the American oriental Society, New-Haven veröffentlicht worden. Einer der jüngsten Siddhântas ist der Siddhânta-Çiromâni. Er hat Bhâskara Âkârya (geb. 1114) zum Verfasser. Zusammen mit dem Sûrya-Siddhânta erschien er 1861 in der Bibliotheca Indica, Calcutta in englischer Version, die L. Wilkonsin besorgte. Doch steht das Buch Wilkonsins dem stattlichen Bande der Burgessschen Edition an Umfang weit nach. Beide Siddhântas lagen uns vor[1]).

Nun sind die Vorschriften und Regeln der indischen Astronomie alle in Versen gegeben; über die indische Gnomonik handeln im Sûrya-Siddhânta die Verse 1—7, S. 239, von denen die fünf ersten für uns von Interesse sind, und die wir deshalb (mit hinzugefügten Erläuterungen) wörtlich wiedergeben wollen:

1. Vers: Auf einer (steinartigen) harten, wagerechten Fläche oder auf einem harten Pflaster schlage einen genauen Kreis mit einem Radius gleich der verlangten Zahl Finger (angula) des Gnomons (çanku).
2. Vers: In seinen Mittelpunkt stelle den Gnomon von 12 Fingern Länge, und wo die Enden seines Schattens am Vor- und Nachmittag (wörtlich: in the former and the after parts of the day) auf die
3. Vers: Kreisperipherie fallen, dort fixiere 2 Punkte und nenne sie Vor- und Nachmittagspunkte. Mitten zwischen ihnen durch ziehe mittels einer Fischfigur (timi) die Nordsüdlinie.
4. Vers: Mitten zwischen der Nordsüdrichtung ziehe mittels Fischfiguren (matsya) die Ostwestlinie und auf dieselbe Art mit Hilfe von Fischfiguren zwischen den 4 Kardinalrichtungen noch andere Direktionen.
5. Vers: Zeichne ein umschriebenes Quadrat mit Hilfe von Linien, die vom Mittelpunkt des Kreises ausgehen. Durch die Finger, die auf seiner Grundlinie aufgetragen sind, ist der gesuchte Schatten irgendwie gegeben.

In diesen Versen ist die indische Sonnenuhr (dial) beschrieben, welche also ohne Stundenlinien ist und nicht durch einfache Ablesung die Zeit gibt[2]). Ihr Gnomon

---

[1]) In Albêrûnis India (engl. v. Ed. Sachau), sind 5 Siddhântas aufgeführt (I. Bd. S. 153), London 1888.

[2]) Die Inder bestimmten die wahre Sonnenzeit mehr rechnerich aus einer Himmelsfigur, in der freilich auch Gnomonschatten auftraten. (Vgl. Sûr.-Siddh. S. 233).

wird in 12 gleiche Teile, Finger genannt, eingeteilt. (12 Finger waren etwa 9 Zoll, denn der gewöhnliche Finger ist $^1/_{12}$ einer Spanne [vitasti] oder $^1/_{24}$ einer Elle [hasta], und wenn der Gnomon mit diesen Maßen konstruirt ist, so ist er etwa 9 Zoll hoch.) Zweifellos waren die ersten Gnomone von solcher Länge, und die Richtmaße (Lineals) der gnomonischen Wissenschaft waren demgemäß konstruiert. ‚12‘ oder ‚Gnomon‘ sind gleichwertige Ausdrücke. Auf diese Weise wurden 12 Finger die unveränderliche konventionelle Länge der Stange. Wie die Unterabteilungen der Finger waren, wissen wir nicht.

Bezüglich der Bestimmung der Himmelsrichtungen wurde also damals die Methode angewandt, die heute in unseren Lehrbüchern der mathematischen Geographie steht: die Methode der sog. indischen Kreise, indem man nämlich die Punkte markiert, welche von dem Vor- und Nachmittagsschatten auf ein und demselben Kreise ausgeschnitten werden. Solcher Kreise waren stets mehrere mit verschiedenen Radien um den Fußpunkt des Gnomons geschlagen. Die sog. Fischfigur entstand dadurch, daß die Inder durch A und B (Abb. 3) Bogen mit AB als Radius beschrieben. Diese Bogen schnitten eine linsen- oder fischähnliche Fläche aus, an der man Kopf und Schwanz unterschied.

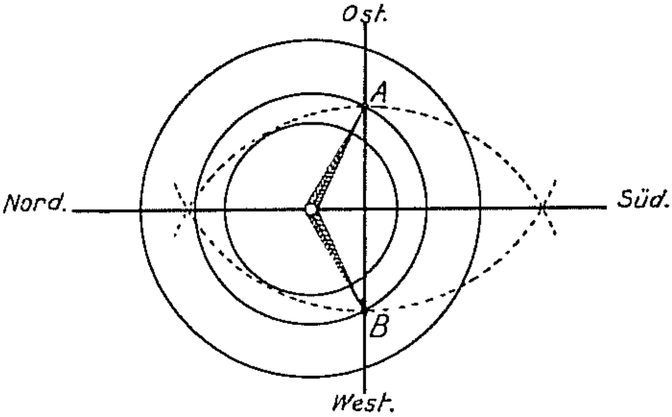


Abb. 3

Aber mit der Ermittlung der 4 Kardinalrichtungen sind die Verwendungen des Gnomons bei den Indern noch lange nicht erschöpft. Wir wissen, daß das vorwiegend rechnerisch veranlagte Volk überall, wo es ging, die vorgelegte Aufgabe in eine arithmetische überführte: insbesondere war bei ihnen die Anwendung der Proportion in ähnlichen Dreiecken beliebt. Auf diese Weise haben sie z. B. mit Hilfe des Gnomons die Morgen- und Abendweite an einem beliebigen Tage, wie auch die Polhöhe des Beobachtungsortes bestimmt.

(Schluß folgt.)

# Der Gnomon

## Notiz zur Geschichte der mathematischen Geographie

Von Oberlehrer Dr. Ing. Dr. C. SCHOY in Essen a. d. R.

Mit drei Abbildungen

(Fortsetzung zu S. 287)

### IV. Schattenwerfer der Griechen

„*Πόλον μὲν καὶ γνώμονα καὶ τὰ δυώδεκα μέρεα τῆς ἡμέρης παρὰ Βαβυλωνίων ἔμαθον οἱ Ἕλληνες.*“ Diese Stelle des Geschichtsschreibers HERODOT[1] (II, 109) sagt uns, daß die Griechen zugleich mit der Stundeneinteilung auch die Sonnenuhren von den Babyloniern entlehnt hätten. „Es liegt die Vermutung nahe, daß Ägypten, das Wunderland der Pyramiden und Obelisken, dieser uralten riesigen Schattenwerfer, die Vermittlung übernommen habe. Neuere Funde von babylonischen Tontafeln machen

---

[1] Ausgabe von SCHWEIGHÄUSER, lib. II, pag. 338.

uns nämlich mit einem regen Verkehr zwischen Babylon und Ägypten im 15. Jahrhundert v. Chr. bekannt, durch welchen sicher frühzeitig babylonische Kenntnisse nach Ägypten gebracht wurden. Nun steht ferner die Tatsache fest, daß sich während der Regierung Psammetichs I (664—610 v. Chr.) ein lebhafter Verkehr der kleinasiatischen Griechen mit Ägypten entwickelt hat, an welchem besonderen Anteil die Milesier hatten. Bei dieser Verkettung der Umstände muß es uns wundernehmen, daß Diogenes von Laerte dem Milesier Anaximander die Erfindung des Gnomons zuschreibt (II, 1 εὗρε δὲ καὶ γνώμονα πρῶτος). Zu dieser Annahme wurde er vermutlich verleitet durch die an dieser Stelle sich anschließende Mitteilung, daß eben dieser Anaximander in Sparta einen die Wenden und Nachtgleichen anzeigenden Gnomon aufgestellt und Sonnenuhren konstruiert habe. So wird sich die Erstlingschaft auf die Orientierung des Gnomon durch die auf die horizontale Standfläche eingegrabenen Normalpunkte und Hauptlinien beziehen, aber nicht auf die erste Anwendung des schattenwerfenden Stabes." (K. Manitius: Sonnenbeobachtungen der Alten mit Hilfe von Schattenwerfern, Das Weltall, 1906, S. 220.)

Leider läßt sich aber auch heute über den Gnomon bei den Babyloniern noch nichts Bestimmtes angeben, obwohl wir über die babylonische Astronomie vom 3. Jahrtausend bis auf Christus jetzt recht viel wissen. (Vgl. auch F. X. Kugler: Die babylonische Mondrechnung, Freiburg 1900, sowie Sternkunde und Sterndienst in Babel I u. II, 1907/11, Münster i. W.) Einer gütigen brieflichen Mitteilung dieses trefflichen Kenners der assyrischen Astronomie verdanke ich folgende Angaben: Es läßt sich noch nicht mit Sicherheit sagen, ob der Gnomon vor dem 7. Jahrhundert bei den Babyloniern im Gebrauch war. Doch werden in assyrischen Berichten Frühlingsäquinoktien erwähnt, die spätestens dem 7. Jahrhundert angehören. Bestimmungen von Solstitien treten in Texten aus dem 6. Jahrhundert auf. Auch Texte, die Sonnenuhren behandeln, liegen Kugler vor. Doch läßt sich ihre Abfassungszeit nicht annähernd ermitteln. Dagegen konnte er aus einem Text, dessen Original wohl schon im 7. Jahrhundert v. Chr. existierte, u. a. den Gebrauch der Wasseruhr nachweisen. (Vgl. Revue d'Assyriologie XI, 1914, pag. 1 ff.)

Als Beweis des frühzeitigen Gebrauchs des Sonnenzeigers bei den Juden werden gewöhnlich der 8. Vers des 38. Kap. v. Jesaja und der 10. aus dem Buch der Könige II angeführt. („Siehe, ich will den Schatten am Sonnenzeiger des Ahas 10 Stufen zurückziehen, über welche er gelaufen ist. Und die Sonne lief 10 Stufen zurück am Zeiger, über welchen sie gelaufen war." „Da rief der Prophet Jesaja den Herrn an, und der Schatten ging hinter sich zurück 10 Stufen am Zeiger des Ahas, die er war niederwärts gegangen.") (Ahas oder Achaz regierte in Juda von 743—727 v. Chr.). Über die „Sonnenuhr" des Königs Achaz ist eine ganze Literatur entstanden, in der eine große Anzahl von Erklärungsversuchen für das anscheinend wunderbare Zurückweichen des Schattens sich finden[1]). Bei R. Wolf: Geschichte

---

[1]) Reichliche Literaturangaben in dieser Hinsicht bieten: J. Drecker: Gnomone und Sonnenuhren, Aachen 1909, S. 0; H. Löschner: Über Sonnenuhren, Graz 1906, S. 22 ff; während für die ältere Zeit besonders zu vergleichen wäre: L. Amélie Sédillot: Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes, Paris 1841, pag. 13; Martini: Von den Sonnenuhren der Alten, Leipzig 1777, S. 38—40; van Beeck Calkoen: Dissertatio mathematico-antiquaria de horologiis veterum sciothericis, Amstelodami 1797, pag. 31. Vgl. auch die Note bei Montucla: „Sur le phénomène de la rétrogradation de l'ombre dans un Cadran solaire" (Suppl. zur Histoire des Mathématiques, Tome I, pag. 737—39).

der Astronomie, München 1877, steht: „Die im 2. Buche der Könige XX, 9—11 stehende Erzählung von dem Rückwärtsgehen der Schatten wollen wir hier weder bemängeln, noch als Beweismittel für das hohe Alter der Sonnenuhren benutzen" (S. 141, 1. Fußnote). Ich muß es mir an dieser Stelle versagen, näher auf das Horologium Achaz einzugehen, aber ich habe Grund zu der Annahme, daß es wohl ein Horologium im technischen Sinne gewesen sein könnte. Die Juden mögen leicht ein Instrument im Hausgebrauch gehabt haben, das den Griechen lange ein bloßes Kuriosum war.

Der erste Gnomon, von dem wir bei den Griechen mit Bestimmtheit erfahren, war derjenige, den Anaximander (um 560 v. Chr.) in Sparta aufstellte. Er erfüllte jedoch keineswegs die Aufgabe einer Sonnenuhr, sondern war, ähnlich den ägyptischen Pyramiden, ein chronologisches Instrument, indem er die Sonnenwenden und Nachtgleichen angezeigt haben soll. „Die Gelegenheit, den Einfluß der geographischen Breite auf die 3 in Betracht kommenden Schattenlängen zu entdecken, ist dem jonischen Philosophen jedenfalls entgangen, weil er die Verhältnisse seiner Vaterstadt Milet ohne weiteres auf Sparta übertragen konnte. Zufälligerweise ist nämlich die Breite von Milet und Sparta ganz unwesentlich verschieden. (37° 30′, bez. 37° 5′). Erst als die neue Einrichtung Nachahmung fand und an den verschiedensten Orten dergleichen Instrumente aufgestellt wurden, mußte man die Wahrnehmung machen, daß die Veränderung des Horizontes[1]) auf die Länge der 3 Normalschatten einen wesentlichen Einfluß äußerte." (Manitius a. a. O. S. 222.)

Indem aber die Veränderung des Horizontes in der wechselnden geographischen Breite begründet ist, ward der Gnomon ein Mittel zur Bestimmung der Polhöhe. Auch die Griechen pflegten die geographische Breite eines Ortes gern im Verhältnis der Gnomonhöhe zur Mittagsschattenlänge an einem Äquinoktialtage auszudrücken. So galt für Athen das Verhältnis 4 : 3, für Alexandria 5 : 3, für Karthago 7 : 11, für Massilia $41\frac{4}{5}$ : 120[2]), für Rhodos 7 : 5, für Rom 9 : 8, für Tarent 11 : 9 usw. Der Bruch entspricht der Kotangente der Breite.

Blieb der Gnomon in dieser Anwendung nur Werkzeug der Gelehrten, so war dagegen sein Gebrauch als Zeitmesser in Griechenland populär. Der Schatten hieß *στοιχεῖον*, weil er durch Abschreiten (*στείχω* = schreiten) mit den eigenen Füßen gemessen wurde. Denn der zu messende Schatten war im täglichen Gebrauch der des menschlichen Körpers selbst, so daß jeder Mensch zur Bestimmung irgendeiner Tageszeit seinen eigenen Schatten abschritt. Die Anzahl der Füße, die er bei einem einzelnen Individuum hielt, war direkt das Zeitmaß. Zur selben Tageszeit erlangte jeder Beobachter nahezu dasselbe Resultat, da zwischen Körperlänge eines Menschen und derjenigen seines Fußes ein gewisses ziemlich konstantes Verhältnis besteht. Insbesondere die Essenszeit wurde durch eine gewisse Schattenlänge fixiert. Sollte die Mittagsmahlzeit aber in ihrem Beginn während der einzelnen Jahreszeiten nicht gar zu sehr variieren, so mußte man sie an verschieden lange Nachmittagsschatten

---

[1]) In dem Artikel „Gnomon" (*γνώμων*) von Hultsch (Realencyklopädie der klass. Altertumswiss. v. Pauly-Wissowa) liest man: „Der schattenmessende Stift stand auf einer mit Stundeneinteilung versehenen Tafel oder auf dem ebenfalls in Stunden geteilten Abschnitt einer Hohlkugel (*σκάφη*). Diese Einteilungen (descriptiones) mußten für jeden Ort der Erde nach seiner Polhöhe und geographischen Länge (sic!) besonders hergerichtet sein".

[2]) Dies war das Verhältnis zur Zeit der Sommersonnenwende. (Vgl. C. Schoy: Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhenbestimmungen bei den älteren Völkern, Hamburg 1911, S. 5).

binden[1]. So wissen wir, daß die Essenszeit im Hochsommer bei einem 6 Fuß langen Schatten begann, um die Zeit der Tag- und Nachtgleichen bei 10 füßigen und gegen die Wintersonnenwende bei 15-, ja 20 füßigem Schatten. Da das Schattenmaß der Attiker in der Schrift: „Die Zeitmesser der antiken Völker“ von G. Bilfinger, Stuttgart, 1886 ausführlich behandelt und durch viele Quellenangaben illustriert ist, so begnügen wir uns mit einem Hinweis auf diese treffliche Studie[2].

Aber eine Kuriosität soll hier ausführlicher zur Sprache kommen, die noch der Klärung bedarf. Man liest in einigen Schriften[3], daß die Römer die aus Ägypten mitgebrachten Obelisken als Gnomone benützten, die Spitze der Obelisken aber mit einer vergoldeten Kugel versahen, um einen deutlich umrissenen Schlagschatten zu erhalten, so daß die Vorrichtung an den Gnomon à trou erinnert. Eine Belegstelle hierzu findet sich bei Plinius (hist. nat. XXXVI, 10). Sie lautet: „Ei qui est in campo divus Augustus addidit mirabilem usum ad deprehendas solis umbras dierumque ac noctium ita magnitudines, strato lapide ad longitudinem obelisci, cui par fieret umbra brumae confectae die, sexta hora, paulatimque per regulas, quae sunt ex aere inclusae, singulis diebus decresceret ac rursus augesceret, digna cognitu res, ingenio Facundi Novi mathematici. Is apici auratam pilam addidit cujus vertice umbra colligeretur in se ipsam, alias enormiter jaculante apice, ratione, ut ferunt, a capite hominis intellecta“. Im Anschluß hieran bemerkt Bilfinger treffend: „Der Obelisk — es handelte sich um jenen, den Augustus von Ägypten nach Rom gebracht hatte und auf dem Campus Martius aufstellen ließ — hatte seinem neuen Zweck nur mangelhaft entsprochen, weil die Schattenspitze verschwommen war, oder, wie Plinius es ausdrückt, weil die Spitze des Obelisken den Schatten unregelmäßig ausstrahlte. Um dies zu verhindern, oder, wie es heißt, um den Schatten in sich selbst zu sammeln, setzte man eine vergoldete Kugel hinauf. Der an sich etwas befremdliche Zusatz, man sei auf dieses Verfahren durch den menschlichen Kopf geleitet worden, gewinnt offenbar in unserem Zusammenhang einen ganz vortrefflichen Sinn, wenn man bedenkt, daß man jahrhundertelang gewöhnt war, seinen eigenen Körperschatten zu messen und eben dadurch genötigt war, das *ἄκρον τῆς κεφαλῆς* beim Schatten ganz genau ins Auge zu fassen“ (a. a. O. S. 19).

War die Befestigung einer Kugel auf der Obeliskenspitze wirklich eine Verbesserung dieses Gnomons oder war sie nur eine jener bei den Römern nicht seltenen sklavischen, ja unverstandenen Nachahmungen griechischer Vorbilder? J. Sageret sagt in seinem schon erwähnten Aufsatz bei Besprechung der Mängel des Gnomons: „Je höher die

---

[1] In ähnlicher Weise setzten die arabischen Astronomen die Nachmittagsgebetszeit (al — 'Aṣr) fest. Vgl. C. Schoy: Arabische Gnomonik, Hamburg 1913. S. 29.

[2] Man sehe dort auch die Schattentabelle S. 16.

[3] Bei J. F. Montucla steht z. B.: . . . „il semble en effet que c'est pour obvier à cet inconvénient (nämlich dem unscharfen Halbschattenbild) qu'ils terminèrent le gnonom par une boule dont le centre répondoit au sommet, afin que, prenant le milieu de l'ombre elliptique de cette boule, on eût la hauteur du centre du soleil. Cette invention étoit assez heureusement imaginée pour les gnomons exposés, au grand jour. Telle étoit la forme de celui que le mathématicien Manlius ou Manilius éleva à Rome sous les auspices d'Auguste: mais les modernes ont encore plus heureusement remédié à ce défaut, en se servant d'une plaque verticale ou horisontale percée d'un trou circulaire, qui transmet les rayons du soleil dans un endroit à couvért.“ Histoire des Mathématiques I, pag. 305.)

Gnomone, desto größer die Zone der Halbschatten[1]. Was die Gnomone dadurch an Empfindlichkeit gewinnen, verlieren sie an Genauigkeit. Die alexandrinischen Griechen fanden Mittel, diese Fehler zu vermindern (Obelisken), indem sie auf die Spitze des Obelisken eine kurze Stange mit einer Metallkugel setzten; die Kugel warf einen elliptischen Schatten[2], dessen symmetrische Halbschatten sich gegenseitig korrigierten, und der Mittelpunkt der Ellipse entsprach dem Kugelmittelpunkt. Um diesen leichter zu finden, war auf die Kugel noch eine kurze Spitze aufgesetzt".

Leider fehlt bei SAGERET jeglicher Hinweis auf eine Quelle. Ich finde aber eine ähnliche Erwähnung von der Verbesserung des Gnomons durch die Spätgriechen bei K. MANITIUS im Anhang zu seiner trefflichen deutschen Ptolemäusausgabe. Dort heißt es (I S. 420) bei Besprechung des Halbschattens des Gnomons: „Erst die byzantinischen Astronomen des 5. Jahrhunderts n. Chr. suchten dieser Schwierigkeit dadurch abzuhelfen, daß sie an der Spitze des Gnomons eine kleine Scheibe mit einer kreisrunden Öffnung anbrachten, um in dem Mittelpunkt des so erzeugten Sonnenbildchens den maßgebenden Endpunkt der Schattenlänge zu erhalten." Und genau so drückt sich MANITIUS in dem schon erwähnten Aufsatz, der im „Weltall" steht, aus (S. 224). Ich möchte daher fast vermuten, daß die von SAGERET erwähnte Verbesserung doch der Gnomon à trou ist. Mehr noch wurde ich in dieser Vermutung bestärkt, als ich durch Beobachtung solcher Kugelschatten erkannte, daß sich die Halbschatten gegenseitig nicht korrigierten und der Mittelpunkt der Ellipse nicht dem Sonnenmittelpunkte entspricht, vielmehr zu dem Schlusse komme, daß ein Gnomon mit aufgesetzter Kugel keinen Fortschritt gegenüber einem einfachen Stab bedeutet.

## V. Schlußbemerkungen

Vielfach ist auch die Rede von der Existenz einer rudimentären Gnomonik bei den alten Azteken und Peruanern. Aber neuere Nachforschungen haben ergeben, daß die als Gnomone oder gar Sonnenuhren angesprochenen Ruinenreste, die man bei diesen Völkern fand, nicht der Astronomie, sondern religiösen Gebräuchen gedient haben müssen. Bei J. SAGERET (a. a. O. pag. 527) liest man zwar noch: „Chez les Azteques, au matin de la fête Toxcatl, ou du solstice, dit ALVARADO, on dressait dans la cour du Grand Temple nombre de perches, l'une d'elles, plus haute que les autres, surmontait la principale pyramide", eine Stelle, die auch ich in einem Aufsatz: „Die Sonnenuhren der Araber in ihrer Bedeutung für die arabische Astronomie und Religion" (Naturwiss. Wochenschr. 1911, S. 241) als Beleg für die Existenz des Gnomons bei den Azteken angeführt hatte. Aber Herrn Geheimrat E. SELER (Berlin) verdanke ich die briefliche Mitteilung, daß die Angaben spanischer Autoren nur mit großer Reserve zur Diskussion zuzulassen seien, daß insbesondere diese Angabe ALVARADOS unrichtig sei. So bezeichne das Fest Toxcatl nicht das Solstitium, sondern falle vielmehr in die Zeit, wo die Sonne auf ihrem Weg nach Norden um Mittag über Mexico in das Zenit zu stehen kam. Das Aufstecken von Fahnen im Tempel geschah bei jedem

---

[1] Man sehe die hübsche Illustration hierzu bei OSCAR PESCHEL: Geschichte der Erdkunde, 1. Aufl. 1865, München, S. 40, sowie bei K. MANITIUS: Ptolemaeus, Handbuch der Astronomie, Leipzig 1912, I, S. 419.

[2] In dem Artikel „Gnomon" von R. SCHURIG (Allg. Encykl. d. Wiss. u. Künste 71 Teil) steht, daß die Kugel auf dem Obelisken einen kreisförmigen (sic!) Schatten werfe (S. 203).

Feste. Von einer größeren Fahne auf dem Haupttempel sei nirgends die Rede. Stangen mit Papierfahnen wurden insbesondere in den ersten Monaten unseres Jahres an den Kultstätten des Regengottes aufgestellt und waren Opfer für den Regengott. Seler hatte ferner die Güte, mich auf die Hauptstelle für die Verwendung von Gnomonen im alten Peru bei Pedro Sarmiento de Gamboa, herausgeg. v. Pietschmann (Abhandl. d. Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Neue Folge, Bd. VI, Berlin 1906, S. 67/68) hinzuweisen. Danach waren auf einem hohen Berge im Osten des Casco 4 Pfähle je 2 spanische Maßellen von einander entfernt, aufgestellt. Durch Öffnungen an den Kopfenden traten die Sonnenstrahlen nach Art einer Sonnenuhr oder eines Astrolabiums ein. Es waren aber jene Stellen am Boden markiert, wo die Sonnenstrahlen zur Zeit des Umpflügens und Besäens der Brachländer, sowie zur Zeit der Ernte auftrafen. Nachträglich wurden die Pfähle durch Steinsäulen ersetzt und die Linien, in denen die Sonnenstrahlen durch die Löcher der Säulen den Boden trafen, in Steinplatten (Fliesen) geritzt, derart, daß das Ganze ein Kunstwerk von einer Jahresuhr war, durch die man die Zeiten des Säens und Erntens regeln konnte. Eigene Beobachter hatten sich mit diesen Uhren weiterhin zu befassen und dem Volke die Zeiten und Veränderungen, die dieselben anzeigten, bekannt zu machen.

Wenn man aber weiter nach diesen in Stein ausgeführten „Uhren" forscht, so wird man auf die Intihuatana verwiesen. Allein Prof. Max Uhle (Lima) hat unlängst klar erwiesen, daß diese angeblich schattenwerfenden Pfeiler nichts anderes als Steintische mit Zapfen waren, die als Altäre dienten und keine Gnomone gewesen sein können. Für ihre Bestimmung, dem Sonnenkult zu dienen, sprechen eine Anzahl von Umständen. Wir möchten jedoch für nähere Details auf die diesbezügliche Studie von Uhle und die 17 trefflichen Abbildungen, die derselben beigegeben sind, verweisen[1].

Wir haben hier ausführliche, auf Quellenstudien gegründete historische Details über den Gnomon gegeben, weil sich immer noch unrichtige Legenden da und dort in unseren Lehrbüchern der mathematischen Geographie finden. Möchte unser Aufsatz dazu beitragen, daß solcher Spuk[2]) bald endgültig aus denselben verschwindet!

---

[1] Vgl. Max Uhle: Zur Deutung der Intihuatana (Verhandlungen des XVI. internationalen Amerikanistenkongresses, Wien, 9. bis 14. Septbr. 1908, 2. Hälfte, S. 371—388).

[2] Hierzu ist jedenfalls auch das Märchen zu rechnen, daß Ulug Beig mit einem Quadranten beobachtet haben soll, dessen Radius 180 römische Fuß hielt und somit der Höhe der Hagia Sophia gleichkam. (S. z. B. E. Böttcher a. a. O., S. 165). Tatsächlich geht diese Legende auf J. Greaves (Johännes Gravius), einen englischen Orientalisten des 17. Jahrhunderts, zurück. Er gab heraus: Binae Tabulae Geographicae, una Nassir Eddini Persae, altera Ulug Beigi Tatari, Londini, 1652. Dort steht unter: Lectori $B_3$: . . . „Minime vero praetereundum duxi, quod de tanto Principe Constantinopoli acceperam, a Turcicis Astronomis, hominibus, meo judicio, neque moribus agrestibus, neque ingenio efferato: qui cum multa in laudem Tychonis (nam in eas regiones e nostratibus ejus unius fama pervenit) libenter praedicassent, et me praemonstrante progymnasmata ipsius inspexissent, admirati utrinque inexspectatum observationum concentum, adjecerunt Ulug Beigum, praeter alia instrumenta exactissima, quae paraverat, quadrantem stupendae molis construxisse, cujus radius altitudinem summi fornicis Templi Sanctae Sophiae adaequaret. Quae etsi dictu incredibilia (nam testudo Hemisphaerii centum octoginta pedes Romanos superat) illi tamen Persas fide dignos haec eadem narrantes saepius audivisse contenderunt . . .". Aber schon Délambre bemerkte hierzu . . . „Les étoiles furent observées avec un très grand quart de cercle; mais il est difficile d'ajouter foi à Gravius, quand il dit, que le rayon de cet instrument égalait la hauteur de Sainte-Sophie à Constantinople. Il tenait cette particularité de Turcs, qu'il crut dignes de foi." (Hist. de l'astron. du moy. âge, pag. 205.)

# Elementare Theorie der ebenen Sonnenuhren nebst einigen speziellen Bemerkungen zur Gnomonik der Araber.

Von Carl Schoy in Essen a. d. R.

Mit 1 Figur im Text.

Eine der schönsten Anwendungen der sphärischen Trigonometrie auf Fragen der Zeitbestimmung ist die Berechnung einer Sonnenuhr. Besonders in früheren Jahrhunderten waren Herstellung und Gebrauch dieses Zeitmeßwerks allgemein beliebt, bis es durch unsere Pendeluhren mehr und mehr verdrängt wurde. Heute gehört die Sonnenuhr bei uns zum toten Inventar der Praxis, trotzdem ist das Interesse für die Gnomonik noch vielerorts lebendig, und mehr als unter unserem nordischen wolkenbedeckten Himmel ist sie im sonnigen Süden, wenn nicht Bedürfnis, so doch ein sinniger Schmuck der Landhäuser, der Kirchen und Moscheen. So ist auch die Theorie und Konstruktion von Sonnenuhren bis in die neueste Zeit immer wieder Gegenstand allgemeinverständlicher oder wissenschaftlicher Behandlung geworden. Dabei haben die einzelnen Schriften natürlich verschiedene Tendenzen. Ich möchte in erster Linie das streng wissenschaftliche Buch von R. Sonndorfer: Theorie und Konstruktion der Sonnenuhren, Wien 1864, nennen, das nach einer wertvollen historischen Einleitung eine ausführliche Darstellung aller Arten von Sonnenuhren gibt und sich dabei der analytischen und darstellenden Geometrie bedient. Ähnlich ist die Schrift von J. Mollet: Gnomonique graphique suivie de gnomonique analytique, Paris, 7. Aufl., 1884, gehalten. Da diese Autoren bei der Bestimmung der Schattenkurven, die das Schattenende des Zeigers oder Gnomons während eines Tages durchläuft, von den Lehren der analytischen Raumgeometrie

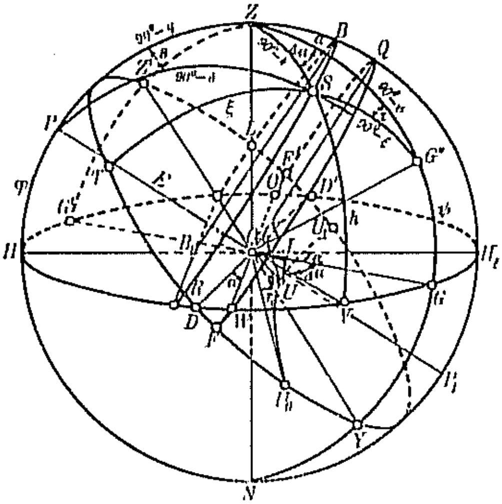
Gebrauch machen (Durchschnitt des Kegels, den die Sonnenstrahlen umhüllen, mit Auffang[Uhr-]fläche), so kommt die Benutzung dieser Bücher für die Schule wohl kaum in Betracht. Viel genannt ist die Gnomonik von J. J. von Littrow, Wien, 2. Aufl., 1836. Der erste Teil basiert auf der sphärischen Trigonometrie, im zweiten Teil kommt ebenfalls die analytische Geometrie des Raumes zur Verwendung. Allein es dürfte einem Lehrer nicht so leicht gelingen, aus der Littrowschen Gnomonik für die Schule Nutzen zu ziehen. Sowohl die Weitschweifigkeit der Formelsprache als auch der Mangel an anschaulichen Figuren erschweren die Lektüre des Buches. Die Schrift von C. Pasini: Orlogi Solari, Padova 1900, konnte ich aus keiner Bibliothek erhalten. Der Littrowschen Darstellung folgt im wesentlichen auch der sehr ausführliche Artikel „Gnomon und Gnomonik" von R. Schurig im 71. Teil der bekannten Enzyklopädie von Ersch und Gruber, 1860 (S. 202—223), wo jedoch sachlich und geschichtlich nicht alles richtig ist. Mit der Geschichte der Sonnenuhren befassen sich die Abhandlungen von H. Löscher (Über Sonnenuhren, Graz 1906), J. Drecker (Gnomone und Sonnenuhren, Aachen 1909) sowie die jetzt selten gewordenen Schriften von Martini (Von den Sonnenuhren der Alten, Leipzig 1777) und J. F. van Beeck Calcoen (Dissertatio mathematico-antiquaria de horologis veterum sciothericis, Amstelodami 1797), eine auch mathematisch beachtenswerte Arbeit. Endlich möchte ich aus neuerer Zeit noch die sehr anschauliche Darstellung aller ebenen europäischen Sonnenuhren an einer Figur durch L. Weinek (Zur Theorie der Sonnenuhren, Sitzungsbericht der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien 1905, Bd. CXIV) sowie H. Michniks mathematische Behandlung der temporären Stundenlinien (Beiträge zur Theorie der Sonnenuhren, Leipzig 1914) erwähnen.

Im folgenden soll jetzt eine einheitliche ganz elementare Theorie, aus der sich alle Arten von ebenen Sonnenuhren mit einem Schlage ableiten lassen, gegeben werden. Diese Herleitung dürfte auch für die Prima unserer höheren Schulen brauchbar sein. Dabei wollen wir uns noch von der beschränkenden Annahme freimachen, daß der Zeiger oder Stylus (στυλος) der Uhr in der Richtung der Weltachse liege, der Kadran mithin ein sogenannter Polos (abendländische, europäische Sonnenuhr) sei. Bekanntlich haben die Araber den Zeiger[1]) der Uhr stets senkrecht auf deren Zifferblatt gestellt, bei *schiefen* Uhrflächen jedoch parallel der Horizontalebene, niemals aber war er zum Weltpol gerichtet. Diesen letzteren allgemeinsten Fall veranschaulicht beistehende Abbildung. $HH_1$ ist der Durchmesser des Horizontalkreises und gleichzeitig die Nordsüdrichtung. Über dem Hori-

---

1) Er heißt in der arabischen Sonnenuhrkunde مقياس = miqjās, was im allgemeinen Meßinstrument, im besonderen auch noch Nilmesser heißt. Der miqjās der Sonnenuhr war in der Regel 12 Finger lang, also ein feststehendes Maß. Dies war die indische Einteilung des Schattenstiftes. Selten zählte er 7 oder $6^2/_3$ oder $6^1/_2$ Finger.

zont erhebt sich schräg die Uhrfläche $E$, die in ihrem höchsten Punkt $Z'$ den Abstand $ZOZ' = \sphericalangle \Psi$ vom Zenit[1]) $Z$ erreicht. Die Uhrfläche $E$ schneidet den Horizont in der Geraden $DD'$, die von der Ostwestrichtung $O_1W$ um den Winkel $\alpha$ abweicht (dekliniert). Die Mittelachse oder der auf $DD_1 \perp$ stehende Durchmesser von $E$ ist $Z'Y$. Auf ihm steht wiederum $\perp OG''$. Das horizontale Lot über $DD'$ ist $GO(G')$. Punkt $G''$ ist der Pol zu $E$. In $OG$ liegt der Gnomon $OJ = q$. Angenommen, die Sonne $S$ bewege sich im Parallelkreis $BB_1$ der Deklination $\delta$ (OQ = Himmelsäquator) einher, so gilt es, die Abbildung dieses Parallelkreises auf die Auffangfläche $E$ zu ermitteln, wobei $J$ der Augpunkt dieser Ablotung ist. Um z. B. das Bild $U$ von Punkt $S$ zu erhalten, verbinde man $S$ mit $O$ und ziehe zu dieser Verbindungslinie durch $J$ die Parallele. Das ganze Kreisbild $U_0UU_1$ ist die Schattenkurve der Gnomonspitze für den Tag, an welchem die Sonne die Deklination $\delta$ hat. Gleichzeitig erkennt man, daß, da der Gnomon $OJ$ nicht in der Weltachse liegt, sein Schatten zu ein und derselben Stunde jeden Tag eine andere Richtung hat. Dieser Umstand ist für die arabischen Sonnenuhren charakteristisch. Es läßt sich deshalb die Zeit nicht aus der Koinzidenz des Stylusschattens mit einer unveränderlichen Stundenlinie wie beim Polos entnehmen, sondern nur aus der augenblicklichen Lage der Schattenspitze des Stäbchens. Wir müssen daher dessen Länge und Richtung bestimmen. Die Schattenlänge für den Punkt $U$ sei $OU = l$; die Schattenrichtung, die wir von der Schrägachse $Z'O$) aus zählen wollen, sei $= \sphericalangle YOU = +\tau$. Die Länge des Schlagschattens $l$ des Stäbchens der Länge $q$ hängt aber von dem Erhebungswinkel $\xi$ = Bogen



---

[1] Bekanntlich ist das Wort Zenit eine Verstümmelung des arabischen سمت = semt = Richtung. Daraus wurde unser Zenit, indem spanische Abschreiber das scharfe s in semt durch z wiedergaben und irrtümlich aus m ni machten. Der Plural von semt heißt mit dem Artikel السموت = al-simût (oder mit Zusammenziehung: assimût), woraus unser Azimut wurde. Die Richtung zum Scheitel heißt arabisch سمت الرأس = semt al-râ's; der Gegenpunkt oder Fußpunkt dagegen heißt نظير = nazir (z = weiches s; er wird auch zuweilen durch سمت القدم = semt al-qadam ausgedrückt (qadam = Fuß). Nadir ist spanische Schreibweise.

*ST* der Sonne bz. der Ebene *E* ab. Das nach Süden gewandte Zifferblatt unserer Uhr wird zuerst vormittags beschienen, wenn die Sonne in *L*, dem Durchschnitt von *E* mit dem Sonnenparallel $BB_1$ ankommt. Sie möge dort den Stundenwinkel $s_1$ haben. Dann fällt der Schatten von *g* über $U_0$ hin ins Unendliche. Er bilde in diesem Augenblick mit *OY* den Winkel $= \tau_0$. Von jetzt an verkürzt sich der Schlagschatten des Stäbchens und rückt gleichzeitig gegen *OY* hin. Er koinzidiert mit *OY*, wenn die Sonne das Azimut $\alpha$ erreicht hat, d. h. im Vertikalkreis *GG″ZG′* steht. Kommt die Sonne in den Bereich von Azimuten, die größer sind als $\alpha$, so rückt der Gnomonschatten in den östlichen Teil der Uhrfläche, um endlich beim Austritt der Sonne aus *E* in *R*, wiederum über $U_1$ ins Unendliche hinzustreichen. Die Verbindung aller Schattenspitzen gibt das Abbild des Sonnenparallels, das in diesem Fall (weil zwei unendlich ferne Punkte) eine Hyperbel ist. Einfacher wird die Ablotung des Himmelsäquators. Sie ist stets eine gerade Linie (Durchschnitt zweier Großkreise), die jedoch in diesem Fall nicht durch den Anfangspunkt *O* geht, sondern im Abstand $y_0 = g \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot \sin\psi}{\sin\varphi \cdot \cos\psi}$ parallel zu $FF_1$ zieht. Es soll nämlich *OY* die positive *Y*-Achse, *OD′* die positive *X*-Achse sein, und $\sphericalangle\, HOP = \varphi$ sei die Polhöhe des Ortes, für den die Uhr entworfen werden soll. ($y_0$ ist in unserer Figur absichtlich weggelassen, um sie nicht zu sehr zu überladen.)

Um jetzt zuerst die Größe $\xi$ zu ermitteln, wenden wir auf das sphärische Dreieck *SG″Z* den Kosinussatz an. In diesem Dreieck ist Seite $SZ = 90^0 - h$, wo *h* der augenblickliche Höhenwinkel[1]) der Sonne ist; die Seiten *G″S* und *G″Z* sind bz. $90^0 - \xi$ und $90^0 - \psi$. Der Winkel $G''ZS = \Delta\alpha$ ist beliebig. Es folgt

$$\cos\Delta\alpha = \frac{\sin\xi - \sin h \cdot \sin\psi}{\cos h \cdot \cos\psi}. \tag{I}$$

Ferner gibt der Sinussatz auf das Zenit — *Pol* — Sonne = Dreieck angewandt

$$\sin(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{\cos\delta \cdot \sin s}{\cos h} = \sin\alpha \cdot \cos\Delta\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\Delta\alpha. \tag{II}$$

Bildet man aus (I)

$$\sin\Delta\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\Delta\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\xi - \sin h \cdot \sin\psi}{\cos h \cdot \cos\psi}\right)^2}$$

und eliminiert damit $\sin\Delta\alpha$ und $\cos\Delta\alpha$ aus (II), so folgt

$$\frac{\cos\delta \cdot \sin s}{\cos h} = \sin\alpha \cdot \frac{\sin\xi - \sin h \cdot \sin\psi}{\cos h \cdot \cos\psi} + \cos\alpha \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\xi - \sin h \cdot \sin\psi}{\cos h \cdot \cos\psi}\right)^2},$$

woraus unschwer folgt:

$$\frac{\sin\xi - \sin h \cdot \sin\psi}{\cos h \cdot \cos\psi} = \sin\alpha \cdot \frac{\cos\delta \cdot \sin s}{\cos h} + \cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 h - \cos^2\delta \cdot \sin^2 s}{\cos^2 h}}.$$

---

[1]) Der Höhenkreis oder Parallelkreis zum Horizont heißt im Arabischen *Almuqanṭarāt*, (المقنطرات), was auch Sonnenuhr bedeuten kann.

Da aber nach dem Sinussatz $\sin s \cdot \cos\delta = \sin\alpha \cdot \cos h$ ist, so ergibt sich leicht:

$$\sin\xi = \sin h \,.\, \sin\psi + \sin\alpha \cdot \cos\delta \cdot \cos\psi \cdot \sin s + \cos^2\alpha \cdot \cos h \cdot \cos\psi. \qquad \text{(III)}$$

Es ist aber nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos\alpha \cdot \cos h = -\cos\varphi \cdot \sin\delta + \sin\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos s\,,$$

so daß damit aus (III) wird

$$\begin{aligned} \sin\xi &= \sin h \cdot \sin\psi + \sin\alpha \cdot \cos\delta \cdot \cos\psi \cdot \sin s \\ &+ \cos\alpha \cdot \cos\psi\,(-\sin\delta \cdot \cos\varphi + \cos\delta \cdot \sin\varphi \cdot \cos s), \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

welche Gleichung uns in den Stand setzt, aus den gegebenen Größen $\alpha$, $\delta$, $\varphi$, $\psi$ und $s$ sofort den Erhebungswinkel $\xi$ zu finden.

Diese Art der Herleitung der Formel (IV) dürfte an Einfachheit kaum zu wünschen lassen. Ebenso leicht gelangt man zum Ziel, wenn man die 4 nachstehenden Gleichungen anschreibt:

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s \\ \sin\xi &= \sin h \cdot \sin\psi + \cos h \cdot \cos\psi \cdot \cos\Delta\alpha \\ \sin\delta &= \sin h \cdot \sin\varphi - \cos h \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha) \\ \sin\alpha &= \sin s\,\frac{\cos\delta}{\cos h} \end{aligned}$$

und hieraus $\Delta\alpha$ und $h$ eliminiert.

Mit der Kenntnis von $\xi$ folgt, wie leicht ersichtlich, aus dem ebenen Dreieck $OJU$ sofort

$$OU = l = q \cdot \frac{\sin h}{\sin\xi} = q \cdot \frac{\sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s}{\sin\xi} \qquad \text{(V)}$$

und aus dem sphärischen Dreieck $G''SZ$:

$$\cos\tau = \frac{\sin h - \sin\xi \cdot \sin\psi}{\cos\xi \cdot \cos\psi}\,, \qquad \text{(VI)}$$

da ja $\sphericalangle\, YOU = \sphericalangle\, SG''Z = \sphericalangle\, \tau$ ist. Für die rechtwinkligen Koordinaten $x$ und $y$ des Punktes $U$ ist alsdann:

$$\begin{aligned} x &= l \cdot \sin\tau \\ y &= l \cdot \cos\tau. \end{aligned}$$

Mittels der Formeln (IV), (V) und (VI) kann man für jeden Tag und zu jeder gegebenen Zeit Länge und Lage des Schattens finden, den ein so orientierter Zeiger auf ein beliebig im Raume gegebenes Zifferblatt wirft. Setzt man jetzt (vom wahren Mittag an gerechnet) $s = 0^0$; $s_1 = \pm 15^0$; $s_2 = \pm 30^0$ usw., so erhält man auf dem Zifferblatt die entsprechenden Schattenenden des Zeigers für ein bestimmtes $\delta$. Verfährt man für ein anderes $\delta$ ebenso (die Araber wählten gewöhnlich die drei Parallelkreise Widder, Steinbock und Krebs), so hat man wiederum die entsprechenden

Stundenmarken auf der Uhr. Bekanntlich ist die Verbindung dieser äquihorären Punkte eine *Gerade*, die Stundenlinie.

Zur Ermittlung der Gleichung der Schattenkurve geht man am besten von den drei Gleichungen

$$\cos h = \frac{\cos\xi \cdot \sin\tau}{\sin \Delta\alpha} \tag{VII}$$

$$\sin h = \sin\xi \cdot \sin\psi + \cos\xi \cdot \cos\psi \cdot \cos\tau \tag{VIII}$$

$$\sin\delta = \sin h \cdot \sin\varphi - \cos h \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha) \tag{IX}$$

aus. Daraus ist die Größe $h$, die ja den Stundenwinkel $s$ enthält, zu eliminieren, damit (IX) für jedes $s$ gilt, d. h. von $s$ unabhängig ist. Beachtet man, daß für die Projektion des Punktes $S$ auf die Ebene $E$

$$\sin\tau = \frac{x}{l}; \quad \cos\tau = \frac{y}{l}; \quad \sin\xi = \frac{q}{\sqrt{l^2 + q^2}};$$

$$\operatorname{tang}\Delta\alpha = \frac{x}{q}, \text{ mithin } \sin\Delta\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + q^2}}; \quad \cos\Delta\alpha = \frac{q}{\sqrt{x^2 + q^2}}$$

zu setzen ist, so folgt aus (IX) sofort:

$$\sqrt{l^2 + q^2} \cdot \sin\delta = \sin\varphi\,(q \cdot \sin\psi + y \cdot \cos\psi) - \cos\varphi\,(q \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha) \tag{X}$$

oder (X) entwickelt und geordnet:

$$\begin{aligned} &y^2\,(\sin^2\varphi \cdot \cos^2\psi - \sin^2\delta) + x^2(\sin^2\alpha \cdot \cos^2\varphi - \sin^2\delta)\\ &+ x \cdot y \cdot \sin\alpha \cos\psi \cdot \sin 2\varphi + x \cdot q\,(\sin\alpha \cdot \sin 2\varphi \cdot \sin\psi - \sin 2\alpha \cdot \cos^2\varphi)\\ &\quad + y \cdot q\,(\sin^2\varphi \cdot \sin 2\psi - \cos\alpha \cdot \sin 2\varphi \cdot \cos\psi)\\ &+ q^2 \cdot (\cos^2\alpha \cdot \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \cdot \sin^2\psi - \sin^2\delta - \cos\alpha \cdot \sin 2\varphi \cdot \sin\psi) = 0. \end{aligned} \tag{XI}$$

Bevor wir Gleichung (XI) näher betrachten, möge aus (X) erst die Abbildung des Äquators errechnet werden, für die man also $\delta = 0$ zu setzen hat. Dann geht (X) in die Gleichung einer geraden Linie über, nämlich in

$$y \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi + x \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi + (q \sin\varphi \cdot \sin\psi - \cos\alpha \cdot \cos\varphi) = 0, \tag{XII}$$

und hieraus findet man für $x = 0$ tatsächlich den eingangs erwähnten Wert für $y$. Wie man sieht, ist (XI) ein Kegelschnitt. Die Lage seiner Achsen läßt sich mühelos finden, wenn man bedenkt, daß die eine derselben dem Abbild des Himmelsäquators parallel ist. Die Linie $FF'$, die durch den Koordinatenanfangspunkt $O$ geht, hat die Gleichung

$$-y = x \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\varphi}{\cos\psi \cdot \sin\varphi} = x \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\psi} \cdot \operatorname{cotg}\varphi$$

(da $y$ negativ für ein positives $x$). Mithin ist der Richtungsunterschied von $DD'$ ($X$-Achse) und $FF'$ gegeben durch

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\psi} \cdot \operatorname{cotg}\varphi. \tag{XIII}$$

Dieser Ausdruck für tang $\mu$ ist nichts anderes als die einfache Formel für

$$\operatorname{tang} 2\mu = \frac{a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin 2\varphi \cdot \cos\psi}{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\psi - \sin^2\alpha \cdot \cos^2 \cdot \varphi},$$

die man für die Bestimmung der Lage der Achsen aus (XI) erhält. Man kommt wieder auf dasselbe Resultat, wenn man

$$\operatorname{tang} 2\mu = \frac{2 \operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang}^2 \mu}$$

bildet und für tang $\mu$ den Wert aus (XIII) einsetzt.

Gleichung (XI) stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem die Diskriminante

$\varDelta = \sin^2 \delta \left[\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi \left(\cos^2 \psi + \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{cotg}^2 \varphi\right)\right] \gtreqless 0 \cdots$ (XIV) ist.

*Spezialfälle.* Aus vorstehenden Formeln ergeben sich sämtliche Spezialfälle von ebenen Sonnenuhren. Es sei

1. $\alpha$ beliebig, aber $\psi = 0$, so gibt (IV)

$$\sin \xi = \sin \alpha \cdot \cos \delta \cdot \sin s + \cos \alpha \left(- \sin \delta \cdot \cos \varphi + \cos \delta \cdot \sin \varphi \cdot \cos s\right)$$

und (XI) wird zu

$$y^2 \left(\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta\right) + x^2 \left(\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta\right) + xy \sin \alpha \cdot \sin 2\varphi$$
$$- x \cdot q \sin 2\alpha \cdot \cos^2 \varphi - y \cdot q \cdot \cos \alpha \cdot \sin 2\varphi + q^2 \left(\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta\right) = 0.$$

*Abbild des Himmelsäquators*

$$y \cdot \sin \varphi + x \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi - q \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi = 0\,; \quad \operatorname{tang} \mu = \sin \alpha \cdot \operatorname{cotg} \varphi$$
$$\varDelta = \sin^2 \delta \left[\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi \left(1 + \sin^2 \alpha \operatorname{cotg}^2 \varphi\right)\right].$$

Daraus folgt: Ist die Sonnenuhr ein *deklinierender Vertikal*, so *kann* die Schattenkurve bei sehr geringer Abweichung der Uhrfläche von der Ostwestlinie, falls $\delta > \varphi$ ist, d. h. in der heißen Zone, eine Ellipse sein; im allgemeinen ist sie stets eine Hyperbel. Die Achsen fallen mit den Koordinaten zusammen, falls $\alpha = 0^0$ (Ostwestvertikal) oder $\varphi = 90^0$ ist (Pol).

2. Es sei $\psi = 0$ und $\alpha = 0$ *(Vertikal über der Ostwestlinie).* Dann gibt (IV): $\sin \xi = - \sin \delta \cdot \cos \varphi + \cos \delta \cdot \sin \varphi \cdot \cos s$, und (XI) wird zu

$$y^2 \left(\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta\right) - x^2 \sin^2 \delta - y \cdot q \sin 2\varphi + q^2 \left(\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta\right) = 0.$$

*Abbildung des Äquators* $y = q \cdot \operatorname{cotg} \varphi$.

Ferner ist $\mu = 0$ und $\varDelta = \sin^2 \delta \left(\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi\right)$.

Der Kegelschnitt kann in der heißen Zone eine Ellipse werden. Er ist eine Parabel für $\varphi = \delta$ und eine Hyperbel für $\varphi > \delta$.

3. Es sei $\psi = 0$, $\alpha = 90^0$ *(Nordsüdvertikal)* (IV) ergibt

$$\sin \xi = \cos \delta \cdot \sin s, \quad \text{(XI) wird zu}$$

$$y^2 \left(\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta\right) + x^2 \left(\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta\right) + x \cdot y \cdot \sin 2\varphi - q^2 \sin^2 \delta = 0.$$

*Abbildung des Äquators* $y \cdot \sin \varphi = - x \cdot \cos \varphi$

$$\frac{y}{-x} = \operatorname{tang} \left(90^0 - \varphi\right) = \operatorname{tang} \mu$$
$$\mu = 90^0 - \varphi,$$

was auch aus (XIII) folgt. Sodann hat man in diesem Falle

$$\varDelta = \sin^2 \delta \cdot \left(\sin^2 \delta - 1\right) = - \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta.$$

Hiernach ist der Kegelschnitt in allen Breiten stets eine Hyperbel.

4. Setzt man endlich $\psi = 90^0$ und $\alpha = 90^0$, so kommt man auf die *Horizontalsonnenuhr.*[1] Aus (IV) wird dann $\sin \xi = \sin h$, aus (XI):

$$x^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) - y^2 \sin^2 \delta + x \cdot q \cdot \sin 2\varphi + q^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta) = 0,$$

$$\Delta = \sin^2 \delta (\sin^2 \delta - \cos^2 \varphi).$$

Daraus folgert man: Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem

$$\begin{aligned} \varphi &> 90^0 - \delta, \\ &= 90^0 - \delta \quad \text{oder} \\ &< 90^0 - \delta \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Wie schon erwähnt, sind Sonnenuhren, bei denen der Zeiger ⊥ zur Uhrebene steht oder parallel zum Horizonte gerichtet ist, spezifisch mohammedanische. Aber ein so gerichteter Gnomon kann die Zeit nicht anders als durch den Endpunkt seines Schattens angeben. Dieser ist durch die Größen $q$, $\xi$ und $\tau$ bestimmt. So müßte eigentlich für jeden Tag des Jahres eine Schattenkurve berechnet werden, und alle diese Kurven würden von den Linien der (gleichen) Stunden durchschnitten, wie im Spinnengewebe von den Radien die spiraligen Fäden.[2] Fiel alsdann der Endpunkt des Gnomonschattens z. B. auf VI, so war Mittag, (ظهر = Zuhr) usw. Die Anfertigung einer mohammedanischen Sonnenuhr erfordert daher mehr Mühe als die Herstellung unserer Polosuhren. Hätten die Araber endlich noch dem Umstand ihrer ungleichen oder Jahreszeitenstunden Rechnung getragen, wonach jeder Lichttag in 12 gleiche Teile geteilt wurde, die Stunde mithin, wie auch bei den Alten, im Sommer lang und im Winter kurz war, so wären die Linien des Zifferblattes noch viel komplizierter geworden. Aber auf den arabischen Sonnenuhren sind auch die temporären Stundenlinien vollkommen gerade gezeichnet[3], was mathematisch nicht richtig ist. Sie sind vielmehr auf der Kugel „sphärische Sinuskurven"; projiziert man sie auf eine Tangentialebene, die den Himmelsglobus im Nordpol berührt, so entsteht die *Ährenkurve* (épi.).[4] Die Stundenlinien einer alten Sonnenuhr

---

[1] Diese Art war bei den Alten schon bekannt, und von den Arabern besonders bevorzugt. Der Zeiger stand immer ⊥ zur Platte. Sie heißt die بسيطة basiṭa (von بسيط basiṭ = ausgebreitet). Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß bei senkrecht stehendem Zeiger für alle Uhren $l = q \cdot \mathrm{cotg}\, \xi$ ist.

[2] Nach J. H. Schaubach, Geschichte der griechischen Astronomie bis auf Eratosthenes (Göttingen 1802) S. 331 war die Arachne des Eudoxus kaum etwas anderes als eine solche Azimutaluhr.

[3] Im 47. Band der Sitzungsberichte (1915) d. physikal.-medizin. Soz. in Erlangen teilt E. Wiedemann in der Abhandlung: „Über die Astronomie nach den „Mafātīḥ al 'Ulūm'" (Schlüssel der Wissenschaften) S. 224 mit, daß die Araber die temporären Stunden auch *krumme* Stunden nannten. (Auf arabischen Astrolabien sind sie deutlich gekrümmt.) Vgl. auch: Journal asiatique 1892, S. 428.

[4] Vgl. H. Michnik, Beiträge usw. S. 6.

schneiden sich nicht in einem Punkte; für die gleichen Stunden dagegen gibt es einen gemeinsamen Schnittpunkt (Projektion des Himmelspols).

Zu den bemerkenswertesten arabischen Sonnenuhren gehören die Basiṭa und der Ostwestvertikal, weil sie beide im Dienste der Religionsübung standen. Da die arabischen Astronomen das Liniennetz der Sonnenuhr gewöhnlich auf einer Marmorplatte verzeichneten, so hieß die Sonnenuhr bei den Arabern schlechtweg رخامة = ruchâmat (Marmorplatte). Auf jeder Basiṭa waren außerdem noch die Linie der Qibla, (قبلة) d. i. die Richtung zur Ka'ba (كعبة) in Mekka, und die Linie des 'Aṣr (عصر) oder des Nachmittagsgebetes eingetragen. Wenn der Schatten des senkrechten Zeigers die Qibla bedeckte, so gab der bei der Basiṭa und Moschee amtlich angestellte Stundensager oder Zeitverkündiger, der Muwaqqit, (موقّت, von وقت = waqt, Zeit) diesen Moment durch Ausruf bekannt, wodurch jeder Bewohner des Ortes in der Lage war, sich seine Qibla mittels des eigenen Schattens festzusetzen. Das 'Aṣr beginnt in dem Augenblick des Nachmittags, wenn auf der Basiṭa der Horizontalschatten gleich dem Mittagsschatten, vermehrt um die Länge $q$ des Gnomons ist. Er endigt, wenn der Gnomonschatten um die doppelte Höhe $2q$ des Gnomons länger ist als der Mittagsschatten. Konstruiert man die solchergestalt bestimmten Punkte für das ganze Jahr, so erhält man zwiebelförmige Kurven, die sehr verwickelten Gleichungen genügen. Das 'Aṣr beginnt in den Breiten der arabischen Lande zwischen 3 und 4 Uhr temporärer Zeit und endigt zwischen 4 und 5 Uhr. Der Kairinische Astronom Ibn Jûnus endlich bestimmte den Eintritt des 'Aṣr mittels des Ostwestvertikals. Es sollte dann beginnen, wenn der Schatten des Miqjâs diesem an Länge gerade gleich ist. Dann ist $\sphericalangle \xi = 45^0$ und folglich $\sin s = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \cos \delta}$. Für $\delta = 0^0$ wird $s = 45^0$ (3 Uhr p. m.), für $\delta = 23\frac{1}{2}^0$ aber tritt das 'Aṣr um $3^h\,20^m$ ein; sein Beginn würde also nach *temporärer* Zeit in mittleren Breiten fast immer auf die 3. Stunde fallen.

*Overgedrukt uit: „De Zee" No. 10, jaargang 1920.*

# Abhandlung des Ḥasan ben al-Ḥusain ben al-Haiṯam über eine Methode, die Polhöhe mit grösster Genauigkeit zu bestimmen.

Aus dem Arabischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen von Dr. phil. nat. et rer. techn. *Carl Schoy*, Privatdocent für Geschichte der Geographie und Astronomie an der Universität zu Bonn, in Essen a. d. R.

Seit Jahren mit Studien über die Geschichte der geographischen Ortsbestimmung beschäftigt, ist es mein Bestreben tunlichst aus primären Quellen Methoden des Ortsbestimmungsproblems ausfindig zu machen, die bis jetzt noch keine Beachtung gefunden haben. Und in dieser Hinsicht scheint die Durchforschung arabisch-astronomischer Handschriften ein dankbares Unternehmen zu sein. So bin ich bei Durchsicht einzelner Teile der grossen *Ḥâkemitischen Tafeln* des *Ibn Yûnus*, einem der bedeutendsten Werke arabischer Astronomie, von dem das *Legatum Warnerianum zu Leiden* die ersten 22 Kapitel als Mscr. No. 143 bewahrt, bereits auf mehrere Methoden zur Bestimmung der geographischen Breite geführt worden, nach welchen der Astronom *Ibn Yûnus* (+ 1009) für seinen Wohnort Kairo die auffallend genaue Ortsbreite $\varphi = 30^\circ\ 3'$ fand. [1] Besonders interessiert dabei das Verfahren, die Breite aus der Sonnenhöhe im Ostwest-Vertikal zu finden, dessen Anwendung man bekanntlich einer sehr viel späteren Zeit zuschreibt. Doch davon werde ich ein anderes Mal berichten. Hier interessiert uns eine kurze Abhandlung des arabischen Astronomen, Mathematikers und Naturforschers *Ibn al-Haiṯam*, bekannt unter dem Namen *Alhazen* (* 965 in Basra + 1039 in Kairo). Über das Leben dieses trefflichen Ge-

---

[1] Baedekers „Ägypten", Leipzig, 1913, gibt S. 39 für Kairo den Wert $\varphi = 30^\circ 4'$.

lehrten mag man bei H. Suter [1]) nachsehen und über seine zahlreichen Schriften besonders bei F. Woepcke. [2]) Wegen des vorstehenden Traktates habe ich mich an Herrn Dr. C. van Arendonk in Leiden gewandt, der sich in entgegenkommendster Weise die Mühe genommen hat, für meinen Gebrauch eine Abschrift der Leidener Handschrift zu machen (Catalogus cod. orient bibl. acad. Lugd. Batav. auctore R. Dozy, P. de Jong et M. J. de Goeje, Leiden, 1851—1877, III, 94 = Hdschr. Leiden, 14, XI, p. 246—254) Ich möchte dafür Herrn Dr. van Arendonk auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Zum leichteren Verständnis der Übersetzung selbst seien hier erst einige Bemerkungen voraus geschickt: Ibn al-Haitam empfiehlt, sich zur genauen Ermittlung der Polhöhe eines hellen Fixsterns zu bedienen, der in seiner oberen Culmination gerade zum Zenit gelangt oder wenigstens nahe an dasselbe herankommt. Der erste Fall ist wohl ein idealer. In grosser Zenitnähe des Fixsterns sollen dann 2 sog. correspondierende Höhen desselben auf der Ost- und Westhälfte genommen werden, was mittels des Astrolabs geschieht. Ibn al-Haitam will damit der Refraktion aus dem Wege gehen, die in geringerer Erhebung des Gestirns über den Horizont einen merklichen Fehler in der Gestirnshöhe hervorbringt; denn er sagt ausdrücklich, dass die Lichtstrahlen an der Basis des Himmelsgewölbes gekrümmt seien. Die Zeit, die vergeht, bis der Fixstern von der östlichen Höhe über das Zenit oder die obere Culmination gegangen ist und eine ebenso grosse westliche Höhe erreicht hat, wird auf das Genaueste mit einer Wasseruhr gemessen. Aus der ausführlichen Anleitung, wie dieses Zeitmesswerk zu handhaben sei, erkennt man die grosse Vertrautheit unseres Gelehrten mit den Clepsydren. [3]) Sie hiessen bei den Arabern „binkâmât",

---

[1]) Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, Leipzig, 1900, S. 91 ff.

[2]) L'algèbre d'omar Alkhayyâmi, Paris, 1851, pag. 73 ff.

[3]) Nach Woepcke (a. a. O. pag. 76) hat al-Haitam auch eine Abhandlung über Wasseruhren geschrieben.

(Singular: binkâm) was auch Sand- oder Räderuhren bedeuten kann.[1]) Wenn nun der betrachtete Fixstern bei seiner oberen Culmination nicht in das Zenit kommt, so wird seine obere Culminationshöhe $= \eta$ gemessen. Ferner seien in beiden Fällen die correspondierenden Höhen $= h$, und der östliche und westliche Stundenwinkel sei $= s$. Für den ersten Fall ist die Ortsbreite bekanntlich der Deklination $\delta$ des Sterns gleich. Dann also wird $\varphi$ für einen Zenitalstern aus h und s, für einen beliebigen Stern aus h, s und $\eta$ gewonnen. Wir sind gewohnt bei derartigen Aufgaben uns des Cosinus-Satzes der sphärischen Trigonometrie zu bedienen, den wir auf das sog. Astronomische Dreieck: Zenit — Pol — Stern anwenden. Es folgt dann für einen beliebigen Stern:

$$\sin h = \sin \delta . \sin \varphi + \cos \delta . \cos \varphi . \cos s \quad . \ . \ . \quad \mathrm{I})$$

Da aber ausserdem

$$\eta = 90^{0} - \varphi + \delta$$

ist, so kann man in I) $\delta$ durch $(\eta + \varphi - 90^{0})$ ersetzen und es bleibt nur die eine Unbekannte $\varphi$ übrig. Ist dann noch in dem Spezialfalle, wo der Stern durch des Zenit geht, $\delta = \varphi$, schreibt sich I) einfacher:

$$\sin h = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi . \cos s \quad . \ . \ . \ . \quad \mathrm{II})$$

Allein die Araber kannten den Cosinus—Satz nicht in seiner fertigen Gestalt,[2]) sondern lösten die sich ihnen darbietenden Aufgaben der sphärischen Astronomie meist rein geometrisch (mit der sog. Projektionsmethode) auf, wie dies auch unser Autor in sehr origineller Weise im vorliegenden Falle tut. Die Lösung Ibn al-Haitams durch eine planimetrische Konstruktion gibt trefflichen Übungsstoff für den Unterricht in der mathematischen Geographie.

## Übersetzung.

pag. 246 „Im Namen Gottes, des mitleidigen Erbarmers!

---

[1]) Vgl. zu den arab. Wasseruhren Eilhard Wiedemann, Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften III, Erlangen, 1905 (Sitzungsbericht d. Physikal-Medicin. Societät, Bd. 17) S. 255 ff.

[2]) Er tritt erst bei *Regiomontan* auf (Vergl. A. von Braunmühl: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, I Teil, Leipzig, 1900, S. 130).

Abhandlung des Ḥasan ben al-Ḥusain ben al-Haitam über die möglichst genaue Bestimmung der Polhöhe. Es gibt keine astronomischen Wahrheiten, die nicht durch die Beobachtungen erschlossen worden sind und wobei nicht die Kenntnis der Polhöhe des Beobachtungsortes erforderlich wäre. Aber die Auffindung der Bewegungen am Himmel ist nur mit den Instrumenten vollkommen möglich, nach genauer Bestimmung ihrer Lage zum Horizont, aber man kann die genau richtige Position des Instrumentes bezüglich des Horizontes nur erreichen mittels einer genauen Kenntnis der Polhöhe. Schon die Alten und auch die Späteren haben die Erhebung des Pols durch die Sonnenhöhe oder die Höhe der Fixsterne bestimmt, doch ist keine ihrer Bestimmungen mehr als ein merklich guter Näherungswert inbetreff der Genauigkeit der Polhöhe, und das kommt daher, dass die Stelle der Sonne in der Ekliptik bis zu unserer Zeit nicht ganz genau angegeben werden kann; weil die Dauer eines Jahres bisher nicht mit ganzer Schärfe festgesetzt worden ist. Auch die Örter der Fixsterne sind nicht allzu genau bestimmt, weil die Leute dieser Kunst von einander abweichen hinsichtlich der Grösse ihres Eifers. (der Art ihres Verfahrens) Und sie halten dafür, dass die Lichtstrahlen von der Sonne und den Sternen, sowie die Gesichtslinien geradlinig zwischen Sonne und Mittelpunkt des Instruments, Stern und Mittelpunkt des Instruments und zwischen Gesicht und Sternen verlaufen. Aber die Sache verhält sich nicht so, und schon Ptolemaeus hat sich in diesem Sinne in der fünften Abhandlung seines Buches über die Optik ausgesprochen. Er sagt nämlich, dass es klar sei, dass die Gesichtslinie, falls sie sich bis zum Gestirn erstreckt, bei der Basis des Himmelsgewölbes gekrümmt sei [1]) und keinesfalls geradlinig verlaufe, und es folge dies mit Notwendigkeit und würde besonders deutlich beim Sonnenstrahl, was besagt, dass der Sonnenstrahl, wenn er von der Sonne bis zur Erde geht, an der Basis des Firmaments gebogen wird, und falls die Strahlen

---

[1]) Ich denke, dass das arabische maq'ad („Basis") hier mit „horizontnah" übersetzt werden kann.

gebogen sind, so endigen sie nicht geradlinig, und damit kommt die Höhe des Pols nicht sehr genau heraus.

Da wir aber ein weitgehendes Interesse an der Sache haben, so haben wir einen Weg für die Ermittlung der Polhöhe gefunden, der, falls er beschritten wird, ein ausserordentlichgenaues Resultat für die Höhe des Poles liefert, und wir treten in dieser Abhandlung auf ihn ein, und dies ist der Zeitpunkt wo wir damit beginnen, und wir sagen in ihr, dass der Weg dazu der ist, dass wir die Fixsterne in Betracht ziehen, und wenn sich unter ihnen ein sehr grosser gefunden hat, so sei es ein Stern, der sich nicht entzündet und sich nicht verändert. [1]) Und er geht durch das Zenit, wessentwegen er (scheitelrecht) über dem verlangten Horizont sein wird, und die Ermittlung der Polhöhe stützt sich auf diesen Stern. Und wenn sich kein Stern pag. 247 findet, der durch das Zenit geht, so hält man sich an einen von den grössten Fixsternen oder einen von nicht geringer Grösse, der nahe dem Zenit ist und näher dem Zenit als alle anderen sehr grossen Sterne, in der Zeit, wo er (in der oberen Culmination) den Meridian passiert, d. i. in der Zeit, da die Polhöhe genommen wird, weil nicht jeder Stern durch das Zenit geht oder demselben nahekommt, und es sich nicht jede Nacht ereignet, dass ein Stern den Meridian passiert. Und wenn die Bestimmung der Polhöhe mit einem der Fixsterne erfolgt, so stützen wir uns bei der Durchführung dieser Aufgabe auf einen fehlerlosen binkâm, und er soll eine von den Wasseruhren sein, die für 12, oder für nicht weniger als 6 Stunden konstruiert sind, und seine Stunden werden in Teile geteilt sein, und wenn man an einem binkâm für die (in Betracht kommende) Zeit keine Einteilung der Stunden in Teile (Grade) findet, so stützt man sich auf einen anders geteilten binkâm und fixiert und

---

[1]) Da ich nicht sicher bin, ob damit ein Planet gemeint ist, der sich also durch Beleuchtung mit Sonnenlicht erst „entzündet", so habe ich ganz wörtlich übersetzt: Die 8. Form von „schab," (angezündet werden, brennen) die der Autor gebraucht, findet sich im Wörterbuch nicht angeführt.

teilt seine Stunden in die Teile, und man erhält die Teile der Stunden, und es wird dies mittels der Höhe der Sonne oder der Fixsterne erreicht, und wenn einer dieser Teile sehr nahe bei dem Zeitpunkt liegt, der durch eine Position der Sonne gegeben ist, so gibt es keinen (besonderen) Teilstrich unter diesen Teilen, Und wenn die Stunden des binkâms in die Teile eingeteilt sind, so zählen wir im rechten Augenblick den binkâm und beobachten den Stern; es wird nach ihm visiert und seine Höhe gefunden. Sie sei auf der Osthälfte, nahe der Mitte des Himmels, und es wird angenommen, dass er bis zur Mitte des Himmels gelangt, und seine Höhe wird mit dem fehlerlosen Instrument gefunden und festgestellt am Zeiger des Instrumentes beim äussersten (letzten) seiner Teile, welches Teile der Höhe sind, und es mögen die Höhenteile genau richtig sein, und falls die Höhe des Sterns einwandfrei auf der Osthälfte bestimmt worden ist, wird sie wohl im Gedächtnis behalten, und sie bleibt in diesem Zustand, in dem sie constatiert wurde. Wir setzen den binkâm auf Wasser und überlassen ihn sich selbst Dann beobachten wir ihn und tun etwas Pech (Harz) in ein Gefäss von Erz (Kupfer), und dies wird auf das Feuer gesetzt. Und es wird in das Gefäss ein dünnes Säulchen (Stift) gestellt, und seine Spitze wird in dem Harz stecken. Darauf wird der Stern anvisiert, bis dass er die Mitte des Himmels passiert hat und sich zur Westseite wendet, und wenn der Stern sich gen Westen neigt, wird von Zeit zu Zeit seine Höhe genommen, bis dass sie der östlichen Höhe gleichkommt, die sich ergeben hatte. Und die Art und Weise, die westliche Höhe zu gewinnen ist die, dass die Höhe mit dem Astrolabium genommen wird, das du an deinem Daumen aufhängst, und innerhalb zweier Löcher ist die ʻIdâde des Astrolabs, [1]) die durch einen Gefährten
pag. 248 (Gehilfen) hin-und herbewegt wird, und es wird durch die

---

[1]) Die ʻIdâde (Alhidade) ist ein drehbares Lineal, das über einer Gradeinteilung seine zugespitzen Zeiger (Mûri) spielen lässt. Vgl. L. Am. Sédillot: »Memoire sur les instruments astronomiques des Arabes",

Löcher der Absehen nach dem Stern visiert, und lang ist der Blick. Und jedesmal, wenn sich der Stern aus der Öffnung hinaus bewegt hat, folgt eine Bewegung der ‘Iḍâde, bis dass der Stern wieder sichtbar ist, und das wiederholt sich auf diese Weise beständig, und nie ist der Durchblick nach dem Stern unterbrochen, und es bedient einer den Zeiger der ‘Iḍâde, einer blickt, durch das Visier nach dem Stern, ein anderer beobachtet den binkâm und einer endlich hat auf alles Acht, damit diese Methode restlos verwirklicht wird. Zu dem Zeitpunkt, in welchem das gemacht wird, ist der Stern im ersten Grad der Höhe, der Beobachter am Duschblick des Visiers, den Blick hinwendend. Dann blickt er wiederholt nach ihm, und nicht ergibt es sich für ihn aufs Erste, dass der Stern sich im ersten Grad der Höhe zeigt; es sagt nun der Beobachter, der zum Stern blickt, (dass es eingetreten sei) und dann ist es auch an der Zeit, dass der Beobachter des binkâm den Abschluss des Wassers vom binkâm genau weiss, da der Beobachter des Sterns sich vernehmen lässt, d.h., wenn der Beobachter des Sterns sich vernehmen lässt, weiss derjenige, der den binkâm bedient, genau, wie es um diesen steht, d.h. er weiss, bis zu welcher Stelle am binkâm das Wasser gelangt ist, und er macht mit der Spitze des Stiftes, der ins Harz getaucht ward, ein Zeichen. Wenn das Harz sich erhärtet hat, bleibt es in diesem Zustand und hält an der Stelle fest. Und wenn dies gemacht ist, hebt man den binkâm auf und giesst das Wasser aus, das ihn erfüllte, und beobachtet aufmerksam' die Stunde, bis zu der das Wasser gelangte; die äusserste Linie ist das massgebende Niveau am Instsument, und wenn es sich um einen Bruchteil handelt, so schätze man ihn äusserst genau ab, was mit grosser Präcision möglich ist. Und falls diese Stunden resultierten, so sieht man zu; und wenn der Stern durch das Zenit gegangen ist, setzt man die Stunden fest, die als Teile aus

---

Paris, 1841; (besonders Fig. 47) und E. Wiedemann: Beiträge etc., XVII und XVIII, 1909 S. 35—43.

dem binkâm hervorgehen, ich meine so, dass auf jede Stunde desselben 15 Teile (Grade) kommen; und Bruchteile mache zu Minuten und zähle sie zu den ganzen Teilen. Darauf nimmt man die Hälfte dieser Teile und geht mit ihnen in die Sinustafel ein, und es ergibt sich auch der Sinus versus; (der Hälfte der Teile) er ist das, was man umgekehrten Sinus nennt. Dann wird der Sinus versus von 120 abgezogen, und was übrig bleibt, wird wohl gemerkt. Hierauf wird der Sinus versus der kleinen Ergänzung der Höhe genommen und mit dem was im Gedächtnis behalten wurde, multipliziert; das Produkt wird durch den Sinus versus des Bogens der Stunden geteilt, und das Ergebnis zum Sinus versus der kleinen Ergänzung der Höhe hinzugezählt, die Summe von 120 abgezogen, und was bleibt, mit dem, was abgezogen ward, multipliziert. Aus diesem Resultat wird die Quadratwurzel gezogen, und mit dem, was sich durch die Radizierung ergab, in die Sinustafel eingegangen, dazu der Bogen gesucht, von dem Bogen, der sich fand, die Hälfte genommen, und sie ist die Polhöhe im Übermass
pag. 249 der Genauigkeit."

Es möge an dieser Stelle der Text des Autors durch eine kurze Esläuterung unterbrochen werden. Es ist in dem Falle, dass der Stern ins Zenit kommt, nach unserer eingangs aufgeschriebenen Formel II)

$$\sin h = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos s.$$

Hieraus zieht man

$$\sin h = \sin^2 \varphi + (1 - \sin^2 \varphi) \cos s$$
$$= \cos s + \sin^2 \varphi (1 - \cos s)$$

d. i. $$\sin^2 \varphi = \frac{\sin h - \cos s}{1 - \cos s} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

ferner ist

$$\sin h = 1 - \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos s = 1 + \cos^2 \varphi (\cos s - 1),$$

oder $$\cos^2 \varphi = \frac{1 - \sin h}{1 - \cos s} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Multipliziert man 1) mit 2) und das Produkt dann noch mit 4, so hat man

$$4.\sin^2\varphi\cos^2\varphi = \sin^2 2\varphi = 4.\frac{\sin h - \cos s}{1 - \cos s}.\frac{1 - \sin h}{1 - \cos s} \quad . \quad . \quad 3)$$

Auf dieselbe Formel 3) muss die Vorschrift Ibn al-Haitams führen, falls sie richtig ist. Nach ihm ist zuerst sin vers s zu bilden; d.h. 1 — cos s. Beachtet man, dass der Kreisdurchmesser in der ältesten Trigonometrie in 120 Teile (partes) geteilt war, so ist $120^p = 2\,r = 2$, falls man den Radius des Kreises = 1 setzt. Es ist nach Vorschrift 1 — cos s von $120^p = 2$ abzuziehen, was 1 + cos s gibt. Dieser Ausdruck ist mit sin vers $(90^0 - h) = 1 - \cos\ (90^0 - h) = 1 - \sin h$ zu multiplizieren und durch sin vers $s = 1 - \cos s$ zu dividieren, was

$$= \frac{(1 + \cos s)\,(1 - \sin h)}{1 - \cos s}$$

gibt. Dazu ist sin vers $(90^0 - h) = 1 - \sin h$ zu addieren, womit man

$$2.\frac{1 - \sin h}{1 - \cos s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

erhält, wenn man beide Summanden auf den Nenner 1 — cos s bringt. Den Ausdruck 4) von $120^p = 2\,r = 2$ abgezogen, bleibt

$$2.\frac{\sin h - \cos s}{1 - \cos s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Multipliziert man jetzt die beiden Termini 4) und 5) miteinander, so folgt

$$4 \cdot \frac{\sin h - \cos s}{1 - \cos s} \cdot \frac{1 - \sin h}{1 - \cos s},$$

und dies ist nach 3) = $\sin.^2 2\,\varphi$, q. e. d.

„Und wir weisen die Richtigkeit dieser Darlegungen durch den (geometrischen) Beweis nach, nachdem wir noch den Fall betrachten, dass der Stern nicht durch das Zenit geht, und wenn er nicht durch das Zenit geht, stellen wir seine Höhe in der Weise fest, wie wir es eben sahen, und es ergeben sich mittels des binkâms die Stunden, und wenn die Stunden bekannt sind, wird für die Berechnung ihre Hälfte genommen und des Ende der Hälfte genau mit Harz markiert, und falls es in der zweiten Nacht ist, beobachtet man diesen Stern und nimmt seine augenblickliche Höhe, und so die Höhe von Zeit zu Zeit, bis dass seine Höhe derjenigen der ersten Nacht gleich ist, und während der Zeit, bis diese Höhengleichheit eintritt, setzt man den binkâm in Wasser und überlässt ihm die weitere Function. Und es wird die Höhe des Sterns von Zeit zu Zeit mit dem Astrolabium genommen. Ein Gefährte ist am binkâm, und keinen Augenblick ist der Blick nach dem Wasser unterbrochen, und wenn das Wasser bis zu der Marke reicht, die die Hälfte der Stunden des binkâms bezeichnet, so gibt dies der Wärter des binkâms bekannt, und der Beobachter, der zum Stern blickt, lässt diesen nicht aus den Augen, und der Beobachter des Zeigers blickt unverwandt zur ʻIdâde, und wenn der Wärter des binkâms zu rufen beginnt, kennt der Beobachter des Zeigers genau die Lage seiner Spitze, welche die obere Culminationshöhe des Sterns angibt, und wenn nun diese Höhe bestimmt ist, so ist sie die erste Höhe, ich meine jene, welche in der ersten Nacht erhalten wurde. Es werden die Stunden des binkâms zu Teilen (Graden) gemacht, ich meine die Hälfte der Stunden. Nun geht man mit den Teilen der Häfte in die Sinustafel ein, nimmt den Sinus und erhält damit auch den Sinus versus, den man von $120^{p}$ abzieht Was übrig bleibt, multipliziert man mit dem, was man abzog, aus dem Ergebnis zieht man die Quadratwurzel, und mit dem, was man durch die Radizierung erhielt, geht man in die Sinustafel ein und sucht den zugehörigen Bogen. Zu diesem Bogen zählt man die Ergänzung der zweiten Höhe, d. i. der oberen Culminationshöhe, hinzu; vom Ergebnis nimmt man die Hälfte, und sie ist die Polhöhe im Übermass der Genauigkeit.

Zur Vollendung des Ganzen und zum Beweis der Richtigkeit, folgt jetzt der geometrische Beweis.[1] Dazu sei ABCO

---

pag. 250 [1] Die 2 Figuren der Handschrift sind wenig correct; die Buchstaben derselben stimmen teilweise nicht mit dem Text überein, oder es fehlen in den Figuren überhaupt Buchstaben, von denen im Text die Rede ist. Ich habe die nötigen Besserungen gleich in der Übersetzung durchgeführt und Buchstaben des arab. Alphabets, die im Deutschen fehlen, durch andere ersetzt.

der Meridian und C das Zenit, und es sei der Azimutkreis, in welchem die östliche Höhe ¹) genommen wird, CKT; der Ort des Sterns ist Punkt R, und es möge der Stern, wie wir an erster Stelle sagten, durch das Zenit gehen; es sei der Zeitkreis, (Parallelkreis) auf dem sich der Stern bewegt, Kreis CRGK, und der Parallelkreis zum Horizont, in welchem der Stern im Augenblick der Beobachtung steht, sei Kreis RNKQ und es sei der gemeinschaftliche Schnitt dieses Kreises mit dem Meridian die Linie NQ, und es sei der gemeinschaftliche Schnitt zwischen diesem Kreis und dem Zeitkreis, auf dem sich der Stern bewegt, die Linie RK, und Punkt K ist der Ort des Sterns zur Zeit seiner westlichen Höhe, weil die Höhe des Punktes R der Höhe des Punktes K gleich ist. Und es schneiden sich die zwei Linien NQ und RK, weil sie in ein und derselben

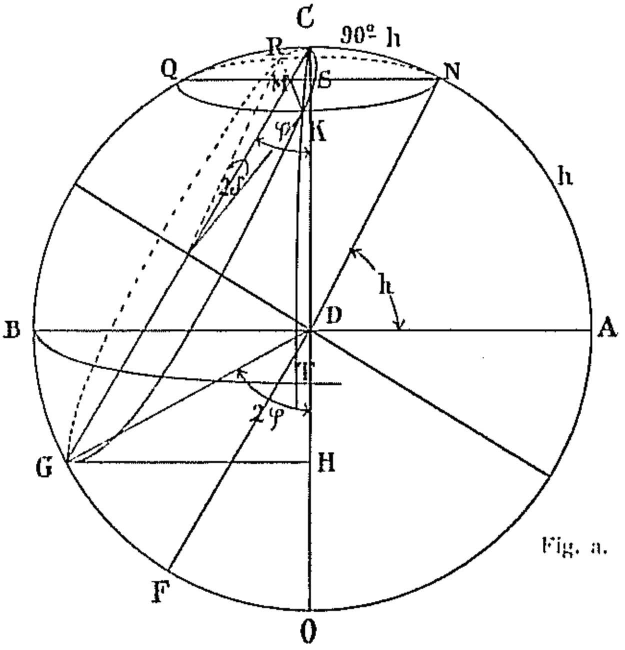


Fig. a.

---

[1] An unserer Figur die westliche. Beim Autor heisst es entsprechend: CRT.

Fläche, nämlich dem Kreis RNKQ liegen; und weil ferner Linie NQ in der Ebene des Meridians liegt, so ist sie gemeinschaftlicher Teil zwischen Kreis RNKQ und Kreis ABCO; aber die Punkte R und K, welche die Enden der Linie RK sind, liegen abseits (weg) vom Meridian, und es sei M der Durchschnittspunkt. Und weil der Zeitkreis $\perp$ zum Meridian, und der Parallel zum Horizont auch $\perp$ zum Meridian steht, so ist Linie RM. — und sie ist als gemeinsamen Durchschnitt dieser beiden Kreise $\perp$ zum Meridian — auch $\perp$ zur Linie NQ, weil NQ — und sie ist der gemeinsame Teil zwischen Kreis RNKQ und Meridian — der Durchmesser des Kreises RNK ist. Sie wird in Punkt M in 2 Teile (Hälften) geteilt. Und es sei der gemeinschaftliche Durchschnitt zwischen Zeitkreis und Meridian die Linie CG; sie ist der Durchmesser des Zeitkreises, weil der Meridian den letzteren in 2 Hälften teilt, und weil der Zeitkreis $\perp$ zum Meridian ist, und auch Linie RM$\perp$ zum Meridian steht, wird Linie RM$\perp$ zum gemeinschaftlichen Durchschnitt, d.h. Linie RM$\perp$ zu Linie CG sein, die der Durchmesser des Zeitkreises ist, und die Linie pag. 251 RM ist der Sinus des Bogens RC, und Linie MC der Pfeil des Bogens RCK, letzterer in Zeitteilen, die sich aus dem binkâm ergeben, weil die Zeit, während der er in Tätigkeit ist, von der ersten Höhe des Sterns bis zur Zeit seiner zweiten Höhe geht, und es wird Bogen RC = $^1/_2$ Bogen RCK sein. Bogen RC ist aber bekannt, daher auch sein Sinus und sein Sinus versus. Der Mittelpunkt der Welt ist D. Man zieht durch ihn die Linien ADB und DC; letztere wird $\perp$AB sein und NQ in S schneiden; auch verbinden wir D mit O und ziehen GH // AB; dann wird GH auch $\perp$CO sein. Ferner ziehen wir durch D die Linie DF // CG, und es ist DF der Halbmesser des Äquators, und weil Kreis NKQR // dem Hoirzont ist, ist Linie NQ // AB, somit auch // GH, und nun ist

$$\frac{CS}{SH} = \frac{CM}{MG}\ \text{[1]}$$

---

[1] Ich schreibe die Proportionen in moderner Ausdrucksweise, auch das Wort senkrecht oder parallel. Die Araber hatten ebenso wenig wie die Alten, eine abkürzende Formelsprache.

Es ist aber klar, das CM bekannt ist, und zwar bekannt mit seinem Grössenbetrag, da CG = $120^p$ ist. Und wenn man CM von $120^p$ abzieht, ist auch MG bekannt, und es ist also:

$$\frac{CM}{MG} \text{ bekannt und } = \frac{CS}{SH}, \text{ d.h.}$$

es ist auch $\frac{CS}{SH}$ bekannt. Und es ist weiterhin CS bekannt, weil es der Sinus versus des Bogens QC ist, d. i. der kleinen Ergänzung der Höhe, und es ist damit auch SH bekannt, denn wenn man CS mit der Zahl der Teile MG multipliziert und das Produkt durch die Zahl der Teile MC dividiert, folgt als Ergebnis SH, und durch Addition von CS und SH folgt CH, und wenn man dies von $120^p$ subtrahiert, erhält man HO. Multipliziert man endlich HO mit CH und zieht aus dem Produkt die Wurzel, so ist das Resultat der Radizierung die Linie GH; d. i. der Sinus des Bogens GO, und falls man mit den Teilen der Linie GH in die Sinustafel eingeht, und den Bogen bestimmt, so ist es Bogen GO, und dieser pag. 252 Bogen wird auch durch den Peripheriewinkel GCH gespannt, welcher gleich ist dem Winkel GDF. Letzterer ist ein Zentriwinkel, und Winkel GCH ist als Peripheriewinkel über dem Bogen GO die Hälfte von dem Zentriwinkel über GO. Da nun aber FD // GC und gleich dem Halbmesser des Äquators ist, so ist Bogen $GO = 2\,\varphi$ und $OF = {}^1/_2\, OG = {}^1/_2\, 2\,\varphi = \varphi =$ der Höhe des Pols, und des ist es, was wir an dieser Figur beweisen wollten."

Wir würden auf viel kürzerem Wege als der Autor zum Ziele kommen. Mit Kenntnis von CH und HO ergibt sich bekanntlich sofort

$$GH^2 = CH\,.\,HO.$$

Nun ist aber (nach Figur)

$$\frac{1 - \cos s}{1 - \sin h} = \frac{2}{CH}, \qquad \text{mithin}$$

$$CH = 2\,\frac{1 - \sin h}{1 - \cos s}, \quad \text{und danach}$$

$$HO = 2 - 2\,\frac{1 - \sin h}{1 - \cos s} \qquad 2\,\frac{\sin h - \cos s}{1 - \cos s}$$

Daraus folgt $GH^2 = 4 \cdot \frac{(1 - \sin h)\ (\sin h - \cos s)}{(1 - \cos s)^2}$,
d. h. die Richtigkeit des Haitam'schen Beweises.

Der Autor fährt fort- „Und wenn der Stern nicht durch das Zenit geht, so sehen wir in der Figur auf das, was sie von der ersten unterscheidet: das ist der Zeitkreis, und wir lassen ihn den Meridian unterhalb des Zenits im Punkte U schneiden und stellen fest, wie wir es vorher taten, dass Linie RM ⊥ Linie NQ sei und ⊥ Linie MQ, und es ist ferner klar, dass Linie MU der Sinus versus des Bogens RU ist, und klar, dass MU bekannt ist und ebenso MG, also auch ihr Verhältnis zu einander, und wir ziehen durch Punkt U die Linie UIE // der Linie NQ, und es ist Linie CI der Pfeil des Bogens UCE, der das Doppelte des Bogens UC ist, der die Ergänzung der oberen Culminationshöhe ($\eta$) darstellt, und es wird Linie CI bekannt sein, ebenso Strecke CS, weil sie der Pfeil des Bogens NCQ ist; dessen Hälfte die Ergänzung

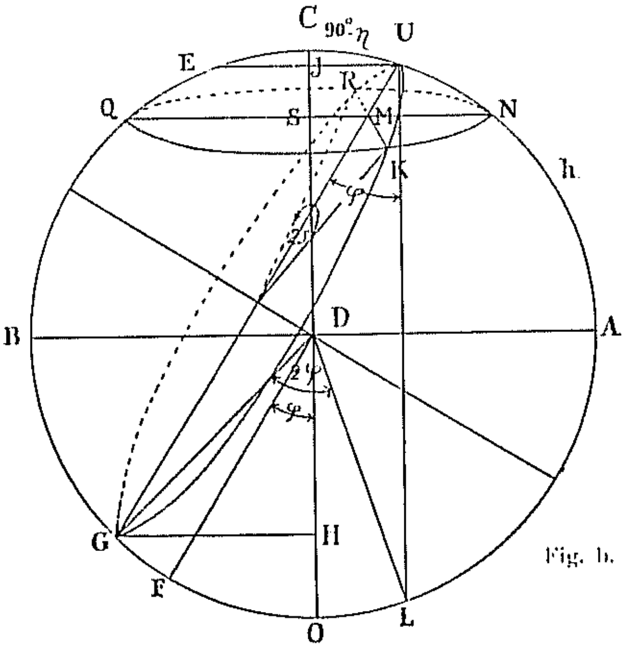


Fig. b.

der östlichen und westlichen Höhe ist, und wenn man den Sinus versus der Ergänzung der Culminationshöhe vom Sinus versus der Ergänzung der östlichen Höhe abzieht, so ist das, was übrig bleibt, bekannt und = Strecke IS, und es ist

$$\frac{IS}{SH} = \frac{MU}{MG} = \text{bekannt},$$

und es ist hiemit SH bekannt $\left(= \frac{IS\,.\,MG}{MU}\right)$, und wenn man SH zu CS addiert, ist die Summe = CH = bekannt, und wenn man CH von $120^p$ subtrahiert, so ist der Rest bekannt und = HO. Dies multipliziert man mit CH, so ist das pag. 253 Product (CH . HO) gleich dem Quadrat über GH (= $GH^2$), und dies (GH) ist der Sinus des Bogens OG; wir ziehen durch U zu CO die Parallele UL, und es ist Bogen UC = Bogen LO, was gleich ist der Ergänzung der oberen Culminationshöhe, und wenn wir Bogen LO zu Bogen GO addieren, erhalten wir Bogen GL. Da CO // UL und DF // UG, so ist Winkel ODF = Winkel LUG, also Bogen OF = $^1/_2$ Bogen GL, und dies ist die Höhe des Pols, weil FD der Halbmesser des Äquators ist, und es ist klar durch diesen Beweis, dass dies zweite Verfahren, dem wir seinen Kommentar vorausschickten, zu einer grossen Genauigkeit der Polhöhe führt und dies ist es, was wir mit dieser Figur beweisen wollten. Und dies Verfahren, welches wir kommentierten, führt zu einem Resultat bezüglich der Polhöhe, das im Übermass genau ist. Und Bedingung ist, dass die Höhen, deren wir Erwähnung taten, nahe dem Zenit sind, und dass die Sehstrahlen, die vom Gesicht bis zum Stern reichen, nicht merklich gekrümmt sind. Wenn der Stern im Zenit steht, sind die Linien sehr gerade, wenn er in der Nähe des Zenits in der östlichen und westlichen Höhe und in der Culminationshöhe steht, gibt es für die Linien keine merkliche Krümmung bei dieser Stelle des Sterns. Und da der Stundenwinkel, der mit dem binkâm herausgebracht wird, nicht für die Kenntnis des Gestirnsortes verwendet wird, so sind die Stunden, welche durch den binkâm gemessen werden, sehr genau, aber die Stunden, welche aus der Höhe und dem Ort des Sterns herausgebracht werden, dienen zur Berechnung und zum Ort des Sterns. und wenn der Ort des Sterns fälschlich anders angenommen wird, ist die Zeit, welche mittels der Rechnung aus der Höhe des Sterns abgeleitet wird, nicht genau und gründlich sicher. Und dies, was wir eben dartaten, ist die Methode zur Erlangung einer sehr genauen Kenntnis der Polhöhe. Und was wir in dieser Abhandlung darzutun beabsichtigten, ist erschöpft, und Lob sei Allah, dem Herrn der Welten, und Erbarmen über (unseren Herrn) Mohammed, und ein Gott aller!"

# Das 20. Kapitel der großen Ḥâkemitischen Tafeln des Ibn Jûnis: „Über die Berechnung des Azimuts aus der Höhe und der Höhe aus dem Azimut“.

Zu Herrn Geheimrat Hermann Wagners 80. Geburtstag übersetzt und erläutert von C. Schoy, Essen.

Ibn Jûnis, einer der größten arabischen Astronomen, lebte am Hofe des Chalifen El-Ḥâkem zu Kairo gegen das Jahr 1000 n. Chr. (+ 1009). Sein groß angelegtes astronomisches Tafelwerk benannte er nach seinem Gönner, dem Chalifen El-Ḥâkem. Leider ist es nicht vollständig erhalten; die ersten 22. Kapitel finden sich zu Leiden, (Legatum Warnerianum) andere Teile in Oxford. Das ganze Werk umfaßt 81 Kapitel. Seit längerer Zeit mit dem Studium einzelner Kapitel beschäftigt, fand ich das oben genannte 20. recht lehrreich und habe es deshalb vollständig übersetzt; das anscheinend oft ganz originelle Werk ist bis auf drei Kapitel (III bis V übersetzt von Caussin de Perceval und abgedruckt in t. VII der Notices et Extraits d. Mss. d. l. Bibl. Nat. p. 16—240) dem des Arabischen nicht Kundigen noch immer unzugänglich. Ich hoffe im Laufe der Zeit eine Anzahl Kapitel verdeutschen und erläutern zu können, wie vorstehendes, das erste Ergebnis meiner arabischen Studien. Es folgt nun die möglichst wörtliche Übersetzung und anschließend ein kurzer Kommentar.

„Das Azimut ist der Bogen des Horizontes zwischen zwei Punkten; der eine von ihnen ist der Schnittpunkt des Horizontes mit dem (Himmels)äquator, der andere der Schnittpunkt von Horizont und Höhenkreis. Und es wird in vier Teile eingeteilt: in einen ost-nördlichen und einen ost-südlichen, sowie einen west-südlichen und west-nördlichen Teil. Und was den östlichen anbetrifft, so wird er gefunden, wenn die Sonne den Meridian noch nicht passiert hat, der westliche aber wird gefunden, wenn die Sonne schon durch den Mittagskreis hindurchgegangen ist, und meistens erreicht die Sonne (im Azimut) 90°, und jenes ist der Fall, wenn sie im Meridian steht, ausgenommen an den Orten, welche keine geographische Breite haben, denn zu Anfang des Widders oder der Wage insbesondere gibt es dort (am Äquator) für keinen von diesen beiden irgendein Azimut, weil der Himmelsäquator an jenen Orten der Höhenkreis ist, dem kein Azimut zukommt; denn er geht durch den Osten, das Zenit und den Westen. Und du findest in betreff der Ermittlung des Azimuts viele beweiskräftige (schlagende) Methoden, unter ihnen solche, welche auf seine Berechnung gehen und andere, die ihr ferne stehen, und ich habe die nächstliegenden gewählt und die schwierigeren übergangen, und dies ist der Zeitpunkt für den Beginn, doch bei Gott ist der Erfolg.

**Berechnung des Azimuts:** Wenn die Sonne im Anfang des Widders oder im Anfang der Wage steht und du willst jenes, so ziehe den Sinus der Höhe zur Beobachtungszeit vom Sinus der Meridianhöhe der Sonne ab, und was übrig bleibt, das multipliziere mit dem Sinus der Ortsbreite und teile das Produkt durch den Kosinus der Breite des Ortes, und was herauskommt, das ziehe vom Kosinus der Meridianhöhe ab und multipliziere den Rest mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und was sich ergibt, das bestimmt sein (des Azimutes) Bogenmaß, und sein Bogen ist das Azimut der Sonne für jene Höhe, wörtlich: der Betrag der Sonne, ich meine, ihren augenblicklichen Ort, wo die Höhe gemessen wurde. a.

Beispiel: Die Sonne stehe im Anfang des Widders, und ihre Höhe sei 20°, die geographische Breite sei 30°, die Höhe (des Teils) der Sonne im Meridian ist dann 60°, ihr Sinus 51$^p$ 57′ 41″ 20‴, der Kosinus der Meridianhöhe 30$^p$, der Sinus der Höhe zur Beobachtungszeit 20$^p$ 31′ 16″ 20‴, der Kosinus der Ergänzung, ich meine den 70er Sinus, 56$^p$ 22′ 53″ 36‴. Ziehst du den Sinus der Höhe der Beobachtungszeit vom Sinus der Meridianhöhe ab, so bleibt 31$^p$ 26′ 25″ 0‴. Multiplizierst du dies mit dem Sinus der Ortsbreite, und die ist 30°, so kommt 943 12 34 30 heraus, und wenn du dies Produkt durch den Kosinus der Breite dividierst, so resultiert der Quotient $18^{p}$ 0′ 6″ 29‴, (näherungsweise) und ziehst du ihn vom Kosinus der Meridianhöhe ab, so bleibt als Rest $11^{p}$ 50′ 52″ 31‴. Du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, so ist das Resultat $12^{p}$ 30′ 20″ 52‴, sein Bogen, das ist der Bogen des Azimuts für die Höhe 20° zu Anfang des Widders (oder der Wage), ist dann 12° 7′ 50″.

**Zweite Art der Berechnung des Azimuts:** In diesem Falle multiplizierst du den Sinus der Höhe (zur Beobachtungszeit) mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite. Das Resultat ist der Ichtilâf des Horizontes, und du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und was herauskommt, das bestimmt sein Bogenmaß (des Azimuts), und es wird sein Bogen das Azimut jener Höhe sein, und bei Gott ist der Erfolg. b.

**Dritte Art der Berechnung des Azimuts.** Du multiplizierst den Sinus des Dâ'ir vom halben Tagesbogen, falls die Zeit vor Mittag war, mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und was herauskommt, das bestimmt das Bogenmaß des Azimuts, und sein Bogen ist das östliche Azimut, und falls die Zeit nach Mittag war, so multipliziere den Sinus des Restes vom Tagesbogen mit dem Sinus der Ortsbreite und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und das Resultat bestimmt das Bogenmaß, und das, was sein Bogen ist, das ist das westliche Azimut, und bei Gott ist der Erfolg. c.

Beispiel: (Und) die Sonne stehe im Anfang des Widders, und die Höhe sei 30°, der Dâ'ir vom halben Tagesbogen sei 35° 15′ 51″ 58‴, sein Sinus ist $34^{p}$ 38′ 27″ 40‴. Du multiplizierst ihn mit dem Sinus der Ortsbreite und erhältst 1030 137. Du teilst dieses durch den Kosinus der Höhe, und es geht aus der Teilung 20 hervor, und das ist der Sinus des Azimuts; sein Bogen ist das Azimut selbst bei der Höhe 30° im Beginn des Widders oder im Beginn der Wage, nämlich 19° 28′ 16″ 27‴, und bei Gott ist der Erfolg.

**Vierte Methode zur Berechnung des Azimuts:** Du multiplizierst den Sinus des Restes vom halben Tagesbogen, wenn die Zeit vor Mittag lag, und wenn es nach Mittag war, so multipliziere den Sinus des Dâ'ir nach der Hälfte des Tages mit dem Sinus totus, und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und das Ergebnis bestimmt seinen Bogen, und was sein Bogen ist, ist das Ergänzungsazimut, subtrahiere es von 90°, und was bleibt, das ist das Azimut jener Höhe. d.

Beispiel: Die Höhe sei 30°, der Dâ'ir vom Tagesbogen zu Beginn des Widders oder der Wage 35° 15′ 51″ 58‴. Du ziehst dies von 90° ab, und es bleibt 54° 44′ 8″ 2‴ Der Sinus hiervon ist ungefähr $48^{p}$ 58′ 32″ 50‴. Du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, der ist $51^{p}$ 57′ 41″ 20‴, und es kommt $56^{p}$ 0′ 22″ 50‴ heraus, der zugehörige Bogen ist 70° 31′ 43″ 5‴, und dies ist die Abweichung von der Mittagslinie; du ziehst sie von 90° ab, und es bleibt 19° 28′ 16″ 55‴, und dies ist das Azimut der Sonne, und beide Beispiele stimmen bis zu den Sekunden überein und sind erst in den Terzen verschieden, und dies ist eine starke Annäherung.

**Berechnung des Azimuts aus den Tafeln des Sechzigerschattens:** Und wenn du die Kenntnis des Azimuts zu Beginn des Widders oder der Wage aus den Schattentafeln wünschest, so nimm, was dem Beginn des Widders in jener Breite gegenübersteht, von der du das Azimut aus den Schattentafeln berechnen willst, und wenn eine Interpolationsrechnung nötig ist, so führe sie aus, und was sich schließlich ergibt, das multipliziere mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch das, was als Schatten(zahl) der Höhe (in der Tafel) gegenübersteht, und das Resultat bestimmt den Bogen des Azimuts, und sein Bogen (selbst) ist das Azimut jener Höhe. e.

Beispiel: Die Sonne im Beginn des Widders, und die Höhe 40° und die Breite 30°; der Schatten am Sechziger-Gnomon zu Beginn des Widders $34^{p}$ 38′ 28″, und das ist es, was in der Schattentafel der Zahl 60° gegenübersteht, als Sechzigerschatten, und es steht dort ferner der 40 der Höhe in der Tafel des Sechzigerschattens $71^{p}$ 30′ 20″ gegenüber. Du multiplizierst den Schatten zu Beginn des Widders mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Schatten der Höhe; der Quotient ist $29^{p}$ 4′ 2″, der zugehörige Bogen, und das ist das Azimut der Sonne für die Höhe 40° im Anfang des Widders oder der Wage, ist 28° 58′ 36″, und dies ist der Fall beim Sechzigerschatten. Falls du die Berechnung mittels des Zwölfer-Gnomons willst, so multipliziere den Schatten zu Beginn des Widders, und er ist 6$^p$ 55′ 44″, mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Schatten (der Höhe 40°) und der ist 14$^p$ 18′ 4″, und das Resultat der Teilung ist 29$^p$ 4′ 4″, der zugehörige Bogen ist 28° 58′ 38″.

**Andere Methode zur Berechnung des Azimuts aus dem Schatten.** Du multiplizierst den Schatten der Höhe zu Beginn des Widders in der Breite, in welcher du das Azimut berechnen willst, mit dem Ergänzungsschatten (Schatten des Ergänzungswinkels) der Höhe zur Beobachtungszeit und teilst das Produkt durch 60, wenn du es beim Sechzigerschatten gemacht hast, und der Quotient bestimmt seinen Bogen, (des Azimuts) und der Bogen ist das Azimut jener Höhe, und wenn du es mit dem Zwölfer-Schatten ausführst, so teilst du das Produkt durch 144 Minuten, und was herauskommt, bestimmt seinen Bogen, und sein Bogen ist das Azimut jener Höhe. In diesem Fall also multiplizierst du den einen der beiden Schatten mit dem andern. Dann teilst du das Produkt durch zwölf, falls deine Rechnung (Ausführung) mit dem Zwölfer-Schatten geschieht, und was herauskommt, das multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt ebenso durch zwölf, und was sich ergibt, das bestimmt seinen Bogen, und was sein Bogen ist, das ist das Azimut jener Höhe. f.

**Beispiel mit dem Sechzigerschatten:** Die Höhe mit ihrem (früheren) Betrag von 40°, ihre Ergänzung = 50°, ihr Schatten = 50$^p$ 20′ 45″, des Sechziger-Gnomons. Du multiplizierst ihn mit dem Schatten zu Beginn des Widders, und der ist 34$^p$ 38′ 28″ und teilst das Produkt durch den Sinus totus, das Ergebnis ist annähernd 20$^p$ 4′ 2″, der entsprechende Bogen ist das Azimut der Höhe von 40° im Beginn des Widders oder der Wage an einem Orte, dessen Breite 30 ist, nämlich 28° 58′ 36″, wie es sich zuerst ergab, und bei Gott ist der Erfolg.

**Beispiel mit dem Schatten des Zwölfergnomons:** Der Schatten zu Beginn des Widders in einer Breite von 30° ist 6$^p$ 55′ 42″, der Schatten der Ergänzungshöhe, ich meine den Schatten bei 50°, ist 10$^p$ 4′ 9″. Du multiplizierst den einen von diesen beiden Schatten mit dem andern und erhältst als Produkt 69 45 45 9 58, du teilst dies durch 224, so folgt 29$^p$ 4′ 4″. Der zugehörige Bogen ist das Azimut der Höhe 40° zu Beginn des Widders und der Wage, nämlich 28° 58′ 38″, wie es zuerst beim Zwölfergnomon herausgekommen war, und falls du 69 45 45 9 58 durch 12 geteilt hättest: 5 48 48 45 47. Du multiplizierst dies mit dem Sinus totus und teilst das Produkt wiederum durch 12, es kommt 29$^p$ 4′ 4″ heraus; der zugehörige Bogen ist 28° 58′ 38″, und bei Gott ist der Erfolg.

**Kenntnis des Azimuts der Sonne, falls sie in den nördlichen oder südlichen Sternbildern steht.** Wenn du das Azimut in diesem Falle kennen willst, so ziehe den Sinus der Höhe zur Beobachtungszeit vom Sinus der Mittagshöhe ab, multipliziere mit dem Sinus der geographischen Breite und teile das Ergebnis durch den Kosinus der Ortsbreite. Was herauskommt, das merke und beachte wohl, und falls die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht und das Gemerkte größer ist als der Kosinus der Mittagshöhe, so wisse, daß das Azimut nördlich ist. Alsdann ziehst du den Kosinus der Mittagshöhe von dem im Gedächtnis Bewahrten ab, die Differenz multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe. Das Ergebnis bestimmt den Bogen des Azimuts, und was an Bogen herauskommt, das ist das Azimut im Norden, und wenn die Höhe östlich war, so ist das Azimut zwischen dem Osten und Norden, und wenn die Höhe westlich war, so liegt das Azimut zwischen Westen und Norden, und wenn das im Gedächtnis Behaltene dem Kosinus der Mittagshöhe gleich ist, so hat die Sonne in diesem Augenblick überhaupt kein Azimut, und dies ist der Fall in jenem größten Kreis, welcher durch den Osten, das Zenit und den Westen hindurchgeht, und wenn das im Gedächtnis Bewahrte kleiner ist als der Kosinus der Meridianhöhe, so wisse, daß das Azimut südlich ist. Alsdann ziehst du das, was bei der Teilung herauskommt, vom Kosinus der Meridianhöhe ab, und was verbleibt, das multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und es bestimmt das Ergebnis das Bogenmaß des Azimuts, und was sein Bogen ist, das ist das Azimut der Sonne im Süden, und falls die Zeit vor Mittag lag, so war es zwischen Osten und Süden, und wenn sie nach Mittag lag, so war es zwischen Westen und Süden, und wenn die Sonne in den südlichen Sternbildern steht, so ziehst du das im Gedächtnis Bewahrte vom Kosinus der Mittagshöhe ab, multiplizierst die Differenz mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und das Ergebnis bestimmt das Bogenmaß des Azimuts, und der Bogen selbst ist das Azimut der Sonne im Süden, doch bei Gott ist der Erfolg. g.

**Beispiel:** Die Sonne stehe im Anfang des Stiers, die Breite sei 30° und die Höhe 20°, die Deklination der Sonne sei 11° 32′ 22″. Du hast noch die Höhe zu Beginn des Widders im Gedächtnis, und sie ist 60°, und so folgt für die Mittagshöhe (der Sonne) 71° 32′ 22″, der Sinus hiervon ist 56$^p$ 54′ 45″, der Kosinus 18$^p$ 59′ 56″, der Sinus der Höhe zur Zeit der Beobachtung 20$^p$ 31′ 56″, der Kosinus 56$^p$ 22′ 54″, du ziehst den Sinus der Höhe der Beobachtungszeit vom Sinus der Mittagshöhe ab, und es bleibt 36$^p$ 22′ 49″. Du multiplizierst diesen Betrag mit dem Sinus der Ortsbreite und dividierst durch den Kosinus der Breite, so kommt 21$^p$ 4′ 38″ heraus, und weil dies größer ist, als der Kosinus der Meridianhöhe, so weißt du, daß das Azimut nördlich ist; nunmehr ziehst du den Kosinus der Meridianhöhe von diesem Betrag ab, und es bleibt 2$^p$ 4′ 41″. Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe zur Beobachtungszeit, und es kommt heraus 2$^p$ 8′ 28″. Sein Bogen ist 2° 2′ 41″ und dies ist das Azimut der Sonne im Norden. Darauf mache die Höhe 30°, der Ort der Sonne sei derselbe, desgleichen die Breite. Der Sinus der Höhe ist 30$^p$, der Kosinus 51$^p$ 57′ 41″. Du ziehst den Sinus der Höhe zur Beobachtungszeit vom Sinus der Meridianhöhe ab, und es bleibt 26$^p$ 54′ 45″. Dies multiplizierst du mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst es durch deren Kosinus, und es kommt 15$^p$ 32′ 56″ heraus, und da es kleiner ist als der Kosinus der Mittagshöhe, so weißt du, daß das Azimut südlich ist. Nunmehr ziehe den Betrag vom Kosinus der Meridianhöhe ab, so bleibt 3$^p$ 26′ 40″. Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und so kommt 3$^p$ 59′ 48″ heraus, und der zugehörige Bogen ist 3° 49′ 4″, als Azimut der Sonne für die Höhe 20°. So ist also für die Sonne im Beginn des Stiers für eine Sonnenhöhe von 20° das Azimut nördlich und = 2° 2′ 41″, und für eine Höhe von 30° ist es im Beginn des Stiers südlich und = 3° 49′ 4″, und beide Beispiele sind für die Breite von 30° berechnet worden, und bei Gott ist der Erfolg.

**Zweite Art und Weise der Berechnung des Azimuts:** Du berechnest aus der Höhe zur Beobachtungszeit den Ichtilâf al-ufq (Unterschied auf dem Horizont), und was das Unterschiedene anbetrifft (nämlich den Ichtilâf), so multiplizierst du den Sinus der Höhe mit dem Sinus der Breite des Ortes und teilst das Produkt durch den Kosinus der Breite, und zum Unterschied von der eben besprochenen Methode berechnest du (jetzt) den Sinus der Aufgangsrichtung (der Sonne) und das ist, daß du den Sinus der Sonnendeklination mit dem Sinus totus multiplizierst und das Produkt durch den Kosinus der Breite dividierst. Darauf beachtest du, daß die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht und der Ichtilâf al-ufq kleiner ist als der Sinus der Aufgangsrichtung, dann weißt du, daß die Sonne im Norden steht. Du ziehst alsdann den Ichtilâf al-ufq vom Sinus der Aufgangsrichtung ab, die Differenz multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, der Quotient bestimmt das Bogenmaß (des Azimuts) und der Bogen selbst ist das Azimut der Sonne im Norden, und war die Höhe östlich, so war demnach das Azimut zwischen Osten und Norden, und wenn sie westlich war, so lag es zwischen Westen und Norden, und falls der Ichtilâf al-ufq dem Sinus der Aufgangsrichtung gleichkommt, so hat die Sonne in diesem Augenblick überhaupt kein Azimut, und wenn endlich der Ichtilâf al-ufq größer ist als der Sinus der Aufgangsrichtung, so weißt du, daß die Sonne im Süden steht, du subtrahierst alsdann den Sinus der Aufgangsrichtung vom Ichtilâf al-ufq und die Differenz multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, was sich ergibt, das bestimmt das Bogenmaß, und der Bogen selbst ist das Azimut der Sonne im Süden, und wenn die Höhe eine östliche war, so lag das Azimut zwischen Osten und Süden, war sie westlich, so lag es zwischen Westen und Süden, und dies fand für die Sonne in den nördlichen Sternbildern statt, und wenn sie in den südlichen steht, so zähle den Ichtilâf al-ufq und den Sinus der Aufgangsrichtung zusammen, und was sich ergibt, das multipliziere mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und was herauskommt, bestimmt den Azimutbogen, und der Bogen selbst ist das Azimut der Sonne im Süden. h.

Beispiel: In der Breite 30 sei die Sonne im 15.° des Stiers, und die Höhe fürs erste 30°; die Deklination der Sonne ist alsdann 16° 26′, der Sinus hiervon $16^p$ 57′ 26″. Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Breite, und es ergibt sich $19^p$ 36′ 0″, und das ist der Sinus der Aufgangsrichtung der Sonne im Norden, und du multiplizierst den Sinus der Höhe, und der ist $30^p$, mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite, und es kommt $16^p$ 19′ 14″ heraus, und dies ist der Ichtilâf al-ufq und weil er kleiner ist als der Sinus der Aufgangsrichtung im Norden, so weißt du, daß das Azimut nördlich ist. Nunmehr ziehst du den Ichtilâf al-ufq vom Sinus der Aufgangsrichtung ab, und es bleibt $2^p$ 16′ 46″. Diesen Wert multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und der ist $51^p$ 57′ 41″, und so erhältst du $2^p$ 26′ 45″, der entsprechende Bogen, und er ist das Azimut im Norden, ist 2° 30′ 51″, und bei Gott ist der Erfolg. — Darauf möge die Höhe 34° 26′ 29″ sein, der Sinus hiervon ist $33^p$ 56′ 58″. Du multiplizierst ihn mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite, und es ergibt sich $19^p$ 36′ 0″, als Ichtilâf al-ufq und weil er dem Sinus der Aufgangsrichtung gleich ist, so weißt du, daß die Sonne gar kein Azimut hat, falls ihre Höhe 34° 26 29″ war. — Nunmehr sei die Höhe der Sonne 50°, der Sinus derselben $45^p$ 57′ 45″. Dies multiplizierst du mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst durch deren Kosinus, dann kommt $26^p$ 22′ 12″ heraus, und dies ist der Ichtilâf al-ufq und weil er größer ist als der Sinus der Aufgangsrichtung, und der ist $19^p$ 36′ 0″, so weißt du, daß das Azimut südlich ist. Du ziehst alsdann den Sinus der Aufgangsrichtung vom Ichtilâf al-ufq ab: es bleibt $6^p$ 56′ 12″. Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, so erhälst du $10^p$ 46′ 30″, der zugehörige Bogen, und der ist 10° 21′ 42″, ist das Azimut der Sonne im Süden für die Höhe von 50° in der Breite 30°. — Alsdann möge die Sonne im 15. Grade des Skorpions stehen, und ihre Höhe sei 30°. Der Sinus der südlichen Aufgangsrichtung ist $19^p$ 36′ 0″, der Ichtilâf al-ufq der Höhe 30° in der Breite 30° ist $16^p$ 19′ 14″ und weil der Grad der Sonne ein südlicher ist, zählst du beide Beträge zusammen, und sie ergeben $35^p$ 55′ 14″. Du multiplizierst dies mit dem Sinus totus und dividierst es durch den Kosinus der Höhe und es kommt $42^p$ 36′ 56″ heraus. Der Bogen ist 45° 16′ 48″. Dies in der Breite 30°, die Sonne im 15. Grad des Skorpions, die Höhe 30°, dann also das Azimut im Süden 45° 16′ 48″, und bei Gott ist der Erfolg.

**Dritte Methode über die Berechnung des Azimuts.** Du multiplizierst den Sinus des Restes vom halben Tagesbogen, falls die Zeit vor Mittag lag, und wenn sie nach Mittag lag, den Sinus des Dâ'ir des Nachmittags mit dem Kosinus der Sonnendeklination und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und was sich ergibt, das bestimmt den Bogen des Azimuts, und der gefundene Bogen ist das vollständige Azimut, du ziehst es von 90° ab, so ist der Rest das Azimut selbst, und wisse, daß das vollständige Azimut die (Winkel-) Entfernung von der Mittagslinie ist, und wenn der Rest vom halben Tagesbogen größer als 90° ist, resp. der Dâ'ir vom halben Tag, so ziehst du ihn von 180° ab, und machst alsdann, was bleibt, zu Bogen. i.

Beispiel. Die Sonne stehe im Anfang des Steinbocks, Höhe und Breite seien 30°. Der Dâ'ir des halben Tagesbogens 46° 16′ 15″, der Rest vom halben Tagesbogen 28° 16′ 26″. Du multiplizierst seinen Sinus mit dem Kosinus der Sonnendeklination, und es ergibt sich 4551 44 30 46 14. Du teilst mit dem Kosinus der Höhe und erhälst $29^p$ 55′ 16″, der zugehörige Bogen ist 29° 54′ 46″, und dies ist das ganze Azimut, ich meine seine (Winkel-) Entfernung von der Mittagslinie, du ziehst es von 90° ab, und es bleibt 60° 5′ 14″ als Azimut der Sonne für die Höhe und Breite 30° zu Beginn des Steinbocks, doch bei Gott ist der Erfolg.

**Berechnung des Azimuts nach einem anderen Beispiel:** Der Ichtilâf al-ufq der Höhe 30 sei $17^p$ 19′ 14″ und der Sinus der Aufgangsrichtung zu Beginn des Steinbocks $27^p$ 43′ 7″, du zählst beide zusammen, und ihre Summe ist $45^p$ 2′ 21″. Du multiplizierst dies mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und es kommt $52^p$ 0′ 26″ heraus, sein Bogen, und das ist das Azimut der Sonne zu Beginn des Steinbocks, ist 60° 5′ 14″.

**Anderes Beispiel.** In diesem ist, unter der Bedingung, daß der Rest des halben Tagesbogens größer als 90° ist, die Breite 30°, der Ort der Sonne die Mitte des Stiers, die Höhe östlich und 5°; der halbe Tagesbogen 99° 48′ 38″, der Dâ'ir vom halben Tagesbogen 6° 4′ 55″, der Rest vom halben Tagesbogen 93° 44′ 33″, und weil er größer ist als 90°, so ziehst du ihn von 180° ab, und es bleibt 86° 15′ 6″, der Sinus hiervon ist $59^p$ 52′ 38″, du multiplizierst ihn mit dem Kosinus der Sonnendeklination und die ist 17° 32′ 56″, und teilst das Produkt durch den Kosinus der Sonnenhöhe und der ist $59^p$ 46′ 18″, und es kommt heraus $57^p$ 38′ 44″, der zugehörige Bogen ist 73° 53′ 44″, und dies ist das vollständige Azimut, ich meine seine Entfernung (in Bogen) von der Mittagslinie; du ziehst es von 90° ab, und es bleibt das nördliche Azimut von 16° 6′ 16″.

**Betrachte folgendes Beispiel:** Berechne jetzt genau das gleiche Azimut wie im vorhergehenden Beispiel der schon erwähnten Beispiele. Der Ichtilâf al-ufq für eine Höhe von 5° ist nach der für einen Ichtilâf der Breite 30° berechneten Tabelle[1] $4^p$ 1′ 0″ und der Sinus der Aufgangsrichtung im 15.° des Stiers, nach der Tafel[2] $19^p$ 36′ 0″. Du ziehst den Ichtilâf des Horizontes vom Sinus der Aufgangsrichtung ab, weil die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht, und der Ichtilâf des Horizontes der kleinere ist, und es bleibt $15^p$ 34′ 51″. Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, es kommt heraus $16^p$ 38′ 39″; sein Bogen ist das Azimut der Sonne, nämlich 16° 6′ 10″, und so hättest du das Azimut gefunden, falls der Dâ'ir des halben Tages 193° 33′ 11″ und die Höhe 5° wäre, denn wenn du von diesem Dâ'ir den halben Tagesbogen abziehst, bleibt 93° 44′ 33″, und das ist der Dâ'ir des Nachmittags und du machst es mit ihm wie du es zuerst gemacht hast, und es kommt das Azimut 16° 6′ 16″ heraus wie es zuerst herauskam, und das erste Azimut ist ostnördlich, und das zweite westnördlich und die erste Höhe östlich und die zweite westlich, und bei Gott ist der Erfolg.

**Vierte Methode über die Berechnung des Azimuts.** Du multiplizierst den Sinus der Sonnendeklination mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Sinus der Ortsbreite, und was herauskommt, das merke und behalte es gut im Gedächtnisse, und wenn die Sonne in den nördlichen Sternbildern war und der Sinus der Höhe, den du willst, kleiner ist als das im Gedächtnis Behaltene, so weißt du, daß das Azimut der Sonne im Norden ist, nun ziehst du den Sinus der Höhe von dem Gemerkten ab; die Differenz multipliziere mit dem Sinus der Ortsbreite und teile das Produkt durch den Kosinus der Breite und was herauskommt, das multipliziere mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und das Ergebnis bestimmt seinen Bogen (des Azimuts) und der Bogen selbst, das ist das Azimut für jene Höhe im Norden, und wenn der Sinus der Höhe dem im Gedächtnis Behaltenen gerade gleich ist, so hat die Sonne kein Azimut, und es ist dies die Höhe ohne Azimut, und wenn der Sinus der Höhe größer ist als das im Gedächtnis Bewahrte, so weißt du, daß das Azimut südlich ist; du ziehst alsdann das Gemerkte vom Höhensinus ab, das Verbleibende multiplizierst du mit dem Sinus der Breite und teilst es durch den Kosinus der Breite, das Ergebnis multiplizierst du mit dem Sinus totus und dividierst es durch den Kosinus der Höhe, was herauskommt, das bestimmt seinen Bogen, und der Bogen ist das Azimut der Sonne im Süden. Falls die Sonne in den südlichen Sternbildern stand, so mußtest du den Sinus der Höhe zu dem im Gedächtnis Gemerkten hinzuzählen, das Ergebnis mit dem Sinus der Breite multiplizieren und durch den Kosinus der Breite

---

[1] Im 18. Kapitel, fol. 307 des Leidener Mscr. stehen zwei Tafeln für den Ichtilâf al-ufq, die eine für die Breite Kairos ($\varphi = 30°$), die andere für die Breite von Bağdâd ($\varphi = 33° 25$).

[2] Im gleichen Kapitel finden sich für die eben angeführten Breiten die Tafeln für den Sinus der Morgenweite.

dividieren, weiterhin mit dem Sinus totus multiplizieren und endlich mit dem Kosinus der Höhe dividieren. Das Resultat bestimmt den Bogen des Azimuts, und der Bogen selbst ist das Azimut der Sonne im Süden, und wisse, daß das im Gedächtnis Behaltene der Sinus der Höhe ohne Azimut ist, allerdings nur in den nördlichen Sternbildern, und was die südlichen anbetrifft, so gibt es in ihnen fürwahr keine Höhe ohne Azimut, jedoch nur für jegliche nördliche Breite, in betreff der südlichen Breiten jedoch ist es gerade umgekehrt: da gibt es nur Höhen ohne Azimut in den südlichen Sternbildern, nicht aber für die nördlichen. k.

**Beispiel:** Dafür sei der Abstand der Sonne vom Frühlingspunkt 45°, ihre Stellung (in der Ekliptik) fürs erste die Mitte des Stiers, ihre Höhe 30° und die Deklination 16° 26'; der Sinus hiervon ist $16^p$ 58' 26" 36'''. Du multiplizierst dies mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Sinus der Ortsbreite, so kommt $33^p$ 57' 54" heraus, es ist der im Gedächtnis zu behaltende Betrag, und das ist hier der Sinus der Höhe ohne Azimut, weil die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht, und da die Höhe 30° ist, so ist der Sinus auch $30^p$, und das ist weniger als der Sinus der Höhe ohne Azimut. Du weißt, daß das Azimut der Sonne im Norden liegt, nunmehr ziehst du den Sinus der Höhe vom Sinus der Höhe ohne Azimut ab, und es bleibt $3^p$ 57' 54" übrig. Diesen Rest multiplizierst du mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Ergebnis durch den Kosinus der Höhe (du teilst ferner durch den Kosinus der Ortsbreite), es geht aus der Teilung $2^p$ 30' 55" hervor, der zugehörige Bogen ist 2° 30' 51" als Azimut der Sonne im Norden, also Resultat für dieses Beispiel: 2° 30' 51". Ferner sei die Sonne in derselben Stelle der Ekliptik, ihre Höhe aber 34° 26' 30", der Höhensinus $33^p$ 57' 54", und weil er gleich dem im Gedächtnis Behaltenen, d. h. dem Sinus der Höhe ohne Azimut, ist, so weißt du, daß die Sonne in diesem Augenblick kein Azimut hat. Wiederum sei die Sonne im gleichen Punkt der Ekliptik, aber ihre Höhe 40°, der Sinus hiervon $38^p$ 34' 2", und weil dieser Betrag größer ist als das im Gedächtnis Behaltene, ich meine als der Sinus der Höhe ohne Azimut, so weißt du, daß das Azimut südlich ist. Darauf ziehst du von ihm den angemerkten Betrag, und der ist $33^p$ 57' 54" ab, und es bleibt $4^p$ 36' 8". Dies multiplizierst du mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst durch deren Kosinus, so folgt $4^p$ 40', und diesen Betrag multiplizierst du wiederum mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, welcher $45^p$ 57' 45" ist, so kommt $3^p$ 38' 52" heraus, der zugehörige Bogen ist 3° 29' 34", also das südliche Azimut der Sonne in diesem Beispiel = 3° 29' 34". Darauf lasse die Sonne vom anderen (Herbst) Äquinoktium 45° abstehen, dies ist der Fall in den südlichen Sternbildern und bedeutet die Mitte des Sternbildes des Skorpions; dann ist die Deklination und deren Sinus unverändert[1]), und wenn du letzteren mit dem Sinus totus multiplizierst und durch den Sinus der Breite dividierst, kommt $33^p$ 57' 54", wie es zuerst für das im Gedächtnis Bewahrte herauskam. Darauf nimm die Höhe zu 30° an, der Sinus ist $30^p$, und weil die Sonne in den südlichen Sternbildern steht, so zählst du den Sinus der Höhe und das im Gedächtnis Bewahrte zusammen, und beide ergeben zusammen $63^p$ 57' 54", diese Zahl multiplizierst du mit dem Sinus der Breite und teilst durch den Kosinus der Breite, und es kommt $36^p$ 45' 44" heraus, du multiplizierst es mit dem Sinus totus und teilst durch den Kosinus der Höhe, und es resultiert $42^p$ 36' 56", der entsprechende Bogen ist 45° 16' 45". Die Sonne in 15° des Skorpions, die Breite 30°, die Höhe 30°, dann das südliche Azimut 45° 16' 45", und bei Gott ist der Erfolg.

**Fünfte Methode** über die Berechnung des Azimuts aus der Höhe und dem östlichen Winkel, und das ist die Ergänzung jenes Winkels zu 90°, den der Verbindungsbogen des augenblicklichen Sonnenortes mit dem Aufgangspunkt und der durch letzteren gehende Vertikalkreis miteinander bilden. Du multiplizierst den Sinus der Entfernung der Sonne vom Auf- oder Untergangspunkt, d. h. der Entfernung von jenem der beiden, welcher der Sonne am nächsten liegt, mit dem Kosinus des östlichen Winkels und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, was herauskommt ist der Sinus der Distanz des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkte, wenn du deine Berechnung gemacht hast, falls die Sonne im Osten war, und das Ergebnis

---

[1]) D. h. ihrem absoluten Betrage nach.

ist der Sinus des Abstands ihres Azimuts vom Untergangspunkt, falls du deine Berechnung für die Stellung der Sonne auf der Westseite gemacht hast. Und merke dir das Ergebnis wohl. Darauf sieh zu, ob die Richtung der Morgenweite nördlich ist, und ob der Bogen, den du durch Rechnung ermittelt hast und der die Entfernung des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkt darstellt, kleiner ist als die Morgenweite. Du weißt, daß das Azimut der Sonne im Norden liegt, alsdann ziehst du den Bogen der Entfernung des Azimuts vom Aufgangspunkt von der Morgenweite ab, was bleibt, das ist das Azimut der Sonne im Norden, und wenn der Bogen der Entfernung des Azimuts vom Aufgangspunkt der Morgenweite gerade gleich ist, dann hat die Sonne kein Azimut, und wenn der Bogen der Entfernung des Azimuts vom Aufgangspunkt größer ist als die Morgenweite, so weißt du, daß das Azimut der Sonne im Süden ist. Du ziehst nunmehr die Morgenweite vom Bogen der Entfernung des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkt ab, der Rest ist das Azimut der Sonne im Süden, und wenn die Morgenweite im südlichen Quadranten liegt, so zählst du zu ihr die Entfernung des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkt hinzu, das Ergebnis dieser Addition ist das Azimut der Sonne im Süden, und dies ist auch der Zusammenhang ihrer beiden Entfernungen in westlicher Richtung mit dem Bogen der Entfernung des Azimuts der Sonne vom Untergangspunkt, doch bei Gott ist der Erfolg. l.

Beispiel: Die Breite 30°, die Sonne im Anfang des Stiers, der Dâ'ir 45°, der Aufgangspunkt ab von den Zwillingen 21° 19', die Morgenweite nördlich und 26° 11' 55", die Höhe der Sonne 38° 41' 28", der Kosinus hiervon 46$^p$ 49' 55", der östliche Winkel 58° 55' 14" 2''', sein Sinus 48$^p$ 4' 58", sein Kosinus 34$^p$ 54' 42", der Teil, welcher zwischen Sonne und Aufgangspunkt liegt, 51° 16' 59", sein Sinus 46$^p$ 49' 6" 55'''. Du multiplizierst den Teil des Sinus, der zwischen Sonne und Aufgang liegt, und er ist 46$^p$ 49' 6" mit dem Kosinus des östlichen Winkels und der ist 55$^p$ 14' 42", und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und der ist 46$^p$ 49' 55", und es kommt heraus 35$^p$ 14' 4", sein Bogen, und das ist die Entfernung des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkte, ist 35° 45' 50". Hiervon ziehst du den Bogen der Morgenweite, und der ist 26° 11' 55", ab, und es bleibt als Azimut der Sonne im Süden 9° 34' 55", jedoch nur im Süden, weil die Entfernung des Azimuts größer ist als die Morgenweite, welche gen Norden liegt.

**Sechste Methode über die Berechnung des Azimuts.** Du nimmst das, was zwischen Sonne und Aufgangspunkt oder Untergangspunkt liegt, je nachdem der eine von beiden Punkten ihr näher liegt, und was das ist, das ziehe von 90° ab, und was bleibt, von dem wisse den Sinus, und du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, das Ergebnis bestimmt den Bogen, und diesen Bogen ziehst du von 90° ab, und was bleibt, das ist die Entfernung des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkt, dies unter der Bedingung, daß die Sonne später den Meridian erreichen wird, und wenn sie schon dort war, so ist ihr Winkel die Entfernung ihres Azimuts vom Westen. Nunmehr kennst du die Morgenweite, und wenn sie im nördlichen Quadranten liegt und der Bogen des Abstandes des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkt kleiner ist als die Morgenweite, so weißt du, daß das Azimut auch in diesem Quadranten liegt. Alsdann ziehst du den Bogen der Distanz des Azimuts vom Aufgangspunkt von der Morgenweite ab, der Rest ist das Azimut der Sonne im Norden, und wenn die Distanz der Morgenweite gleich ist, so hat die Sonne in diesem Augenblick kein Azimut, und wenn sie größer ist als die Morgenweite, so ziehst du von ihr die Morgenweite ab, der Rest ist das Azimut der Sonne im Süden, und wenn die Morgenweite südlich ist, so addierst du sie zu der Distanz des Azimuts vom Aufgangspunkt, die Summe ist das Azimut der Sonne im Süden, und du machst es ebenso, wenn die Sonne im Westen steht, und es sich um die Abendweite und die Entfernung des Azimuts der Sonne vom Untergangspunkt handelt, so Gott will, der mächtig ist. m.

Beispiel: Die Sonne im Beginn des Stiers, die Breite gleich wie beim Dâ'ir 45°, der Aufgang der Zwillinge 21° 16' 59"; die Ostrichtung im Norden 26° 10' 16", die Höhe der Sonne 38° 41' 38", die Ergänzungshöhe 51° 18' 22", der Kosinus der Sonnenhöhe 46$^p$ 49' 55", die Distanz der Sonne vom Aufgangspunkt 51° 17' 19", ihre Ergänzung 38° 42' 41", deren Sinus 37$^p$ 31' 26". Du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, es kommt 48$^{p}$ 4' 29" heraus, der Bogen ist 53° 14' 56", du ziehst ihn von 90° ab, es bleibt 36° 45' 4", und das ist der Abstand des Azimuts der Sonne vom Aufgang und weil die Morgenweite im Norden ist, ziehst du sie vom Bogen der Entfernung der Sonne vom Aufgang ab, und es restiert als Azimut der Sonne im Süden 9° 34' 48", nahezu das, was zuerst herauskam.

**Siebente Möglichkeit.** Du kennst in diesem Falle die Höhe der Sonne und ihre Winkelentfernung vom Meridian. Sieh zu, und wenn die Zeit vor Mittag liegt, so ziehst du vom halben Tagesbogen den Dâ'ir ab, und was sich ergibt, von dem wisse den Sinus genau, und seinen Betrag multipliziere mit dem Kosinus der Sonnendeklination und teile mit dem Sinus totus, das Ergebnis bestimmt den Bogen, und diesen Bogen ziehst du von 90° ab. Der Rest ist die Entfernung des Sonnenmittelpunktes vom Ostpunkt, und wenn dies der Fall ist, so steht die Sonne in der östlichen Hälfte der Himmelskugel, ich meine, daß sie dann den Dâ'ir des halben Tages noch nicht zurückgelegt hat, und wenn sie im westlichen Teil steht, und das ist der Bogen, welcher zwischen Sonnenmittelpunkt und Westpunkt liegt, so wisse den Sinus dieses Bogens, und der Name des Bogens ist al-ba‘d, damit wir seinen Namen genau kennen. Darauf multipliziere den Sinus der Sonnendeklination mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Sinus ba‘d, was herauskommt, bestimmt den Bogen der Gleichung der Breite, und falls die Deklination eine nördliche ist, so ziehst du sie von der Ortsbreite ab, ist sie aber südlich, so addierst du sie zur Breite, und was herauskommt, nach der Vermehrung oder Verminderung, das ist die danach korrigierte Breite, und wisse ihren Sinus und Kosinus. Nunmehr multipliziere den Sinus ba‘d mit dem Kosinus der korrigierten Breite und teile das Produkt durch den Sinus totus, und das Resultat gibt die Höhe der Sonne, du subtrahierst sie von 90°, und wisse den Sinus, und der des Restes ist der Kosinus der Höhe, den du dir wohl merkst, dann multiplizierst du den Sinus ba‘d mit dem Sinus der korrigierten Breite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und das Resultat gibt das Azimut der Sonne. Ziehe den ba‘d von 90° ab, und wisse den Sinus des Restes, du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, was herauskommt, bestimmt einen Bogen, es ist dies die Ergänzung des Azimuts, ziehe sie von 90° ab, so ist der Rest das Azimut der Sonne. n.

**Beispiel:** Und die Sonne im Anfang des Steinbocks, und die Hälfte des Tagesbogens in der Breite 30° = 75° 24' 4", und der Dâ'ir von der Hälfte des Tagesbogens ist 15° 24' 4", du ziehst ihn vom halben Tagesbogen ab und es bleibt 60°, gleichermaßen ist der Sinus hiervon 51$^{p}$ 57' 41", der Kosinus der Sonnendeklination ist 54$^{p}$ 59' 19". Du multiplizierst den einen von diesen zweien mit dem anderen und teilst das Produkt durch den Sinus totus, es ergibt sich 64$^{p}$ 34' 16" 5"', der zugehörige Bogen ist 52° 31' 55", dies ziehst du von 90° ab, und es bleibt 37° 28' 5" und das ist al-ba‘d, dessen Sinus ist 36$^{p}$ 29' 57", und dies ist also der Sinus des Bogens des ba‘d, du merkst ihn und multiplizierst den Sinus der Sonnendeklination und der ist 24$^{p}$ 0' 38" mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Sinus ba‘d, es kommt 39$^{p}$ 37' 40" heraus, der entsprechende Bogen, und das ist der Bogen der Gleichung der Breite, ist 41° 7' 24", südlich, weil die Deklination südlich ist. Du vermehrst ihn um die Ortsbreite und es ergibt sich die korrigierte Breite zu 71° 7' 24", der Sinus ist 56$^{p}$ 46' 38", die Ergänzung der korrigierten Breite ist 18$^{p}$ 52' 36", der Sinus 19$^{p}$ 24' 48", du multiplizierst ihn in dem Sinus der Distanz des Sonnenmittelpunktes vom Ostpunkte, und der ist 36$^{p}$ 29' 57", und teilst das Produkt durch den Sinus totus, es kommt 11$^{p}$ 48' 31" 51"' heraus, der zugehörige Bogen, und das ist die Höhe der Sonne für diesen Augenblick, ist 11° 21' 2", die Ergänzung der Höhe 78° 38' 58", der Kosinus der Höhe ist 58$^{p}$ 49' 35". Du multiplizierst nunmehr den Sinus ba‘d, und der ist 36$^{p}$ 29' 57", mit dem Sinus der korrigierten Breite, und der ist 56$^{p}$ 46' 38", und teilst das was herauskommt, durch den Kosinus der Höhe, es ergibt sich 35$^{p}$ 13' 31", der zugehörige Bogen, und das ist das Azimut der Sonne, ist 35° 56' 2", und bei Gott ist der Erfolg.

**Achte Methode.** Über die Kenntnis des Azimuts aus einem Bogen, welcher vermehrt oder vermindert wird um den Betrag der Morgenweite. Wenn du jene

Kenntnis des Azimuts der Sonne aus diesem Bogen willst, so ziehe in Erwägung, daß deine Rechnung vor dem Mittag angestellt ist, und stelle den Dâ'ir, d. h. den Revolutionsbogen der Sphäre fest, und wenn die Zeit Nachmittags liegt, so stelle den Rest des halben Tagesbogens fest, und was immer in jedem Falle sich ergibt, von dem nimm die Hälfte und wisse den Sinus dieser Hälfte, und dessen Betrag multiplizierst du mit dem Kosinus der Deklination der Sonne, und was sich ergibt, das dividierst du durch den Sinus totus, dann verdopple den dazu gehörigen Bogen und ziehe dessen Wert von 90° ab; merke dir den Sinus des Restes und multipliziere ihn mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, zu dem Ergebnis suche den Bogen, den du von 90° abziehst, der Rest ist die Gleichung der Morgenweite, und wenn die Morgenweite im nördlichen Quadranten liegt, so erwäge: Wenn sie größer ist als der Bogen der Gleichung, so ziehst du von ihr den Bogen der Gleichung ab, der Rest ist das Azimut der Sonne im Norden, und wenn die beiden Bogen einander gleich sind, so hat die Sonne kein Azimut, und wenn der Bogen der Gleichung größer ist als die östliche Richtung (Morgenweite) so ziehe von ihr den Betrag der Morgenweite ab, der Rest ist das Azimut der Sonne im Süden, doch bei Gott ist der Erfolg. o.

**Beispiel:** Die Sonne im Anfang des Steinbocks, die Breite 30°, die Höhe 30°, der Dâ'ir des halben Tagesbogens 47° 17′ 55″, die Hälfte hiervon 23° 38′ 57″ 1‴ der Sinus hiervon $24^p$ 4′ 47″. Du multiplizierst ihn mit dem Kosinus der Sonnendeklination, und der ist $54^p$ 50′ 50″, und das ergibt 3231 11 38 24 58, du teilst dies durch den Sinus totus, so kommt annähernd $22^p$ 3′ 11″ 38‴ heraus. Der zugehörige Bogen ist 21° 33′ 53″, verdopple ihn, und es gibt 43° 7′ 46″. Dies subtrahierst du von 00°, und es bleibt 46° 52′ 14″. Der Sinus hiervon ist $43^p$ 47′ 19″. Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst es durch den Kosinus der Höhe, so kommt $50^p$ 33′ 46″ heraus. Der Bogen hierzu ist 57° 25′ 41″. Du ziehst ihn von 90° ab, es bleibt 32° 34′ 19″, und das ist der Bogen der Gleichung der Aufgangsrichtung, und weil die Aufgangsrichtung 27° 30′ 53″ gen Süden liegt, so addierst du dies zum Bogen der Aufgangsrichtung und es ergibt sich als Azimut der Sonne im Süden 60° 5′ 12″. Dies Beispiel ist ebenfalls ganz nach der Sinustafel berechnet, und du hattest es schon früher auf andere Weise, aber im Resultat mit der letzten Rechnung übereinstimmend berechnet.

**Letzte Darlegung über diese Methode.** Wenn die Höhe bekannt ist, sowie deren Azimut, d. i. ihre Richtung und die Ortsbreite bekannt und wenn die Sonnendeklination bekannt ist, und wenn du den nördlichen oder südlichen Abschnitt (Teil der Sonne in der Ekliptik) kennst, so ist auch ihre Entfernung vom Äquinoktium bekannt, und wenn ein Stern sich einem dafür darbietet[1]), und wenn sein Abstand vom Äquinoktium bekannt ist, so ist das Verfahren jenes, daß du den Sinus der Höhe mit dem Sinus der Breite multiplizierst und das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite dividierst, und es ist dieser Ausdruck alsdann der Ichtilâf des Horizontes; du behältst ihn im Gedächtnis. Darauf multiplizierst du den Sinus des Azimutes mit dem Kosinus der Höhe und teilst das Produkt mit dem Sinus totus, das Ergebnis ist der Aṣl. Merke auch ihn wohl, und nun beachte: Wenn die Sonne in den nördlichen Sternbildern und das Azimut nördlich ist, so addierst du den Aṣl und den Ichtilâf des Horizontes, das Ergebnis ist der Sinus der Aufgangsrichtung, und wenn sie in den nördlichen Sternbildern, das Azimut aber südlich ist, so ziehe den Aṣl vom Ichtilâf des Horizontes ab, der Rest ist wiederum der Sinus der Aufgangsrichtung, und wenn die Sonne in den südlichen Sternbildern steht, so ziehe den Ichtilâf des Horizontes vom Aṣl ab, der Rest ist ebenfalls der Sinus der Morgenweite, und falls du den Sinus der Morgenweite kennst, so multiplizierst du ihn mit dem Kosinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Sinus totus, das Ergebnis ist der Sinus der Sonnendeklination, der zugehörige Bogen wird alsdann die Sonnendeklination sein oder des Sternes Deklination, der ähnlich der Sonne, keine Breite hat, und wenn du für den Stern die Nachtstunde, welche sich dir ergab, berechnet hattest, so ist das seine Entfernung vom Äquinoktium, und bei Gott ist der Erfolg. p.

---

[1]) Der also, ähnlich der Sonne, keine Breite (astronomische) hat.

Beispiel. Die Breite 30°, die Höhe 20°, das nördliche Azimut 7° 54′ 10″, der Sinus der Höhe 20$^p$ 31′ 16″, du multiplizierst ihn mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite, es kommt 11$^p$ 50′ 33″ heraus, und das ist der Ichtilâf des Horizontes, den du dir wohl merkst. Darauf multiplizierst du den Sinus des Azimuts, und der ist 8$^p$ 14′ 48″ mit dem Kosinus der Höhe, und der ist 56$^p$ 22′ 54″ und teilst dies Produkt durch den Sinus totus, es ergibt sich 7$^p$ 45′ 50″ und das ist der Aṣl. Bewahre ihn im Gedächtnisse, und weil die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht und auch das Azimut nördlich ist, so addierst du den Aṣl zum Ichtilâf des Horizontes, es kommt 19$^p$ 36′ 23″ heraus und das ist der Sinus der Morgenweite, du multiplizierst ihn mit dem Kosinus der Ortsbreite, und der ist 51$^p$ 57′ 41″, und teilst das Produkt durch den Sinus totus, so erhältst du 16$^p$ 58′ 20″ 30‴, der zugehörige Bogen, und das ist die nördliche Sonnendeklination, ist 16° 26′, und wenn du für den Stern die Nachtstunde (?), welche sich für dich ergibt, als Stunde der Deklination (?) berechnet hattest, so ist dies die Entfernung jenes Sterns vom Äquinoktium. Darauf setze als Höhe 50° an, das südliche Azimut 10° 21′ 42″. Du multiplizierst den Sinus der Höhe, 45$^p$ 57′ 46″ mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst durch den Kosinus der Ortsbreite, so kommt 26$^p$ 32′ 12″ heraus, und das ist der Ichtilâf des Horizontes, du merkst ihn wohl, und multiplizierst den Sinus des Azimuts, 10$^p$ 46′ 30″, mit dem Kosinus der Höhe, 38$^p$ 34′ 2″, und teilst das Produkt durch den Kosinus der Ekliptikschiefe, so ergibt sich 6$^p$ 56′ 12″, und das ist der Aṣl. Du merkst ihn und subtrahierst ihn vom Ichtilâf des Horizontes, 26$^p$ 32′ 12″, weil die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht und das Azimut südlich ist, so bleibt als Rest 19$^p$ 36′, und dies ist der Sinus der Morgenweite. Du multiplizierst ihn mit dem Kosinus der Ortsbreite und teilst mit dem Sinus totus, so ergibt sich 16$^p$ 58′ 26″ 30‴, als Sinus der nördlichen Deklination, der Bogen der nördlichen Deklination ist 16° 26″, und wenn du umgekehrt nach dem Grad der Zeichen in der Deklinationstafel zählst, so ergibt sich dir der Abstand (in Länge) der Sonne vom Äquinoktium = 45°[1]). Nunmehr sei die Breite, wie vorher, = 30°, und die Höhe 35°, das südliche Azimut 50° 4′ 56″, die Sonne in jenem südlichen Quadranten, der vom Beginn der Wage bis zum Ende der Fische reicht. Du multiplizierst zuerst den Sinus der Höhe 34$^p$ 24′ 58″ mit dem Sinus der Breite, 30$^p$ und teilst das Resultat durch den Kosinus der Breite, 51$^p$ 57′ 41″, so kommt heraus 19$^p$ 52′ 9″, und das ist der Ichtilâf des Horizontes; du behältst ihn im Gedächtnisse und multiplizierst den Sinus des Azimuts, 46$^p$ 0′ 24″ mit dem Kosinus der Höhe 49$^p$ 8′ 57″ und teilst das Produkt durch den Sinus totus, es ergibt sich 37$^p$ 41′ 11″, und das ist der Aṣl. Du ziehst von ihm den Ichtilâf des Horizontes ab, weil das Azimut südlich ist und die Sonne in den südlichen Zeichen steht, was verbleibt, das ist der Sinus der Morgenweite und gleich 17$^p$ 59′ 2″. Du multiplizierst dies mit dem Kosinus der Ortsbreite und dividierst mit dem Sinus totus, es ergibt sich 15$^p$ 25′ 48″ 27‴ annähernd, der zugehörige Bogen, d. i. die südliche Deklination der Sonne, ist 15° 54′ 8″ oder nach den Tafeln der astronomischen Länge ist ihre Entfernung vom Äquinoktium = 40°, und bei Gott ist der Erfolg."

## Kommentar zum XX. Kapitel der Ḥākemitischen Tafeln.

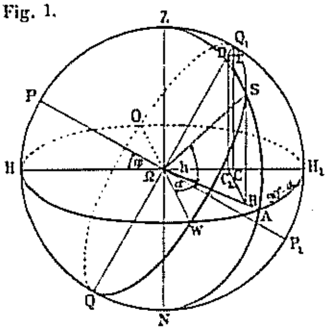
ad a. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Regel kann in folgender Weise erbracht werden. Es sei in der Figur 1 (S. 108) $HOH_1W$ der Horizont, Z das Zenit, N der Nadir und $QWQ_1O$ der Himmelsäquator, der den Horizont bekanntlich im Ost- und Westpunkt schneidet und gleichzeitig die Bahn der Sonne am Tag des Äquinoktiums vorstellt, wo die Sonnendeklination = o ist. Es ist also $O\Omega W$ die Ost—Westlinie, von der aus die Araber das Azimut zählten. $PP_1$ ist die Weltachse, die zum Horizont unter dem Winkel $\varphi$ (Ortsbreite, Polhöhe) geneigt ist. Die augenblickliche Höhe der Sonne (S) ist

$$\mathrm{arc}\,SA\,(= \measuredangle A\Omega S) = h.$$

---

[1]) Nach Formel $\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin\lambda$ folgt hieraus $\varepsilon = 23^\circ\ 35'$. Diesen Wert teilt der Autor im 11. Kapitel als von ihm selbst gefundenen, neben vielen früheren arabischen Werten für die Ekliptikschiefe mit.

Fig. 1.



Wir fällen jetzt zuerst das Lot SB vom Ort der Sonne S auf den Horizont und ziehen ΩB, welches natürlich im Strahl ΩA liegen muß. Von B fällen wir auf die Nord—Südlinie $HH_1$ das Lot $BC_1$, das parallel der Ost—Westlinie ist. In $C_1$ errichten wir auf $HH_1$ die Senkrechte $C_1D$, die ganz in der Meridianebene (Papierebene) liegt. Da sie vom Horizont bis zum Äquator reicht, so ist sie = BS, und deshalb ist $BSDC_1$ ein Rechteck, folglich $DS = C_1B$, ebenso $D\Sigma \# CC_1$. Sei der Radius der Himmelskugel = r = 60 partes = sinus totus, so hat man der Reihe nach:

$$CQ_1 = r \cdot \cos\varphi; \quad C_1D = C\Sigma = r \cdot \sin h,$$

$$Q_1\Sigma = CQ_1 - C\Sigma = r(\cos\varphi - \sin h) = DQ_1 \cos\varphi; \quad DQ_1 = \frac{Q_1\Sigma}{\cos\varphi}$$

$$\Omega D = \Omega Q_1 - DQ_1 = r - r \cdot \frac{\cos\varphi - \sin h}{\cos\varphi} = r\left(1 - \frac{\cos\varphi - \sin h}{\cos\varphi}\right)$$

$$\frac{\Omega C_1}{\Omega D} = \sin\varphi; \quad \Omega C_1 = \sin\varphi - \frac{\cos\varphi - \sin h}{\cos\varphi} \cdot \sin\varphi$$

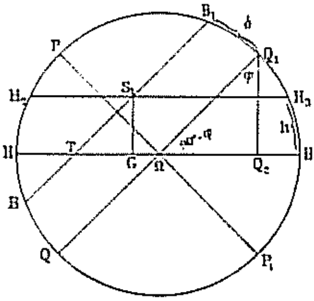
$$\sin\alpha = \frac{\Omega C_1}{\Omega B} = r \cdot \frac{\sin\varphi - \frac{\cos\varphi - \sin h}{\cos\varphi} \cdot \sin\varphi}{r \cdot \cos h} \qquad \text{q. e. d.}$$

Vereinfacht lautet das Resultat:

$$r \cdot \sin\alpha = r \cdot \frac{\sin h \cdot \sin\varphi}{\cos h \cdot \cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

ad b. Hier tritt ein der arabischen Astronomie eigener Begriff auf: Der „Ichtilâf des Horizontes". Er ist identisch mit dem was Abû'l Ḥasan und andere die Ḥiṣṣa nennen. Um ihn in einer Formel darzustellen, sei auf nebenstehende Figur 2 verwiesen. Sie ist eine Meridianprojektion der Himmelskugel. $BB_1$ ist ein Parallelkreis (Tageskreis) der Sonne mit der Deklination δ. Der Ichtilâf al-ufq ist jetzt dargestellt durch eine gerade Linie auf dem Nord—Süd-Durchmesser $HH_1$ des Horizontes, genommen vom Fußpunkt des Sinus der Höhe im augenblicklichen Orte des Gestirns bis zum Durchschnitt des Horizont- und Parallelkreis-Durchmessers[1]).

Fig. 2.



$S_1$ = Ort der Sonne im Höhenkreis $H_2H_3$ (arc $H_1H_3 = h$), also Ichtilâf al-ufq = GT.

Nun verhält sich

$$\Omega Q_2 : Q_1Q_2 = GT : GS_1.$$

Es ist aber

$$\Omega Q_2 = \sin\varphi; \quad Q_1Q_2 = \cos\varphi; \quad GS_1 = \sin h,$$

mithin

$$GT = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cdot \sin h \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

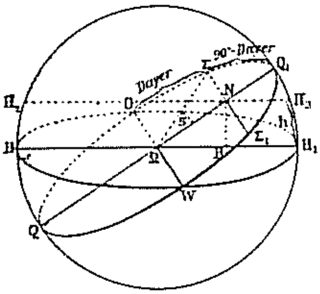
Teilt man diesen Ausdruck (II) noch durch cos h und fügt links und rechts den sinus totus = r als Faktor bei, so ist man auf unsere Formel (I) geführt.

---

[1]) Vgl. Journal asiatique 1892, S. 429.

ad c. Auch hier tritt uns ein spezifisch arabischer Begriff aus der sphärischen Astronomie entgegen: „Der Dâ'ir". Er ist der seit Sonnenaufgang bereits verflossene Teil des Tagesbogens.

Fig. 3.



Aus beistehender Figur liest man ab:

$$\text{Dâ'ir} = \text{arc}\, O\Sigma = \text{arc}\, W\Sigma'.$$

Angenommen, die Sonne stehe am Vormittag im Punkte $\Sigma$ des Himmelsäquators und sei daher genau im Osten aufgegangen, so ist

$$\frac{\Omega N}{\Omega \Sigma} = \sin \text{Dâ'ir}; \quad \Omega N = r \cdot \sin \text{Dâ'ir}.$$

Anderseits ist das Lot

$$NB = r \cdot \sin h = \Omega N \cdot \cos \varphi .$$

Also $\frac{\sin h}{\cos \varphi} = \sin \text{Dâ'ir}$, mithin ist nach (I):

$$\sin \alpha = \frac{\sin \text{Dâ'ir} \cdot \sin \varphi}{\cos h}, \qquad \text{q. e. d.}$$

ad d. Anwendung des Sinussatzes auf das schiefwinklige sphärische Dreieck Zenit—Pol—Sonne.

ad e. Nach Formel (I) ist

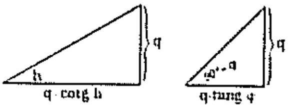
$$r \cdot \sin \alpha = r \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin h}{\cos h},$$

oder nach unserer Schreibweise

$$r \cdot \sin \alpha = r \cdot \text{tang}\, \varphi \cdot \text{tang}\, h = r \cdot \frac{\text{tang}\, \varphi}{\text{cotg}\, h}.$$

Die zwei Größen tang $\varphi$ und cotg h — oder nach arabischer Schreibweise $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ und $\frac{\cos h}{\sin h}$ — sind aber leicht aus den Schattenlängen eines Gnomons zu ermitteln, bzw. aus den Schattentafeln herauszulesen. Zu Beginn des Widders ist, falls q die Höhe des Gnomons bedeutet, die Länge des Mittagsschattens = q · tang $\varphi$. Und ebenso ist die Größe q · cotg h die Schattenlänge zur Zeit der Beobachtung. In diesem Beispiel sehen wir, wie weit die arabische Mathematik, bzw. Astronomie, die Tangente und Kotangente in die Rechnung einbezog.

Fig. 4.



ad f.

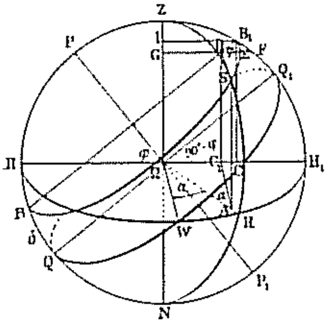
$$\begin{aligned} \text{Schatten zu Beginn des Widders} &= q \cdot \text{tang}\, \varphi , \\ \text{Schatten der Ergänzung der Höhe} &= q \cdot \text{tang}\, h , \\ \text{Produkt beider Schatten} &= q^2 \cdot \text{tang}\, \varphi \cdot \text{tang}\, h , \\ \sin \alpha &= \text{tang}\, \varphi \cdot \text{tang}\, h , \\ \text{folglich} \ \frac{\text{Produkt}}{q^2} &= \sin \alpha . \end{aligned}$$

ad g. Auch für den allgemeinen Fall, daß die Sonnendeklination $\neq 0$ ist, sondern einen positiven oder negativen Wert hat, bedient sich Ibn Jûnis, ähnlich wie am Anfang, zur Ermittlung des Azimuts der sogenannten Projektionsmethode. Wir wollen den Sachverhalt an beistehender Fig. 5 erläutern. Wiederum sei $QQ_1$ der zum Horizont unter dem $\measuredangle\, 90° - \varphi$ geneigte Himmelsäquator. Parallel zu ihm läuft der Tageskreis der Sonne $BB_1$, dem für einen gegebenen Tag die (unveränderliche) Deklination $\delta$ zukommt, also

$$\text{arc}\, BQ = \text{arc}\, B_1Q_1 = \delta .$$

W ist wiederum der Westpunkt des Horizontes, $W\Omega$ die Äquinoktiale, von der aus das Azimut $\alpha$ zu zählen ist. Angenommen, die Sonne stehe augenblicklich in S, so ist arc $WR = \alpha$. Wir fällen zuerst das Lot SA, das in der Ebene ZSRN

Fig. 5.



liegt und deshalb auf den horizontalen Radius $\Omega R$ auftreffen muß. Ferner machen wir $AC_1 \perp HH_1$, dann ist notwendigerweise wie früher $C_1D = AS$ und $AC_1 = SD$, d. h. $ASDC_1$ ein Rechteck. Die Mittagshöhe der Sonne ist arc $B_1 H_1 = 90° - \varphi + \delta = 90° - (\varphi - \delta)$, die Höhe zur Zeit der Beobachtung = arc SR = arc $H_1 F$ = h. Zieht man noch $B_1 J \parallel GF \parallel HH_1$ und fällt auch von $B_1$ in der Meridian- oder Papierebene das Lot $B_1C$, so hat man zunächst:

$$B_1 \Sigma = \sin[90° - (\varphi - \delta)] - \sin h \qquad (\text{Radius } \Omega Q = 1)$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck $B_1 D \Sigma$:

$$B_1 \Sigma = B_1 D \cdot \cos\varphi\,, \qquad \text{mithin}$$

$$B_1 D = \frac{\sin[90° - (\varphi - \delta)] - \sin h}{\cos\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Anderseits ist nach Konstruktion

$$GD = \Omega C_1 = \Omega A \cdot \sin\alpha = \cos h \cdot \sin\alpha$$

$$\cos h \cdot \sin\alpha = \Omega C - \Omega C_1 \qquad = B_1 J - CC_1$$

$$= \cos[90° - (\varphi - \delta)] - D\Sigma = \cos[90° - (\varphi - \delta)] - B_1 D \cdot \sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

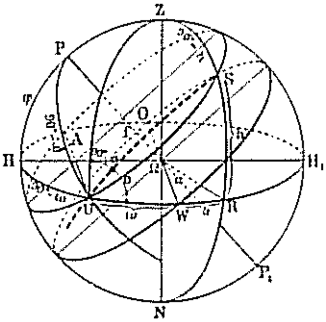
Setzt man nunmehr den Wert von $B_1 D$ aus (1) in (2) ein, so resultiert:

$$\sin\alpha = \frac{\cos[90° - (\varphi - \delta)] - \dfrac{\sin[90° - (\varphi - \delta)] - \sin h}{\cos\varphi} \cdot \sin\varphi}{\cos h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

welche Formel der algebraische Ausdruck des Textes unter g) ist, wobei der Autor allerdings vergessen hat, daß das im Gedächtnis Bewahrte auch mit dem Sinus der Ortsbreite zu multiplizieren ist. Durch Vereinfachung von (3) erhält man leicht den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie, angewandt auf das Dreieck Zenit—Pol—Sonne, aber weder **Al-Battānī**, noch **Ibn Jûnis** haben den Satz in seiner Allgemeinheit erkannt und angewandt¹).

ad h. Löst man Formel (3) im Falle g) auf, so findet man

Fig. 6.



$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi \cdot \sin h - \sin\delta}{\cos\varphi \cdot \cos h} = \frac{\dfrac{\sin\varphi \cdot \sin h}{\cos\varphi} - \dfrac{\sin\delta}{\cos\varphi}}{\cos h} \quad (1)$$

Der Minuend des Zählers ist der Ichtilāf des Horizontes; die Bedeutung des Subtrahenden ergibt sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck HPU der nebenstehenden Fig. 6 in der alles die frühere Bedeutung hat. U ist der Untergangspunkt der Sonne und WU die Abendweite $\omega$, die auch gleich der Morgenweite AO ist. Aus genanntem Dreieck folgt unmittelbar:

$$\sin\delta = \sin\omega \cdot \cos\varphi\,,$$

$$\sin\omega = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}\,.$$

so daß (1) sich schreiben läßt

$$\sin\alpha = \frac{\text{Ichtilāf} - \sin\omega}{\cos h}\,,$$

womit der Text zu h aufgehellt ist.

---

¹) Bei **Al-Battānī** findet sich die Regel anders dargestellt (indische Methode), doch auch so, daß sie auf den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie führt. (Kap. IX des Opus astronomicum.) Vgl. dazu die Bemerkungen A. v. **Braunmühls** in seinen Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, Leipzig 1900, S. 53, und von demselben Autor: „Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie", Nova Acta, Abhandlungen d. Kais. Leopold-Carol-Deutschen Akademie d. Naturforscher, Halle 1809, S. 24ff. (71. Band.)

ad i. Sinussatz im schiefwinkligen Dreieck Zenit—Pol—Sonne.

ad k. Formel (1) läßt sich auch so schreiben:

$$\sin \alpha = \frac{\left(\sin h - \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}\right) \sin \varphi}{\cos h \cdot \cos \varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und für $\alpha = 0$ wird $\sin h_{\alpha_0} = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}$, so daß man statt (2) auch hat

$$\sin \alpha = \frac{\sin h - \sin h_{\alpha_0}}{\cos h \cdot \cos \varphi} \cdot \sin \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

womit k) dem Verständnis keine Schwierigkeiten mehr macht.

ad l. Es sei S mit dem Untergangspunkt U durch den Großkreisbogen SU $=$ f verbunden, und $\measuredangle$ SUR sei jener östliche — in unserer Zeichnung westliche — Winkel. Die Anwendung des Sinussatzes auf das sphärische Dreieck SUZ gibt:

$$\frac{\sin f}{\cos h} = \frac{\sin UR}{\cos o}, \qquad \text{oder:} \qquad \sin UR = \frac{\sin f \cdot \cos o}{\cos h},$$

alles weitere klar.

ad m. Die Anwendung des sogenannten Pythagoräischen Lehrsatzes auf der Kugel auf das rechtwinklige sphärische Dreieck SUR gibt

$$\cos f = \cos h \cdot \cos UR$$

oder

$$\frac{\sin (90^\circ - f)}{\cos h} = \sin (90^\circ - UR).$$

Die Umsetzung auf Sinusfunktionen geschieht in Rücksicht auf die Verwendung der Sinustafeln.

ad n. Da W der Pol zum Meridian HPZH$_1$N ist, so ist WF $= 90^\circ$ und $\measuredangle$ ZFS $= 90^\circ$. Aus den zwei rechtwinkligen sphärischen Dreiecken ZSF und PSF folgt

$$\sin FS = \sin (90^\circ - \text{ba'd}) = \cos \delta \cdot \sin s$$

(s $=$ Stundenwinkel.)

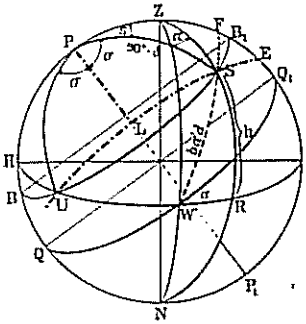
$$\sin \delta = \sin \text{ba'd} \cdot \cos PF$$

$$\sin h = \sin \text{ba'd} \cdot \cos ZF$$

Nun ist arc ZF auch $= \measuredangle$ ZWS, und der Sinussatz ergibt aus Dreieck ZSW:

$$\sin \alpha = \frac{\sin \text{ba'd}}{\cos h} \cdot \cos ZF \qquad \text{q. e. d.}$$

Fig. 7.



ad o. Zum Verständnis dieser Jûnisischen Regel sei durch S und U ein Großkreis gelegt, so daß das gleichschenklige, sphärische $\triangle$ PUS entsteht. Ein Perpendikel von P auf US trifft in der Mitte L auf, so daß arc LS $=$ arc LU $=$ y, der zugehörige Dâ'ir $= \sigma$ ist. Aus $\triangle$ PLS folgt

$$\sin y = \cos \delta \cdot \sin \sigma,$$

und aus $\triangle$ URS: $\cos 2y = \cos h \cdot \cos UR$, womit man UR findet usw.

ad p. Bildet man in (1) S. 110 das Produkt

$$\sin \alpha \cdot \cos h = \frac{\sin \varphi \cdot \sin h}{\cos \varphi} - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi},$$

und setzt es $=$ Aṣl[1]), so kann man auch schreiben

$$\text{Aṣl} = \text{Ichtilâf} - \sin UR \qquad \text{usw.}$$

---

[1]) Aṣl $=$ Wurzel, Ursprung.

# Abhandlung des al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haiṯam (Alhazen) über die Bestimmung der Richtung der Qibla[1].

Von

**Carl Schoy.**

In der 2. Sure (سورة البقرة) des Qu'rān[2]) spricht Muḥammed von der Gesichtswendung beim Gebet, d. i. der Innehaltung der Blickrichtung zur Ka'ba in Mekka. Diese Richtung wird Qibla genannt, von *qibal*-Vorderseite, weil der Betende die Vorderseite einer kleinen vertikalen, (mit der ewigen Lampe geschmückten) Wand anblickt, deren Spur senkrecht zur Mekkarichtung läuft. Allerdings ist die Orientierung nach dem Heiligtum während des Gebetes nicht arabischen, sondern jüdischen Ursprungs. Anfänglich wandte auch Muḥammed beim Gebet sein Antlitz nach Jerusalem, ja die älteste Moschee zu Medīna ist nach Jerusalem orientiert. Erst am 16. Januar 624 n. Chr. änderte der Prophet die Qibla, d. i. die Gesichtswendung zur heiligen Stätte, dahin ab, daß von jetzt ab sich alle Muslime bei den fünf täglichen Gebeten nach der Ka'ba zu Mekka richteten[3]).

Schon frühzeitig wurde die Mekkarichtung auf dem Zifferblatt der Horizontalsonnenuhr (البسيطة) vom arabischen Astronomen,

---

1) Nach dem Oxforder Manuskript Selden Arch. A. 34 (= 877, $4^0$. des Catal. cod. mscr. orient. biblioth. Bodleyana a Joh. Uri conf. P I, Oxon. 1787) aus dem Arabischen übersetzt von Studienrat und Privatdozent Dr. phil. nat. Carl Schoy, Doktor der Technischen Wissenschaften, in Essen a. d. R.

2) Die diesbezügliche arabische Stelle (Qu'rān, Ausgabe von G. Flügel, Lips. 1841, Sure 2, 139) lautet: قد نرى تقلب وجهک فى السمآء فلنولينک قبلة ترضاها فول وجهک شطر المسجد الحرام وحيث ما كنتم فولوا وجوهكم شطره.

3) Daß Qibla am besten mit „Gesichtswendung zur Ka'ba" übersetzt wird, folgt aus der Sprache eines der hervorragendsten arabischen Astronomen, des Kairiners Ibn Yūnus († 1009). Die Überschrift des 28. Kapitels seiner berühmten Ḥākimitischen Tafeln lautet: فى معرفة سمت القبلة وهو التوجه الى الكعبة [Mscr. Hunt. 331 = 298 P II Cat. d. Bodley. Oxford fol. $66^r$].

der gleichzeitig Diener der Religion war, für den öffentlichen Gebrauch verzeichnet. Der Astronom hatte Rechnung darüber anzustellen, bei welcher Sonnenhöhe der Schatten des Uhrzeigers täglich in die Richtung der Qibla fiel. Eine solche Höhentafel (جدول ارتفاع سمت القبلة) findet man bei **Ibn Yūnus** für seinen Wohnort Kairo berechnet. Sie schreitet im Argument von Grad zu Grad in der Sonnenlänge fort[1]). Ich habe sie in mein Buch: „Arabische Sonnenuhrkunde"[2]), das sich im Druck befindet, aufgenommen. Für alle weiteren Details über die Qibla möchte ich auf dies Buch verweisen.

Die Richtung nach Mekka stellt sich an einem beliebigen Ort als Abweichung (انحراف) vom Ortsmeridian dar und ist in Syrien etwa südlich (قبلى). Um diesen Winkel der Abweichung ($\alpha$) vom Ortsmeridian zu finden, bedarf man der Kenntnis der geograpischen Breite Mekkas ($\varphi_2$) und der des betreffenden Ortes ($\varphi_1$), sowie ihres Längenunterschiedes ($\lambda$). Die Anwendung des sog. Kotangentensatzes der sphärischen Trigonometrie auf das Kugeldreieck der Erdoberfläche: Mekka — Ort — Erdpol liefert diesen Winkel in der Formel

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos \lambda - \cos \varphi_1 \cdot \operatorname{tang} \varphi_2}{\sin \lambda}.$$

Bekanntlich war aber die Trigonometrie der Araber noch nicht so weit ausgebildet, als daß sie eine allgemein giltige Regel für die Lösung dieser Aufgabe kannten. Vielmehr begnügten sich die früheren arabischen Mathematiker und Astronomen mit einer angenäherten (vereinfachten) Lösung der Bestimmung des Azimuts der Qibla, die umso genauer ausfiel, je geringer die Dimensionen des besagten sphärischen Dreiecks waren. Diese Methode läßt sich frühestens bei **Al-Battānī**[3]) nachweisen, sodann bei **Ibn Yūnus** der aber ausdrücklich betont, daß sie nicht ganz genau sei[4]), und endlich bei **Al-Ǧaǧmīnī**[5]). Die strenge Behandlung unserer Aufgabe habe ich u. a. bei **Abū 'l Wefā' al-Būzǧānī** († 998) gefunden, von dessen Almagest mir die Herren **Baron Carra de Vaux** (Paris) und Prof. **Hch. Suter** (Arlesheim) in dankenswertester Weise die entsprechenden Photographien zu vermitteln die Güte hatten[6]),

---

[1]) Mscr. Hunt. 331 fol. $119^{r}$ und $120^{v+r}$.

[2]) Teil aus dem Werke von E. v. **Bassermann-Jordan**: „Geschichte der Zeitmessung und der Uhren" (München).

[3]) Opus astronomicum (lat. Übers. von C. A. **Nallino**, 1903) I, p. 137. (Vgl. auch **Delambre**, Histoire de l'astronomie du moyen âge, Paris 1819, pag. 54.)

[4]) Oxforder Mscr. II, 298 fol. $118^{r}$.

[5]) Die Astronomie des Maḥmûd ibn Muḥammed ibn 'Omar al-Ǧaǧmînî, deutsch von **Rudloff** und **Hochheim**, Leipzig 1893, S. 37.

[6]) Mscr. 2494, fol. $66^{r}$ ff. des Catal. d. mscr. arab. d. l. biblioth. nat. par M. Le Baron de Slane, Paris 1883—95.

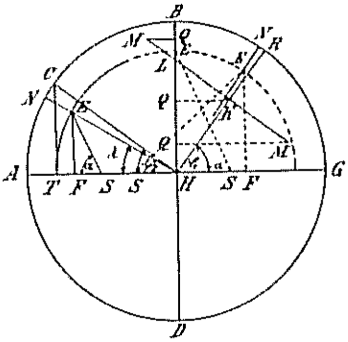
sodann bei Ibn Yūnus[1]) und — last not least — bei Ibn al-Haiṯam. Freilich nimmt unser Autor auf die astronomische Praxis dabei keine Rücksicht. Seine Darlegungen haben, wie wir sehen werden, fast nur ein mathematisches Interesse und zeigen, mit welcher Meisterschaft der treffliche arabische Gelehrte auch schwierigere trigonometrische Probleme rein geometrisch zu bewältigen verstand.

Die Handschrift ist nicht gerade leserlich, infolge des oftmaligen Fehlens der diakritischen Punkte. Auch die Figuren sind wenig korrekt. Die 2. und 3. Textfigur sind von mir hinzugefügt. Ich habe den weitschweifigen und sich oft wiederholenden Text ohne Auslassungen übersetzt. Bevor ich die Verdeutschung folgen lasse, möchte ich nicht verfehlen, auch den Herren Dr. C. van Arendonk (Leiden) und Dr. Cowley (Oxford) für die freundliche Vermittlung der Photos geziemend zu danken, ebenso gilt mein Dank meinem (am 27. Jan. d. J. verstorbenen) verehrten Lehrer und Freunde Prof. C. F. Seybold für die Entzifferung einiger schwer lesbaren Stellen.

fol. 121r Im Namen Gottes des barmherzigen Erbarmers!

### Abhandlung von al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haiṯam über die Bestimmung der Richtung der Qibla.

Wir hatten (ursprünglich) eine Abhandlung über die Festsetzung der Qiblarichtung an allen Erdorten nördlicher und südlicher Breite im Wege der Berechnung sowohl, als auch des geometrischen Beweises verfaßt. Später bot sich uns diese abgekürzte Methode der Ziehung der Qibla für alle Gegenden der nördlichen οἰκουμένη dar, welche keinerlei Berechnung erheischt, und so entwarfen wir darüber diese Dissertation.



1. Textfigur.

Wenn du das Azimut der Qibla an irgend einem Orte mit nördlicher Breite inbezug auf die Mittagslinie festsetzen willst, so nimm eine kupferne Platte oder hölzerne Tafel, schlage auf ihrer Fläche einen Kreis und teile dessen Umfang in 360 gleiche Teile. Es sei dies der Kreis ABGD mit fol. 122v dem Mittelpunkt H. Durch ihn ziehe die 2 sich rechtwinklig schneidenden Durchmesser AG und BD. Dann trage vom Ende des einen Durchmessers auf dem Kreisumfang einen Bogen gleich

---

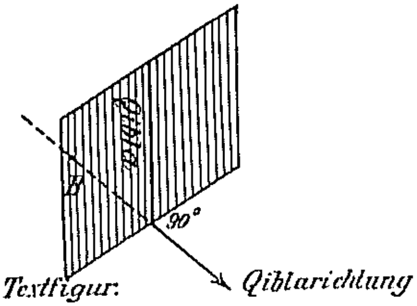
[1]) Oxforder Mscr. II, 298, fol. 66r.

der geographischen Breite des Ortes ab; es möge dies Bogen GR sein. Es werde der Halbmesser HR gezogen. Darauf trägst du vom anderen Ende desselben Durchmessers einen Bogen vom Kreisumfang ab, der gleich der Breite Mekkas ist; es möge dies Bogen AC sein. Und es werde vom Punkte C aus eine Linie // dem Radius AH gezogen. Sie ist $\perp$ AG und heiße CT. Ferner werde auf HR vom Punkte H aus eine Strecke gleich TC abgetragen; es ist Strecke HK. Durch den Punkt K werde die Senkrechte zu HR gezogen und im Punkte L zum Durchschnitt mit HB gebracht. Und es werde weiterhin auf dem Umfang des Kreises von A aus ein Bogen gleich dem Längenunterschied zwischen Mekka und dem gegebenen Orte abgetragen. In ihm gibt es ein Azimut, (gegen Mekka,) wenn die Längen verschieden sind. Der fragliche Bogen möge gleich AN sein. Mag nun Punkt N zwischen den zwei Punkten A und B, im Punkte B selbst, oder gar zwischen B und G liegen, du ziehst in jedem Falle den Radius NH und schlägst um den Mittelpunkt H einen Kreisbogen mit der Zirkelöffnung HT, bis daß dieser Bogen den Radius NH im Punkte E schneidet. Du ziehst durch den Punkt E eine Parallele zu BH: es sei die Strecke EF. Wenn jetzt N zwischen A und B liegt, so nehme man die Summe der Strecken $FH + KL$, wenn aber $KL < FH$, so ziehe man KL auf der Seite L geradlinig heraus und schneide auf ihr die gleiche Strecke FH ab, und falls fol. 122r endlich $KL > FH$ ist, so trage man darauf FH ab, und es wird der Rest (Abschnitt) $=$ KM sein. Es werde dann durch M die Parallele zu AG gezogen, welche BH in Q begegnen mag. Nunmehr wird von FG eine Strecke gleich MQ abgezogen, die ihrerseits $=$ FS ist. Zieht man noch FE, so ist ∢ ASE gleich dem Winkel des Azimuts (der Qibla).

Falls $KL = FH$ wird, so ist der Winkel des Azimuts $= \sphericalangle AHB = 90^0$, und die Linie (Richtung) des Azimuts ist dann die Ostwestlinie. Und wenn N mit B zusammenfällt, so liegt F in H. Es möge dann KQ // AG gezogen werden. Wir tragen (auf HG von H aus) $HS = KQ$ ab und ziehen SE. Dann ist der so entstandene Winkel HSE gleich dem Azimut (der Qibla). Und wenn endlich der Punkt N zwischen B und G liegt, so wird F zwischen G und H liegen. Dann werde LK nach der Richtung (über) K hinausgezogen, auf ihm (von K aus) $KM = HF$ abgetragen und sodann MQ // AG gemacht. Auf Strecke FA, bei Punkt F (rechts) beginnend, wird die letzte Strecke $MQ = FS$, nach S hin abgetragen. Und es wird S, welches jetzt in der Nähe von G liegt, mit E verbunden, womit sich der Winkel des Azimuts ergibt.

Wenn man den Winkel des Azimuts auf einer Zeichenfläche oder Tablette (*lauḥ*) erhalten hatte, so muß ein gleich großer (Winkel) auf der dem Erdhorizonte parallelen Fläche an der Stelle sein, wo wir das Azimut der Qibla wissen wollen. Und es werde in ihr auch die Mittagslinie gezogen, auf dieser ein passender Punkt ge- fol. 123v wählt und in demselben der Winkel FSE des Azimuts der Qibla angetragen.

Und wenn die Linie des Azimuts mit der Mittagslinie einen rechten Winkel ausmacht, so steht dieselbe auf der Nordsüdlinie senkrecht, und es ist dann die Ostwestlinie die Linie des Azimuts. Und wenn der Winkel des Azimuts spitz und gleich ∢ FSE ist, bezogen auf die Mittagslinie, so ist der spitze Winkel gleich dem Winkel, der sich auf der Zeichenebene ergab. Wenn $KL < HF$ ist, so liegt der Winkel des Azimuts nach Süden; im anderen Fall, und wenn der Winkel des Azimuts kein rechter ist, wird der Azimutwinkel nördlich sein. Falls die Länge Mekkas größer als die des Ortes ist und die Länge von Westen gezählt wird, liegt der Winkel nach Osten; falls aber die Länge des Ortes jene Mekkas an Größe übertrifft und die Länge von Westen gezählt wird, liegt der Winkel gegen Westen. Und wenn die Länge Mekkas größer ist als die des Ortes und die Länge von Westen gezählt wird, oder die Länge des Ortes größer als die Mekkas ist und die Länge von Osten gezählt wird, ist der Winkel ein östlicher. Und wenn du diesen Winkel als Richtungsunterschied zur Mittagslinie darstellen willst, so ziehe eine Gerade heraus, welche den Winkel einschließt, und sie ist die Linie des Azimuts der Qibla. Und wenn du auf dieser Linie eine Senkrechte errichtest und ziehest sie nach beiden Seiten von der Qiblarichtung heraus, so werde auf fol. 128r dieser Linie eine Wand senkrecht zum Horizont aufgebaut und in ihr die Qibla gezeichnet; sie ist die nach der Ka'ba gerichtete Qibla[1]).



2. Textfigur:

Und falls die Länge des Ortes dieselbe wie diejenige Mekkas, seine Breite aber größer als die Mekkas ist, so ist die Linie der (Qibla-)Richtung die Mittagslinie; die Qibla ist alsdann auf der Südseite. Und wenn die Breite des Ortes kleiner als diejenige Mekkas ist, so ist die Qibla auf der Nordseite, und dies ist das Bild der Ausführung:

Und was den Beweis zu dem anbetrifft, was wir soeben dargelegt haben, so ist's, wie wir beschreiben: Es sei ABGD (siehe Fig. 1 der Tafel) der Horizontkreis an dem Orte, dessen Qiblarichtung verlangt wird; sein Mittelpunkt sei H. Der Meridian sei ARG; Strecke AG sei die Nordsüdlinie. G sei der Nord-, A der

---

[1]) Der in B auf dem Gebetsteppich kniende Beobachter wendet dann, die Qibla der Wand anblickend, sein Antlitz nach Mekka. (S. die 2. Textfigur.)

Südpunkt; es werde durch den Punkt H auch die Ostwestlinie gezogen, und beide Linien stehen senkrecht aufeinander. Die Richtung fol. 124v
zum Zenit sei durch Punkt Q gegeben; sie ist senkrecht zur Horizontfläche. Ferner sei Kreis CB der Äquator, und KL sei der Parallelkreis, der durch das Zenit der Bewohner Mekkas geht. Punkt K liege auf dem Meridian des Ortes, und zwar südlich von R, wie es in der ersten Figur der Fall ist. Dies trifft zu, wenn die Breite des Ortes größer ist, als die Mekkas. Oder es möge Punkt K mit R zusammenfallen. Dies hat statt, wenn die Breite des Ortes gleich derjenigen Mekkas ist. Dieser Fall ist durch die zweite Figur veranschaulicht. Es möge endlich K nördlich von R liegen, ein Fall, der zutrifft, wenn die Breite des Ortes kleiner als jene von Mekka ist, und den die dritte Figur verbildlicht. Und es möge weiterhin Punkt S das Zenit der Bewohner Mekkas vorstellen. Der Richtungs-(Azimut-)kreis, der durch die beiden Punkte R und S geht, sei Kreis RSΣ. Es werde jetzt Linie ΣH gezogen; sie ist die Linie des Azimuts der Qibla, für den Ort mit dem Horizontkreis ABGD. Sodann werde CH gezogen und von dem Punkt K ein Lot auf CH gefällt: es sei dies Strecke KM; Punkt N sei der nördliche Pol des Äquators. Verbinden wir ferner H mit N, so ist ∢ CHN ein Rechter, da Bogen CN ein Kreisquadrant ist. Es werde jetzt auch Strecke KF parallel der Strecke CH gemacht; dann ist die Ebene KMHF einem Iṭṭilāʿ parallel1). Es ist KF = MH und fol. 124r
FH = KM, welch letztere Strecke der Sinus des Bogens KC ist. Bogen KC ist gleich der Breite Mekkas; dies wird klar, wenn man einen Großkreis durch N und S bis zum Äquator zieht; dann wird der Bogen, der zwischen S und dem Äquator liegt, gleich der Breite Mekkas und gleich Bogen KC sein. Und Linie KM ist gleich dem Sinus der Breite Mekkas und gleich HF. Strecke HR schneidet Strecke KF, weil KF // CH und HN der Strecke CH begegnet. Und Strecke KF wird in einem Punkte T geschnitten, der zwischen K und F liegen kann, wie in der ersten Figur; oder aber auf R, wie in der zweiten Figur, oder gar außerhalb R, wie in der dritten Figur. Nunmehr fälle man von S ein Perpendikel auf die Strecke KF. Es sei das Lot SE. Und mag E in der 1. Figur zwischen den 2 Punkten T und K oder auf T selbst liegen, wir diszernieren: Liegt er in der 1. Figur zwischen T und K2), so ist er südlich von RH. Und was das anbetrifft, daß er nördlich von RH liege, so trifft das für die 2. und 3. Figur stets zu. Mag E nun südlich fol. 125v
oder nördlich von RH liegen, du fällst von E ein Lot auf HR, welches = EQ sei. Es werde QS gezogen, und weil der Kreis KL ⊥ zur Ebene des Meridiankreises steht, so ist KF der gemeinschaftliche Abschnitt (Durchschnitt beider Ebenen). Und ES ist

---

1) Vielleicht: einer Grund- oder Bestimmungsebene. (Freundl. briefliche Mitteilung von Herrn Dr. M. Meyerhof in Hannover.)

2) Der arabische Text hat T und H.

⊥ KF, dem gemeinschaftlichen Abschnitt, und auch ⊥ zur Meridianebene. Und ∢ SEF ist ein rechter Winkel, und da EQ ⊥ HR, so ist EQ // dem Durchmesser AHG. Zieht man durch Q eine Parallele zu ES, so wird sie ⊥ zum Meridian und ⊥ zu HR sein, und dies Lot wird in der Ebene des Dreiecks SEQ liegen, weil QS in der Fläche der parallelen Senkrechten liegt; und es geht deutlich daraus hervor, daß RH ⊥ zur Fläche des Dreiecks SEQ und auch ⊥ zur Ebene des Kreises ABG steht, die der Horizont ist. Und die Dreiecksfläche SEQ ist // der Kreisebene ABG, und der Kreis RSΣ schneidet beide Ebenen in 2 parallelen Schnittlinien; es ist nämlich QS // HΣ. Du erkennst ferner, daß EQ // AHG ist und ∢ EQS = ∢ AHΣ, welch letzterer aber der Winkel des Azimuts ist. Und ∢ EQS ist also gleich dem Azimut, und dies ist der Winkel, den wir in der ersten Figur zeichnen; er, der gleich ∢ FSE der ersten (Text-)Abbildung ist und dies,
fol. 125r wenn Linie HN gleichliegend (نظير) mit HR der 1. Textfigur, und ∢ NHB[1]) = ∢ RHB von der 1. Textfigur ist. Und es ist △ HFT ∼ △ HKL der ersten Textfigur, und es ist auch arc CK = arc AC von der ersten Textfigur, weil jeder eine dieser beiden Bogen gleich der Breite Mekkas ist. Es gelten jetzt folgende Verhältnisgleichungen[2]):

$$\left.\begin{aligned}\frac{KM}{HM}&=\frac{TC}{TH}\\ \frac{HF}{FK}&=\frac{TC}{TH}\end{aligned}\right\}\ \text{letztere Buchstaben inbozug auf die erste Textfigur}$$

Ferner ist: arc SK = arc AN } dgl.

da jeder dieser beiden Bogen gleich der Längendifferenz ist; denn der Großkreis, den man durch N und S legen kann, ist der Meridiankreis Mekkas, und

arc AN = arc TE (von der ersten Figur des Textes)
arc SK = arc TE (von der ersten Figur des Textes)

Es ist aber F Mittelpunkt des Kreises SK, weil HN Achse (محوَر) aller Parallelkreise ist.

fol. 126v

$$\left.\begin{aligned}\text{Es ist ferner}\quad \frac{SE}{EF}&=\frac{EF}{FH}\\ \frac{KF}{FE}&=\frac{TH}{HF}\\ \text{und es ist schon}\quad \frac{HF}{FK}&=\frac{TC}{TH}\\ \frac{HF}{FE}&=\frac{TC}{HF}\end{aligned}\right\}\ \text{letztere Buchstaben bezogen auf die erste Textfigur}$$

---

[1]) Der arabische Text hat nur ∢ NH.

[2]) Diese Gleichheiten stehen im arabischen Text natürlich in Worten da.

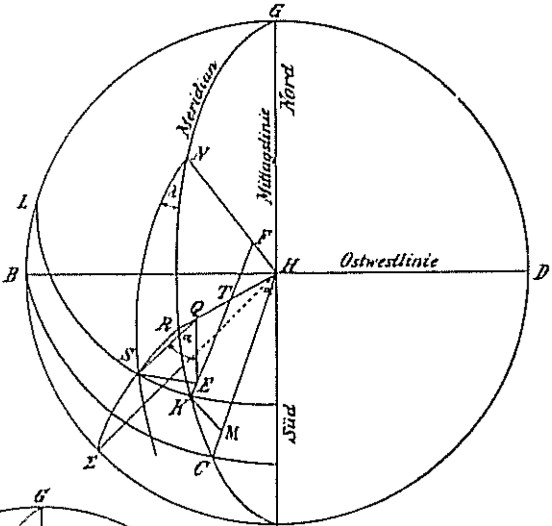


Fig. 1.

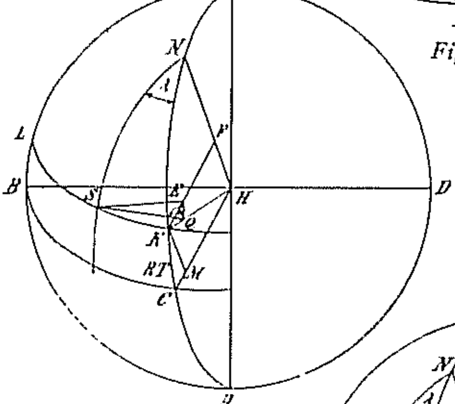


Fig. 2.

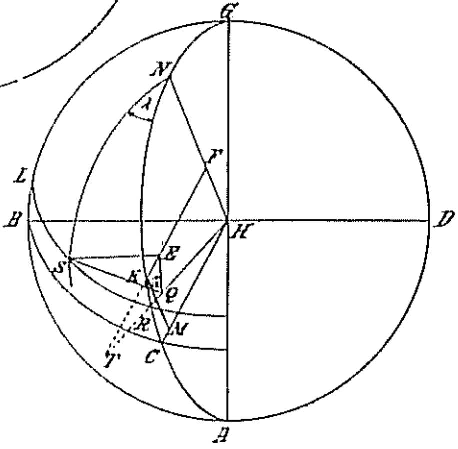


Fig. 3.

und HK der ersten Textfigur ist = TC, und KM der ersten Textfigur ist = HF und

$$\left.\begin{aligned} \frac{HF}{FF} &= \frac{TC}{KM} \\ \frac{HF}{FT} &= \frac{HK}{KL} \\ \frac{EF}{FT} &= \frac{KM}{KL} \\ \frac{FE}{TE} &= \frac{KM}{ML} \\ \frac{TE}{EQ} &= \frac{LM}{MQ} \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{letztere Buchstaben}\\ \text{bezogen auf die}\\ \text{erste Textfigur}\end{array}$$

da die beiden Dreiecke ähnlich sind. Und KM der ersten Textfigur ist = HF und MQ = FS. Und es verhält sich auch

$$\left.\begin{aligned} \frac{FE}{EQ} &= \frac{HF}{FS} \\ \frac{SE}{EF} &= \frac{EF}{FH} \\ \frac{SE}{EQ} &= \frac{EF}{FS} \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{letztere Buchstaben}\\ \text{bezogen auf die}\\ \text{erste Textfigur}\end{array}$$

Winkel EFS von der ersten Textfigur ist ein rechter, und es ist schon dargetan, daß auch Winkel SEF (der ersten Figur) ein rechter ist. Weiterhin sind sich die zwei Dreiecke SEQ (der ersten Figur) und EFS (der 1. Textfigur) ähnlich, und ∢ FSE (der ersten Textfigur) ist gleich ∢ EQS (der 1. Figur) und so wird klar, daß
fol. 126r ∢ EQS gleich dem Winkel des Azimuts ist, und auch ∢ ASE der 1. Textfigur ist gleich dem Winkel des Azimuts, und das ist es, was wir dartun wollten.

Und wenn das Lot SE, das man von S auf KF gefällt hat, in den Schnittpunkt T selbst fällt, der zwischen QH und KF liegt, so ist Punkt E mit T identisch, und SE ist T zum Meridian und ⊥ HR und // BH. Es wird die Senkrechte QBH in einer Ebene sein, während RH in jeder einen der beiden Ebenen liegt, und diese Ebene ist senkrecht zum Horizonte, weil RH senkrecht zum Boden steht. Wenn du diese Ebene nach jeder Richtung erweiterst, schneidet sie die Erdkugel in einem größten Kreise, der durch HR und S geht; er ist der Azimutkreis, der das Azimut der Qibla ausschneidet. Der gemeinschaftliche Durchschnitt ist Linie HB, d. i. die Ostwestlinie, und HB ist also auch die Linie des Azimuts, d. h. das Azimut der Qibla ist = 90°, und es ist klar, daß es sich so verhält, wenn Punkt E südlich von HR liegt, wie in der 1. Figur und $TF < FE$ ist. Wenn aber Punkt E nördlich von HR liegt, wie in der 3. Figur und wenn $FT > FE$ ist, so erhellt, daß fol. 127ᵛ

$$\frac{EF}{FH} = \frac{MK}{KH}$$

und

$$\frac{FT}{FH} = \frac{LK}{KH}$$

ist, wobei sich die Buchstaben der rechten Seite auf die erste Textfigur beziehen Diese Verhältnisse gelten, weil sie die Umkehrung der früheren sind [inbezug auf fol. 126ᵛ]. Auch ist KM der ersten Textfigur $= FH$.

Und falls $FT < FE$, so ist auch $KL < FH$.
Und falls $FT > FE$, so ist auch $KL > FH$.
Und falls $FT = FF$, so ist auch $KL = FH$,

weil $EF = FH$ und $FT = KL$ ist (die Buchstaben FH, KL auf die erste Textfigur bezogen).

Und wenn KL der ersten Textfigur $< FH$, so ist einleuchtend, daß $\sphericalangle$ FSE der 1. Textfigur gleich dem Winkel des Azimuts der 1. Tafelfigur ist, und dies wird der Fall sein, wenn die Breite des Ortes größer als die Mekkas ist.

Und wenn KL der 1. Textfigur $> FH$, so ist klar, daß $\sphericalangle$ ASE der Winkel des Azimuts von der 2. und 3. Tafelfigur ist, und dies, falls die Breite des Ortes $\leqq \begin{matrix}\text{die}\\ \text{der}\end{matrix}\Big\{$ Breite Mekkas ist.

Und es möge $KL > FH$ sein. Dies ist der Fall an der ersten Tafelfigur, wenn Punkt E nördlich von HR liegt, was für fol. 127ʳ gewisse Orte zutrifft, deren Breite größer als die Mekkas ist.

Und falls der Längenunterschied beträchtlich ist, so weist dies darauf hin, daß S in der 1. Tafelfigur weiter von K entfernt ist; es kommt alsdann die Senkrechte SE nördlich von HR zu liegen, und es ist $FE < FT$.

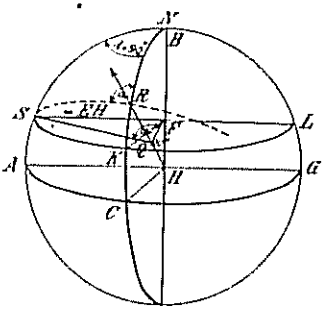
Wenn $KL = FH$ ist, so besagt das, daß der Winkel des Azimuts ein Rechter ist, und die Linie des Azimuts ist alsdann die Ostwestlinie und sie ist die Strecke, die letzten Endes ausschlaggebend (für die Determination) ist. Und dies ist der Fall an gewissen Orten, deren Breite größer als die Mekkas ist.

Wenn der Perpendikel SE auf den Punkt T fällt, so wird er $\perp HR$ sein und zwischen Norden und Süden liegen, und es erhellt daraus, daß $SQ \perp HR$ ist, und E und Q werden in den einen Punkt T zusammenfallen. Der Azimutkreis, welcher durch die Punkte R und S geht, schneidet den Horizont in der Linie BHD. Sie ist die Linie des Azimuts, die also mit der Ostwestlinie identisch ist.

Wenn der Perpendikel SE südlich von HR liegt, ist $\sphericalangle$ SQE südlich, und $\sphericalangle$ $AH\Sigma$, als Azimutwinkel, ist dann auch südlich; wenn aber das Lot SE nördlich von RH liegt, so ist der Azimut-

winkel nördlich. Wenn KL der 1. Textfigur < FH, so ist der Winkel des Azimuts südlich, ist aber KL > FH, so ist der Winkel des Azimuts nördlich, ist aber endlich KL = FH, so ist der Azimut-
fol. 128v winkel ein Rechter, wie das ja alles deutlich wird durch die geometrische Betrachtungsweise.

Und zusammengefaßt ist das, was wir bis jetzt dargelegt haben, das Folgende:



1. Textfigur.

Daß N der 1. Textfigur zwischen A und B liegt, ich meine, wenn die Längendifferenz kleiner als 90° ist, wird für die meisten Orte zutreffen. Wenn aber N mit B identisch ist, so liegt E auf BH. Die Senkrechte, die man in der 1. Textfigur von ihm fällen kann, ist alsdann EH. Punkt H ist Mittelpunkt des Kreises TE. Es entspricht ferner Punkt F der 3. Tafelfigur dem Punkt H der 1. Textfigur, und das Lot QK der 1. Textfigur entspricht dem Perpendikel der 3. Tafelfigur, der vom Punkte F auf die Linie HR gefällt wird. Dies Lot ist // dem Radius AH und = Strecke HS, weil wir HS = dem Lot KQ machten. Ferner ist der Perpendikel, den man nach F fällt, senkrecht zur Meridianebene; er verläuft ganz in der Ebene des Parallelkreises KSL (3. Textfigur), und wenn wir ihn bis zur Peripherie verlängern, ist er der Strecke EH gleich, d.i. dem Radius des Kreises TE, weil dieser der Sinus eines rechten Winkels ist. Und wenn wir das Ende (S) dieses Radius mit dem Fußpunkt (Q) des Lotes verbinden, das von F nach HR gefällt wurde, so ist das entstandene Dreieck (SFQ) dem Dreieck ESH ähnlich; der Winkel, der an der Linie HR liegt, ist der Winkel des Azimuts, weil die Längendifferenz ein Vierteilkreis ist. Das Ende des Radius, der von F ausgeht, führt zum Zenit der Bewohner Mekkas, und es wird die Verbindungslinie vom Ende dieses Radius (S) und dem Fußpunkt
fol. 128r des Lotes (Q), das auf HR senkrecht steht, [also SQ] ganz in der Fläche des Azimutkreises liegen, der durch R und das Zenit der Bewohner Mekkas geht, und sie (die Verbindungslinie SQ) ist der gemeinschaftliche Durchschnitt dieses Azimutkreises (mit dem Parallelkreis SKL). Es wird der Horizont dieser Linie (SQ) parallel sein. Das Lot, das von F auf HR gefällt ist, ist der Linie AH parallel, und der Winkel, der von diesem Lot (FQ) und der Linie, die in der Fläche des Azimutkreises liegt (SQ), gebildet wird, ist der Winkel des Azimuts; er ist gleich ∢ HSE der 1. Textfigur. So verhält es sich, wenn N zwischen den zwei Punkten B und G liegt. Dann liegt der Punkt M unterhalb (tiefer) als K. Es ist dies der Fall, wenn die Längendifferenz größer ist als ein Kreisquadrant,

da die Senkrechte, die von F ausgeht, rektangular zur Meridianebene steht, d. h. sie liegt in der Ebene des Parallelkreises; ihr Ende (S) auf dem Umfang des Parallelkreises; es ist das Zenit der Bewohner Mekkas. Und es wird die Linie, welche dies Ende mit dem Fußpunkt der Senkrechten verbindet, die man von F auf HR gefällt hat, ganz in der Ebene des Azimutkreises liegen; die Senkrechte selbst wird gleich MQ sein. Der Winkel, der zwischen dieser Senkrechten und der Linie, die ganz in der Ebene des Azimutkreises verläuft, liegt, ist der Winkel des Azimuts; er ist gleich dem Winkel FSE. Dabei beziehen sich die beiden ersten Buchstaben (F und S) auf den Zwischenraum HG der ersten Textfigur, in welchem sie liegen. Die ganze (Dreiecks-)Figur (FSE) ist der Winkel(raum) des Azimuts.

Und dies ist es, was wir dartun wollten, was wir an Theorie mitgeteilt haben, und die Darlegung gelangte zu dem Ziele, das wir uns in dieser Abhandlung gesteckt hatten.“

Diese ausführliche Behandlung des Gegenstandes durch den Autor bedarf wohl keines weiteren Kommentars. Ist seine Konstruktion des Winkels des Azimuts der Qibla richtig, so muß sich daraus die eingangs erwähnte Formel zur Berechnung von $\alpha$ ableiten lassen. Tatsächlich hat man der Reihe nach (den Radius des Kreises der 1. Textfigur $= 1$ gesetzt):

$$\mathrm{HT} = \cos\varphi_2; \quad \mathrm{FH} = \cos\varphi_2 \cdot \cos\lambda = \mathrm{KM}$$

$$\mathrm{CT} = \sin\varphi_2; \quad \mathrm{HK} = \sin\varphi_2$$

$$\mathrm{HL} = \frac{\mathrm{HK}}{\sin\varphi_1} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1};$$

$$\mathrm{KL} = \mathrm{HK} \cdot \operatorname{cotg}\varphi_1 = \sin\varphi_2 \cdot \operatorname{cotg}\varphi_1$$

$$\mathrm{ML} = \mathrm{KM} - \mathrm{KL} = \cos\varphi_2 \cdot \cos\lambda - \sin\varphi_2 \cdot \operatorname{cotg}\varphi_1$$

$$\mathrm{EF} = \cos\varphi_2 \cdot \sin\lambda$$

$$\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{ML}} = \frac{\mathrm{HK}}{\mathrm{HL}};$$

$$\mathrm{MQ} = \mathrm{ML} \cdot \frac{\mathrm{HK}}{\mathrm{HL}} = \cos\varphi_2 \cdot \cos\lambda \cdot \sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\mathrm{FS}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{EF}} = \frac{\cos\varphi_2 \cdot \cos\lambda \cdot \sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1}{\cos\varphi_2 \cdot \sin\lambda}$$

$$= \frac{\sin\varphi_1 \cdot \cos\lambda - \cos\varphi_1 \cdot \operatorname{tang}\varphi_2}{\sin\lambda}, \text{ q. e. d.}$$

# Über eine arabische Methode, die geographische Breite aus der Höhe der Sonne im 1. Vertikal („Höhe ohne Azimut“) zu bestimmen.

Zum 60. Geburtstag des Herrn Prof. Dr. E. **Anding** in Gotha, nach der arabischen Handschrift 143 (Leiden) dargestellt.

Von C. Schoy in Essen a. d. R.

Die ältere Zeit kennt in der Hauptsache nur zwei Verfahren zur Ermittlung der Ortsbreite. Das geläufigste war die Messung der Meridianhöhe der Sonne. Die Erhebung der Sonne bei ihrem Durchgang durch den Mittagskreis ist gleich der Äquatorhöhe vermehrt oder vermindert um die augenblickliche Sonnendeklination. Und da die Äquatorhöhe die Ergänzung der Polhöhe oder Ortsbreite zu 90° ist, so kennt man bei bekannter Sonnendeklination auch die Polhöhe. Die zweite Methode, nämlich die Mittelbildung aus der oberen und unteren Kulminationshöhe eines Zirkumpolarsterns, die sich bereits bei **al-Ḥuwârizmi**[1]) und **al-Battâni**[2]) nachweisen läßt, dürfte praktisch kaum eine Rolle gespielt haben, wenigstens findet sich in der älteren Literatur kein Beispiel einer Polhöhebestimmung letzterer Art. Man hielt sich im konkreten Fall wohl immer an die Sonne. Die arabischen Astronomen sind dann so verfahren, daß sie auf einer möglichst wagerechten und ganz glatten Marmorplatte einen rund gedrehten, spitz auslaufenden Stift (miqjâs) genau senkrecht errichteten und dessen Schatten beobachteten, bis er die vorher durch den Fußpunkt des Schattenwerfers gezogene Mittagslinie mit seiner Spitze traf. In diesem Augenblick wurde die Höhe des Sonnenmittelpunktes mit einem Astrolab genommen. a).

Der Kairiner Astronom **Ibn Yûnus** († 1009 zu Kairo) aber lehrt in seinen **Ḥâkemitischen Tafeln** — nach meiner Ansicht dem bedeutendsten Werk arabischer Astronomie — noch mehrere andere höchst originelle Methoden zur Bestimmung der Ortsbreite, an deren Bekanntmachung die Geschichte der mathematischen Geographie ein Interesse hätte. Sie sind teils in der arabischen Handschrift Nr. 143 des **Legatum Warnerianum** zu Leiden, teils in dem Mscr. **Hunter** 331 der Bodleyana zu Oxford enthalten. Durch die gütige Vermittlung der Herren Dr. C. **van Arendonk** in Leiden und Dr. A. **Cowley** in Oxford kam ich in den Besitz der Photos dieser wichtigen Partien des Yûnusischen Werkes.

Die geographische Breite seines Wohnortes Kairo (genauer **Fusṭâṭ**[3]) oder Altkairo, was südwestlich von der Zitadelle, westlich von **al-Qarâfa** lag und heute ein Trümmerfeld ist), hat **Ibn Yûnus** in mehrfacher Weise bestimmt und dieselbe zu 30° oder auch zu 30° und einige Minuten gefunden. Diese Bestimmungen sind daher äußerst exakt, wo die Breite Fusṭâṭs faktisch genau 30° ist. Ebenso wie andere arabische Astronomen, maß er die Meridianhöhe der Sonne in Kairo, sowohl bei Beginn des Krebses, als auch bei ihrem Eintritt in den Kopf des Steinbocks und leitete daraus die Ortsbreite zu 30°, die Ekliptikschiefe zu 23° 35' ab. Aber er verwandte daneben auch ein anderes Verfahren, die Breite Kairos zu ermitteln, dessen Urheber er wohl selbst ist, nämlich die höchst merkwürdige Praktik, statt der Meridianhöhe **die Höhe der Sonne im Ostwestkreis zur Zeit des Sommersolstitiums** zu messen, oder, wie die Araber sich ausdrücken: **die „Höhe ohne Azimut“**, da sie dies, entgegen uns, von der Ostwestlinie aus zählen.

Da die Methode der Breitebestimmung aus Beobachtungen im 1. Vertikal in der praktischen Astronomie vor kaum 100 Jahren zum ersten Male angewandt worden ist, so möchte ich in Anbetracht der nahezu 1000jährigen Priorität des **Ibn Yûnus** seinen Anteil möglichst vollständig zur Geltung bringen, und so führe ich alle Stellen, wo er von dieser Methode spricht, wörtlich an.

Auf S. 224 und 225 des Leidener Mscr., Kap. XI, erfährt man über die Ziehung der Ostwestlinie und die Höhe ohne Azimut zuerst Näheres. Es heißt dort:

---

[1]) Die astronomischen Tafeln des Muḥ. ibn Mûsâ al-Khwârizmî von H. **Suter**, Kopenhagen 1914, S. 18 und 71.

[2]) al-Battânî sive Albatenii Opus Astronomicum a C. A. **Nallino**, Mailand 1903, I S. 15, Kap. VI.

[3]) Der Name Fusṭâṭ kommt von fossatum = umwallt, ummauert. Er bedeutet hier nicht „arab. Bezeichnung für Zelt“, wie **Franz Pascha** in seinem hübschen Werkchen „Kairo“, Leipzig 1903, S. 3, sagt.

„Und ich habe oftmals meine Aufmerksamkeit auf die Höhe ohne Azimut zu Beginn des Krebses gelenkt, auf die Azimute vieler Höhen im Osten und Westen, und ich bin beiden mit äußerster Gründlichkeit nachgegangen. Ich fand diese Ermittlung mit dem, was sich mir hinsichtlich der Deklination durch die Beobachtung ergab, und diese theoretischen Untersuchungen legen für die Beobachtung Zeugnis von der Richtigkeit ab. Und ich habe diese zwei Stellen auf der Himmelskugel ausgewählt, weil, wenn der Ort der Sonne an ihnen um viele Minuten von der Wahrheit abweicht, dies die Untersuchung nicht merklich beeinträchtigt, wegen der geringen Abweichung der Sonne an diesem Tage. Deshalb ist die Breite Kairos 30° 3′.

Und bei der Zeichnung der Ostwestlinie für die Ermittlung der Höhe ohne Azimut ist eine Schwierigkeit die, daß, wenn sie um ein Merkliches von der Wahrheit abweicht, die Höhe ohne Azimut östlich und westlich verschieden ist. Und wer sich dieser Höhe zu Beginn des Krebses bedienen will, der möge die Ostwestlinie auf einer horizontalen Marmorfläche, die sehr ebenmäßig und aus ganz weißem Marmor ist, ziehen, für den Ein- und Austritt des Schattens einen oder zwei Tage vorher. Und weil der Betrag, um den die Sonne an diesem Tage ihre Deklination ändert, vom Eintritt bis zum Austritt des Schattens (bezüglich der Ostwestlinie) ganz unmerklich ist, so ist auch ihre Höhe beim Schattenaustritt keine meßbar verschiedene (von der des Eintritts).

Dann stelle auf die Marmorplatte einen Gnomon (šaḫṣ), der ganz senkrecht steht, genau richtig hin, und zwar ehe die Spitze des Schattens die Linie erreicht. Dann warte, bis die Schattenspitze die Linie erreicht, und schreibe die Sonnenhöhe in dem Augenblick auf, bewahre sie im Gedächtnis und tu ebenso nach dem zawāl (Kulmination, Abstieg) der Sonne. Wenn alsdann die beiden Höhen übereinstimmen, so ist die Ostwestlinie richtig, wenn sie aber voneinander abweichen, so ist sie nicht richtig. Sind nun beide Höhen richtig, so füge man zu der Höhe noch die Höhenparallaxe, **b)**, hinzu, und was sich dann ergibt, das ist die Höhe ohne Azimut. Doch bei Gott ist der Erfolg.

Und wenn einer die Stelle, wo die Höhe beim Ein- und Austritt des Schattens gemessen wird, mit einem Kreis umgibt, so wäre, falls er die Ostwestlinie mittels des indischen Kreises, **c)**, ziehen wollte, dies das beste. Nun hat mancher von den Alten — ich meine von denen, die vor Ptolemaeus waren —, sich auf das Messen durch den Schatten der Tagesmitte verlassen; aber der Schatten gibt nicht die Höhe des Sonnenmittelpunktes wegen eines Fehlers, den ich noch erwähnen werde, wenn ich von den Schatten handle, **d)**, so Gott will. Auch Hermes, **e)**, und andere haben das schon erwähnt, ich meine das Messen mittels der Schatten.

Ich sage also — doch bei Gott ist der Erfolg — siehe ich habe in diesem zīǧ (astronom. Tafelwerk) eine Abhandlung dargestellt, über die Ortsbreite und die größte Deklination (beide herausgebracht) aus dem Schatten der Meridianhöhe zu Beginn des Steinbocks und dem Schatten der Höhe ohne Azimut zu Beginn des Krebses. Und dies ist eine Abhandlung, die einen verständigen Mann verlangt, der da weiß, was das Messen verlangt. Und beim Messen muß er zunächst ein richtiges Instrument haben; dann gebrauche er es mit Verstand und vollende seine Arbeit in richtiger Reihenfolge, und bei Gott ist der Erfolg."

Zu diesen Ausführungen des Autors sei bemerkt: Er gibt für die Berechnung der Höhe ohne Azimut im 18. Kapitel der Leidener Handschrift, S. 359, mehrere Vorschriften, die in unsere Formelsprache übersetzt, sich so ausnehmen:

$$\sin \eta = \frac{\sin \varepsilon \cdot \sin \lambda}{\sin \varphi} \quad \ldots \quad (\mathrm{I})$$

$$\sin \eta = \frac{\sin 90^\circ \cdot \sin \delta}{\sin \varphi} \quad \ldots \quad (\mathrm{II})$$

$$\sin \eta = \frac{\sin \mathrm{m} \cdot \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad \ldots \quad (\mathrm{III})$$

$$\sin \eta = \frac{\sin \mathrm{m} \cdot \cos (\varphi - \delta)}{\sin (\varphi - \delta) + \sin \mathrm{m}} \quad \ldots \quad (\mathrm{IV})$$

$$\sin \eta = \cos (\varphi - \delta) - \sin (\varphi - \delta) \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad \ldots \quad (\mathrm{V})$$

wobei $\eta$ die Höhe ohne Azimut, $\varepsilon$ die Ekliptikschiefe, $\delta$ und $\lambda$ Deklination und Länge der Sonne, m die Morgen- oder Abendweite und $\varphi$ die Ortsbreite bedeutet. Den Beweis der Formeln gibt der Autor nicht; ich möchte ihn hier übergehen und für die geometrische Ableitung sämtlicher fünf Ausdrücke auf Delambre[1]) verweisen. Wie man sieht, berechnet sich die Höhe $\eta$ stets aus dem Sinus. Damals war die Sinustafel für die numerische Ausrechnung fast ausschließlich in Verwendung; nur ganz vereinzelt wird auch die Schattentafel (Tangens- oder Kotangenstabelle) benutzt, **f)**. Nach (I) hat Ibn Yûnus eine Tafel für $\eta$ berechnet, unter der Voraussetzung, daß $\varphi = 30°$; $\varepsilon = 23° \ 35'$ ist und die Sonnenlänge $\lambda$ in ganzen Graden fortschreitet. Ich gebe nebenstehendes kleine Bruchstück derselben. Daraus erkennt man, daß $\eta$ um die Tage des Sommersolstitiums herum in Kairo recht beträchtlich ist, die Refraktion also für die Genauigkeitsverhältnisse der damaligen Zeit zu vernachlässigen war. Es ist mithin die Verwendung der Höhe ohne Azimut in niedrigeren Breiten zur Ermittlung von $\varphi$ ohne Bedenken zulässig.

| $\lambda$ | $\eta$ | | |
|---|---|---|---|
| | ° | ′ | ″ |
| 77° | 51 | 13 | 43 |
| 78° | 51 | 30 | 26 |
| 79° | 51 | 45 | 50 |
| 80° | 51 | 59 | 52 |
| 81° | 52 | 12 | 56 |
| 82° | 52 | 24 | 32 |
| 83° | 52 | 33 | 50 |
| 84° | 52 | 43 | 47 |
| 85° | 52 | 51 | 19 |
| 86° | 52 | 57 | 32 |
| 87° | 53 | 2 | 24 |
| 88° | 53 | 5 | 53 |
| 89° | 53 | 8 | 1 |
| 90° | 53 | 8 | 43 |

Die zwei im Sperrdruck gegebenen Sätze können sich wohl nur auf die Ortsbreite beziehen, die „geringe Abweichung" auf die Konstanz der Sonnendeklination in der kurzen Zeit, während der die Sonne in Kairo an diesem Tage die Südseite eines Ostwestvertikals bescheint. Daß aber die Höhe ohne Azimut in unserm Fall für die Breitebestimmung ganz ausgezeichnet ist, erkennt man sogleich, wenn man (II) nach der Breite auflöst. Es folgt

$$\sin \varphi = \frac{\sin \delta}{\sin \eta}$$

und daraus durch logarithmische Differentiation

$$\operatorname{cotg} \varphi \cdot d\,\varphi = \operatorname{cotg} \delta \cdot d\,\delta - \operatorname{cotg} \eta \cdot d\,\eta.$$

Bei konstant gehaltenem $\delta$ vereinfacht sich diese Fehlergleichung, und es wird (da $d\delta = 0$)

$$d\,\varphi = -\operatorname{tang} \varphi \cdot \operatorname{cotg} \eta \cdot d\,\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

Mit den Zahlenwerten $\varphi = 30°$, $\eta = 53° \ 8'$ erhält man aus (VI)

$$d\,\varphi = -0.433 \cdot d\,\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII)}$$

Das Minuszeichen erklärt sich daraus, daß mit wachsender Ortsbreite die Höhe ohne Azimut abnimmt. Es bringt also nach (VII) für die Breite von Kairo ein Fehler in der Höhe ohne Azimut nur etwa den 0.4 fachen Fehler in der Breite hervor; ist also $\eta$ beispielsweise 2′ falsch, so ist der Fehler in $\varphi$ nur etwa 51″.

Wie indessen Ibn Yûnus zu seiner Wahrnehmung kam, daß ein Fehler in der Höhe ohne Azimut für die Breite in geringerem Grade fühlbar sei, lehrt die interessante geschichtliche Notiz, die er uns über die Breitebestimmung Kairos hinterließ. Es heißt im Kapitel XI, S. 241:

„Und schon seit längerer Zeit vertraten die Gelehrten unserer Stadt die Ansicht, daß deren Breite 29° sei. Doch es wurde mir berichtet, daß ihre wissenschaftliche Art weniger trefflich zu sein schien als diese, bis daß ich sie schließlich verwarf und in Widerspruch geriet mit der ganzen Gelehrtenzunft unserer Zeit, die da behauptet, daß die Meridianhöhe auf 29° hinweise. Und ich bemerke, daß auch ich sie maß, und ich wählte dazu den Abstieg der Sonne in den Kopf des Krebses, um das Maximum der Sonnendeklination zu haben, weil dann bei der Höhe ohne Azimut und auch bei der Meridianhöhe **g)** das nicht in Erscheinung tritt, was sonst deutlich wahrnehmbar wäre, auch wenn der Ort der Sonne um viele Minuten von dem durch Rechnung ermittelten abweicht. Alsdann zog ich gegen die Zeit des Eintritts der Sonne in den Kopf des Krebses die Ostwestlinie mittels des indischen Kreises an dieser Stelle und verbesserte sie so lange, bis es zuletzt zwischen dem Abstand des Eintritts des Schattens vor der Mittagslinie und dem Abstand seines Austritts keinen wahrnehmbaren Unterschied mehr gab. Und ich habe die Linien

---

[1]) Histoire de l'astronomie du moyen âge, Paris 1819, S. 114.

vorher genau untersucht, indem ich sie bei heiterem Wetter jeden Tag prüfte, bis daß ihre Richtigkeit außer Zweifel stand.

Darauf richtete ich auf der Ostwestlinie einen rund gedrehten Gnomon auf, prüfte ihn und untersuchte ihn ganz gründlich auf seine Richtigkeit. Und ich beobachtete die Spitze seines Schattens, bis daß sie in die Nähe der Linie gelangte. ‚Dann nahm ich die Sonnenhöhe mit einem Astrolabium, das Ḥâmid ibn 'Alî Mardinî[1]) verfertigt hatte, gleich der augenblicklichen Höhe; ich beobachtete sie beharrlich, und sie vermehrte sich noch ein klein wenig, bis daß die Schattenspitze des Gnomons auf die Ostwestlinie fiel, und jetzt war die augenblickliche Höhe etwas größer als 53°. Es bezeugt diese Messung, daß die Breite 30° oder sehr nahe daran ist. Ich hatte aber auch schon die Höhe ohne Azimut für die Breite von 29° ausgerechnet: sie betrug 55° 36′ 48″, in der Breite 30° dagegen ist sie 53° 8′ 45″, unter der Voraussetzung, daß die größte Deklination 23° 35′ ist.

Doch ich beobachtete auch den Schatten des miqjâs, bis daß seine Spitze die Mittagslinie erreichte, und maß die Meridianhöhe mit dem Astrolab selbst. Sie betrug korrigiert[2]). 83° 35′, und dies beweist wiederum, daß die Breite 30° ist. Und ich verwandte viel Sorgfalt und Mühe darauf und erlangte dadurch dies Resultat, und es wurde für die Bestimmung der Meridianhöhe an den meisten Orten bis zur Breite 30° in der gleichen Weise verfahren.

Und es fand die Messung auf dem Hause meines Großvaters Yûnus ibn 'Abd A'lâ statt — Gott erbarme sich seiner! — Alsdann wurde der Astronom Abû'l Farağ Aḥmed ibn 'Alî ibn al-Ḥasan, bekannt als Ibn aṭ-Ṭaḥḥân (Sohn des Müllers) darauf aufmerksam. Es war dieser Mann bewandert in den Zweigen der Wissenschaft (der Astronomie) und ein trefflicher Gelehrter; er wollte gern selber dabei sein, und so lud ich ihn dazu ein. Da tat er eine Äußerung, die keinen der Gelehrten befremden wird, nämlich die, daß für die Sonne der Verfasser der erprobten Tafeln die Ära ihrer Beobachtung schon fern liegt, und daß es wahrscheinlich sei, daß die Sonne ihren Ort, den sie zur Zeit der Schule jener eingenommen habe, bereits verlassen hätte. Aber woran ich nicht zweifle, das ist die Messung bei Beginn des Steinbocks, und der Grund dafür ist, daß keine Lücke, welche dazwischen liegt, bewiese, daß der Ort der Sonne dann schon etwas verändert ist.

Wie oben schon erwähnt, stand die Sonne damals im Beginn des Krebses. Wir warteten auf ihren Abstieg zum Beginn des Steinbocks, und Abû'l Farağ informierte den Abû'l Ḥasan Muḥammed ibn 'Abd al-Wâriṯ ibn al-Lubânî über das, was zwischen uns war. Da kamen sie (beide) mir zuvor. Es war noch ein Tag bis zum Eintritt der Sonne in den Kopf des Steinbockes, der Messung des Schattens und der Meridianhöhe, und es bemerkte Abû'l Ḥasan, daß der Schatten den Beweis dafür erbracht hätte, daß die Breite 29° sei. Wir versammelten uns am darauffolgenden Tage, dem Tag des Eintritts der Sonne in den Steinbock, auf dem Dach der Ğâmi' al-'atîq[3]), und wir bedienten uns zur Messung einer glatten Marmorfläche, die ich geprüft hatte; es war ihre Richtigkeit tadelfrei und nicht minder richtig die Wage[4]). Dann übten wir noch etwas Geduld im Nivellieren der Bodenfläche, bis daß sie uns ganz befriedigte, und nunmehr machten wir die Platte mit Gips fest. Wir fixierten auf ihr eine Marke und machten sie zum Mittelpunkt. Und ich erstellte einen Gnomon, (šaḫṣ) .... und ich erprobte ihn und fand (den Fehler) aus der Spitze seines Schattens durch Vorwärts- und wieder Rückwärtsdrehen h) gegen den Fingernagel; ich beseitigte seinen Fehler, indem ich eine Feile nahm, mit der er gefeilt wurde, bis er ganz fehlerlos war. Darauf maßen wir seinen Meridian-

---

[1]) Lesung des letzten Wortes nicht ganz sicher; es kann auch Marḍî heißen.

[2]) d. h. von der Höhenparallaxe der Sonne befreit.

[3]) d. i. die Moschee des (Feldherrn des Chalifen 'Omar) 'Amr ibn al-'Âṣ in Fusṭâṭ. Vgl. für nähere Details über diese älteste Moschee Kairos: Bädeker: Ägypten, 1913, S. 40 und Franz Pascha a. a. O. S. 4 ff.

[4]) Die Horizontalität der Flächen wurde u. a. durch Nivellieren mit einer Art Setzwage bestimmt, die man auf den verschiedensten Stellen aufsetzte. Vgl. E. Wiedemann: Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften X, Erlangen, 1906, S. 316 ff.

schatten und brachten damit die Breite heraus. Und ich behielt Recht gegen die beiden, die die Messung wiederholten, bis daß auch sie die Breite zu 30° fanden.

Und was mit dem Gnomon herausgebracht ward, wies darauf hin, daß die Breite kleiner als 30° ist, wegen der Hälfte des Sonnendurchmessers. Deshalb möchte ich auf das verweisen, was ich über den Schatten gesagt habe, weil das, was der Gnomon herausbrachte, 29° 43′ betrug, **i)**. Und so möge man nicht auf die Messung mit dem Instrument vertrauen, wenn man dies nicht wohl beachtet hat.

Nach Abû'l Farağ Aḥmed ibn 'Alî ibn al-Ḥasan, bekannt als Ibn aṭ-Ṭaḥḥân, stand es fest, daß die Breite 30° auf einer Mangelhaftigkeit des Schattenlaufs auf der über der Nordsüdlinie stehenden Vertikalsonnenuhr **k)** beruhte, auf deren Zifferblatt zeitliche (temporäre oder ungleiche) Stunden **l)** verzeichnet waren, und auf ihrer Aufstellung in al-Qarâfa in der Bani-Sarî'-Moschee[1] . . ."

Aus den für $\varphi_1 = 29°$ und $\varphi_2 = 30°$ gerechneten Höhen ohne Azimut: $\eta_1 =$ 55° 36′ 48″ und $\eta_2 = 53°$ 8′ 45″ war für Ibn Yûnus die Tatsache des geringen Einflusses einer falschen Höhe auf die Ortsbreite wohl augenscheinlich. Er wird also einfach so geschlossen haben:

Ändert sich $\eta$ um 2° 28′, so entspricht dies einer Änderung von 1° in $\varphi$
" " $\eta$ " 1° " " " " " " 0.405° in $\varphi$.

Aus diesem Resultat entsprang wohl der von mir in Sperrdruck gegebene Satz. Wir haben in Ibn Yûnus einen arabischen Gelehrten vor uns, dem sowohl die Genialität des Theoretikers als eine eminente praktische Begabung eigen war, und der beide in glücklichster Weise verband, und ich zweifle nicht, daß, wenn einmal der gesamte Inhalt der Ḥâkemitischen Tafeln dem Abendland erschlossen ist, das so beliebte Urteil von der subalternen arabischen Wissenschaft einem gerechteren Platz machen wird.

Zum zweiten Male findet die Höhe ohne Azimut für die Breitebestimmung im 22. Kapitel der Ḥâkemitischen Tafeln Berücksichtigung. Dort löst Ibn Yûnus die Aufgabe, aus der Höhe ohne Azimut und der Morgen- oder Abendweite die Polhöhe zu finden. Man sollte erwarten, daß er zur Lösung ohne weiteres die Formel III)

$$\sin \eta = \frac{\sin m \cdot \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad \mathbf{m)}$$

verwenden würde. Aber dem steht entgegen, daß sie die Ortsbreite $\varphi$ in 2 verschiedenen Funktionen enthält und daß der arabischen Mathematik der Begriff der Tangens- und Kotangensfunktion, losgelöst vom Schatten, gänzlich ferne lag[2]). Vielmehr gibt der Autor die Lösung:

$$\sin \varphi = \frac{\sin 90° \cdot \sin m}{\sqrt{\sin^2 m + \sin^2 \eta}}, \text{ (fol. 388)}$$

die aber zur Ermittlung von $\varphi$ nicht verwendet wird. Wiederum sieht man, wie die Formel für die Sinustafel paßt.

Eingangs meines Aufsatzes wurde von der Verwendung einer Beobachtung im 1. Vertikal zur Ermittlung von $\varphi$ in der modernen Astronomie gesprochen. Es ist damit die bekannte Besselsche Methode gemeint, die der hervorragende Königsberger Astronom in kurzen Zügen in den Astronomischen Nachrichten (1825, III. Bd., Nr. 49, S. 10—12) entwickelte, („Über die Bestimmung der Polhöhenunterschiede durch das Passageninstrument") und die dann bald in die Lehrbücher der beobachtenden Astronomie Aufnahme fand. (Vgl. z. B. Littrow: „Vorlesungen über Astronomie," Wien, 1830, I. Bd., S. 312, oder A. Sawitsch: „Abriß der praktischen Astronomie," deutsch von W. C. Goetze, Hamburg 1850, I. Bd., S. 349 ff.). Nach dieser Methode hat zuerst P. A. Hansen im Jahre 1824 mit einem von Ost nach West orientierten Repsoldschen Passageninstrument auf Helgoland Beobachtungen ausgeführt und die Polhöhe des Observatoriums

---

[1]) Lesung unsicher; es kann auch Marî' heißen.

[2]) Ich werde in einer Abhandlung über arabische Trigonometrie diese Behauptung durch quellenmäßige Beispiele belegen.

daselbst zu $\varphi = 54^\circ\ 10'\ 47''$ bestimmt. (Vgl. Astronom. Nachr. 1828, VI. Bd., Nr. 126, S. 141—143, wo Hansen den Besselschen Gedanken weiter ausführt.) Jedoch ist zu der Methode Bessels zu bemerken, daß sie nicht einer genauen Koinzidenz des Vertikalkreises, den das Durchgangsinstrument beschreibt, mit der Ebene des 1. Vertikels bedarf; auch beobachtet man im Besselschen Fall nicht die Höhe eines Sterns im 1. Vertikel, sondern die Zeiten, bei denen der Stern in diesem Vertikal 2 mal durch den Faden des Fernrohrs geht. Sind diese Zeiten t und $t_1$, so ist nach Bessel:

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \delta \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (t_1 + t)}{\cos \frac{1}{2} (t_1 - t)}$$

Es hat also, streng genommen, die Methode Bessels mit der des Ibn Yûnus nichts zu tun. Bessel selbst nennt als Urheber des Gedankens, im 1. Vertikal zu beobachten, Olaus Römer, (1644—1710) über dessen Instrumente (und Beobachtungen) P. Horrebow in der Basis Astronomiae, Havniae, 1735, handelt. Im VII. Kap. dieses interessanten Buches ist de Machina Roemeri Azimuthali (pag. 43) die Rede, aber es findet sich kein Hinweis auf die Bestimmung der Breite mit dieser Machina, vielmehr liest man pag. 21: „Solae meridianae altitudines per instrumentum fixum faciles et certae sunt pro latitudinibus investigandis." Als Breite für die Turris Astronomica Tusculani Roemeri findet man (pag. 142) $\varphi = 55^\circ\ 40'\ 59''$ angegeben. Vermutlich ist $\varphi$ durch Meridianhöhen bestimmt worden. Auch die Methode von S. G. Böhm: „Geographische Breite und Azimut zugleich aus bloßen Azimutbeobachtungen der Circumpolarsterne, ohne Kenntnis und Hilfe der Zeit auf das genaueste zu finden." (Abh. d. K. Böhm. Gesellsch. d. Wiss., Prag, 1855) hat doch andere Tendenzen. Mehr Verwandtschaft mit unserem Problem zeigt der „Nuovo metodo per determinare la latitudine mercè le altezze di due stella prossime ad un medisimo semi-circolo di declinazione" des Professors der Navigation am Instituto Nautico di Recco, Antonio Bono, (Genova, 1876) auf welches kleine Schriftchen mich Herr Professor A. Wedemeyer, Berlin, hinwies. Darinnen wird aus Gründen, deren Erörterung hier zu weit führte, vorgeschlagen, die gleichzeitigen Höhen zweier bekannten Sterne nahe dem 1. Vertikal zu nehmen.

Eine mit der Yûnusischen völlig identische Formulierung der Aufgabe habe ich (außer bei Weyer: „Vorlesungen über nautische Astronomie", Kiel 1871, S. 97) bis jetzt nur in der Astronomie des Marins (par l'auteur des Mémoires de Mathématique et de Physique, redigés à l'Observatoire de Marseille) à Avignon 1766, finden können. Das reichhaltige Buch ist — so heißt es im Vorwort — geschrieben, um dem Navigateur an Stelle der der praktischen Anwendungen gänzlich entbehrenden Astronomie nautique von de Maupertuis etwas Brauchbares zu bieten. Das Buch bringt eine Fülle von Aufgaben über das Nautische Dreieck: Zenit—Weltpol—Stern (Sonne), und in der Gruppe der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke auch die folgende:

„La hauteur du Soleil dans le $1^{er}$ Vertical est 25° 26′ 20″, sa déclinaison 19° 39′ 10″. On demande l'heure et la latitude." (p. 121) die Auflösung lautet:

log sin 25° 26′ 20″ comp. arit. 0.366088
log sin 19° 39′ 10″ 9.526752
log sin 51° 32′ = log sin de la latitude = 9.893740.

In einer 2. Aufgabe dieser Art ist $\delta$ unverändert, $\eta = 29^\circ\ 21'\ 59''$, es findet sich $\varphi = 43^\circ\ 18'$. Eine nähere Bemerkung hierzu wird nicht gemacht, so daß den Autor wohl keine besonderen Gründe zur Formulierung der Aufgabe leiteten.

Die genaue Datierung der erstmaligen Verwendung der Höhe eines Gestirns im Ostwest-Vertikal zur Breitebestimmung durch einen abendländischen Astronomen, Geographen oder Nautiker, der den Nutzen der Methode ähnlich Ibn Yûnus erkannte, wäre Aufgabe einer eigenen Untersuchung, zu deren Durchführung ich mich aber in meinem Wohnort — fernab von jeder nennenswerten wissenschaftlichen Bibliothek — ganz außerstande fühle. Nur wer in ähnlicher Literaturnot wie ich lebt, vermag diese ständige Hemmung richtig zu würdigen. So muß ich mich damit begnügen, in dieser Frage die primäre Quelle aufgeschlossen zu haben.

### Anmerkungen.

**a** Über die Bestimmung der geographischen Breite aus der Meridianhöhe der Sonne unterrichtet uns Ibn Yûnus eingehend im 12. Kapitel der Ḥâkemitischen Tafeln. (Leidener Hdschr. fol. 258.) Man liest dort:

„Wenn du auf diese Weise zur Kenntnis der Ortsbreite gelangen willst, so ermittle die äußerste Grenze der Zunahme der Sonnenhöhe bis zu ihrem Durchgang durch den Meridian. Beobachte sie schon am Anfang des Tages und sieh zu, wie sie wächst, bis daß sie endlich den Stillstand ihres Wachsens erreicht hat. Dann wird die erlangte größte Höhe aufgeschrieben, damit man ihren Betrag weiß. Wenn die Beobachtung mit einem Instrument gemacht wurde, das nicht genauer als auf zwei Minuten abzulesen gestattet, — ein Betrag, der das Maximum der Sonnenparallaxe im (Meridian) Höhenkreis darstellt[1] — so übergehe die Parallaxe bis zu dieser Größe und halte (einfach) an der gemessenen Meridianhöhe für diesen Tag fest. Und wisse, daß Ptolemaeus den größten Betrag der Parallaxe zu 2′ 51″ angesetzt hat, unter der Bedingung, daß die Sonne die größte Entfernung vom Erdmittelpunkt hat, und er wird beim kleinsten Abstand derselben vom Erdmittelpunkt etwa 3′ erreichen. Wenn du aber mit einem so großen Instrument beobachtet hast, daß 2′ an ihm deutlich zu unterscheiden sind, so vermehrst du die beobachtete Sonnenhöhe noch um den Betrag ihrer Parallaxe gemäß dem, was du in der Tafel der Parallaxe der Sonnenhöhe findest, oder du berechnest den Betrag auf eine Weise, die ich später noch näher darlegen werde. Was sich dann ergibt, das ist die Meridianhöhe der Sonne an eben diesem Tage.

Du kannst für diesen Tag aber auch die Mittagslinie mit Hilfe des indischen Kreises ziehen. Du stellst am Morgen des betreffenden Tages einen Gnomon auf und suchst die fehlerlose Höhe der Sonne zu dem Zeitpunkt herauszubringen, wann die Schattenspitze des Gnomons gerade auf die Mittagslinie fällt; das ist alsdann die derzeitige Meridianhöhe der Sonne. Du verbesserst sie um den Betrag der Höhenparallaxe, wenn das Instrument, mit dem du die Höhe nahmst, einen solchen Betrag abzulesen gestattet; wenn nicht, so läßt du die ermittelte Höhe in ihrem Zustand . . .“

**b** Das ist das erstemal, daß in der Literatur die Berücksichtigung der Parallaxe der Sonnenhöhe verlangt wird. Freilich hat Delambre ganz recht, wenn er bemerkt[2]: . . . „il recommande la correction due à la parallaxe du Soleil; le précepte était juste, mais prématuré. On ne la connaissait pas assez bien; il était plus sûr de la négliger . . .“ .

**c** Es ist der Kreis, den man auf glatter, völlig horizontaler Fläche um den Fußpunkt des Gnomons als Kreismittelpunkt schlug und dann zwei gleich lange Schatten vor- und nachmittags beobachtete. In der indischen Literatur ist er zuerst ausführlich behandelt im Surya-Siddhânta (Journ. of the American oriental. Soc., New-Haven 1860, S. 239) dessen Abfassung durch Lâṭa etwa ins 3. oder 4. Jahrhundert fällt. Für ein viel höheres Alter des indischen Kreises in Europa haben wir noch zwei römische Zeugnisse. Das erste stammt von Vitruvius, der diese Methode in de architectura I. Cap. 6 um das Jahr 15 v. Chr. beschreibt. Das zweite verdanken wir dem römischen Gromatiker (Feld

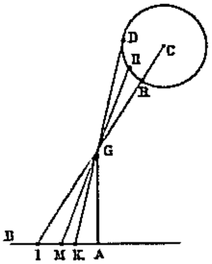
---

[1] Leider existieren die Kapitel (60 und 63), in welchen Ibn Yûnus von der Parallaxe der Sonne und des Mondes handelt, nicht mehr. Aber er hat anscheinend auch seiner Parallaxentafel die Ptolemaeschen Werte zugrunde gelegt, die viel zu groß sind. (Horizontalparallaxe der Sonne in Wirklichkeit = 8.8″.) Nach denselben (Ptolemaeus, Handbuch der Astronomie, deutsch von K. Manitius, I. Teil. S. 323. Leipzig 1912) ist die Parallaxe der Sonne bei einer Höhe von 45° zwei Bogenminuten. Die Meridianhöhe beträgt im Wintersolstitium zu Kairo 36° 25′, wenn man für die Zeit des Ibn Yûnus die Ekliptikschiefe zu 23° 35′ annimmt. Nach der Tafel des Ptolemaeus wäre also das Maximum der Sonnenparallaxe für h = 36° 25′ etwa 2′ 18″.

[2] a. a. O. S. 102.

messer) Hyginus, der etwa um 100 n. Chr. lebte. (Vgl. für nähere Details: C. Schoy, Mittagslinie und Qibla, Ztschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde, Berlin 1915.)

d. Auf fol. 238, Cap. XI des Leidener Ms'. gibt Ibn Yûnus folgende bemerkenswerte „Abhandlung über den Schatten. Es haben einige der Früheren die Teile des Schattenmaßes zu 12, andere haben sie zu 60 gerechnet, und ich kenne nur diese beiden Zahlen. Die Mehrzahl der Gelehrten aber hat sie zu 60 angenommen. Der Schatten heißt vor dem zawâl: ẓill und nach dem zawâl: fai'; so wird in der guten arabischen Sprache gesagt. Der Schatten aber, den die Männer der Wissenschaft meinen, ist der Teil des Sonnenscheins, den ein Gegenstand verdeckt, der senkrecht auf ebenen, dem Horizont parallelen Flächen steht. Und alle sind, soviel ich weiß, der Ansicht, daß der Schatten, der durch Beobachtung erhalten wird, der augenblicklichen Höhe des Sonnenmittelpunktes entspreche. Alle aber irren, und dabei ist einer in die Fußstapfen des anderen getreten, weil sie zu wenig nachdenken. Das Richtige jedoch ist, daß, wenn wir von der Spitze des senkrecht stehenden Gnomons eine gerade Linie in der Fläche des Höhenkreises ziehen, sie den Sonnenball in dessen Zenit berührt und in gerader Richtung zur Fläche geht, auf welche der Schatten fällt. Denn dieser Punkt ist das Ende des Schattens, den man durch die Beobachtung zu diesem Zeitpunkt findet, und die Höhe des Schattens ist die Höhe des Punktes, in welchem die gerade Linie, die wir gezogen haben, den Sonnenball berührt. Und es ist zwischen dieser Höhe und der Höhe des weiter herwärts gelegenen Sonnenmittelpunktes ein halber Durchmesser der Sonnenscheibe, wie klar gemacht wird im Buche al-akrûsâ[1]). Was ich oben dargelegt habe, wird evident durch einen geometrischen Beweis — mögen die Gelehrten durch diesen Beweis des Gesagten Richtigkeit erkennen, so Gott will. Ich stelle nun den allgemein zugegebenen Satz, über den man nicht streiten kann, auf, daß von jedem Punkte in Gedanken eine gerade Linie nach der Sonnenkugel gezogen werden kann, so lange kein Hindernis besteht, daß dieser Punkt im Sonnenschein liegt, und daß von keinem Punkte im Geiste eine gerade Linie zur Sonne gezogen werden kann, wenn ein Hindernis dafür besteht, d. h. der Punkt im Schatten liegt.



Beweis: Wenn wir eine gerade Linie ziehen, indem wir für sie den Abschnitt in Betracht ziehen, der die Bedingungen für die Fläche erfüllt, auf die der Schatten fällt, und wenn wir alsdann den Höhenkreis ausbreiten, das ist also die Linie AB, und es sei der auf ihr senkrecht stehende Gnomon AG, und wenn wir dann in der Fläche des Höhenkreises vom Sonnenball, dessen Mittelpunkt C ist, das Stück DHR abgrenzen, und wir ziehen darauf zwei gerade Linien in der Fläche des Höhenkreises: eine, die durch den Sonnenmittelpunkt und die Spitze des senkrecht stehenden Gnomons geht, das ist also die Linie CGJ, und welche die Linie AB in J trifft, und die Linie DGK, die den Sonnenball im Punkte D berührt, und die Linie AB in K trifft, so ergibt die Linie AJ die Höhe des Sonnenmittelpunktes C, und Linie AK gibt die Höhe des Punktes D, und ich behaupte nun, daß die Strecke JK im Sonnenschein liegt. Der Beweis dafür ist folgender: Wenn du vom Punkte M, der zwischen K und J liegt, eine gerade Linie nach der Sonnenkugel ziehst, so trifft sie dort zwischen den Punkten R und D in einem Punkt H auf, indem dafür kein Hindernis besteht. Linie MH geht durch den Punkt G, erreicht aber den Punkt D nicht. Und so ist klar, daß Punkt M im Sonnenschein liegt, weil es doch im Geiste klar ist, daß von ihm eine gerade Linie ausgeht, und noch

---

[1]) Ich weiß nicht, was das Buch al-akrûsâ ist. Herr Professor C. F. Seybold in Tübingen, dem ich auch sonst viele wertvolle Hinweise verdanke, dessen Tod ein empfindlicher Verlust für die Wissenschaft ist, teilte mir brieflich die, wie mir scheint, sehr glückliche Vermutung mit, الاكروسا al-akrûsâ könnte vielleicht الاكرومتا, al-akrûmatâ d. i. das griechische ἀκροάματα = Vorlesungen, Kollegien, Studien sein. In der Tat sind die zwei arabischen Wörter außerordentlich ähnlich.

viele gerade Linien sind möglich auf der Strecke zwischen den beiden Punkten R und D, ohne daß ein Hindernis besteht, und zwar nach jenen Punkten auf der Strecke JK. Und das war es, was wir beweisen wollten. Und bei Gott ist der Erfolg!"

e Es ist zweifellos **Hermes Trismegistos** (*τρισμέγιστος*) gemeint. Dies ist die spätere griechische Benennung des ägyptischen Gottes **Thoth**, der in Ägypten den Beinamen aä aä „der Große, Große" führte (griechisch auch *μέγας καὶ μέγας*) **Thoth** war der Gott des Maßes und der Zahl, der Schrift, der Künder des Verborgenen und der Verfasser heiliger Schriften. Die Griechen haben ihn als Erfinder früh ihrem **Hermes** gleichgesetzt und schrieben ihm insbesondere die Einteilung des Tages in 12 Stunden und die Erfindung der Astrologie und Musik zu. Sie gaben Stätten, wo sein Kult gepflegt wurde, den Namen **Hermupolis**. Später sank er mehr zum menschlichen Wesen, mit dem Charakter eines Weisen herab. Auf seine heiligen Bücher beriefen sich auch die **Sabier** oder **Harraniter** am oberen Euphrat, deren Sekte noch tief in die Zeit des Islâm hinein bestand. Die Araber hielten **Hermes** für den Verfasser zahlreicher, philosophischer, medizinischer und astrologischer Werke und behaupteten die Existenz von 24 hermetischen astrologischen Schriften. Für nähere Details sei auf den lichtvollen Artikel: „Hermes Trismegistos" von **Kroll** in **Pauly Wissowas**, Real-Encyclopädie d. klass. Altertumswiss., 8. Bd., Stuttgart 1913, S. 791—823 verwiesen, für eindringendere Studien der Hermetischen Literatur und Geschichte auf R. **Reitzensteins** „Poimandres", Leipzig 1904, wo man S. 165—176 auch Näheres von dem Hermes der Sabier und Araber erfährt.

f Bei **Ibn Yûnus** fand ich bis jetzt nur ein einziges Mal die Tangens- und Cotangensfunktion, natürlich als Schatten, in einer Formel verwendet, und zwar bei der Berechnung des Azimuts $\alpha$ aus der Ortsbreite $\varphi$ und der augenblicklichen Sonnenhöhe h zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen. Der Autor lehrt:

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cdot \frac{\sin h}{\cos h} = \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang} h = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{cotg} h},$$

wo $\operatorname{tang}\varphi$ der Mittagsschatten zur Zeit des Äquinoktiums, $\operatorname{cotg} h$ der Schatten bei der Sonnenhöhe h ist, falls man die Länge des schattenwerfenden Stiftes = 1 setzt. (Vgl. hierzu des Verf. Abhandlung: „Das 20. Kapitel der großen Ḥâkemitischen Tafeln des **Ibn Yûnis**: Über die Berechnung des Azimuts aus der Höhe und der Höhe aus dem Azimut"; Ann. d. Hydr. usw., 48. Jahrg. [1920], S. 109.) Oft begegnet man ihr bei **Abû'l Wafâ'**, dem man die Einführung der „Schattenregel" in die sphärische Trigonometrie zuschreibt. Dabei kann die unbekannte Größe auch in der Cotangente stehen; **Abû'l Wafâ'** schlägt dann in der Schattentafel nach. (Pariser arab. Mscr. 2494, fol. 66ff.)

g Bekanntlich ändert sich die Höhe eines Gestirns in der Nähe des Meridians am wenigsten. Differenziert man die Grundgleichung des astronomischen Dreiecks $\sin h = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s$,
wo s der Stundenwinkel ist, nach h und s, so findet man

$$dh = -\frac{\cos\varphi \cdot \cos\delta}{\cos h} \cdot \sin s \cdot ds.$$

Wie man sieht, wird $dh = 0$ für $\sin s = 0$, d. h. $s = 0$. Dann steht das Gestirn im Meridian.

h Der Sinn dieser Worte wird aus einer Bemerkung des Autors klar, die er im 11. Kapitel der Ḥâkimitischen Tafeln, fol. 239 macht. Dort heißt es: „Und zu dem, woran man die Richtigkeit des Senkrechtstehens des Gnomons auf der dem Horizont parallelen Fläche erkennt, gehört, daß er, vorwärtsgehend (muqbilân, umgedreht) und wieder rückwärtsgehend (mudbirân, zurückgedreht) seinen Schatten in der Schattenfläche auf zwei ganz nahe beieinander liegende Punkte wirft, deren Abstand nur den Betrag hat, der der Fortbewegung der Sonne in ihrem Tageskreis während der Drehung entspricht..." Damit ist die Drehung des Gnomons in dem rundgebohrten Loch zu verstehen, in dem sein Fuß ruht. Noch zwei andere Verfahren erwähnt **Ibn Yûnus**, nach denen man prüfen kann, ob der Gnomon senkrecht auf der Schattenfläche steht; bezeichnet aber dieses als das genaueste. **Delambre** bemerkt hierzu: „... il faut bien vérifier la perpendicularité du gnomon; l'auteur en donne plusieurs moyens: le plus remarquable est de retourner l'instrument, et de faire des observations dans les deux situations opposées. C'est la première mention que je trouve de cette pratique aujourd'hui très répendue1)."

**i** Vgl. Anmerkung **d**. Nimmt man den scheinbaren Halbmesser der Sonnenscheibe zu 15′ bis 16′ an, so folgt für die Breite Kairos, d. h. **Fusṭâṭs**, $\varphi = 29^\circ\, 43'$ $+$ (15 bis 16′) also sehr nahe 30°. Ist nämlich H die Meridianhöhe der Sonne, so gilt

$$H = 90^\circ - \varphi + \delta$$
$$\varphi = 90^\circ + \delta - H.$$

Nun gibt der Gnomon ein um den halben Sonnendurchmesser zu großes H; berücksichtigt man dies nicht, so werden die mit dem Gnomon ermittelten Breiten um 15′ bis 16′ zu klein. (Vgl. auch: R. **Wolf**: Geschichte der Astronomie, München 1877, S. 375.)

**k** Auf dem Zifferblatt einer derartigen Sonnenuhr bildet sich der Himmelsäquator als Gerade ab, die unter $90^\circ - \varphi$ zum Horizont geneigt ist. Auch aus den hyperbolischen Abbildern (Schattenkurven) der Wendekreise läßt sich die Ortsbreite leicht ablesen. (Vgl. für Details: C. **Schoy**: „Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhebestimmungen bei älteren Völkern", Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte, Hamburg 1911, S. 28.)

**l** Eine solche Stunde ist immer der 12. Teil des Lichttages, also im Winter kurz und im Sommer lang. Die Stundenlinien bilden sich als Kurven auf das Zifferblatt der Sonnenuhr ab. (Vgl. zu ihrer Theorie: H. **Michnik**: Beiträge zur Theorie der Sonnenuhren, Leipzig 1914.)

**m** Schreibt man Formel III nach $\varphi$ aufgelöst, so hat man

$$\mathrm{tang}\, \varphi = \frac{\sin m}{\sin \eta}$$

und daraus durch logarithmische Differentiation

$$\frac{2}{\sin 2\varphi} \cdot d\varphi = \mathrm{cotg}\, m \cdot dm - \mathrm{cotg}\, \eta \cdot d\eta$$

oder

$$2 \cdot d\varphi = \mathrm{cotg}\, m \cdot \sin 2\varphi \cdot dm - \mathrm{cotg}\, \eta \cdot \sin 2\varphi \cdot d\eta.$$

Setzt man hierin für Kairo ($\varphi = 30^\circ$) $\eta = 53^\circ\, 8'$ und $m = 27^\circ\, 30'$, so wird

$$d\varphi = 0.831\, dm - 0.324\, d\eta,$$

also wäre der Fehler, den $\eta$ auf die Genauigkeit der Ortsbreite ausübte, hier noch geringer als bei der Bestimmung von $\varphi$ aus $\eta$ und $\delta$. Freilich wird sich die Morgen- oder Abendweite der Sonne nur in Gegenden mit ganz reiner Luft genügend genau beobachten lassen. Daß dies in Ägypten, überhaupt im subtropischen Orient, sehr wohl möglich ist, und wie man dann (nach **Proclus**) zu verfahren hat, lehrt sehr anschaulich J. B. **Biot** (Mémoire sur divers points d'astronomie ancienne, Paris 1846, S. 46ff.).

Abhandlung von al-Faḍl b. Ḥâtim an-Nairîzî:

# Über die Richtung der Qibla

(Arab. Hdschr. Nr. 2457, 17⁰ der Bibl. nat. in Paris)

übersetzt und erläutert von C. Schoy in Essen a. d. R.

Vorgelegt von S. Günther in der Sitzung am 4. Februar 1922.

Schon wiederholt bestätigte sich meine Vermutung, daß das Studium der Abhandlungen arabischer Astronomen über die Bestimmung des Azimuts der Qibla tiefere Einblicke in ihre trigonometrischen Praktiken gewährt, als die Behandlung alltäglicherer Aufgaben der sphärischen Astronomie, wie man ihnen in den astronomischen Tafelwerken (zîǧât) der Araber gewöhnlich begegnet. So findet sich z. B. in den Ḥâkimitischen Tafeln des Ibn Jûnus († 1009) für die Bestimmung der Qiblarichtung ein Text, dessen Umsetzung in unsere Formelsprache genau den Kosinus- und Sinussatz der sphärischen Trigonometrie ergibt¹), während man aus der rein konstruktiven Behandlung unserer Aufgabe durch Ibn al-Haiṯam (Alhazen) sofort den sog. Kotangentensatz der sphärischen Trigonometrie ablesen kann²).

Und als nicht minder wertvoll für die Geschichte der arabischen Trigonometrie erwies sich die Lektüre des vorstehenden hübschen Schriftchens. Denn es zeigte sich, daß

---

¹) Mscr. Huntington 331, Oxford, S. 67 ff.

²) Abhandlung des al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haiṯam (Alhazen) über die Bestimmung der Richtung der Qibla. Nach d. Oxforder Mscr. Selden, Arch. A 34, aus dem Arab. übers. von C. Schoy (Ztschr. d. Deutsch. Morgenl. Gesellsch. 1921, S. 242—254).

an-Nairîzî (Anaritius) die auf sphärische Dreiecke übertragenen Transversalensätze des Menelaos bereits in rein trigonometrischer Form anwendet, und zwar sowohl die „Regel der 4 Größen", als auch die sog. „Schattenregel" der Araber[1]) (Tangentensatz). Über diese 2 Regeln liest man bei A. von Braunmühl[2]): „Als Quelle für beide Sätze haben wir schon früher die Sphärik des Menelaus nachgewiesen. Während wi aber vermuten, daß das erste Theorem bereits im Besitze Ṯâbits (gemeint ist Ṯâbit ibn Qorra † 901) war, ist das zweite unstreitig Abû'l Wafâ's Eigentum."

Da Anaritius († 922/23) ein Zeitgenosse al-Battânîs († 929) war, so ist er gegenüber Abû'l Wafâ' († 998) der Prior, und die erste Kenntnis der „Schattenregel" muß in der arabischen Trigonometrie um eine Anzahl Jahrzehnte vordatiert werden.

Über die näheren Lebensumstände unseres Gelehrten weiß man so gut wie nichts. Er stammte aus dem persischen Städtchen Nairîz, südöstlich von Schîrâz und hat später wohl in Baǧdâd gelebt. Über seine Werke unterrichtet Suters treffliche Abhandlung: „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke", Leipzig 1900, S. 45. Dazu wäre zu vergleichen: M. Curtze, „Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii ex interpr. Gherardi Cremonensis, Leipzig 1899, S. VIII.

Der Übersichtlichkeit halber möchte ich zuerst eine kurz Darstellung geben, wie an-Nairîzî das Azimut der Qibla ermittelt hat, sodann die wörtliche Übersetzung des arabischen Textes (ohne Auslassungen) folgen lassen, und den Schluß des Ganzen soll die Anfügung einer geographischen Tafel des Ibn aš-Šâṭir (1304—1375/76) bilden, die außer den geographischen

---

[1]) A. von Braunmühl: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, Leipzig 1900, S. 17, 58, 67). Vgl. auch die treffliche Abhandlung von Axel Anton Björnbo: Studien über Menelaos' Sphärik (Abhandlungen z. Geschichte d. mathemat. Wissenschaften, XIV. Heft, 1902, S. 89—95).

[2]) A. a. O., S. 58.

Koordinaten einer Anzahl bekannter Ortlichkeiten islâmischer Länder, auch deren Qiblarichtung enthält. Ich habe diese Daten dem arab. Codex 1403 (Gotha) entnommen (S. 72a—75b).

I. $\varDelta$ (Bağdâd) sei Kartenmittelpunkt, und von $\varDelta$ aus soll die Richtung der Qibla ($= \sphericalangle\, a$) bz. Mekka ($G$) berechnet werden. Die geographischen Breiten von Bağdâd und Mekka seien bzw. $\varphi_1$ und $\varphi_2$; sie werden bei der Ermittlung von $a$ natürlich als bekannt vorausgesetzt, wie auch der Längenunterschied $\lambda$ der beiden Orte. Und zwar lehrt Anaritius: $\varphi_1 = 33^0\, 25'$; $\varphi_2 = 21^0\, 41'$; $\lambda = 3^0$[1]). $T$ sei der Nordpol der Erde und $AC$ der Äquator. Der Kreis $ABCD$ mit $\varDelta$ als Mittelpunkt stellt den Horizont von Bağdâd dar und Linie $DT\varDelta B$ den Meridian daselbst. Der Meridian von Mekka ist $TGUK$. Zieht man jetzt noch durch Bağdâd und Mekka den Großkreis (Quadranten) $\varDelta GL$, so bildet er mit dem Meridian von Bağdâd den $\sphericalangle\, a$, der die Blickrichtung von Bağdâd nach Mekka, d. i. das Azimut der Qibla, in Bağdâd bestimmt. Winkel $a$ heißt der Inḥirâf (Abweichung, Deklination) der Qibla. Nach unserem Autor gilt:

$$\frac{\sin BT}{\sin BH} = \frac{\sin KT}{\sin KU} \cdot \frac{\sin AU}{\sin AH}. \qquad \text{I)}$$

---

[1]) Statt $5^0$. Diese um rund $2^0$ zu geringe Längendifferenz zwischen Bağdâd und Mekka findet man bei sehr vielen arab. Autoren. Viel genauer sind dagegen die Breitenangaben für die beiden Städte. Die Breite Bağdâds haben die Söhne des Mûsâ b. Šâkir am 17. Juni und am 16. Dezember 868 zu $33^0\, 20'$ bestimmt und zwar die Breite der Bâb aṭ-Ṭâq, an der ihre Wohnung lag. [Ḥâkimitische Tafeln, Leidener Mscr. Nr. 143, S. 222/23.] Dieser Wert ist bis zur Bogenminute genau. Man begegnet bei den Angaben für $\varphi_1$ und $\varphi_2$ keinen ganz übereinstimmenden Werten in arabischen Tafelwerken. Es finden sich dafür bei

| | | |
|---|---|---|
| al-Battânî: | $\varphi_1 = 33^0\, 9'$; | $\varphi_2 = 21^0\, 40'$, |
| Abû'l Wafâ': | $\varphi_1 = 34^0\, 19'$; | $\varphi_2 = 22^0$, |
| Ibn Jûnus: | $\varphi_1 = 33^0\, 20'$; | $\varphi_2 = 21^0$, |
| Abû'l Ḥasan:<br>(v. Marroko) | $\varphi_1 = 33^0\, 15'$; | $\varphi_2 = 21^0$, |
| Ibn aš-Šâṭir: | $\varphi_1 = 33^0\, 25'$; | $\varphi_2 = 21^0\, 30'$ |
| Ulûġ Beg: | $\varphi_1 = 33^0\, 25'$; | $\varphi_2 = 21^0\, 40'$. |

Dabei ist: $BT = 180^0 - \varphi_1$; $BH = 90^0 - \varphi_1$; $AU = 90^0 - UH = 90^0 - \lambda$; $AH = TH = 90^0$.

Unbekannt sind die Bögen $KT$ und $KU$; es besteht aber zwischen ihnen die Beziehung $KT = 90^0 + KU$. Somit läßt sich $KU$ berechnen. Denn I. vereinfacht sich zu

$$\frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} = \frac{\cos KU}{\sin KU} \cdot \frac{\cos \lambda}{\sin 90^0},$$

und diese Gleichung lehrt Anaritius. Sie ist mit der „Schattenregel" identisch. Wir würden zur Berechnung von $KU$ schreiben

$$\operatorname{cotg} KU = \operatorname{tang} \varphi_1 \cdot \frac{\sin 90^0}{\cos \lambda}. \qquad \text{I a)}$$

Allein der Autor besaß wohl keine Tangententafel (Schattentabelle), die geeignet war zur Berechnung von arc $KU$ aus I a). Vielmehr leitet er aus der „Schattenregel" zum Gebrauch seiner Sinustafel ab:

$$\sin KU = 1 : \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1}}{\cos \lambda}\right)^2}. \qquad \text{II)}$$

Hieraus wird arc $KU$ gefunden. Ich füge in Klammer den genauen Wert zu an-Nairizis Resultat jeweils hinzu. Es ist nach des Autors Rechnung:

$KU$ = angrenzender 1. Bogen = $56^0\,24'\,8''$ [$56^0\,32'\,49''.91$].

An-Nairizi lehrt ferner:

$$\frac{\sin TH}{\sin BH} = \frac{\sin UT}{\sin KU} \cdot \frac{\sin AK}{\sin AB}. \qquad \text{III)}$$

Und da $TH = UT = AB = 90^0$; $BH = 90^0 - \varphi_1$ ist, so ergibt sich aus III):

$$\frac{\sin 90^0}{\sin (90^0 - \varphi_1)} = \frac{\sin AK}{\sin KU}, \qquad \text{IV)}$$

und dies ist die „Regel der 4 Größen", die der Autor zur Berechnung von arc $AK$ umformt in

$$\sin AK = \frac{\sin 90^0 \cdot \sin KU}{\cos \varphi_1}. \qquad \text{IV a)}$$

Aus IVa) findet Anaritius:

$\Delta K =$ Ergänzung des abgeschnittenen 1. Bogens
$= 86^0\, 12'\, 15''\ [88^0\, 20'\, 48''.3]$,
$BK =$ abgeschnittener 1. Bogen $= 3^0\, 47'\, 45''\ [\ 1^0\, 39'\, 11''.7]$.

Alsdann berechnet der Autor arc $LG$ und dessen Ergänzung zu $90^0$, arc $\Delta G$ mit Hilfe der Gleichung:

$$\frac{\sin BT}{\sin \Delta B} = \frac{\sin TK}{\sin GK} \cdot \frac{\sin LG}{\sin \Delta L}. \tag{V)}$$

Und da

$BT = 180^0 - \varphi_1$; $\Delta B = 90^0$; $TK = 90^0 + KU$;
$GK = \varphi_2 + KU$; $\Delta L = 90^0$

ist, so vereinfacht sich V) zu

$$\sin \varphi_1 = \frac{\cos KU \cdot \sin LG}{\sin(\varphi_2 + KU)},$$

welch letzterer Ausdruck nach $\sin LG$ aufgelöst wird; denn Anaritius lehrt:

$$\sin LG = \frac{\sin \varphi_1 \cdot \sin(\varphi_2 + KU)}{\cos KU}. \tag{Va)}$$

Es finden sich für arc $LG$ und arc $\Delta G$ folgende Werte:

$LG =$ angrenzender 2. Bogen $= 76^0\, 50'\ [77^0\, 58'\, 15'']$,
$\Delta G =$ abgeschnittener 2. Bogen $= 13^0\, 10'\ [12^0\ \ 1'\, 45'']$.

Endlich findet er $\sphericalangle\, \alpha =$ arc $LB$ mittels der Gleichung

$$\frac{\sin LB}{\sin KB} = \frac{\sin \Delta L}{\sin \Delta G} \cdot \frac{\sin TG}{\sin TK}. \tag{VI)}$$

Dabei ist

$KB = 3^0\, 47'\, 45''\ [1^0\, 39'\, 11''.7]$; $\Delta L = 90^0$;
$\Delta G = 13^0\, 10'\ [12^0\, 1'\, 45'']$; $TG = 90^0 - \varphi_2$; $TK = 90^0 + KU$.

So wird denn VI) zu

$$\sin LB = \frac{\sin 3^0\, 47'\, 45'' \cdot \sin 90^0}{\sin 13^0\, 10'} \cdot \frac{\cos 21^0\, 41'}{\cos 56^0\, 24'\, 8''}, \tag{VIa)}$$

woraus an-Nairīzī folgert:

$$LB = 29^0\, 7'\ [13^0\, 29'\, 40''.7].$$

Dieser große Fehler — aus VIa) resultiert nämlich mit den Zahlen des Autors rund 29° 12′ — rührt zur Hauptsache aus dem gänzlich falschen Werte für $KB$ her.

Auch Abû'l Wafâ' löst in seinem Almagest, der sich als arab. Mscr. 2494 in der Bibl. nat. zu Paris befindet, die Aufgabe, das Azimut der Qibla für Bagdâd zu berechnen. Ich habe seine Lösung in meine „Arabische Sonnenuhrkunde“ [Teil des Werkes „Geschichte der Zeitmessung und der Uhren“ von E. von Bassermann-Jordan, München 1922] aufgenommen (Mscr. 2494 der Bibl. nat.[1]), S. $67^{a}$). Hier sollen nur einige Zahlenangaben gemacht werden. Es ist nach Abû'l Wafâ':

$\sin\lambda = 3'\ 8''\ 24'''\ 34^{IV}$, also $\lambda = 3^{0}$,
$\cos\varphi_2 = 55'\ 37''\ 51'''\ 43^{IV}$, „ $\varphi_2 = 22^{0}$,
$\sin\Delta G = 12'\ 51''\ 57'''$, „ $\Delta G = 12^{0}\ 23'$,
$\sin a = 13'\ 49''\ 9'''\ 19^{IV}$, „ $a = 13^{0}\ 49'\ 15''\ 55'''$,

woraus man ersieht, daß die rechnerischen Hilfmittel des Abû'l Wafâ' ungleich vollkommener waren als die des an-Nairîzî. Die Breite Bagdâds kommt bei Abû'l Wafâ' nicht vor, statt dessen gibt er $\Delta G$ an. Aus seinen Daten würde für $\varphi_1$ der Wert 34° 19′ folgen.

## II. Übersetzung des arabischen Textes.

S. $78^{v}$ „Im Namen Gottes des barmherzigen Erbarmers!

### Abhandlung von al-Faḍl ben Ḥâtim an-Nairîzî über die Richtung der Qibla.

Es werde die Ausführung für Medînat as-Salâm (Bagdâd) gemacht. Wir verzeichnen zuerst für Medînat as-Salâm[2]) den Horizontkreit $ABCD$ mit dem Mittelpunkt $H$. Es möge ferner

---

[1]) Die trefflichen trigonometrischen Leistungen Abû'l Wafâ's stehen im I. Buch seines Almagest. Ihre Kenntnis verdanken wir einer Studie Carra de Vauxs, die er durch Analyse des obigen Pariser arab. Mscrs. vor 30 Jahren gab (vgl. Journal asiatique 1892, S. 408—472). Die trigonometrischen Anwendungen hingegen stehen im II. Buch des Almagest, und es wäre sehr erwünscht, daß Herr Baron Carra de Vaux auch hieraus das Wichtigste publizierte.

[2]) Die Handschr. hat nur selten Salâm, meist Silm.

Punkt $A$ der Anfangspunkt des Äquators (Beginn des Widders und der Wage) sein und $C$ sein Schlußpunkt. Der Äquator sei $CHA$ und der halbe Meridian von Medînat as-Salâm $BHD$. Punkt $\Delta$ sei das Zenit von Medînat as-Salâm, während $G$ das Zenit der Bewohner Mekkas bedeute. $T$ sei der Nordpol. Ein (größter) Kreis durch ihn und $G$ schneidet den Bogen $TGUK$ aus, und arc $HU$ ist die Längendifferenz, die sich bezüglich Bagdâds (und Mekkas) auf 3 Längengrade beläuft. Das ist ein bekannter Bogen. Damit ist auch arc $UA$ gegeben als Ergänzung des Bogens $HU$ zu 90°. Bogen $TGUK$ ist ein Stück des Meridians von Mekka. Er ist unbekannt, und deshalb wollen wir ihn ermitteln. Wir ziehen durch die beiden Punkte $G$ und $\Delta$ den Viertelkreis $LG\Delta$, und das zeigt, daß aṣ-ṣalât[1] (Gebetskreis?) in Medînat as-Salâm der untere Teil eines Quadranten ist. Es möge jener Teil (Abschnitt) die Punkte der beiden Horizonte passieren, d. h. die Ebene $\Delta GL$ senkrecht auf den zwei Horizonten stehen. Wir wollen jetzt in Erfahrung bringen, wie wir den Bogen $BL$ des Horizontkreises kennen lernen; falls wir ihn ermittelt haben, kennen wir das Azimut der Qibla.

Da zwischen den zwei Bögen $TB$ und $AB$ die Bögen $TGUK$ und $HUA$ sich in $U$ schneiden, so ist

$$\frac{\sin TB}{\sin BH} = \frac{\sin TK}{\sin KU} \cdot \frac{\sin UA}{\sin HA}{}^{2)}.$$

Arc $BH$ ist der Betrag der Höhe des Beginns des Widders und der Wage (Äquatorhöhe = Ergänzung der geogr. Breite Bagdâds zu 90°). Es sind also auch die beiden Bögen $TB$ und $\Delta H$ bekannt. Auch arc $AUH$ ist gegeben; es ist arc $AH$ = 90°. Was aber einen jeden der 2 Bögen $TK$ und $UK$ anbetrifft, so sind beide unbekannt; aber der Überschuß des Bogens $TK$ über $UT$ hinaus ist bekannt und = 90°, und so wird arc $UK$ bekannt in der Weise, wie ich es jetzt beschreibe:

---

[1] aṣ-ṣalât heißt das Gebet; es kann hier aber nur arc $\Delta G$ gemeint sein.

[2] Natürlich stehen die Formeln in Worten da. Die multiplikative Verbindung des Verhältnisses sin $UA$ : sin $HA$ mit dem Vorhergehenden ist durch „mu'allif" ausgedrückt.

## Kapitel über die Berechnung des Bogens $UK$.

Wir nennen ihn den angrenzenden 1. Bogen. Wir teilen den Sinus des Bogens $AH$, der gleich dem Sinus der Breite von Medînat as-Salâm ist, durch den Sinus $55^p$, d. i. der Wert des Sinus der Ergänzung (Kosinus) der Breite von Baġdâd zu $90^0$. Was sich ergibt, nennen wir das Verhältnis I/II. Darauf teilen wir den Kosinus der Längendifferenz, ich meine der Differenz der Länge Baġdâds vom Westen gezählt mit der Länge Mekkas, durch Sinus totus (sin $90^0$), und was aus der Teilung entfließt, nennen wir V/VI. Nunmehr teilen wir I/II durch V/VI, und was hieraus resultiert, nennen wir III/IV. Wir erheben jetzt III/IV ins Quadrat. Das Quadrat vermehren wir um 1 und ziehen alsdann die Quadratwurzel aus der Summe. Mit der Wurzel, welche wir genommen haben, teilen wir in sin · tot · ($= 60^p$), und was sich aus der Teilung ergibt, ist der Sinus des angrenzenden Bogens. Wir machen ihn zu Bogen, und was wir als Bogen erhalten, das ist der angrenzende 1. Bogen $UK$.

## Kapitel über die Berechnung der Bögen $KA$ und $KB$.

S. 78r Es ist

$$\frac{\sin TH}{\sin HB} = \frac{\sin TU}{\sin UK} \cdot \frac{\sin AK}{\sin AB}.$$

Da jeder eine der zwei Bögen $TH$ und $TU = 90^0$ ist, so wird gerade

$$\frac{\sin UK}{\sin HB} = \frac{\sin AK}{\sin AB}.$$

Wir multiplizieren (also) sin $UK$, welches der Sinus des angrenzenden 1. Bogens ist, mit sin $AB$, dem sin. tot., und teilen das Produkt durch sin $HB$, d. i. der Cosinus der Breite des Ortes; alsdann ist das Ergebnis der Teilung gleich sin $AK$, und (damit) ist Bogen $AK$ bekannt; es bleibt noch Bogen $KB$ (zu ermitteln). Wir ziehen arc $AK$ von $90^0$ ab, und es ist (der Rest) $KB$ der abgeschnittene 1. Bogen.

## Kapitel über die Berechnung des abgeschnittenen 1. Bogens[1]).

Wir multiplizieren den Sinus des angrenzenden 1. Bogens mit sin. tot. und teilen das Ergebnis durch den Kosinus der Ortsbreite. Was aus der Teilung herauskommt, machen wir zu Bogen, und jener Bogen ist die Ergänzung des abgeschnittenen 1. Bogens.

## Kapitel über die Kenntnis des Bogens $\varDelta G$.

Es ist $$\frac{\sin BT}{\sin \varDelta B} = \frac{\sin TK}{\sin GK} \cdot \frac{\sin LG}{\sin \varDelta L},$$

und weil der 2. Bogen gleich dem 6. ist, welche beiden Bögen aber $\varDelta B$ und $\varDelta L$ sind, so wird das Verhältnis des Sinus des 1. Bogens $BT$ zum 5., nämlich $LG$, wie das Verhältnis vom Sinus des Bogens $TK$ zu dem Sinus von $GK$, dem 4. Wir multiplizieren den Sinus des 1. Bogens, d. i. sin $BT$, mit sin $GK$, welcher Bogen ($GK$) aus dem angrenzenden Bogen und dem Bogen $GU$, d. i. der Breite Mekkas, zusammengesetzt ist, und wir teilen das Produkt durch sin $TK$; was aus der Teilung herauskommt, ist gleich sin $LG$. Damit wird arc $LG$ bekannt und infolgedessen auch arc $\varDelta G$. Wir nennen Bogen $LG$ den angrenzenden 2. Bogen; was aber Bogen $\varDelta G$ anbetrifft, so ist er der abgeschnittene 2. Bogen.

## Kapitel über die Berechnung des angrenzenden 2. und des abgeschnittenen 2. Bogens.

Wir multiplizieren den Sinus der Ortsbreite mit dem Sinus der Summe des angrenzenden 1. Bogens und des Bogens der Breite Mekkas. Was aus dieser Multiplikation hervorgeht, teilen wir durch den Kosinus des angrenzenden 1. Bogens. Das Resultat verwandeln wir in Bogen, und der erlangte Bogen ist der angrenzende 2. Bogen. Wir ziehen ihn von 90° ab; der Rest ist der abgeschnittene 2. Bogen.

---

[1]) Dies Kapitel lehrt im Vergleich zum vorhergehenden eigentlich nichts Neues.

## Kapitel über die Kenntnis des Azimuts, d. i. des Bogens *LB*.

Es ist
$$\frac{\sin LB}{\sin KB} = \frac{\sin \Delta L}{\sin \Delta G} \cdot \frac{\sin TG}{\sin KT},$$
und es ist ein jeder der Bögen, außer dem 1. bekannt, und er ergibt sich aus den anderen.

## Kapitel über seine Berechnung,

ich meine des Azimutbogens zwischen der Mittagslinie, bis zu dem, was an den Westen von Medînat as-Salâm grenzt, und so wächst die Länge einer jeden Stadt bz. der Länge Mekkas von Westen an. Wir multiplizieren den Sinus des 1. angrenzenden Bogens mit sin. tot. und teilen das Produkt durch den Sinus des 2. abgeschnittenen Bogens. Was aus der Division S. 79r hervorgeht, multiplizieren wir mit dem Kosinus der Breite Mekkas, und was sich aus dieser Multiplikation ergibt, das dividieren wir durch den Kosinus des angrenzenden 1. Bogens. Was aus dieser Division hervorgeht, machen wir zu Bogen, und der sich ergebende Bogen ist das oben erwähnte Azimut.

## Zahlenbeispiel.

Dieser äußersten Grenze (der Genauigkeit?) nahe zu kommen ist mir nicht möglich, falls ich eine Beobachtung mache wie jene berühmten Astronomen[1]). Trotzdem habe auch ich den Wert der Längendifferenz zwischen Mekka und Medînat as-Salâm durch Beobachtung festgestellt. Da diese Beobachtung sich auf eine bevorstehende Mondfinsternis stützt, so muß einer der Beobachter in Medînat as-Salâm, der zweite in Mekka sein, und es muß jeder eine von ihnen den Teil der Nacht wissen, der seit Beginn der Verfinsterung schon verflossen ist, sei es bei dem Eintritt ihrer Totalität, sei es bei ihrer vollendeten Entartung[2]). Alsdann findet sich der Unterschied der Zeiten

---

[1]) Es sind wohl die Astronomen al-Ma'mûns gemeint.

[2]) Der arab. Text hat „tamâm al-chilâfh"; vielleicht soll mit diesem Ausdruck das völlige Aufhören der Verfinsterung bezeichnet werden.

an den 2 Orten, ich meine der seit der Mitternacht verflossenen Zeiten. Und was das bis zur Mitternacht übrig Bleibende anbetrifft, so ist die restierende Differenz der Abstand zwischen den Meridianen. Und schon oben (ist gesagt), daß diese Differenz zwischen Medînat as-Salâm und Mekka etwa 3° ist, wie ich es geschrieben fand, in der Art, wie ich es jetzt erzähle:

Und das ist, daß der Fürst der Gläubigen, al-Ma'mûn, — möge ihn Gott zu Gnaden annehmen — es seinerseits für notwendig erachtete, das Azimut der Qibla zu verbessern. Es fand sich zwischen dem Meridian von Mekka und dem von Medînat as-Salâm ein Unterschied von rund 3°, worunter 3 Grade des Äquators zu verstehen sind; und dies ist der Wert des Bogens *UH.* Wir geben von der Breite von Medînat as-Salâm den Sinus an, und der ist $= 33^p\,2'\,38''$ oder $= 118958$ Sekunden $= 7137480$ Tertien. Der Kosinus der Ortsbreite ist $50^p\,4'\,54''$ oder $= 180294$ Sekunden. Wir teilen den Sinus der Breite von Medînat as-Salâm durch den Kosinus; es folgt aus der Teilung $39'\,35''\,17''' = 142517'''$. Wir nennen dies Teilverhältnis I/II. Der Kosinus von 3°, d. i. der Kosinus der Differenz der 2 Meridiane, ist $59^p\,55'\,4''$. Wir teilen ihn durch sin. tot., und es kommt aus der Teilung $59'\,55''\,4'''$ heraus. Das ist das Verhältnis V/VI, und es ist in Tertien ausgedrückt $= 215704'''$. Nunmehr teilen wir das Verhältnis I/II durch das Verhältnis V/VI, und es ergibt sich aus der Teilung für das Verhältnis III/IV das Resultat $39'\,51''\,14'''$. Wir quadrieren diesen Wert und erhalten $26'\,28''\,14'''$. Dies vermehren wir um $1^p$ und ziehen die Quadratwurzel aus der Summe; die Wurzel liefert $4322'' = 1^p\,12'\,2''$. Damit teilen wir in den sin. tot., aus welcher Teilung $49^p\,58'\,37'' = 179417''$ hervorgeht. Und dies ist der Sinus des angrenzenden 1. Bogens, des Bogens *KU*. Der entsprechende Bogen *KU* ist $= 56^0\,24'\,8''$. Wir multiplizieren sin *KU* mit sin. tot. und teilen das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite, welcher Kosinus $= 50^p\,4'\,54''$ ist. Was aus der Teilung hervorgeht, ist $= 59^p\,5'\,6''$, und S. 80$^v$
dies ist der Sinus der Ergänzung des abgeschnittenen Bogens = sin *KA*. Der entsprechende Bogen ist $= 86^0\,12'\,15''$.

Die Breite Mekkas ist 21° 41'. Wir vermehren sie um den angrenzenden 1. Bogen, und es wird die Summe = 78° 4' 8''. Der Sinus hievon ist $58^p\,42'\,12''$. Dies multiplizieren wir mit dem Sinus der Breite von Medînat as-Salâm, welcher Sinus = $33^p\,2'\,38''$ ist. Das Ergebnis der Multiplikation ist $1939^p\,46'\,55''$. Das Komplement des angrenzenden 1. Bogens ist 33° 35' 52''. Der Sinus hievon beträgt $33^p\,12'\,18''$. Wir teilen damit in das, was sich aus der 1. Multiplikation ergibt, die 6983215'' lieferte, nämlich mit 112530''; aus dieser Division kommt $58^p\,25'\,20''$ heraus. Das ist der Sinus des angrenzenden 2. Bogens. Der entsprechende Bogen selbst ist = 76° 50'. Wir ziehen dies von 90° ab, was übrig bleibt, ist der abgeschnittene 2. Bogen; er ist = 13° 10' = Bogen $\Delta G$.

Wir hatten den Kosinus des abgeschnittenen 1. Bogens berechnet, welcher gleich sin $KA$ = $59^p\,5'\,6''$ ist. Es ist also der Betrag der Ergänzung des abgeschnittenen 1. Bogens = 86° 12'15'', und seine Ergänzung, welche der abgeschnittene 1. Bogen selbst ist, = 3°47'45'', und das ist Bogen $KB$. Sein Sinus ist $3^p 57'5''$. Wir multiplizieren ihn mit sin. tot. und erhalten $237^p 56'$. Diese Zahl teilen wir durch den Sinus des abgeschnittenen 2. Bogens, der = 13° 40' 1'' ist. Was dieser Teilung entfließt, ist $17^p 44'35''$. Die Ergänzung der Breite Mekkas ist 68° 20' [genauer 68° 19']; der Sinus hierzu ist = $55^p\,45'\,18''$. Wir multiplizieren ihn mit dem, was aus der Teilung herauskam, und erhalten $959^p\,42'\,15''$. Dies teilen wir durch den Kosinus des angrenzenden 1. Bogens, der = $33^p\,12'\,15''$ ist. Der sich ergebende Bogen ist = 29° 7'. Und dies ist der Betrag des Bogens $LB$, der das Azimut ist, ich meine die Bogendistanz zwischen dem Südende der Mittagslinie und dem Punkte, der gen Westen liegt, genommen auf dem Horizontkreise von Medînat as-Salâm. Unter diesem Punkt ist S. 80$^r$ aṣ-ṣalât (Azimut des Gebetskreises $\Delta GL$) = 29° 7', und das ist es, was wir beweisen wollten."

Gerne und dankbarst erwähne ich an dieser Stelle die gütigen Hilfeleistungen zur Erlangung der Photos der kleinen Handschrift, die ich den Herren Joaquim Bensaude (Lissabon), Baron Carra de Vaux (Paris) und Alfred Wolfer (Zürich) verdanke.

Tafel der Länge und Breite einiger bekannter Städte, sowie des Inḥirâfs ihrer Qibla.

| Städte | Länge | Breite | Inḥirâf | Städte | Länge | Breite | Inḥirâf |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Qubbat Arîn | 90° 0′ | 0° 0′ | 117° 10′ | Asuân | 55° 50′ | 22° 30′ | 87° 0′ |
| Insel Soqoṭra | 67° 30′ | 9° 30′ | 176° 0′ | Asiûṭ | 55° 10′ | 26° 0′ | 70° 30′ |
| Donqola | 53° 40′ | 14° 0′ | 106° 20′ | al-Fajûm | 55′ 0 | 28° 30 | 56° 20′ |
| Fâs | 8° 0′ | 35° 30′ | 90° 0′ | al-Qâhira | 54° 40′ | 30° 0′ | 55° 10′ |
| Ṭanǧa | 8° 30′ | 35° 30′ | 90° 0′ | Iskenderja | 51° 50′ | 30° 58′ | 58° 0′ |
| Tûnis | 29° 30′ | 31° 40′ | 101° 30′ | Damjâṭ | 53° 50′ | 31° 25′ | 58° 0′ |
| Siǧilmêsa | 10° 45′ | 31° 20′ | 93° 30′ | Ġaza | 56° 0′ | 32° 0′ | 48° 0′ |
| Zuweila | 19° 30′ | 30° 0′ | 90° 0′ | 'Asqâlon | 55° 20′ | 32° 0′ | 48° 30′ |
| Qorṭoba | 8° 40′ | 35° 0 | 90° 0′ | ar-Ramla | 56° 50′ | 32° 40′ | 42° 30′ |
| Rûmia | 35° 35′ | 41° 50′ | 63° 20′ | al-Quds aš-šarîf | 56° 30′ | 32° 0′ | 44° 30′ |
| Mâqîdûnjâ | 49° 0′ | 40° 0′ | 45° 0′ | 'Akkâ | 58° 30′ | 33° 20′ | 35° 0′ |
| Qairuân | 31° 0 | 32° 30′ | 81° 50′ | Beirût | 59° 50′ | 33° 0′ | 32° 0′ |
| Tarâbulus al-ġarb | 32° 20′ | 32° 30′ | 78° 10′ | Ṭarâbulus aš-šâm | 59° 40′ | 34° 0′ | 29° 0′ |
| Barqa | 43° 0′ | 32° 0′ | 68° 40′ | Dimišq al-maḥrûsa | 60° 0° | 33° 30′ | 28° 0′ |
| Išbîlia | 15° 40′ | 37° 15′ | 70° 30′ |  |  |  |  |
| Serendîb | 127° 30′ | 10° 0′ | 64° 30′ | Ḥoms | 61° 0 | 34° 20′ | 25° 40′ |
| 'Aden | 66° 30′ | 11° 0′ | 0° 0′ | Tadmur | 61° 40′ | 35° 0′ | 22° 30′ |
| Ḥadramuut | 71° 30′ | 12° 30′ | 86° 30′ | aṣ-Ṣalt | 58° 10′ | 32° 50′ | 30° 0′ |
| Ṣan' â' | 60° 30′ | 14° 30′ | 176° 0′ | Baṣrâ(i) | 60° 0′ | 32° 55′ | 30° 0′ |
| Sûâkin | 60° 0′ | 19° 0 | 170° 0′ | Gard 'alâ'l-šaṭṭ |  |  |  |
| Ẓafâr | 60° 0′ | 13° 30′ | 177° 0′ |  |  |  |  |
| Sabâ | 68° 0′ | 16° 30′ | 168° 0′ | Ǧazira b. 'amr | 56° 0′ | 34° 0′ | 39° 0′ |
| Kandî | 101° 30′ | 19° 10′ | 86° 30′ | Qusṭanṭinia | 56° 50′ | 41° 15 | 28° 40′ |
| Qandahâr | 98° 0′ | 33° 0′ | 75° 0′ | ar-Raqqa | 63° 15′ | 36° 0′ | 17° 30′ |
| Dînawar | 96° 0′ | 33° 45′ | 73° 0′ | Hît | 69° 0′ | 32° 30′ | 9° 50′ |
| al-Manṣûra | 95° 0′ | 35° 40′ | 87° 0′ | al-Ambar | 69° 50′ | 33° 15′ | 14° 20′ |
| Qašmir | 99° 0′ | 33° 20′ | 78° 0′ | Bâb al-abwâb | 66° 0′ | 41′ 40′ | 3° 30′ |
| Mekka al-mušrafa | 67° 0′ | 21° 30′ | 0°<br>(qibla) | Darenda | 64° 50′ | 39° 50′ | 3° 30′ |
|  |  |  |  | Širwân | 67° 30′ | 40° 0′ | 0° 0′ |
| al-Medîna al-munáwwara | 65° 20′ | 24° 45′ | 0° 0′ | Nachičawân | 72° 20′ | 38° 30′ | 15° 30′ |
|  |  |  |  | Ardubîd | 73° 0′ | 37° 50′ | 19° 40′ |
| al-Jamâma | 71° 30′ | 21° 50′ | 81° 30′ | Tâbrîz | 73° 10′ | 37° 40′ | 20° 30′ |
| Haǧar | 73° 30′ | 24° 55′ | 63° 20′ | Marâġa | 73° 10′ | 36° 25′ | 21° 40′ |
| Fusṭâṭ aṣ-ṣa'îd | 54° 30′ | 30° 0′ | 63° 10′ | Sinǧâr | 68° 0′ | 35° 0′ | 4° 40′ |

Tafel der Länge und Breite einiger bekannter Städte, sowie des Inḥirāfs ihrer Qibla.

| Städte | Länge | Breite | Inḥirāf | Städte | Länge | Breite | Inḥirāf |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nīnivī | 69° 0' | 35° 55' | 7° 40' | Qāšān | 76° 0' | 34° 0 | 40° 30' |
| Takrīt | 69° 30' | 35° 30' | 9° 30' | Kirmān | 90° 0' | 30° 0' | 30° 40' |
| al-Kūfa | 69° 30' | 32° 0' | 13° 30' | Qum | 75° 0' | 35° 0' | 35° 40' |
| Baġdād | 70° 0' | 33° 25' | 13° 30' | Iṣṭachr | 75° 40' | 32° 0' | 36° 21' |
| al-Mōṣul | 69° 0' | 35° 10' | 10° 30' | ar-Raî | 70° 0' | 35° 35' | 38° 10' |
| Kazwān | 77° 0' | 30° 0' | 48° 0' | Būzǧān | 85° 0' | 35° 20' | 54° 0 |
| Baṣra | 75° 0' | 31° 0 | 37° 30' | Nīšabūr | 82° 30' | 36° 20' | 96° 0' |
| Šīrāz | 75° 30' | 30° 0' | 57° 30' | Berṣāw | 57° 30' | 40' 0' | 28° 0' |
| Wāsiṭ | 71° 30' | 32° 20' | 20° 30' | Merwarrūd | 87° 0' | 37° 0' | 32° 0' |
| al-Nahirwān | 70° 20' | 33° 25' | 13° 20' | Herāa | 88° 40' | 36° 45' | 61° 0' |
| ʿAbadān | 75° 0' | 31° 0' | 37° 0' | Saqrūr | 89° 0' | 39° 0' | 64° 0' |
| Iṣfahān | 75° 40' | 32° 30' | 49° 21' | Qaraǧistān | 89° 0' | 36° 40' | 58° 0' |
| Hamadān | 74° 0' | 35° 0' | 22° 0' | Bulġār | 88° 0' | 49° 0 | 57° 0' |
| Samarqand | 88° 20' | 40° 0' | 51° 40' | Aḏerbiǧān | 78° 0' | 39° 0' | 20° 0' |
| Chuwārizm | 84° 0' | 42° 10' | 39° 0' | Buchārā | 88° 0' | 39° 0' | 49° 0' |
| Ferġāna | 92° 0' | 42° 20' | 83° 0' | Chorāsān | 89° 30' | 40° 30' | 51° 10' |

64

Nova Cygni III (1920) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{55.0} = 19^h\ 54^m\ 47^s \\ \delta_{55.0} = +53^\circ\ 13'5 \end{array} \right\}$

# ORTSBESTÄMNINGAR I DEN ARABISKA ASTRONOMIEN.

Man fäller vid skildringen af matematikens och astronomiens historia ofta hårda, ja orättvisa omdömen om arabernas självständiga vetenskapliga produktion, och man vill i hufvudsak endast tillerkänna dem rollen såsom förmedlare mellan orientens och västerlandets vetenskap. Äfven om ett dylikt bedömande i flera hänseenden träffar rätt, är det dock generellt taget icke riktigt. Visserligen uppvisar den arabiska vetenskapen på långt när icke så många banbrytande andar som den grekiska, och många arabiska astronomer ha utan tvifvel bedrifvit, och eventuellt äfven befordrat, astronomien af bevekelsegrunder, som från vetenskapsmannens ståndpunkt icke torde kunna ställas som de högsta, nämligen den islamiliska religionens och astrologiens intressen. Hos intet folk finna vi en så intim förbindelse mellan religion och astronomi som just hos araberna; deras astronomer voro vanligen religionens tjänare och de förvärfvade i allmänhet sitt lifsuppehälle genom praktiskt utöfvande af stjärntydarekonsten. Men äfven vetenskapens främjande gälde såsom något i religiöst afseende förtjänstfullt i musulmanens ögon. Detta framgår ur flera yttranden i de medeltida arabiska skrifterna.

De religiösa krafven föranledde de arabiska astronomerna att särskildt egna sig åt noggranna ortsbestämningar. Så är upplinjerandet af visartaflan på ett solur — och med konstruktionen af dylika var man ju i de mohammedanska länderna mycket noga — beroende företrädesvis af den geografiska bredden för den ort, för hvilken uret var bestämdt. Men af ställningen hos den skugga, som solvisaren (miqjâs) kastade, bestämde man tiden för middags- och eftermiddagsbönen (ẓuhr och 'asr). Vidare föreskrifver Qur'ân att under de fem dagliga bönerna ansiktet skall vändas mot Mekka. Riktningen mot Ka'ba i Mekka heter *Qibla*, och man behöfver för att kunna noggrannt fastställa densamma kännedom om längden och bredden för den gifna orten och för Mekka. För ställandet af horoskop var det i astrologiskt hänseende åter mycket viktigt att kunna beräkna solens, månens och de fem planeternas ställning på himlen vid hvarje tidpunkt och för hvarje ifrågakommande geografisk bredd.

Dessa korta antydningar torde vara tillräckliga för att visa hur viktiga ortsbestämningarna voro för araberna. Det är därför naturligt att läran om bestämningen af de geografiska koordinaterna för en jordort skulle hos dem omhuldas. I synnerhet gäller detta läran om breddbestämning, med hvilken vi nu närmast skola något uppehålla oss.

De arabiska astronomerna på 800-talet *al-Chwârizmî* (död mellan 865 och 875), *al-Ferġânî* och *al-Battânî* (d. 929) framställde för bestämmande af den geografiska bredden metoder, som man delvis finner redan hos grekerna och inderna. Grekiskt är visserligen blott förfaringssättet att härleda polhöjden ur skillnaden mellan den längsta dagens och medeldagens längd. Det återfinnes också endast hos *al-Battânî*, hvars astronomiska tabeller ju ofta nära ansluta sig till *Ptolemaios'* Almagest. Af indiskt ursprung äro bestämningarna af bredden ur solens middagshöjd, vare sig den observeras endast vid dagjämningarna, då solens deklination är =o och man alltså blott behöfver subtrahera dess middagshöjd från 90° för att erhålla polhöjden, eller den observeras vid godtycklig soldeklination. Hinduerna bestämde solens kulminationshöjd genom iakttagande af skuggan från en lodrätt stående staf (gnomon), hos dem kallad *Çanku*, araberna dessutom redan tidigt med användande af astrolabiet. Det var den framstående arabiske astronomen *Ibn Yûnus* (död i Kairo 1009), som bevisade att ändpunkten af gnomonskuggan gaf höjden, icke för solens medelpunkt, utan för den öfre solranden. Han rekommenderade äfven, att man skulle korrigera den uppmätta höjden för solens parallax, hvars belopp han taxerade till 3' i maximum. Den östarabiska astronomen *al-Bîrûnî* (d. 1048) ger i sin astronomi *al-Qânûn al-Mas'ûdî* en för hans hemort Ġazna (polhöjd 33°35') i Afġanistan gällande tabell öfver middagsskuggan för hvar dag af året hos en gnomon af 12 fingers längd, och denna tabell kan användas både för en lodrätt stående och för en vågrätt på en lodrätt vägg fästad miqjâs. Metoden med solens kulminationshöjd var väl den i praktiken oftast använda, och den rekommenderades af nästan alla arabiska astronomer, såsom *al-Chwârizmî*, *al-Battânî*, *Ibn Yûnus*, *Abû'l-Ḥasan 'Alî*, från Marrâkesch, *Ulûġ-Beg* m. fl. — Då himmelspolens höjd öfverensstämmer med den geografiska bredden, anföres äfven direkt mätning af polhöjden som användbar, dock endast af *al-Chwârizmî* och *al-Ferġânî*. Enligt *Strabo* talar redan *Hipparchos* om världspolens höjd såsom ekvivalent med observationsortens geografiska bredd. Dock finnes ingenstädes angifvet, huruvida polstjärnan eller någon annan punkt på himlen skall anses som polen. Måhända gjordes den förutsättningen att den öfre och undre kulminationshöjden hos en cirkumpolarstjärna skulle mätas och därefter medeltalet af dessa två höjder bildas. Detta skulle då vara samma princip som äfven i våra dagar ofta tillämpas vid bestämning af polhöjden. Vi möta detta förfaringssätt för härledning af den geografiska bredden ('arḍ al-balad) först hos *al-Chwârizmî* och *al-Battânî*, men högst sannolikt äro de arabiska textställen hos de båda författarna, som handla om denna sak, förfalskade och infogade i manuskripten af senare afskrifvare. Denna af *Nallino* och *Suter* framkastade förmodan bekräftas däraf, att jag icke kunnat finna någon antydan om denna dock så åskådliga breddbestämningsmetod hvarken hos *Ḥabasch al-Ḥâsib* (d. mellan 865 och 875) eller hos *Ibn Yûnus*, eller hos *al-Bîrûnî*. Utförligt afhandlas saken hos *Abû'l-Ḥasan 'Alî* från Marrâkesch, hos hvilken det äfven heter, till komplettering af metoden: „Om de båda höjderna äro af olika riktning, drar man deras summa från 180°, adderar hälften af den så uppkomna resten till den minsta höjden och erhåller då ortens bredd“.

Det är mycket tvifvelaktigt, huruvida metoden att bestämma bredden ur aritmetiska mediet af en cirkumpolarstjärnas kulminationshöjder blef praktiskt använd; hittills har nämligen intet exempel på detta förfaringssätt påträffats i den arabiska litteraturen. Det förflyter 12 timmar mellan två successiva kulminationer af en och samma fixstjärna, och då äfven under vinterhalfåret i den subtropiska zonen — Islâms hufvudsakliga utbredningsområde — nattens längd icke mycket öfverstiger 12 timmar, torde endast under särskildt gynsamma omständigheter observationer af båda kulminationerna under samma natt varit möjliga.

Hvem är metodens uppfinnare? Vi veta det icke. Den förmodan geografen *Hugo Berger* framställer i sin „Geschichte der wissenschaftlichen Geographie bei den Griechen" (Leipzig 1903, s. 339) torde icke utan vidare kunna afvisas. Enligt denna förmodan skulle det ha varit en af tidigaste Nordlandsfararna, som med ett passareliknande vinkelmätningsinstrument af enklaste slag först var i stånd att på det ifrågavarande sättet mäta cirkumpolarstjärnornas meridianhöjder och sålunda fastställa bredden för sin uppehållsort. Man torde väl därvid i främsta rummet tänka på Pytheas från Massilia.

Under det att de nu omtalade metoderna icke erbjuda något särskildt märkvärdigt, hafva några helt och hållet självständiga forskare på den arabiska astronomiens område däremot fattat breddbestämningsproblemet djupare och befordrat dess lösning genom originella arbeten. En astronom af genomgående teoretisk läggning var *Ibn al-Haiṭam* (d. 1038), i västerlandet bekant under namnet *Alhazen;* vid hans sida står den lika begåfvade praktikern *Ibn Yûnus.* Båda lefde under någon tid samtidigt i Kairo, men man har hittills icke i deras skrifter funnit några spår, som tyda på en bekantskap mellan de båda vetenskapsmännen. Många afhandlingar af *Alhazen* äro öfversatta till europeiska språk; af *Ibn Yûnus'* Ḥâkimitiska tabeller känna vi blott några få brottstycken.

Hvad nu först *Ibn al-Haiṭam* beträffar, må anmärkas att han är författare till en afhandling „Om en metod att med största noggrannhet bestämma polhöjden". Af den arabiska handskrift som fins i Leiden har jag verkställt en öfversättning, som publicerats såsom N:o 10 i årgången 1920 af „De Zee" (Amsterdam), s. 587—602. Den framstående arabiske forskaren rekommenderar att för fastställande af observationsortens bredd begagna sig af en fixstjärna med största möjliga ljusstyrka, som för ifrågavarande ort vid sin öfre kulmination passerar rakt genom zenit eller, om någon sådan icke finnes, en sådan fixstjärna som åtminstone kulminerar nära zenit. Af denna stjärna tar man i omedelbar närhet till zenit två s. k. korresponderande höjdobservationer på östra och västra sidan om meridianen; detta sker med tillhjälp af ett astrolabium. *Alhazen,* som är bekant i synnerhet genom sina viktiga undersökningar inom optiken, vill genom denna anordning af observationerna undgå inflytandet af refraktionen, som på ringare höjd öfver horisonten skulle medföra ett märkbart fel i mätningen. Han betonar nämligen uttryckligen, att ljusstrålarna vid himlahvalfvets bas äro krökta. Den tid, som förflyter mellan den östliga höjden och den lika stora västliga, mätes på noggrannaste sätt med tillhjälp af ett vattenur (binkâm). Om nu den observerade fixstjärnan vid sin öfre kulmination icke passerar rakt genom zenit, uppmätes den öfre kulminationshöjden $H$. Vi kalla de båda lika stora korresponderande höjderna för $h$ och den östliga och västliga timvinkeln för $t$. Om stjärnan är en zenitalstjärna, är ortens bredd som bekant lika med stjärnans deklination $\delta$. Då kan man alltså erhålla polhöjden $\varphi$ ur $h$ och $t$. För en annan stjärna erhålles den ur $H$, $h$ och $t$. Författarens lösningar af problemet äro i båda fallen intressanta så tillvida, att han först genomför dem rent grafiskt och sedan ur figurerna utläser de trigonometriska formlerna. Något numeriskt exempel ger han icke, hvarföre man kan antaga att han icke pröfvat sin metod i praktiken.

Helt annat med *Ibn Yûnus*! Alla hans lärosatser och metoder illustreras genom talrika numeriska exempel, för det mesta hemtade från hans observationer. Just denna omständighet, jämte många andra företräden hos de Ḥâkimitiska tabellerna, gör det synnerligen beklagligt att vi icke äga någon öfversättning af de bevarade delarna af dessa tabeller. Sedan några år sysselsatt med studiet af desamma, har jag särskildt plockat ut de partier, som handla om ortsbestämningar och publicerat dem i „Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie" (Deutsche Seewarte, Hamburg). Där är det framför allt denne Kairo-astronoms förfaringssätt att bestämma ortsbredden ur solens höjd i 1:a vertikalen, som ådrar sig vår uppmärksamhet. Författaren framställer denna metod i fullt medvetande om det företräde den äger framför andra metoder därutinnan att felet i höjden här (för små geografiska bredder) endast i starkt förminskad grad ingår i det sökta värdet på bredden. Han berättar i 11:e kapitlet af sitt tabellverk, att Kairos öfriga astronomer voro af den åsikten att denna stads bredd var 29°, under det att han själf höll på värdet 30°. Särskildt förklarade astronomen *Abû'l-Faraǧ Aḥmed ibn 'Alî ibn al-Ḥasan*, bekant under namnet *Ibn aṭ-Ṭaḥḥân* (mjölnarens son), att, enligt skuggans gång på hans i al-Qarâfa i Bani-Sari-moskén uppställda solur, bredden måste vara 29°. Men *Ibn Yûnus* visade genom mycket exakta mätningar att solens höjd i 1:a vertikalen vid begynnelsen af Kräftans tecken var något större än 53° (noggrannare 53° 8' 45"), hvilket motsvarar en ortsbredd af 30°. För $\varphi = 29^\circ$ skulle den ifrågavarande solhöjden ha varit = 55° 36' 48". Det blef häraf klart, att felet i *Abû'l-Faraǧs* bestämning berodde på en bristfällighet i uppställningen af hans solur i förhållande till meridianriktningen. — Äfven genom mätning af solens meridianhöjder vid tiderna för solstånden härledde *Ibn Yûnus* polhöjden $\varphi = 30^\circ$ för Kairo samt bestämde ekliptikans lutning till 23° 35' (alltså ungefär 51" för mycket).

Med en breddbestämningsmetod, som helt erinrar om moderna metoder gör oss *Ibn Yûnus* bekanta i 21:a kapitlet af de Ḥâkimitiska tabellerna. Han påvisar här möjligheten att bestämma ortsbredden ur 2 solhöjder och de motsvarande azimuterna. Den formel, som innehåller lösningen af denna uppgift, utvecklas ur en projektionsfigur (analemma) af himmelssfären.

Afläsandet af den geografiska bredden ur skugglinjerna på ett solur, såsom *Abû'l-Faraǧ* gjorde, innebär en verklig breddbestämning egentligen endast under den förutsättningen att dessa skugglinjer för bestämda dagar verkligen uppritas efter solens lopp; äro de härledda genom räkning, så förutsätter denna räkning att ett värde på bredden redan är gifvet. Nu visa *Ibn Yûnus* och *Abû'l-Ḥasan 'Alî* från Marrâkesch hur man i olika fall kan ur dimensionerna på ett solur räkna sig tillbaka till bredden för den ort, för hvilken uret är konstrueradt. Jag har utförligt behandlat denna sak i min skrift „Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhebestimmungen bei älteren Völkern“ (i Archiv der Deutschen Seewarte, Hamburg 1911). Det är tänkbart att en i gnonomik kunnig Mekkapilgrim, som kom till orter i det stora mohammedanska riket, hvilkas polhöjd var honom obekant, kunde genom undersökning af orts-soluren få kännedom om bredden.

Det torde icke sakna sitt intresse att erfara något om precisionen i några med visshet af arabiska astronomer utförda breddbestämningar. Utom det ofvan omnämnda af *Ibn Yûnus* för Kairo använda förfaringssättet med mätning af solhöjder i 1:a vertikalen, synes det uteslutande ha varit fråga om breddbestämning med användande af solens meridianhöjd vid bekant deklination. På detta sistnämnda sätt bestämde *Mûsâ ben Schâkirs* söner bredden för sitt vid Bâb aṭ-Ṭâq (murbågens port) i Baġdâd belägna hus till 33° 20', ett värde som är riktigt på bågminuten. De hade den 16 december 868 och den 17 juni 868 funnit solens kulminationshöjder vara 33° 5' och 80° 15'. *Al-Mâhânî* uppmätte i Surramanra'â den 17 december 857 och den 17 juni 857 de motsvarande solhöjderna 32° 13' och 79° 24', hvaraf framgår att den ifrågavarande ortens bredd är 34° 12'. (*M. v. Oppenheim* anger i sitt arbete „Vom Mittelmeer zum Persischen Golf“, II, s. 221—227, bredden för Surramanra'â eller Sâmarrâ till 34° 11' 30".) Enligt al-Qânûn al-Mas'ûdî har *al-Bîrûnî* för Ġazna, det nutida Ghazni, funnit polhöjden 33° 35', ett värde som torde komma sanningen mycket nära. Utgifvarna af *Ulûġ-Begs* stjärnkatalog, *E. Knobel* och *C. F. H. Peters* (Washington 1917), omtala (s. 10) att *Ulûġ-Beg* bestämt bredden för Samarkand till 39° 37'. Det moderna af *Struve* bestämda värdet är 39° 38' 50".

Vi finna af dessa få exempel, att de arabiska astronomerna genom sorgfälliga observationer voro i stånd att uppnå för den tiden mycket goda resultat. Detta kan delvis ha sin grund äfven i den omständigheten att solens meridianhöjder på subtropiska breddgrader icke märkbart påverkas af refraktionen. Naturligtvis fins det i arabernas geografiska tabeller många orter med dåligt bestämda koordinater, hvilkas härledning uppenbarligen hvilar på mindre exakta mätningar.

För härledande af längdskillnaden mellan två orter anbefallde araberna, enligt en redan i antiken tillämpad princip, iakttagelser af månförmörkelser. Om en dylik bestämning berättar den persiske astronomen *an-Nairîzî* (Anaritius, d. 901 eller 902) i sin skrift „Om Qiblas riktning“ (Bibl. Nat. i Paris, N:o 2457) hvad han funnit upptecknadt i en krönika. Enligt denna berättelse skall chalifen *al-Ma'mûn* ha utfärdat en befallning om förbättring af Qiblas azimut för Bağdâd. För detta ändamål skulle en astronom i Mekka och en annan i Bağdâd observera en och samma månförmörkelse, och hvardera skulle på sin ort bestämma hur lång tid, som förflöt mellan förmörkelsens början och nattens slut. Ur skillnaden mellan de för de båda orterna erhållna tiderna bestämde man vinkelafståndet mellan deras meridianer till ungefär 3°. (I verkligheten är det omkring 5°.)

För tidsbestämningen uppmätte de arabiska astronomerna i regel med astrolabiet höjden af en bekant fixstjärna vid början eller slutet af förmörkelsen. Redan *Ptolemaios* behandlar utförligt i sin Almagest medels den excentriska cirkeln förutberäkningen af sol- och månförmörkelser, och hans behandling af detta ämne är från hans ståndpunkt fullt riktig. Denna ptolemaiska månteori lade de arabiska astronomerna till grund för sina förmörkelsetabeller, ur hvilka man kunde uttaga tiderna för hvarje förmörkelses början och slut samt dess varaktighet. Under det att Ptolemaios' tabeller hänföra sig till Alexandrias meridian, finna vi i arabernas förmörkelsetabeller flera olika meridianer använda, t. ex. meridianerna för Bağdâd, Kairo, Cordoba och Toledo samt den genom qubbat al-arḍ eller qubbat-Arîn gående. Detta var en punkt på ekvatorn, och från en medelmeridian skärande densamma räknade araberna 90 längdgrader åt öster och 90 åt väster. Ordet „Arîn“ är en förvrängning af namnet *Uzain*, den indiska staden *'Οζήνη* (enligt Ptolemaios). Det låg nu nära tillhands för de arabiska astronomerna att jämföra den för en dylik meridian beräknade tiden för en månförmörkelses början (eller för någon annan fas af förmörkelsen) med motsvarande på deras ort observerade tid. Ur tidsskillnaden kunde man sluta sig till längddifferensen mellan observationsorten och den ifrågavarande normalmeridianen. Ett exempel på ett dylikt förfaringssätt finner man i ett arbete af marokkanen *Abû'l-Ḥasan 'Alî*

(Traité des instruments astronomiques des Arabes, Paris 1834), där det heter (s. 314): „Den terrestra längden är en båge af ekvatorn mellan den ifrågavarande ortens meridian och den västliga horisonten af gubbat-Arîn. Man räknar geografiska längder äfven från de Lyckliga öarnas (Kanarieöarnas) meridian, men i detta arbete följa vi den första metoden. Om man alltså vill veta en orts längd, tar man ur tabellerna tiden för förmörkelsens början i qubbat-Arîn och observerar så tiden för inträdet på den ort, där man befinner sig…“

Vi anföra som prof på exaktheten i de arabiska förmörkelsetabellerna det exempel, som återfinnes hos *H. Suter* (Die astronomischen Tafeln der Muḥammed ibn Mûsâ al-Chwârizmi, Köbenhavn 1914, s. 89). Det handlar om en månförmörkelse, hvars midt inträffade den 13 Rabî 'II, 146, 14 timmar efter middagen, d. v. s. den 30 juni 763, kl. 2 på morgonen. Den varade från $0^h\,10^m$ f. m. till $3^h\,50^m$ f. m., alltså i $3^h\,40^m$. Enligt *Th. v. Oppolzers* Kanon der Finsternisse har man i fråga om denna förmörkelse följande för Greenwichs meridian gällande data: förmörkelsens midt 30 juni 763, $1^h\,42^m$ f. m., början 29 juni 763, $11^h\,50^m$ e. m., förmörkelsens varaktighet $3^h\,44^m$. Nu har en senare bearbetare af al-Chwârizmîs tabeller, *Maslama b. Aḥmed al-Mağrîṭî*, för flera af dessa utbytt Arîns meridian mot den för hans hemvist Cordoba gällande. Detta utbyte är i främsta rummet gjordt just för förmörkelsetabellerna. Cordoba ligger ungefär 5 längdgrader västligt från Greenwich, hvilket motsvarar en tidsskillnad af 20 minuter. I själfva verket börjar månförmörkelsen i Cordoba 20 minuter senare än i Greenwich. „Detta är i sanning en vacker prestation af dessa mer än 1000 år gamla arabiska tabeller!“

Emellertid voro icke alla förutberäkningar lika exakta som denna. *Ibn Yûnus* omtalar i 4:e kapitlet af sina Hâkimitiska tabeller (öfversatt af *Caussin* i Notes et extraits des manuscrits de la Bibl. Nat., t. VII, s. 92 ff.) ett antal af tidigare observatörer eller af honom själf observerade sol- och månförmörkelser, med angifvande af det förutberäknade datum, förmörkelsens varaktighet och tiden för inträdet (ortstid, resp. höjd för en bekant fixstjärna). Till dessa uppgifter fogar han meddelanden om skillnaden mellan de observerade och de beräknade tiderna för förmörkelsens början och slut. Där uppträda differenser på $14^m$, $17^m$, $23^m$ och liknande belopp. Dock är att märka, att dessa minuter tillhöra s. k. natt-timmar, hvilka i ifrågavarade fall voro kortare än de vanliga timmarna.

*Th. Epstein* anmärker i sin förträffliga „Geonomie“ (Wien 1888, s. 559): „Observationer på förmörkelserna af vår måne och af Jupitersmånarna kunna icke besitta någon större noggrannhet, då jordens och Jupiters skuggor icke äro tillräckligt skarpt begränsade för att åstadkomma ett ögonblickligt in- och utträde". (Jfr med afseende på denna fråga de intressanta meddelanden, som *Fr. de Paula Triesnecker* gör angående *Beauchamps'* observationer i sin skrift „Über die Ungewissheit einiger astronomischen Fixpunkte bei der Entwerfung einer Karte von Persien und der asiatischen Türkey", Prag 1804, s. 5). — I hvarje fall äro förutsättningarna för en noggrann observation gynsammare under den arabiska och egyptiska himmelns klarhet och genomskinlighet och i Afrikas och Spaniens mauriska länders luft än hos oss. Att araberna insågo betydelsen af noggranna iakttagelser öfver förmörkelsefenomonen framgår däraf att t. ex. *Ibn Yûnus* skilde på icke mindre än fem särskilda fastider:

1) förmörkelsens början,
2) början af inträdet i skuggan (immersion),
3) förmörkelsens midt,
4) början af utträdet ur skuggan,
5) slutet af utträdet (emersion).

Till slut måste jag gifva uttryck åt den 'åsikten, att hos araberna jämte längdbestämning genom observation af förmörkelser äfven fastställande af geografiska längder genom itinerarier och resedagböcker praktiserades, och att längdbestämningarna icke så sällan voro behäftade med fel på flera grader.

Essen a. d. R. *C. Schoy.*

✿

# Die Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes durch Beobachtung der Meridianhöhe der Sonne oder mittels der Kenntnis zweier anderen Sonnenhöhen und den zugehörigen Azimuten nach dem arabischen Text der Ḥâkimitischen Tafeln des Ibn Yûnus.

Dargestellt von C. Schoy, Essen a. d. R.

(Hierzu Tafel 1.)

Schon früher wies ich darauf hin, daß der hervorragende arabische Astronom Ibn Yûnus in verschiedenen Kapiteln seines umfangreichen Werkes, den Ḥâkimitischen Tafeln, mehrere Methoden zur Bestimmung der Ortsbreite lehrt, die bis heute zum größten Teil noch unbekannt sind. An dieser Stelle möchte ich auf die Verfahren eingehen, die der islâmische Gelehrte zur Ermittlung der geographischen Breite aus Sonnenhöhen und Azimuten anwandte oder vorschlug. Sie sind im 12. und 21. Kapitel seines zîğ (astron. Tafelwerk) enthalten. Die Photographien dieser Partien des arabischen Textes hat mir Herr Dr. C. van Arendonk in Leiden gütigst vermittelt, außerdem, da er gleich mir der Ansicht ist, daß die Übersetzung eines derartigen Werkes dem Urtext möglichst genau entsprechen soll, sich die Mühe genommen, einen Teil meiner Übersetzung in grammatisch-stilistischer Hinsicht zu prüfen und zu verbessern, wofür ich Herrn Konservator van Arendonk auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen möchte.

Wie schon die Überschrift dieser Studie erkennen läßt, handelt es sich hier um zwei verschiedene Arten der Breitebestimmung:

1. um die Auffindung der Ortsbreite aus der beobachteten Kulminationshöhe der Sonne,
2. um ihre Ermittlung aus der Kenntnis zweier verschiedenen Sonnenhöhen und den zugehörigen Azimuten.

Die erste Methode wird im 12. Kapitel gelehrt. Die ausführliche Klarstellung aller möglichen Fälle kann für heutige Anforderungen noch als mustergültig bezeichnet werden. Da der Text dem Verständnis keinerlei Schwierigkeiten macht, so bringe ich gleich die wörtliche Übersetzung des 12. Kapitels und lasse in den Zusätzen auch einen Passus aus dem 11. Kapitel folgen, der von besonderem historischen Werte sein dürfte.

## I.

### Das 12. Kapitel: Über die Kenntnis der Breite der Städte und der übrigen Länder durch Messen der Meridianhöhe der Sonne. S. 258.

Wenn du hierzu gelangen willst, so ermittle an jenem Tage zur Mittagszeit die maximale Sonnenhöhe. Dies erreicht man durch Beobachtung der Sonnenhöhe schon während des Vormittags, indem sie zunimmt, bis sie das Maximum in der Zunahme erreicht hat und dann wieder abnimmt, so daß du den höchsten Punkt kennst, den sie erreichte. Wenn die Beobachtung mit einem Instrument gemacht wird, auf welchem die 2 Minuten nicht deutlich werden, welche nach meiner Meinung das Maximum der Sonnenparallaxe im Höhenkreis ausmachen, so betrachte (das Resultat der Beobachtung) als ob es die Sonnenhöhe zur Mittagszeit an jenem Tage wäre. Und wisse, daß Ptolemaeus die Parallaxe zu 2′ 51″ angesetzt hat unter der Voraussetzung, daß die Sonne in der größten Entfernung vom Erdmittelpunkt steht, und sie wird beim kleinsten Abstand derselben vom Erdmittelpunkt etwa 3′ erreichen. Wenn die Höhe, die man genommen hat, mittels eines gedehnten (großen) Instrumentes erlangt wurde, auf welchem die 2 Minuten deutlich zu unterscheiden sind, so vermehre man die beobachtete Höhe noch um den Betrag ihrer Parallaxe, gemäß dem, was sich in der Tafel der Parallaxe der Sonnenhöhe findet, oder man berechnet diesen Betrag in einer Weise, die ich später noch näher darlegen werde. Was sich dann ergibt, das ist die Meridianhöhe der Sonne an eben diesem Tage. Du kannst aber auch an einem Tag mit Hilfe des indischen Kreises a die Mittagslinie herausbringen und am nächsten Tag während des Vormittags einen Gnomon darauf aufstellen und

1*

genau die Höhe feststellen, wann die Schattenspitze des Gnomons gerade auf die Mittagslinie fällt. Das ist alsdann die derzeitige Meridianhöhe der Sonne. Berichtige sie weiter um den Betrag der Höhenparallaxe der Sonne, wenn ein Instrument benutzt wird, auf welchem dies deutlich wird, wenn nicht, so läßt du die ermittelte Höhe in ihrem Zustande. Die Höhenbestimmung auf die erste Art kann innerhalb eines einzigen Tages stattfinden, die andere nur in zwei Tagen.

Bezüglich des Höhenwinkels der Sonne, wie er durch Messung gefunden wird, lassen sich drei Fälle unterscheiden:

1. Die Meridianhöhe der Sonne ist gerade 90°; ihr Mittelpunkt steht im Zenit.
2. Die Meridianhöhe ist kleiner als 90°.
3. Ein Fall, in welchem der Sonnenmittelpunkt auf dem Horizontkreise liegt, für welchen Fall es keine Höhe gibt.

Der zweite Fall liegt hinsichtlich der Sonnenhöhe zwischen dem 1. und 3. Fall.

Und wisse, daß man für die Höhe zwei Richtungen unterscheidet: eine

*nördliche*, bei der der Sonnenmittelpunkt zwischen Zenit und Nordpunkt liegt, und eine

*südliche*, bei der sich besagter Punkt zwischen Zenit und Südpunkt befindet.

### Ausführung zum ersten der drei Fälle.

nämlich demjenigen, in welchem die Meridianhöhe der Sonne genau 90° beträgt. Falls also die Höhe der Sonne an einem gewissen Orte 90° ist, und du willst die Breite dieses Ortes wissen, so stelle für den Mittag desselben Tages die Länge der Sonne in der Ekliptik fest. Befindet sich die Sonne gerade im Beginn des Widders oder der Wage, so hat der (Beobachtungs-)Ort keine Breite; die beiden Pole des Äquators liegen im Horizont; sie haben weder Erhöhung noch Senkung. Und falls die Sonne sich in einem anderen Sternbilde der Ekliptik befindet, so verschaffe dir zuerst die Kenntnis ihrer Deklination, sei es durch Berechnung b oder mittels der Tafel c, dann entscheide, ob sie nördlich oder südlich ist. Kennst du alsdann die Deklination und deren Vorzeichen[1], so wisse, daß die Deklination gleich der Breite dieses Ortes ist, und daß ihr Vorzeichen mit dem der Breite übereinstimmt, so daß, wenn die Deklination nördlich ist, auch die Breite nördlich ist, und wenn die Deklination südlich ist, auch die Breite südlich ist.

### Zahlenbeispiel zum 1. Fall.

Setze voraus, daß die Sonne im Beginn des Widders stehe und ihre Mittagshöhe 90° sei; alsdann hat der Ort keine Breite. Ferner sei die von der Parallaxe befreite Sonnenhöhe = 74°. Du subtrahierst sie von 90°, es bleiben 16° übrig. Dies ist die Ortsbreite, vorausgesetzt, daß die Sonne auch im Anfang des Widders steht, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen!

### S. 259. Behandlung des 2. Falles.

Er ist der, bei dem die Meridianhöhe der Sonne $< 90^\circ$ ist. Wenn die Höhe der Sonne $< 90^\circ$ ist, so ermittele, ob die Richtung dieser Höhe hinsichtlich des Zenits eine nördliche oder südliche ist. Dann bestimme den Ort der Sonne (in der Ekliptik) für diese Meridianhöhe an jenem Tage und ermittele die Deklination und ihr Vorzeichen. Beachte folgendes: Wenn die Richtung der Höhe mit dem Vorzeichen der Deklination übereinstimmt, in der Weise, daß beide zugleich nördlich oder südlich sind, so addiere beide. Und wenn ihre Summe gerade 90° gibt, so hat der Ort keine Breite. Wenn aber die Summe $> 90^\circ$ wird, so ziehst du 90° von ihr ab; was übrig bleibt, das ist die Breite des Ortes. Sind nun Deklination und Höhe nördlich, so ist auch die Breite nördlich; falls aber beide südlich sind, so ist auch die Breite südlich. Und ist die Summe $< 90^\circ$, so ziehst du sie von 90° ab; der Rest ist die Ortsbreite, sei es, daß die Deklination südlich und die Breite nördlich oder die Deklination nördlich und die Breite südlich ist. Wenn aber die Richtung der Deklination von der der Höhe ver-

---

[1] Ich übersetze in diesem Falle „ǧiha" (= Richtung) mit „Vorzeichen", um diese Stelle des Textes möglichst dem modernen Sprachgebrauch anzugleichen.

schieden ist, also die eine nördlich, die andere südlich ist, so ziehe die Deklination von der Höhe ab, falls die letztere größer ist als die erstere; was übrig bleibt, ziehst du von 90° ab; der Rest ist die Breite des Ortes. Und wenn du das Vorzeichen der Breite wissen willst, so beachte: Wenn die Deklination nördlich, die Höhe aber südlich ist, so ist die Breite nördlich, und wenn die Deklination südlich, die Höhe aber nördlich ist, so ist die Breite südlich. Und ist bei verschiedenem Vorzeichen von Deklination und Höhe die Deklination größer als die Höhe, so ziehe die Meridianhöhe von der Deklination ab; was sich ergibt, ist der Betrag der Abweichung des Pols vom Zenit. Ziehe ihn von 90° ab, so ist der Rest die Polhöhe an diesem Ort. Und wenn die Höhe der Sonne südlich ist, so ist es der Nordpol, der vom Zenit gen Süden abweicht. Wenn aber die Höhe der Sonne gen Norden liegt, so ist es der Südpol, der vom Zenit zur Nordrichtung abweicht.

### Beispiel zum 2. Fall.

Nimm die Meridianhöhe der Sonne in diesem Beispiel zu 74° und die Sonne im Beginn der Zwillinge stehend an. Ihre Deklination sei 20° 16′ 20″, und ihre Höhe ist nördlich, ich meine, daß die Sonne zwischen Zenit und Nordpunkt liegt. Denn addiere ich zu ihr die Deklination, so gibt das die Summe 94° 16′ 20″. Weil dies mehr als 90° ist, so subtrahiere ich davon 90°; es bleibt 4° 16′ 20″, und das ist die Breite des Ortes. Liegt aber die Höhe zwischen Zenit und Süden, so ziehe ich die Sonnendeklination von der Meridianhöhe ab: es bleibt 53° 43′ 40″. Dies ist die Kulminationshöhe der Sonne zu Beginn des Widders oder der Wage. Wenn sie von 90° abgezogen wird, bleibt 36° 16′ 20″ als Ortsbreite übrig. Du läßt ferner die Sonne in 20° des Skorpions und demzufolge ihre Deklination — 17° 50′ 50″ sein. Die Meridianhöhe betrage 50°. Weil die Deklination südlich ist, zählst du ihr die Meridianhöhe hinzu. Das gibt 67° 50′ 50″. Dies ist gleich der Höhe des Kopfes des Widders. Du ziehst sie von 90° ab, und es bleibt 22° 9′ 10″ als Ortsbreite oder Höhe des Nordpols übrig. — Beispiel der Höhe, die sich von der Südrichtung nach der Nordrichtung versetzt hat (hinübergebracht worden ist). Nimm den Ort der Sonne im Kopf des Krebses an; ihre Deklination ist 23° 35′, und die Meridianhöhe der Sonne stehe 103° 35′ vom Südpunkt ab, die Sonne stehe also zwischen Zenit und Norden. S. 260.
Du ziehst die Deklination von 90° ab; es bleibt 66° 25′ übrig. Dies ziehst du von der (nördlichen) Meridianhöhe der Sonne ab, und es bleibt 10° als die gesuchte Ortsbreite, und Allāh leitet zum Richtigen!

### Der 3. Fall

ist derjenige, in welchem der Sonnenmittelpunkt, wann er den Meridian passiert, im Horizontkreise steht und sich nicht hebt und nicht senkt. Wenn also der Sonnenmittelpunkt bei seinem Durchgang durch den Meridian im Horizontkreise steht, und du suchst die Polhöhe dieses Ortes und deren Vorzeichen, so stelle zuerst den Ort der Sonne in der Ekliptik für die Tagesmitte des Beobachtungstages fest. Steht sie im Beginn des Widders oder der Wage, so ist die Breite des Ortes gerade 90°; der Pol steht daselbst im Zenit. Befindet sich die Sonne aber an einer anderen Stelle des Tierkreises, so bestimme ihre Deklination und deren Vorzeichen, sowie die Richtung der Sonne, d. h. ob sie im Norden oder Süden steht. Und wenn Sonnenrichtung und Deklination gleichsinnig sind, so ziehst du die Deklination von 90° ab; das Ergebnis der Subtraktion ist die Breite des Ortes. Und falls die Sonne im Südpunkt in den Horizont kommt, so ist die Breite nördlich, und es ist umgekehrt, wenn sie im Nordpunkt in denselben gelangt. Sind beide Daten verschiedensinnig, ist also die Deklination nördlich und die Sonnenrichtung südlich, so ziehst du die Deklination von 90° ab; was übrigbleibt, ist die Höhe des Südpols an diesem Orte, indem er sich vom Zenit bis zur Gegend des Nordens entfernt hat. — Wir haben auf uns genommen die Darlegung über die Polhöhe und die Kenntnis der Breiten der Länder und Städte, d. h. die Kenntnis hiervon in bewohnten Ländern, in Theorie und Praxis, und Allāh leitet zum Richtigen!

### Kenntnis der Meridianhöhe.

Dieser Abschnitt zerfällt in zwei Teile: Der erste Teil handelt von den Orten, die keine Breite haben, der andere von solchen mit Breite. Ich beginne mit den Orten ohne Breite; es sind diejenigen, die unter dem Äquator liegen.

Wisse, daß es für die Orte, die unter dem Äquator liegen, keine Höhen der beiden Pole gibt, vielmehr liegen beide Pole in ihren Horizontkreisen, und zwar in den Schnittpunkten des Meridians und Horizontes. Zu Beginn des Widders und der Wage geht die Sonne durch die Zenite (beider Horizontkreise), und wenn sie in den nördlichen Tierkreiszeichen steht, weicht sie von ihren Zeniten nach der nördlichen Richtung ab, und umgekehrt, wenn sie in den südlichen Zeichen steht. Wenn sie zu Beginn des Widders oder der Wage in den Meridian tritt, steht sie im Zenit, d. h. in 90° Höhe. Falls sie sich in einem anderen Tierkreiszeichen befindet, so ermittelst du ihre Deklination und ziehst sie von 90° ab; was übrig bleibt, das ist ihre Höhe von der nördlichen Seite aus. Falls sie in einem der südlichen Tierkreiszeichen steht, suchst du wiederum ihre Deklination auf und ziehst sie von 90° ab, was übrigbleibt, ist ihre Höhe von der Richtung des Südpunktes aus gezählt.

Im zweiten Teil, der von den Orten mit Breite handelt, muß man zwei Möglichkeiten unterscheiden, nämlich Ortsbreiten, in denen der Nordpol, und solche, in denen der Südpol sichtbar ist. Ist den Bewohnern der Nordpol in der Nordgegend sichtbar, so weicht der Äquator vom Zenit nach Süden ab, und die südliche Deklination reicht bis zur Nähe des Horizonts, die nördliche bis in
S. 261. die Nähe des Zenits. Ist hingegen den Bewohnern der Südpol sichtbar, so wisse, daß der Äquator vom Zenit nach Süden abweicht, und daß die nördliche Deklination bei ihnen dicht am Horizonte liegt, die südliche aber in der Nähe des Zenits.

Wenn man die Mittagshöhe an einem jener Orte, welche Breite haben, wissen will, so muß man erst dessen Breite kennen. Dann ziehe man sie stets von 90° ab; was übrigbleibt, das ist die Mittagshöhe der Sonne für den Beginn des Widders oder der Wage. Und wenn die Sonne in einem anderen Sternbild steht, so ermittle zuerst ihre Deklination und das Vorzeichen derselben hinsichtlich Norden oder Süden. Falls der Parallelkreis der Sonne gegen den Horizont hin liegt, so ziehe die Sonnendeklination von der Äquatorhöhe ab; was übrigbleibt, ist die Mittagshöhe der Sonne an diesem Tag. Wenn aber der Sonnenparallel bis nahe an das Zenit heranreicht, so vermehre die Deklination um die Äquatorhöhe in dieser Breite; was sich ergibt, sei es 90° oder nahezu 90°, das ist die derzeitige Meridianhöhe der Sonne. Überschreitet die Summe 90°, so ziehst du sie von 180° ab. Der Rest ist die Mittagshöhe der Sonne für diesen Tag. Und wisse, daß sie sich weggewendet hat von der Richtung der Äquatorhöhe an diesem Ort bis zur gegenteiligen Richtung, ich meine damit, daß die Höhe der Sonne zur Zeit der Äquinoktien nahe dem Norden war und sich jetzt der Südrichtung zuwendet, daß sie aber, wenn sie dem Süden benachbart ist, sich zum Norden wendet. Und falls die Sonne in ihrem Parallel sich dem Horizont nähert, und ihre Deklination der Höhe zur Zeit der Äquinoktien gleich ist, so wisse, daß dann der Sonnenmittelpunkt bei seinem Durchgang durch den Meridian im Horizonte liegt, ohne Erhebung und ohne Senkung. Und wenn die Deklination der Sonne größer ist als die Äquatorhöhe um einen Betrag, der kleiner ist als der halbe Sonnendurchmesser (Radius der Sonnenscheibe), so wisse, daß ihr Mittelpunkt schon unter dem Horizonte liegt, obgleich sie nicht ganz verborgen (unsichtbar) ist. Wenn die Deklination der Sonne aber um den Betrag ihres halben Durchmessers größer ist als die Äquatorhöhe, oder noch größer, so ist die Sonne für die Bewohner dieses Ortes nicht sichtbar, wenn sie in den Meridian kommt, und bei Allâh ist die Leitung zum Richtigen!

Meine Darlegung gilt für den Fall, daß die Deklination nahe an den Horizont oder an das Zenit heranreicht im Zeitpunkt als man anfängt (?).

### Beispiele über die Meridianhöhe der Sonne, falls der Ort eine Breite hat.

Ich verteile diese Beispiele auf drei Gruppen:
Bei der ersten Gruppe ist die Ortsbreite kleiner als die größte Deklination.
Dann sei die Ortsbreite der größten Deklination gleich.
Endlich übertrifft die Ortsbreite die größte Deklination an Größe.

Beispiele zur ersten Art: Nimm an, die Ortsbreite sei 20° und nördlich. Subtrahiere sie von 90°, so bleiben 70°; dies ist die Äquatorhöhe dieses Ortes. Wenn die Sonne an einer dieser beiden Stellen (Beginn des Widders oder der Wage) steht, so ist ihre Mittagshöhe 70°; die Sonne steht zwischen Zenit und Süden. Wenn die Sonne jedoch in einem andern Tierkreiszeichen steht, so kann es ein nördliches oder südliches Zeichen sein. Ich werde zuerst darlegen, was von ihr (der Sonne) gilt, wenn sie in den nördlichen Zeichen steht, nachher ein südliches Zeichen annehmen. Die Sonne stehe im 10.° des Stieres; ihre Deklination ist mithin + 14° 54′ 8″; folglich steht sie nahe am Zenit, und darüber habe ich oben schon gesprochen. Man kann zur Äquatorhöhe 70° die Deklination hinzuzählen, es ergibt sich alsdann die Mittagshöhe der Sonne für diesen Ort zu 84° 54′ 8″. Du kannst aber auch die Deklination von der Breite subtrahieren; es bleibt dann 5° 5′ 52″ übrig. Das ist die Zenitdistanz der Sonne. Ziehst du sie von 90° ab, so ergibt sich wiederum die Meridianhöhe zu 84° 54′ 8″. —

Dann stehe die Sonne in 28° 44′ 48″ des Stiers, und weil ihre Deklination S. 262.
nördlich ist, zählst du sie zur Äquatorhöhe hinzu. Die Summe ist = 90°[1]). Das ist die Meridianhöhe der Sonne für diesen Tag; die Sonne steht also im Zenit. Du kannst aber auch die Deklination von der Breite subtrahieren: Du erhältst kein Resultat; also weißt du, daß die Sonne zu Häupten steht.

Nimm ferner an, daß die Sonne im 10.° der Zwillinge stehe; ihre Deklination ist 22° 5′ 0″, und da sie nördlich ist, zählst du sie zur Äquatorhöhe, 70°, hinzu. Die Summe ergibt 92° 5′, und da dies > 90° ist, so weißt du, daß die Sonne sich von der Südrichtung schon abgewandt hat und sich zur Nordrichtung hinwendet; denn sie steht zwischen Zenit und Nordpol. Du ziehst 92° 5′ von 180° ab; es bleibt 87° 55′ als Meridianhöhe der Sonne. Du kannst in diesem Fall aber auch die Ortsbreite von der Deklination abziehen, da die Deklination das Größere ist; es bleibt alsdann 2° 5′ übrig; und das ist die Zenitdistanz der Sonne; ziehst du diese von 90° ab, so bleibt wiederum 87° 55′ als Meridianhöhe.

Weil also die Deklination größer ist als die Ortsbreite, so weißt du, daß sich die Meridianhöhe von der südlichen Richtung zur nördlichen gedreht hat und sich zwischen Zenit und Norden befindet. Dies gilt für den Fall, daß in den nördlichen Sternbildern die Ortsbreite kleiner ist als die größte Deklination.

Für die südlichen Sternbilder ist die Deklination stets von der Äquatorhöhe abzuziehen. So stehe die Sonne im Kopf des Skorpions; ihre Deklination ist alsdann 11° 32′ 22″, und weil sie südlich (negativ) ist, ziehst du sie von der Äquatorhöhe, 70°, ab. Es bleibt 58° 27′ 38″ übrig. Das ist die Mittagshöhe der Sonne für jenen Tag, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen! —

Beispiele zum zweiten Fall, bei dem die Ortsbreite gleich der größten Deklination 23° 35′ (Ekliptikschiefe) ist. Ziehe diese von 90° ab; es bleibt 66° 25′ als Äquatorhöhe. Stelle nun die Sonne in 15° des Stiers. Ihre Deklination beträgt 16° 26′! Falls du die Mittagshöhe willst, vermehrst du die Äquatorhöhe 66° 25′ um diese Deklination. Das gibt 82° 51′ für die Meridianhöhe der Sonne in dieser Ortsbreite, wenn sie in der Mitte des Stieres steht. Oder aber, du ziehst die Deklination von der Breite ab; es bleiben 7° 9′. Das ist die Zenitdistanz der Sonne. Ziehe sie von 90° ab, so bleiben 82° 51′, und das ist die Meridianhöhe der Sonne an jenem Tage.

Nimm alsdann die Sonne im Kopf des Krebses stehend an; ihre Deklination ist jetzt der Ekliptikschiefe gleich, d. h. = 23° 35′. d Und falls du für diesen Tag die Meridianhöhe der Sonne ermitteln willst, so zähle sie zur Äquatorhöhe, 66° 25′, hinzu. Die Summe gibt gerade 90°. Dann steht die Sonne in ihrer

---

[1]) In diesem Fall ist nämlich die Sonnendeklination genau 20°.

oberen Kulmination im Zenit. Du kannst aber auch die Deklination von der Ortsbreite abziehen, und da du kein Resultat erhältst, so weißt du, daß die Sonne im Meridian im Zenit steht, d. h., daß ihre Höhe gerade = 90° ist.

Nunmehr stehe die Sonne in südlichen Sternbildern, und zwar möge sie sich im Anfang des Schützen befinden. Ihre südliche Deklination ist dann = 20° 16′ 20″; sie ist dem Horizont nahe, wovon ich schon oben sprach. Darum mußt du diese Deklination von der Äquatorhöhe abziehen. Es bleibt dann 46° 8′ 40″, und das ist die Meridianhöhe der Sonne an jenem Tage, und es ist klar, daß die Höhe der Sonne in dieser Breite stets zwischen Zenit und Süden liegt, außer speziell zu Beginn des Krebses; denn dort erreicht sie das Zenit.

## Beispiele zur dritten Gruppe.

Nimm hierbei die Ortsbreite größer an als die größte Deklination. Erstere möge 30° sein. Ziehst du sie von 90° ab, so bleiben 60° als Äquatorhöhe der Sonne. Sie liegt also zwischen Zenit und Süden. Dann möge die Sonne im
S. 263. 20. Grad des Widders stehen; ihre Deklination ist + 7° 51′ 53″, und weil sie nördlich ist, addierst du sie zur Äquatorhöhe an dem Orte, dessen Breite 30° ist. Es resultiert 67° 51′ 53″ als Meridianhöhe für jenen Tag in der Breite von 30°. Du kannst aber auch die Sonnendeklination von der Ortsbreite abziehen; es bleibt dann 22° 8′ 7″ übrig. Das ist die Zenitdistanz der Sonne. Subtrahiere sie von 90°; es bleibt wiederum 67° 51′ 53″, und das ist die Meridianhöhe der Sonne. Versetze die Sonne in den Beginn des Krebses. Falls du ihre Mittagshöhe wissen willst, zählst du ihre Deklination — und sie ist 23° 35′ — zur Äquatorhöhe hinzu, so ist die Summe 83° 35′. Und das ist die Meridianhöhe des Krebsanfanges in der Breite 30°. Du kannst aber auch die Deklination von der Ortsbreite abziehen: es bleibt dann 6° 25′. Das ist die Zenitdistanz der Sonne oder die Ergänzung ihrer Mittagshöhe zu 90°. Ziehst du sie von 90° ab,

### Deklinations-

S. 228. S. 229. S. 230.

| Lg.*) | Deklin. | Lg. | Deklin. | Lg. | Deklin. | Lg. | Deklin. | Lg. | Deklin. | Lg. | Deklin. | Lg. | Deklin. | Lg. | Deklin. | Lg. | Deklin |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° ′ | ° ′ ″ | ° ′ | ° ′ ″ | ° ′ | ° ′ ″ | ° ′ | ° ′ ″ | ° ′ | ° ′ ″ | ° ′ | ° ′ ″ | ° ′ | ° ′ ″ | ° ′ | ° ′ ″ | ° ′ | ° ′ |
| 0 10 | 0 4 0 | 5 10 | 2 3 55 | 10 10 | 4 2 58 | 15 10 | 6 0 30 | 20 10 | 7 55 41 | 25 10 | 9 47 45 | 30 10 | 11 35 54 | 35 10 | 13 19 21 | 40 10 | 14 57 |
| 20 | 0 8 0 | 20 | 2 7 52 | 20 | 4 6 55 | 20 | 6 4 23 | 20 | 7 59 28 | 20 | 51 25 | 20 | 11 39 26 | 20 | 13 22 42 | 20 | 15 0 |
| 30 | 0 12 0 | 30 | 2 11 52 | 30 | 4 10 52 | 30 | 6 8 16 | 30 | 8 3 16 | 30 | 55 5 | 30 | 11 42 57 | 30 | 13 26 3 | 30 | 15 3 |
| 40 | 0 16 0 | 40 | 15 50 | 40 | 14 49 | 40 | 12 8 | 40 | 7 3 | 40 | 9 58 45 | 40 | 46 28 | 40 | 29 24 | 40 | 6 |
| 50 | 20 | 50 | 19 50 | 50 | 18 45 | 50 | 16 0 | 50 | 10 49 | 50 | 10 2 24 | 50 | 49 59 | 50 | 32 44 | 50 | 9 |
| 1 0 | 24 | 6 0 | 23 49 | 11 0 | 22 41 | 16 0 | 19 53 | 21 0 | 14 36 | 26 0 | 6 4 | 31 0 | 53 29 | 36 0 | 36 4 | 41 0 | 13 |
| 10 | 28 | 10 | 27 47 | 10 | 26 38 | 10 | 23 45 | 10 | 18 22 | 10 | 9 43 | 10 | 56 59 | 10 | 39 24 | 10 | 16 |
| 20 | 32 | 20 | 31 46 | 20 | 30 34 | 20 | 27 37 | 20 | 22 8 | 20 | 13 22 | 20 | 12 0 29 | 20 | 42 43 | 20 | 19 |
| 30 | 36 | 30 | 35 45 | 30 | 34 30 | 30 | 31 29 | 30 | 25 54 | 30 | 17 0 | 30 | 3 58 | 30 | 46 2 | 30 | 22 |
| 40 | 40 | 40 | 39 44 | 40 | 38 26 | 40 | 35 20 | 40 | 29 40 | 40 | 20 38 | 40 | 7 27 | 40 | 49 21 | 40 | 25 |
| 50 | 44 | 50 | 43 42 | 50 | 42 22 | 50 | 39 12 | 50 | 33 25 | 50 | 24 16 | 50 | 10 56 | 50 | 52 39 | 50 | 28 |
| 2 0 | 48 | 7 0 | 47 41 | 12 0 | 46 17 | 17 0 | 43 3 | 22 0 | 37 11 | 27 0 | 27 54 | 32 0 | 14 25 | 37 0 | 55 56 | 42 0 | 31 |
| 10 | 52 | 10 | 51 40 | 10 | 50 13 | 10 | 46 54 | 10 | 40 56 | 10 | 31 31 | 10 | 17 53 | 10 | 13 59 14 | 10 | 34 |
| 20 | 0 56 0 | 20 | 55 38 | 20 | 54 8 | 20 | 50 45 | 20 | 44 40 | 20 | 35 8 | 20 | 21 21 | 20 | 14 2 31 | 20 | 37 |
| 30 | 1 0 0 | 30 | 2 59 36 | 30 | 4 58 4 | 30 | 54 35 | 30 | 48 25 | 30 | 38 45 | 30 | 24 48 | 30 | 5 47 | 30 | 40 |
| 40 | 4 0 | 40 | 3 3 35 | 40 | 5 1 59 | 40 | 6 58 26 | 40 | 52 9 | 40 | 42 22 | 40 | 28 15 | 40 | 9 3 | 40 | 43 |
| 50 | 7 59 | 50 | 7 33 | 50 | 5 54 | 50 | 7 2 16 | 50 | 55 53 | 50 | 45 58 | 50 | 31 42 | 50 | 12 19 | 50 | 47 |
| 3 0 | 11 59 | 8 0 | 11 31 | 13 0 | 9 49 | 18 0 | 6 6 | 23 0 | 8 59 37 | 28 0 | 49 35 | 33 0 | 35 8 | 38 0 | 15 35 | 43 0 | 50 |
| 10 | 15 59 | 10 | 15 29 | 10 | 13 44 | 10 | 9 56 | 10 | 9 3 21 | 10 | 53 10 | 10 | 38 35 | 10 | 18 50 | 10 | 53 |
| 20 | 19 59 | 20 | 19 27 | 20 | 17 38 | 20 | 13 46 | 20 | 7 4 | 20 | 10 56 45 | 20 | 42 1 | 20 | 22 4 | 20 | 56 |
| 30 | 23 58 | 30 | 23 25 | 30 | 21 33 | 30 | 17 36 | 30 | 10 47 | 30 | 11 0 20 | 30 | 45 26 | 30 | 25 18 | 30 | 15 59 |
| 40 | 27 58 | 40 | 27 23 | 40 | 25 27 | 40 | 21 25 | 40 | 14 30 | 40 | 3 55 | 40 | 48 51 | 40 | 28 32 | 40 | 16 2 |
| 50 | 31 58 | 50 | 31 20 | 50 | 29 21 | 50 | 25 14 | 50 | 18 13 | 50 | 7 29 | 50 | 52 16 | 50 | 31 45 | 50 | 5 |
| 4 0 | 35 57 | 9 0 | 35 18 | 14 0 | 33 15 | 19 0 | 29 3 | 24 0 | 21 55 | 29 0 | 11 3 | 34 0 | 55 40 | 39 0 | 34 58 | 44 0 | 8 |
| 10 | 39 57 | 10 | 39 15 | 10 | 37 9 | 10 | 32 52 | 10 | 25 37 | 10 | 14 37 | 10 | 12 59 4 | 10 | 38 11 | 10 | 11 |
| 20 | 43 56 | 20 | 43 13 | 20 | 41 3 | 20 | 36 41 | 20 | 29 19 | 20 | 18 11 | 20 | 13 2 28 | 20 | 41 23 | 20 | 14 |
| 30 | 47 56 | 30 | 47 10 | 30 | 44 57 | 30 | 40 29 | 30 | 33 1 | 30 | 21 44 | 30 | 5 51 | 30 | 44 35 | 30 | 17 |
| 40 | 1 51 55 | 40 | 51 7 | 40 | 48 50 | 40 | 7 44 18 | 40 | 36 42 | 40 | 25 17 | 40 | 9 14 | 40 | 47 46 | 40 | 16 20 |
| 50 | 1 55 54 | 50 | 55 4 | 50 | 52 44 | 50 | 7 48 6 | 50 | 40 23 | 50 | 28 49 | 50 | 12 37 | 50 | 50 57 | 50 | 16 23 |
| 5 0 | 1 59 54 | 10 0 | 3 59 2 | 15 0 | 5 56 37 | 20 0 | 7 51 53 | 25 0 | 9 44 4 | 30 0 | 32 22 | 35 0 | 13 15 59 | 40 0 | 14 54 6 | 45 0 | 16 26 |

*) Lg. = Länge der Sonne in der Ekliptik.

so bleiben 83° 25', und das ist die derzeitige Meridianhöhe. Sie liegt zwischen Zenit und Süden.

Nunmehr werde die Sonne in den südlichen Sternbildern stehend vorausgesetzt. Sie befinde sich in 5° des Skorpions. Ihre Deklination ist (—) 13° 15' 59". Du ziehst sie von der Äquatorhöhe ab, und es bleibt 46° 44' 1". Das ist die derzeitige Meridianhöhe in der Breite 30°. Du kannst aber auch Breite und Deklination zusammenzählen; ihre Summe beträgt dann 43° 15' 59", und das ist die Zenitdistanz der Sonne; ich meine damit die Ergänzung der Meridianhöhe (zu 90°). Ziehe sie von 90° ab, so bleibt 46° 44' 1", und das ist wiederum die Meridianhöhe, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen!

## Zusätze zum XII. Kapitel der Ḥâkimitischen Tafeln.

ad a) Zum indischen Kreis vgl. auch den Aufsatz von E. Wiedemann: „Über den indischen Kreis, nach al-Bîrûnis kitâb el-tafhîm" (Mitt. z. Geschichte d. Medizin u. d. Naturwissensch. X, 1912, S. 252—255).

ad b) Die Berechnung der Sonnendeklination $\delta$ aus der Sonnenlänge $\lambda$ und der Ekliptikschiefe $\varepsilon$ (= 23° 35') lehrt Ibn Yûnus im XI. Kapitel seines Werkes, S. 225. Seine Regel führt auf die bekannte Formel

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin\lambda\,,$$

wofür der Autor allerdings schreibt:

$$r^2 \cdot \sin\delta = r \cdot \sin\varepsilon \cdot r \cdot \sin\lambda\,,$$

da jeder Sinus in der Sinustafel mit dem Radius r multipliziert erscheint. Mithin stünde bei dem Produkt zweier trigonometrischen Funktionen noch das Quadrat des Radius. Deshalb dividiert der Rechner in diesem Falle das genannte Produkt mit r, wodurch die rechte Seite dann lautet:

$$r \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin\lambda\,.$$

ad c) Eine solche Deklinationstafel enthält das XI. Kapitel der Ḥâk. Tafeln, und ich füge sie unverkürzt hier bei:

**Tafel.**

S. 231.

| Lg. | | Deklin. | | | Lg. | | Deklin. | | | Lg. | | Deklin. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ' | ° | ' | " | ° | ' | ° | ' | " | ° | ' | ° | ' | " |
| 45 | 10 | 16 | 28 | 57 | 50 | 10 | 17 | 53 | 32 | 55 | 10 | 19 | 10 | 16 |
| | 20 | 16 | 31 | 53 | | 20 | 17 | 56 | 13 | | 20 | 19 | 12 | 42 |
| | 30 | 16 | 34 | 49 | | 30 | 17 | 58 | 54 | | 30 | 19 | 15 | 6 |
| | 40 | | 37 | 45 | | 40 | 18 | 1 | 34 | | 40 | | 17 | 30 |
| | 50 | | 40 | 40 | | 50 | | 4 | 14 | | 50 | | 19 | 53 |
| 46 | 0 | | 43 | 34 | 51 | 0 | | 6 | 53 | 56 | 0 | | 22 | 16 |
| | 10 | | 46 | 28 | | 10 | | 9 | 32 | | 10 | | 24 | 38 |
| | 20 | | 49 | 21 | | 20 | | 12 | 10 | | 20 | | 26 | 59 |
| | 30 | | 52 | 14 | | 30 | | 14 | 48 | | 30 | | 29 | 20 |
| | 40 | | 55 | 6 | | 40 | | 17 | 25 | | 40 | | 31 | 40 |
| | 50 | 16 | 57 | 58 | | 50 | | 20 | 1 | | 50 | | 34 | 0 |
| 47 | 0 | 17 | 0 | 50 | 52 | 0 | | 22 | 37 | 57 | 0 | | 36 | 19 |
| | 10 | | 3 | 41 | | 10 | | 25 | 13 | | 10 | | 38 | 37 |
| | 20 | | 6 | 31 | | 20 | | 27 | 48 | | 20 | | 40 | 55 |
| | 30 | | 9 | 21 | | 30 | | 30 | 22 | | 30 | | 43 | 13 |
| | 40 | | 12 | 11 | | 40 | | 32 | 56 | | 40 | | 45 | 29 |
| | 50 | | 15 | 0 | | 50 | | 35 | 29 | | 50 | | 47 | 45 |
| 48 | 0 | | 17 | 48 | 53 | 0 | | 38 | 2 | 58 | 0 | | 50 | 1 |
| | 10 | | 20 | 36 | | 10 | | 40 | 34 | | 10 | | 52 | 16 |
| | 20 | | 23 | 23 | | 20 | | 43 | 6 | | 20 | | 54 | 30 |
| | 30 | | 26 | 10 | | 30 | | 45 | 37 | | 30 | | 56 | 44 |
| | 40 | | 28 | 57 | | 40 | | 48 | 7 | | 40 | 19 | 58 | 57 |
| | 50 | | 31 | 43 | | 50 | | 50 | 37 | | 50 | 20 | 1 | 9 |
| 49 | 0 | | 34 | 28 | 54 | 0 | | 53 | 6 | 59 | 0 | | 3 | 21 |
| | 10 | | 37 | 13 | | 10 | | 55 | 35 | | 10 | | 5 | 33 |
| | 20 | | 39 | 58 | | 20 | 18 | 58 | 4 | | 20 | | 7 | 44 |
| | 30 | | 42 | 42 | | 30 | 19 | 0 | 32 | | 30 | | 9 | 54 |
| | 40 | 17 | 45 | 25 | | 40 | 19 | 2 | 59 | | 40 | | 12 | 3 |
| | 50 | 17 | 48 | 8 | | 50 | 19 | 5 | 25 | | 50 | | 14 | 12 |
| 50 | 0 | 17 | 50 | 50 | 55 | 0 | 19 | 7 | 51 | 60 | 0 | 20 | 16 | 20 |

S. 232.

| Lg. | | Deklin. | | | Lg. | | Deklin. | | | Lg. | | Deklin. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ' | ° | ' | " | ° | ' | ° | ' | " | ° | ' | ° | ' | " |
| 60 | 10 | 20 | 18 | 25 | 65 | 10 | 21 | 17 | 24 | 70 | 10 | 22 | 6 | 28 |
| | 20 | 20 | 20 | 35 | | 20 | 21 | 19 | 12 | | 20 | 22 | 7 | 56 |
| | 30 | 20 | 22 | 41 | | 30 | 21 | 20 | 59 | | 30 | 22 | 9 | 23 |
| | 40 | | 24 | 47 | | 40 | | 22 | 46 | | 40 | | 10 | 49 |
| | 50 | | 26 | 52 | | 50 | | 24 | 32 | | 50 | | 12 | 14 |
| 61 | 0 | | 28 | 57 | 66 | 0 | | 26 | 17 | 71 | 0 | | 13 | 39 |
| | 10 | | 31 | 1 | | 10 | | 28 | 1 | | 10 | | 15 | 3 |
| | 20 | | 33 | 4 | | 20 | | 29 | 45 | | 20 | | 16 | 26 |
| | 30 | | 35 | 7 | | 30 | | 31 | 28 | | 30 | | 17 | 49 |
| | 40 | | 37 | 9 | | 40 | | 33 | 11 | | 40 | | 19 | 11 |
| | 50 | | 39 | 10 | | 50 | | 34 | 53 | | 50 | | 20 | 32 |
| 62 | 0 | | 41 | 11 | 67 | 0 | | 36 | 34 | 72 | 0 | | 21 | 53 |
| | 10 | | 43 | 11 | | 10 | | 38 | 15 | | 10 | | 23 | 13 |
| | 20 | | 45 | 11 | | 20 | | 39 | 55 | | 20 | | 24 | 32 |
| | 30 | | 47 | 9 | | 30 | | 41 | 34 | | 30 | | 25 | 50 |
| | 40 | | 49 | 7 | | 40 | | 43 | 12 | | 40 | | 27 | 8 |
| | 50 | | 51 | 5 | | 50 | | 44 | 50 | | 50 | | 28 | 25 |
| 63 | 0 | | 53 | 2 | 68 | 0 | | 46 | 27 | 73 | 0 | | 29 | 42 |
| | 10 | | 54 | 59 | | 10 | | 48 | 4 | | 10 | | 30 | 57 |
| | 20 | | 56 | 54 | | 20 | | 49 | 40 | | 20 | | 32 | 12 |
| | 30 | 20 | 58 | 49 | | 30 | | 51 | 15 | | 30 | | 33 | 26 |
| | 40 | 21 | 0 | 44 | | 40 | | 52 | 49 | | 40 | | 34 | 40 |
| | 50 | | 2 | 37 | | 50 | | 54 | 23 | | 50 | | 35 | 53 |
| 64 | 0 | | 4 | 30 | 69 | 0 | | 55 | 56 | 74 | 0 | | 37 | 5 |
| | 10 | | 6 | 23 | | 10 | | 57 | 28 | | 10 | | 38 | 17 |
| | 20 | | 8 | 15 | | 20 | 21 | 58 | 59 | | 20 | | 39 | 26 |
| | 30 | | 10 | 6 | | 30 | 22 | 0 | 31 | | 30 | | 40 | 36 |
| | 40 | | 11 | 56 | | 40 | | 2 | 1 | | 40 | | 41 | 44 |
| | 50 | | 13 | 46 | | 50 | | 3 | 31 | | 50 | | 42 | 54 |
| 65 | 0 | 21 | 15 | 35 | 70 | 0 | 22 | 5 | 0 | 75 | 0 | 22 | 44 | 2 |

S. 233.

| Lg. | | Deklin. | | | Lg. | | Deklin. | | | Lg. | | Deklin. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ' | ° | ' | " | ° | ' | ° | ' | " | ° | ' | ° | ' | " |
| 75 | 10 | 22 | 45 | 0 | 80 | 10 | 23 | 12 | 59 | 85 | 10 | 23 | 29 | 40 |
| | 20 | 22 | 46 | 15 | | 20 | 23 | 13 | 43 | | 20 | 23 | 30 | 2 |
| | 30 | 22 | 47 | 21 | | 30 | 23 | 14 | 27 | | 30 | 23 | 30 | 23 |
| | 40 | | 48 | 25 | | 40 | | 15 | 10 | | 40 | | 30 | 42 |
| | 50 | | 49 | 29 | | 50 | | 15 | 52 | | 50 | | 31 | 2 |
| 76 | 0 | | 50 | 33 | 81 | 0 | | 16 | 33 | 86 | 0 | | 31 | 21 |
| | 10 | | 51 | 36 | | 10 | | 17 | 13 | | 10 | | 31 | 39 |
| | 20 | | 52 | 35 | | 20 | | 17 | 53 | | 20 | | 31 | 56 |
| | 30 | | 53 | 39 | | 30 | | 18 | 32 | | 30 | | 32 | 12 |
| | 40 | | 54 | 39 | | 40 | | 19 | 10 | | 40 | | 32 | 28 |
| | 50 | | 55 | 39 | | 50 | | 19 | 47 | | 50 | | 32 | 43 |
| 77 | 0 | | 56 | 35 | 82 | 0 | | 20 | 24 | 87 | 0 | | 32 | 57 |
| | 10 | | 57 | 36 | | 10 | | 21 | 1 | | 10 | | 33 | 10 |
| | 20 | | 58 | 33 | | 20 | | 21 | 36 | | 20 | | 33 | 22 |
| | 30 | 22 | 59 | 30 | | 30 | | 22 | 10 | | 30 | | 33 | 34 |
| | 40 | 23 | 0 | 26 | | 40 | | 22 | 44 | | 40 | | 33 | 45 |
| | 50 | | 1 | 21 | | 50 | | 23 | 17 | | 50 | | 33 | 55 |
| 78 | 0 | | 2 | 16 | 83 | 0 | | 23 | 49 | 88 | 0 | | 34 | 5 |
| | 10 | | 3 | 10 | | 10 | | 24 | 21 | | 10 | | 34 | 14 |
| | 20 | | 4 | 3 | | 20 | | 24 | 52 | | 20 | | 34 | 22 |
| | 30 | | 4 | 55 | | 30 | | 25 | 22 | | 30 | | 34 | 29 |
| | 40 | | 5 | 47 | | 40 | | 25 | 51 | | 40 | | 34 | 36 |
| | 50 | | 6 | 35 | | 50 | | 26 | 19 | | 50 | | 34 | 41 |
| 79 | 0 | | 7 | 29 | 84 | 0 | | 26 | 47 | 89 | 0 | | 34 | 46 |
| | 10 | | 8 | 18 | | 10 | | 27 | 14 | | 10 | | 34 | 50 |
| | 20 | | 9 | 7 | | 20 | | 27 | 40 | | 20 | | 34 | 54 |
| | 30 | | 9 | 55 | | 30 | | 28 | 6 | | 30 | | 34 | 56 |
| | 40 | | 10 | 42 | | 40 | | 28 | 30 | | 40 | | 34 | 58 |
| | 50 | | 11 | 28 | | 50 | | 28 | 54 | | 50 | | 34 | 59 |
| 80 | 0 | 23 | 12 | 14 | 85 | 0 | 23 | 29 | 16 | 90 | 0 | 23 | 35 | 0 |

Eine noch genauere Deklinationstafel, die ebenfalls von **Ibn Yûnus** herrührt, findet man in der arabischen Handschrift **Landberg** Nr. 1038 (Berlin). Dort ist die Deklination in Graden, Minuten, Sekunden und Tertien angegeben, für alle Bogenminuten der Sonnenlänge und für jeden Grad auch von 60 einzelnen Sekunden.

ad d) Dem 11. Kapitel der Ḥâkim. Tafeln entnehme ich folgende historisch bemerkenswerte Stelle über die Ekliptikschiefe:

S. 222. Im Namen Gottes, des barmherzigen Erbarmers! Segne Allâh unseren Herrn Muḥammed und seine Familie! Mache es leicht, o Herr, durch deine Gewogenheit!

Das 11. Kapitel: „Über die größte Deklination und über den Schatten".

Die größte Deklination (Ekliptikschiefe) ist ein Bogen jenes Großkreises, der durch die beiden Pole des Äquators und der Ekliptik geht, und dieser Bogen wird aus seinem Kreise zwischen dem Äquator und dem Tierkreis ausgeschnitten. Und es stellte **Ptolemaeus** die Größe dieses Bogens in (seinem) Almagest zu 23° 51′ 20″ fest. Er berichtet davon mit den folgenden Worten: „Ich habe den Bogen, der vom äußersten Norden bis zur größten südlichen Amplitude reicht, d. h. den Bogen, der zwischen den Wenden liegt, zu allen Zeitpunkten 47 Teile und mehr als ²/₃ Teile, dagegen weniger als ³/₄ Teile gefunden. So ergibt sich hieraus beinahe die Lehre, die **Eratosthenes** aufstellte, und in welcher **Hipparch** mit ihm übereinstimmte, nämlich, daß der Bogen, der zwischen den Wenden liegt, 11 Teile von jenen betrage, deren 83 auf den halben Meridiankreis gehen". Und dies ist das Ende von dem, was ich von den Worten des **Ptolemaeus** angeführt habe; ich aber sage, — und mit Gott gelangt man zum Richtigen —: Weil es bekannt ist, daß die größte Deklination die Hälfte des Bogens ist, der zwischen den Wenden liegt, auf Grund dessen, was die Messung des **Ptolemaeus** notwendig macht, so muß die größte Deklination größer als 23° 50′ und kleiner als 23° 52′ sein. Was das anbetrifft, was **Ptolemaeus** auf Autorität von **Eratosthenes** und **Hipparch** mitteilt, so müssen wir, wenn wir das Maß der größten Deklination in Graden wissen wollen, auf Grund der Tatsache, daß auf den Kreisumfang 360° gehen, 11 mit 360 multiplizieren und das Ergebnis durch 83 dividieren. Was alsdann herauskommt, das ist der Betrag des Bogens, der zwischen den Wenden liegt, 47° 42′ 39″. Die Hälfte dieses Bogens ist gleich der größten Deklination, und sie beträgt demnach ungefähr 23° 51′ 20″, und dies ist dasselbe, was auch **Ptolemaeus** in seiner Deklinationstafel festsetzt. Und ich kenne keine Beobachtung der (größten) Deklination zwischen **Ptolemaeus** und den Verfassern der erprobten Tafeln[1]) (aṣḥâb al-mumtaḥan) außer jener in den 160er Jahren der Higra[2]). Der Beobachter berichtet, daß die größte Deklination 23° 31′ sei. Und was das anbetrifft, was die Urheber der erprobten Tafeln in ihren unserer Zeit nahen Beobachtungen gefunden haben, so haben sie in den Tagen **al-Ma'mûns** zu Baġdâd in aš-Šammâsija[3]) untersucht **Yaḥjâ b. abi Manṣûr, Sened b. 'Alî al-Abbâs b. Sa'îd al-Ġauharî** und eine Anzahl anderer trefflicher Gelehrten, und sie haben sie (die Ekliptikschiefe) zu 23° 33′ gefunden. Es erwähnen dies **Muḥammed b. Mûsâ al-Ḫuârizmî** in seinen Tafeln und **Muḥammed b. Kaṯîr al-Fergânî** in seinem Buch über die Konstruktion des Astrolabs, und die Sache ist allbekannt. — Es berichten die Personen, die nach dem Tode **Yaḥjâs b. abi Manṣûr** in Damaskus Beobachtungen anstellten mit dem Instrument, das anzuwenden **al-Ma'mûn** ihnen befahl, als er gegen die Rumäer (Byzantiner) zog, nämlich **Châled 'abd al-Malek al-Merwarrûḏî, Abû'l-Ṭaijib Sened b. 'Alî** und **'Alî b. 'Îsâ al-Asṭorlâbî** und

---

[1]) Vgl. zu diesen Tafeln: H. **Suter**, „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke", Leipzig 1900, S. 8.

[2]) Das Jahr 160 der Higra (beginnend mit dem 1. muḥarram) fängt mit dem 19. Oktober 776 an.

[3]) Im Quartier Šammâsija (Stadtviertel Baġdâds am Tor gleichen Namens) soll die Kanîsa, d. i. das Beobachtungsgebäude für die Astronomen **al-Ma'mûns** gestanden haben. Seine Errichtung schreibt man dem Astronomen **Abû'l Ṭaijib Sened** ben **'Alî** zu. (Vgl. H. **Suter**, „Die Mathematiker und Astronomen usw.", S. 13).

andere, daß sie die größte Deklination gleich 23° 33′ 52″ gefunden hätten. Die Messung mit dem genannten Instrument fand im Jahre 201 der Ära Jezdegerd statt[1]. Weiterhin berichten die Söhne des Mûsâ b. Šâkir, daß sie die Meridianhöhe der Sonne bei ihrem Eintritt in den Steinbock zu Medinat as-Salâm (Bagdâd) am Donnerstag dem 3. der 5 dem Monat Âbân angehängten Tage im Jahre 237 der Ära Jezdegerd (16. Dezember 868) genommen und ihre korrigierte (genau bestimmte) Höhe 33° 5′ gefunden hätten. Damals stand die Sonne nach der in al-mumtaḥan gegebenen Berechnung bei ihrem Durchgang durch den Meridian in 29° 47′, (des vorausgehenden Sternbildes) und die Höhe wurde mit den beiden Ringen[2] bestimmt, die für die Messung in gleicher Weise angewendet werden. S. 223. Und sie erwähnen ferner, daß sie schon vor dieser Messung, aber in Übereinstimmung mit ihrem Ergebnis, bei Beginn des Steinbocks, eine Messung angestellt hätten, und daß sie die Meridianhöhe der Sonne auch bei ihrem Abstieg in den Krebs, am ersten Tage des Monats Chordâd des Jahres 237 der Ära Jezdegerd (17. Juni 868) gemessen und für ihre Höhe 80° 15′ gefunden hätten. Dabei war die Sonne bereits 10′ weit in den Kopf des Krebses eingetreten. Diese beiden Messungen fanden in ihrer Wohnung statt, die an der Brücke in Bagdâd lag. Zieht man die kleinere dieser beiden Höhen von der größeren ab, so bleibt 47° 10′ übrig, welcher Betrag das Doppelte der größten Deklination ist. Teilt man ihn durch 2, so ist die Hälfte die größte Deklination, nämlich 23° 35′; und das ist der Wert, zu dem man mittels dieser zwei Messungen gelangt. Es ergibt sich daraus die geographische Breite der Brücke bei der Bâb aṭ-Ṭâq (Tor des Mauerbogens) von Bagdâd zu 33° 20′[3]. Die Söhne des Mûsâ b. Šâkir berichten endlich, daß sie die Meridianhöhe der Sonne bei ihrem Eintritt in den Widder ebenfalls in ihrem Hause maßen, und zwar am Mittwoch, als noch zwei Nächte übrigblieben vom 1. Rabî' des Jahres 255[4]. Dabei stand die Sonne 29° 50′ tief in den Fischen, und es war ihre Höhe nach Messung mit einem der Ringe 56° 40′ und mit einem anderen Ring 56° 38′. Und was Aḥmed b. 'Abdallâh Ḥabaš anbetrifft, so setzte er die größte Deklination in seinen erprobten Tafeln, die er al-Qânûn nennt, an zwei Stellen fest; in der Deklinationstafel zu 23° 35′, in der Tafel al-Taqwîm zu 23° 33′, und es sollte doch nur ein Wert sein. Und es erwähnt al-Mâhânî, daß er die Meridianhöhe der Sonne in Surramanra'â (Samarrâ) an dem Donnerstage maß, als noch 10 Tage vom Ṣafar des Jahres 243 der Higra übrigblieben, d. i. der Tag Zâmjâd (der 28.) des Monats Ardebehišt[5], während sie ganz an der Grenze des Sternbildes der Zwillinge stand. Er fand die Höhe der Sonne zu 79° 24′. Ferner maß er sie zu Surramanra'â an dem Donnerstag, als vom Ša'bân des Jahres 243 noch 5 Tage übrigblieben, das ist der Tag Anîrân des Jahres 226 der Ära Jezdegerd[6]. Die Sonne stand am Rande des Schützen, während sich ihre Meridianhöhe zu 32° 13′ fand. Er gab auf Grund dieser Zahlen die Breite von Surramanra'â zu 34° 12′ an. Ich aber sage — und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen — wenn wir die kleinere dieser beiden Höhen von der größeren abziehen, so bleibt 47° 11′ übrig, und das ist

---

[1] Das Jahr 201 der Ära Jezdegerd fängt am 26. April 832 an.

[2] Es dürfte sich wohl um eine Armillarsphäre d. i. „die Besitzerin von Ringen" (Reifenwerk: armilla = Ring, Armband) handeln, oder, da nur Meridianhöhen genommen werden, um Solstitial- und Äquinoktialarmillen, die aber mit dem κρίκος χαλκοῦς (Metallring) und dem μεσημβρινός (Meridiankreis) des Ptolemaeus identisch sein dürften. Für Details über den κρίκος vgl. das Handbuch der Astronomie des Claudius Ptolemaeus (herausgeg. v. K. Manitius, Leipzig 1912/13). 1. Band, S. 138 u. Anmerk. S. 427, sodann „Weltall", 1906, S. 242 ff. (v. Manitius); für Details über das Meridianinstrument: Prokli Diadochi Ὑποτύπωσις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων (herausgeg. von Halma, Paris 1820, S. 78—83 und griechisch und deutsch von K. Manitius, Leipzig 1909, S. 41 ff.) sowie „Weltall" 1905, S. 309 (v. Manitius).

[3] „Beauchamp a trouvé Bagdad par 33° 19′ 40″". (Delambre, Histoire de l'astronomie du moyen âge, Paris 1819, p. 125.)

[4] Das ist der 28. des I. Rabî' des Jahres 255 der Higra = 16. März 869.

[5] Das ist der 20. des Ṣafar des Jahres 243 der Higra = 16. oder 17. Juni 857.

[6] Das ist der 25. des Ša'bân des Jahres 243 der Higra = 17. Dezember 857. Bekanntlich ist bei den Higra-Daten das Datum um einen Tag zweifelhaft; (ob Volkskalender oder astronomische Zählweise) der muhammedanische Tagesanfang ist abends, während der julianische Tag von Mitternacht an gerechnet wird. Vgl. F. K. Ginzel, Handbuch der math. u. techn. Chronologie. 1. Bd., Leipzig 1906. S. 256.

das Doppelte der größten Deklination; die Hälfte davon ist 23° 35′ 30″, und dieser Betrag ist die größte Deklination, zu der man auf Grund dieser Messungen gelangt, unter der Voraussetzung, daß jede Höhe eine von der Parallaxe befreite ist.

Und es sagt Abû'l Ḥasan Ṯâbit b. Qorra: Ich habe alte vorptolemäische Verfahren gefunden, die darauf hinweisen, daß die größte Deklination 23° 35′ ist. Es erwähnt Muḥammed b. Ǧâbir b. Sinân al-Battânî, daß er nach seiner Messung 23° 35′ gefunden habe. Es sagt der treffliche Scherif Abû'l-Qâsim 'Alî b. al-Ḥusain b. Muḥammed abî-'Îsâ, bekannt als Ibn al-A'lam, ein Mann, ausgezeichnet durch Wissenschaftlichkeit und Einsicht, daß er sie ganz gründlich gemessen und als Ergebnis 23° 34′ 2″ gefunden habe. Ebenso berichtet Abû'l Ḥasan aṣ-Ṣûfî 'Abder-raḥman b. 'Omar, daß auch er die größte Deklination sehr gründlich bestimmt habe und zu dem Ergebnis 23° 33′ 45″ gekommen sei. Und er besitzt eine (Ehren-) Stelle in der Wissenschaft des geometrischen Beweises, doch es ist Gott, der zum Rechten verhilft.

Und wisse, daß der für die Beobachtung gemachte Quadrant, falls er gesondert konstruiert und nicht ein von einem Vollkreis abgeteilter 4. Teil ist, bisweilen größer ist als der 4. Teil in Wirklichkeit, und bisweilen kleiner, während es auch möglich ist, daß er in Wirklichkeit ein Viertelkreis ist. Aber wie selten kommt dies vor! Wenn der für die Beobachtung angefertigte Quadrant größer S. 224. als ein Viertelkreis ausgefallen ist, so wird die aus der Beobachtung herausgebrachte Deklination kleiner, als sie in Wirklichkeit ist. Ist der Quadrant aber kleiner, als ein Viertelkreis in Wirklichkeit ist, so kommt die Deklination aus der Beobachtung größer heraus, als sie in Wirklichkeit ist, weil die Beziehung eines und desselben Maßes auf jedes von zwei verschiedenen Maßen für das kleinere ein größeres Verhältnis ergibt als für das größere. Dasselbe gilt für eine Zahl in bezug auf jede zweier verschiedenen Zahlen, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen!

Und wisse, daß der Quadrant, wenn er für sich gesondert auf geometrische Weise konstruiert wird, in den meisten Fällen faktisch größer wird als ein Viertelkreis, wegen eines Grundes, der nur demjenigen bekannt ist, der in der Beobachtung scharf zusieht und subtil nachdenkt, aber dem Anfänger verborgen bleibt, ja selbst dem ständigen Beobachter, wenn ihm der Scharfblick mangelt; mit einem Wort: die Sache ist sehr schwierig. Doch Gott führt, wen er will, zu einer geraden Straße[1]), und der Erhabene sagt: Sprich: „Nicht kennt, wer in den Himmeln und auf der Erde ist, das Verborgene außer Gott"[2]), und der Allmächtige sagt: Sprich: „Wahrlich, mein Herr bringt die Wahrheit heraus, er, der Kenner der verborgenen Dinge"[3]). — Auch ich habe die Deklination der Sonne gemessen und sie zu 23° 35′ gefunden, unter der Bedingung, daß die Parallaxe der Sonne, wie sie in diesen Tafeln dargelegt wird, anders ist, als das was Ptolemaeus erwähnte, und dies ist, daß ich die von der Parallaxe befreite Meridianhöhe der Sonne um die Zeit ihres Eintritts in das Sternbild des Steinbocks kleiner als 36° 21′ 30″ gefunden habe mit den Instrumenten unseres Herrn, des Herrschers der Gläubigen, al-'Azîz billâh Nizâr abi al-Manṣûr, und ich erreichte in der Fehlerlosigkeit und Fassung ungefähr die äußerste Grenze, und so fand ich die von der Parallaxe befreite Höhe bei Beginn des Krebses gleich 83° 31′ 30″, während sie (die Höhe) in der Beobachtung mit dem Sinnesorgane ihre größte Zunahme erreicht hatte. Und wenn du die kleinere dieser beiden Höhen von der größeren abziehst, so bleibt 47° 10′ übrig. Das ist das Doppelte der größten Deklination; die Hälfte davon ist 23° 35′, und das ist der Wert, der in diesen Tafeln festgehalten wird . . ."[4]).

---

[1]) al-Qurân, Sure 2, 136.

[2]) al-Qurân, Sure 26, 66.

[3]) al-Qurân, Sure 34, 47.

[4]) Nach S. Newcomb (Elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy, Washington 1895. pag. 196) gilt für die Ekliptikschiefe die Formel

$$\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 8''.26 - 46''.845 \cdot T - 0''.0059 \cdot T^2 + 0''.00181 \cdot T^3,$$

wo T in Einheiten von 100 tropischen Jahren und mit dem Anfangspunkt 1900,0 gezählt ist. So ist z. B. für das Jahr 1000 n. Chr. $\varepsilon = 23^\circ\ 31'\ 8''.07$, so daß Ibn Yûnus die Ekliptikschiefe um 51″.93 zu groß gefunden hatte.

Das 21. Kapitel der Hâkimitischen Tafeln enthält Methoden der Breitebestimmung, die ganz an moderne Ortsbestimmungen erinnern. Im 65. Bande des Grunert'schen Archivs, Jahrg. 1880 (S. 225 bis 238) hat C. Israël-Holtzwart die sämtlichen theoretisch möglichen Fälle der Bestimmung der Polhöhe aufgeführt und dabei vier Gruppen unterschieden. Die nachstehenden Verfahren des Ibn Yûnus gehören zur 3. Gruppe von Israël-Holtzwart: „Auf die Kenntnis der Lage des Meridians gestützte Methoden", speziell fußen sie auf der Kenntnis von Azimut und Höhe. Die Lösung einer solchen Aufgabe habe ich mit modernen mathematischen Hilfsmitteln gegeben in meiner Schrift: „Beiträge zur nautischen Astronomie" (Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte, Jahrg. 1909, Nr. 1, S. 11). Es ist aber recht instruktiv, zu sehen, wie der arabische Gelehrte die Lösungen rein konstruktiv, nach dem Prinzip des Analemmas durchführt. Leider sind die Zahlenbeispiele so gewählt, daß man fast mit Gewißheit sagen kann, es habe Ibn Yûnus von vornherein die Breite (Kairos) als bekannt vorausgesetzt und danach die Größe der — wohl nicht gemessenen — Azimute festgesetzt.

Ich gebe nicht die Übersetzung des ganzen 21. Kapitels, sondern breche nach den Darlegungen des Autors, die sich auf das beziehen, was uns interessiert, ab; es würden dann zunächst noch zwei weitere Zahlenbeispiele folgen und darauf noch einige weniger wichtige Dinge. Die Übersetzung, die jetzt folgt, ist möglichst wörtlich und ohne Auslassungen.

## II.

## Das 21. Kapitel: Über die Ermittlung der Ortsbreite und der Sonnendeklination, S. 372.
## falls man kennt

### a) ein und dieselbe Sonnenhöhe in zwei einander entgegengesetzten Punkten der Ekliptik sowie das Azimut dieser Höhe in den beiden Punkten.

Hieraus ergibt sich also die Breite des Beobachtungsortes und die Dekli- S. 373.
nation der Sonne, und falls es sich um einen Stern mit (astronomischer) Breite handelt, sein Abstand vom Himmelsäquator. Der Weg, der zur Kenntnis der beiden gesuchten Größen führt, ist der folgende: Du multiplizierst den Sinus eines jeden der zwei Azimute mit dem Kosinus der Höhe und teilst jedes der Produkte durch den Sinus totus[1]). Die Einzelergebnisse behalte im Gedächtnis. Dann addierst du beide und nimmst die Hälfte ihrer Summe, die du dir ebenfalls merkst. Und nun beachte: Ist eines der Azimute nördlich, das andere südlich, so ist die Hälfte dessen, was du dir gemerkt hast, der Sinus der Morgenweite, sind aber beide Azimute südlich, so ist die genannte Hälfte gleich dem Ichtilâf des Horizontes[2]) für diese (Sonnen-) Höhe. Wenn das, was sich dir ergibt, gleich dem Sinus der Morgenweite ist, so ziehe von ihm das ab, was aus der Division für das nördliche Azimut resultierte, oder ziehe es von dem ab, was sich für das südliche Azimut ergibt; denn beide Differenzen sind dasselbe. Was nach der Subtraktion verbleibt, ist der Ichtilâf des Horizontes für diese Höhe und in dieser Ortsbreite. Quadriere ihn, ebenso den Sinus der Höhe, addiere beide Quadrate und nimm die Wurzel aus der Summe. Das Ergebnis der Radizierung merke dir. Multipliziere alsdann den Ichtilâf des Horizontes mit sin. tot. und teile das Produkt durch die Quadratwurzel; das Resultat ist der Sinus der Ortsbreite. Multipliziere endlich den Kosinus der Breite mit dem Sinus der Morgenweite; das Resultat ist der Sinus der Sonnendeklination und der ihm entsprechende Bogen die Deklination selbst. a Und wenn du für einen Stern mit Breite gerechnet hattest, so ist das, was für dich resultiert, seine Äquatordistanz, und falls das Ergebnis deiner Rechnung der Ichtilâf des Horizontes ist, dann multipliziere ihn mit sich selbst und tu dasselbe mit dem Sinus der Höhe. Addiere beide Quadrate und ziehe die Wurzel aus der Summe, deren Betrag du dir merkst. Multipliziere jetzt den Ichtilâf des Horizontes mit sin. tot. und dividiere das Produkt durch den Betrag der Quadratwurzel. Das Ergebnis entspricht dem

---

[1]) Von jetzt ab schreibe ich für Sinus totus abkürzend: sin. tot.

[2]) Dieser Begriff ist ausführlich erläutert in Ann. d. Hydr. usw. 1920, S. 108.

Sinus eines Bogens. Dieser Bogen ist die Ortsbreite. Behalte ihn im Gedächtnis. Ziehe jetzt den Ichtilâf des Horizontes von dem ab, was sich aus der Division für das südliche Azimut ergab; was übrigbleibt, ist der Sinus der Morgenweite; multipliziere ihn mit dem Kosinus der Ortsbreite und teile das Produkt durch sin. tot. Was sich hieraus ergibt, ist der Sinus der Sonnendeklination, für einen Stern mit Breite aber ist das Ergebnis der Sinus seines Bogenabstandes vom Äquator. Und wenn du das, was sich aus der Division für das nördliche Azimut ergab, vom Ichtilâf des Horizontes abziehst, so ist das, was übrigbleibt, tatsächlich derselbe Wert wie vorhin, nämlich der Sinus der Morgenweite. b

Beispiel (für) die Breite 30°; die Höhe sei in jedem der zwei sich entgegengesetzten Orte der Ekliptik 20°; das nördliche Azimut sei 12° 27′ 6″ und das südliche betrage 39° 29′ 12″. Du multiplizierst den Sinus des nördlichen Azimuts, 12$^p$ 56′ 14″, mit dem Kosinus der Höhe, 56$^p$ 22′ 44″; das Produkt S. 374. teilst du durch sin. tot. Es kommt 12$^p$ 9′ 25″ heraus. Diesen Wert behältst du im Gedächtnis. Den Sinus des südlichen Azimuts, der 38$^p$ 9′ 14″ ist, multiplizierst du mit dem Kosinus der Höhe, 56$^p$ 22′ 44″, und teilst auch dies Produkt durch sin. tot.; es resultiert 35$^p$ 51′ 11″, welchen Betrag du dir gleichfalls merkst. Zähle die zwei Ergebnisse der Division zusammen; sie betragen 48$^p$ 0′ 36″. Die Hälfte davon ist 24$^p$ 0′ 18″, und das ist der Sinus der Morgenweite im Norden und im Süden. Davon ziehst du das ab, was aus der Teilung für das nördliche Azimut herauskam, und es bleibt 11$^p$ 50′ 53″ übrig, und dies ist der Ichtilâf des Horizontes für diese Höhe. Wenn du aber den Sinus der Morgenweite von dem für das südliche Azimut im Gedächtnis Bewahrten, nämlich 35$^p$ 51′ 11″, abziehst, so bleibt tatsächlich wiederum 11$^p$ 50′ 53″, und das ist fürwahr ein und dasselbe Resultat aus den beiden Verfahren (der Subtraktion). Du quadrierst diesen Wert und erhältst 140 22 35 6 49; für das Quadrat des Sinus der Höhe, nämlich 20$^p$ 31′ 16″, ergibt sich 421 6 57 36 16. Durch Addition beider Quadrate bekommt man 561 29 32 43 5. Die Wurzel hieraus ist angenähert 23$^p$ 41′ 45″. Nunmehr multiplizierst du den Ichtilâf des Horizontes mit sin. tot. und teilst das Produkt durch den Wert der Quadratwurzel; es ergibt sich aus der Division annähernd 30$^p$, und zu diesem Sinuswert gehört der Bogen 30°, d. h. die Ortsbreite ist 30°; doch es ist Gott, der zum Richtigen verhilft. —

Darauf multiplizierst du den Sinus der Morgenweite, der 24$^p$ 0′ 18″ beträgt, mit dem Kosinus der Ortsbreite von 30°, d. i. 51$^p$ 57′ 41″, und teilst das Produkt durch sin. tot., es kommt 20$^p$ 47′ 19″ 59‴ 18$^{IV}$ 18$^{V}$ heraus, welcher Wert den Sinus der Deklination darstellt. Der entsprechende Bogen, 20° 16′ 20″, ist die Deklination selbst. Falls du aber den Ichtilâf des Horizontes — und er ist 11$^p$ 50′ 53″ — mit 60$^p$ multiplizierst und das Ergebnis durch den Sinus der Höhe, 20$^p$ 31′ 16″, teilst, so resultiert aus dieser Teilung tatsächlich 34$^p$ 38′ 29″ 37‴. Das ist ein 60$^{er}$ Schatten, dessen zugehöriger Bogen rund 60° beträgt. Er stellt die Ergänzung der Ortsbreite dar; du ziehst ihn von 90° ab, und es bleibt 30° für die Ortsbreite übrig, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen! c

Ferner möge die Höhe 40°, das nördliche Azimut 19° 10′ 12″, das südliche 39° 49′ 56″ sein. Der Sinus des kleineren Azimuts ist 19$^p$ 42′ 8″ und der des größeren 38$^p$ 25′ 57″. Du multiplizierst jeden einen der beiden Sinus mit dem Kosinus der Höhe, d. i. 45$^p$ 57′ 46″, und teilst jedes Produkt einzeln durch sin. tot.; es ergibt sich mit dem Sinus des kleineren Azimuts 15$^p$ 5′ 34″; aus dem Sinus des größeren geht 29$^p$ 26′ 28″ hervor. Du addierst die beiden Resultate der Division; ihre Summe ist 44$^p$ 32′ 2″, und die Hälfte hiervon beträgt 22$^p$ 16′ 1″. Dieser Wert ist gleich dem Ichtilâf des Horizontes der Höhe 40°. Sein Quadrat ist 495 49 0 32 1; das Quadrat des Sinus der Höhe ist 1487 25 50 164. Du addierst beide und erhältst als Summe 1983 1450 485. Die Quadratwurzel hieraus ist rund 44$^p$ 32′ 1″. Merke ihren Wert im Gedächtnis. Dann multiplizierst du den Ichtilâf des Horizontes, 22$^p$ 16′ 1″, mit sin. tot. und teilst das Produkt durch die Wurzel; es kommt etwa 30$^p$ heraus, welches der Sinus der Ortsbreite von 30° S. 375. ist, und es ist Gott, der zum Richtigen verhilft. — Darauf ziehst du den Ichtilâf des Horizontes, 22$^p$ 16′ 1″, von dem ab, was aus der Division für das größere Azimut herausgekommen war, nämlich 29$^p$ 26′ 28″; es bleibt alsdann 7$^p$ 10′ 27″

übrig, welcher Betrag der Sinus der Morgenweite ist. Und auf gleiche Weise erhältst du das Resultat 7$^p$ 10′ 27″, wenn du den kleineren der zwei der Teilung entflossenen Werte, nämlich 16$^p$ 5′ 34″, vom Ichtilâf des Horizontes abziehst. Es kommt dieser Betrag also gleichermaßen aus beiden Verfahren heraus. Jetzt multiplizierst du den Sinus dieser Morgenweite mit dem Kosinus der Breite, 51$^p$ 57′ 41″, und teilst das Produkt durch sin. tot. Es resultiert 6$^p$ 12′ 46″ 46‴ 47$^{IV}$ 27$^V$ 6$^{VI}$, und dies ist der Sinus der nördlichen oder südlichen Sonnendeklination. Der entsprechende Bogen 5° 56′ 37″ ist die Deklination selbst.

### b) Andere Abhandlung über die Ermittlung der Ortsbreite, der Sonnendeklination und der Entfernung eines Sterns vom Äquator, falls der Stern eine Breite hat, und falls die Höhe ohne Azimut für einen nicht bekannten Ort (der Sonne) in der Ekliptik gegeben ist, dazu eine andere Höhe, das zugehörige Azimut und dessen Vorzeichen.

Nicht ist uns die Ortsbreite gegeben; damit wir sie kennenlernen, desgleichen die Sonnendeklination und den Abstand eines Sterns mit Breite vom Äquator, verfahren wir, wie ich's beschreibe:

Multipliziere den Sinus des Azimuts mit dem Kosinus der zugehörigen Höhe und teile das Produkt durch sin. tot. Das Ergebnis sei der erste Wert. Behalte ihn im Gedächtnis. Stelle alsdann den Sinus der Höhe ohne Azimut fest, ebenso den Sinus der Höhe mit Azimut und ziehe den kleineren Sinus vom größeren ab. Das Resultat dieser Subtraktion sei der zweite Wert. Erhebe den ersten und zweiten Wert ins Quadrat, addiere beide Quadrate und ziehe die Wurzel aus der Summe. Das Ergebnis merke dir. Multipliziere jetzt den ersten Wert mit sin. tot. und dividiere das Produkt durch die Quadratwurzel; der Quotient ist gleich dem Sinus der Ortsbreite, der zugehörige Bogen ist die Ortsbreite selbst. — Multipliziere ferner den Sinus der Breite mit dem Sinus der Höhe ohne Azimut und teile das Produkt durch sin. tot. Was herauskommt, ist der Sinus der Sonnendeklination; der entsprechende Bogen ist die Deklination selbst. Und wenn für einen Stern mit Breite gerechnet worden ist, so ist das, was sich dir ergibt, die Distanz dieses Sterns vom Äquator an Stelle der Deklination. d

Beispiel. Es sei die Höhe ohne Azimut für dieses Beispiel 53° 8′ 46″. Der Sinus hiervon ist 48$^p$ 0′ 36″. Die Höhe, deren Azimut bekannt ist, möge 40° sein, und ihr Azimut selbst sei 6° 48′ 43″. Den Sinus hiervon, d. i. 7$^p$ 7′ 0″, multiplizierst du mit dem Kosinus der Höhe, ich meine mit dem Sinus von 50°, dessen Wert 45$^p$ 57′ 46″ beträgt. Das Produkt teilst du durch sin. tot. Es kommt 5$^p$ 27′ 6″ heraus. Dies sei der erste Wert. Merke ihn! Nun ziehst du den Sinus der Höhe, d. i. 38$^p$ 34′ 2″, vom Sinus der Höhe ohne Azimut ab; es bleibt 9$^p$ 26′ 34″ als zweiter Wert. Du quadrierst den ersten Wert (5$^p$ 27′ 6″) und erhältst als dessen Quadrat 29 43 14 24 36, was du dir merkst. Ebenso quadrierst du den zweiten Wert (9$^p$ 26′ 34″) und erhältst 89 9 57 46 16 als dessen Quadrat. Du addierst beide Quadrate, was zu der Summe 118 52 12 11 52 führt. Die S. 376. Quadratwurzel hieraus ist annähernd 10$^p$ 54′ 13″. Du merkst auch ihren Betrag. Und nunmehr multiplizierst du den ersten Wert mit sin. tot. und dividierst das Produkt durch die Quadratwurzel. Es ergibt sich rund 30$^p$ als Sinus der Ortsbreite. Der entsprechende Bogen, 30°, ist die Breite selbst, und mit Gottes Hilfe wird man zum Richtigen geführt. — Weiter multiplizierst du den Sinus der Höhe ohne Azimut mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch sin. tot., es kommt 24$^p$ 0′ 18″ heraus. Das ist der Sinus der Sonnendeklination. Sie ist nördlich und = 23° 35′. e Und nur eine nördliche Deklination ist möglich, weil die Höhe ohne Azimut nur dann möglich ist, wenn die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht.

Anderes Beispiel zu dieser Abhandlung: Im vorhergehenden Beispiel war die Höhe mit Azimut kleiner als die Höhe ohne Azimut; in diesem zweiten aber sei die Höhe ohne Azimut kleiner als die Höhe, die ein Azimut hat. Es sei die Höhe ohne Azimut in diesem Beispiel dieselbe wie im ersten, nämlich 53° 8′ 46″, die Höhe mit dem bekannten Azimut sei 60°, das Azimut selbst 4° 21′ 41″. Der Sinus dieses Azimuts ist 4$^p$ 33′ 46″. Diesen Wert multiplizierst du mit dem Kosinus der Höhe, 30$^p$, und teilst das Produkt durch sin. tot., es ergibt sich $2^{p}$ 16′ 53″ als erster Wert, den du dir wohl merkst. Dann bestimmst du den Sinus der Höhe ohne Azimut, er ist $48^{p}$ 0′ 36″, und ebenso findest du für den Sinus der (anderen) Höhe $51^{p}$ 57′ 41″. Nimm die Differenz zwischen beiden; sie ist $3^{p}$ 57′ 5″ und gleich dem zweiten Wert. Du quadrierst den ersten und den zweiten Wert und erhältst als deren Quadrate die Zahlen 5 12 17 2 49 und 15 36 48 30 25. Und behalte den ersten Wert im Gedächtnis. Dann addierst du beide Quadrate. Die dadurch erlangte Summe ist 20 49 5 33 14. Die Wurzel hieraus ist genähert $4^{p}$ 33′ 46″. Auch dies Ergebnis merkst du dir. Nunmehr multiplizierst du den ersten Wert, $2^{p}$ 16′ 53″, mit sin. tot. und teilst das Produkt durch die Quadratwurzel; es kommt wiederum $30^{p}$ als Sinus für die Ortsbreite heraus. Die Breite selbst ist 30°, und es ist Gott, der zum Richtigen verhilft. — Schließlich multiplizierst du den Sinus der Höhe ohne Azimut, 48° 0′ 36″, mit dem Sinus der Breite, $30^{p}$, und teilst das Ergebnis durch sin. tot.: es resultiert $24^{p}$ 0′ 18″, und dies ist der Sinus der Sonnendeklination. Der entsprechende Bogen, 23° 35′ ist die Deklination selbst. f

Und wisse, daß die Höhe mit Azimut, falls sie kleiner ist als die Höhe ohne Azimut, im Norden liegt, daß sie aber im Süden liegt, wenn sie größer ist als die Höhe ohne Azimut.

e) Andere Abhandlung. Wenn du die Ortsbreite und die Sonnendeklination bestimmen willst, falls du zwei verschiedene Höhen, sowie die zu ihnen gehörigen Azimute kennst. und wenn das Azimut und die Stelle der Sonne (die Sonnenhöhe) von ein und demselben Vorzeichen (Richtung) sind,

so verfährst du in der Weise, daß du den Kosinus einer jeden der beiden Höhen S. 377. mit dem Sinus des zugehörigen Azimuts multiplizierst und jedes der beiden Produkte durch sin. tot. dividierst; was sich als Resultat für die kleinere Höhe ergibt, sei der naṣib (Anteil, Portion) für die kleinere Höhe, und was für die größere Höhe herauskommt, sei der naṣib für die größere Höhe. Du merkst dir jeden naṣib einzeln für sich. Und nun beachte: Falls beide Azimute zugleich ein und desselben Vorzeichens sind, und zwar südlich oder nördlich, so ziehe den kleineren naṣib vom größeren ab, und was bleibt, das sei der erste Wert. Wenn aber das eine der Azimute nördlich und das andere südlich ist, so addiere die beiden anṣibā' (Anteile). Was sich nach der Addition ergibt, das ist der erste Wert, und falls du ihn ermittelt hast, so behalte ihn im Gedächtnis. Alsdann ziehe den Sinus der kleineren Höhe vom Sinus der größeren ab; die Differenz ist der zweite Wert. Quadriere ihn und tu ebenso mit dem ersten Wert. Addiere beide Quadrate und nimm die Wurzel aus der Summe, deren Betrag du im Gedächtnis behältst. Darauf multiplizierst du den ersten Wert mit sin. tot. und dividierst das Produkt durch die Quadratwurzel. Der Quotient ist gleich dem Sinus der Ortsbreite, und der zugehörige Bogen ist die Ortsbreite selbst. Und falls du die Ortsbreite kennst und du willst die Sonnendeklination wissen, so multipliziere den Sinus der ersten der beiden bekannten Höhen mit dem Sinus der Breite und teile das Produkt durch den Kosinus der Breite. Das Resultat ist der Ichtilâf des Horizontes für diese Höhe. Du bestimmst seinen Betrag, und nun beachte: Wenn das Azimut südlich ist, und die Sonne steht in den südlichen Sternbildern, so ziehst du den Ichtilâf des Horizontes vom naṣib dieser Höhe ab; was übrigbleibt, ist der Sinus der Morgenweite. Steht die Sonne aber in den nördlichen Sternbildern, so ziehst du den naṣib der Höhe vom Ichtilâf des Horizontes ab. Das Resultat ist gleich dem Sinus der Morgenweite, und falls das Azimut nördlich ist, so vermehre den naṣib der Höhe um den Ichtilâf des Horizontes. Das Resultat ist der Sinus der Morgenweite. Falls du dessen Sinus kennst, so multipliziere ihn mit dem Kosinus der Breite, und merke dir das Ergebnis dieser Multiplikation. Du dividierst es durch sin. tot., der Quotient ist gleich dem Sinus der Sonnendeklination; der entsprechende Bogen ist die Deklination selbst. — Betrachte den Sinus der größten Deklination (Ekliptikschiefe) als gegeben, teile mit ihm in den Sinus der Sonnendeklination; das Resultat der Division ist der Sinus des Abstandes der Sonne von einem der beiden Äquinoktien (Sonnenlänge); falls du für einen Fixstern mit Breite gerechnet hast, so ergibt sich dir sein Abstand vom Himmelsäquator. g

**Beispiel:** Die eine der beiden Höhen in diesem Beispiel sei 20°, deren nördliches Azimut betrage 7° 54′ 10″; der zugehörige Sinus ist $8^{p}$ 14′ 58″; die andere Höhe sei 50°; ihr südliches Azimut betrage 10° 21′ 42″; der Sinus hiervon ist $10^{p}$ 47′ 30″. Du multiplizierst den Sinus eines jeden dieser beiden Azimute mit dem Kosinus der zugehörigen Höhe und teilst die Produkte durch sin. tot. Es ergibt sich als naṣib der kleineren Höhe $7^{p}$ 47′ 7″ und als naṣib der größeren $6^{p}$ 56′ 12″. Beide Werte behältst du im Gedächtnis. Und weil das eine der Azimute nördlich, das andere südlich ist, so zählst du beide ansibā′ zusammen. Ihre Summe ist $14^{p}$ 41′ 19″. Das ist der erste Wert, den du dir wohl merkst. S. 378.
Dann ziehst du den Sinus der kleineren Höhe, $20^{p}$ 31′ 16″, vom Sinus der größeren Höhe, $46^{p}$ 17′ 46″, ab; es verbleibt $25^{p}$ 46′ 30″. Das ist der zweite Wert, den du dir ebenfalls merkst. Nunmehr quadrierst du den ersten Wert und erhältst 215 45 19 41. Dies merkst du dir. Ebenso quadrierst du den zweiten Wert, wodurch sich 647 16 42 15 als Quadrat des zweiten Wertes ergibt. Auch dies merkst du. Nun addierst du beide Quadrate; die Summe derselben ist 863 2 11 91. Die Quadratwurzel hieraus ist rund $29^{p}$ 22′ 39″. Du merkst dir diesen Betrag. Dann multiplizierst du den ersten Wert, $14^{p}$ 41′ 19″, mit sin. tot. und teilst das Produkt durch die Quadratwurzel; es kommt annähernd $30^{p}$ heraus. Der zu diesem Sinus gehörige Bogen ist 30°, und dies ist die Ortsbreite; doch es ist Gott, der zum Richtigen verhilft. Nachdem so die Breite bekannt ist, multipliziere man, um auch die Sonnendeklination zu ermitteln, den Sinus der einen der zwei Höhen, ich meine sin 20°, dessen Wert $20^{p}$ 31′ 16″ beträgt, mit dem Sinus der Breite und dividiere das Produkt durch den Kosinus der Breite; es ergibt sich $11^{p}$ 50′ 53″, welche Größe der Ichtilāf des Horizontes für die Höhe 20° ist. Und weil das Azimut nördlich ist, so vermehrst du den naṣib dieser Höhe, $7^{p}$ 45′ 7″, um den Ichtilāf des Horizontes, was zu $19^{p}$ 36′ 0″ führt. Das ist gleich dem Sinus der Morgenweite. Du multiplizierst ihn mit dem Kosinus der Breite, $51^{p}$ 57′ 41″, und teilst das Produkt durch sin. tot., es kommt $16^{p}$ 58′ 26″ 36‴ heraus; dies entspricht einem Sinus; der zugehörige Bogen 16° 26′ ist gleich der nördlichen Sonnendeklination. Und wenn die Rechnung für einen Stern mit Breite gemacht wurde, so ist das, was herauskommt, sein Abstand vom Äquator, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen!

**Anderes Beispiel zu dieser Risāle (Abhandlung).** Die Azimute mögen in diesem Beispiel beide dasselbe Vorzeichen haben, da sie ja im vorhergehenden verschiedensinnig waren; dort war nämlich das eine nördlich, das andere südlich. Es möge jetzt die kleinere Höhe 20° betragen, und ihr südliches Azimut sei 39° 29′ 12″, während die größere Höhe 30° sei bei einem südlichen Azimut von 52° 41′ 6″. Der Sinus dieses Azimuts ist $47^{p}$ 43′ 8″ [1]. Du multiplizierst den Sinus eines jeden der beiden Azimute mit dem Kosinus der zugehörigen Höhe und teilst die Einzelergebnisse durch sin. tot. Es ergibt sich für den naṣib der kleineren Höhe $35^{p}$ 51′ 11″ und für den naṣib der größeren $41^{p}$ 19′ 32″, und weil beide Azimute ein und desselben Vorzeichens, nämlich südlich, sind, so ziehst du den kleineren naṣib vom größeren ab, wonach noch $5^{p}$ 28′ 21″ übrigbleibt. Das ist der erste Wert, den du dir wohl merkst. Jetzt subtrahierst du den Sinus der kleineren der beiden Höhen vom Sinus der größeren. Es verbleibt $9^{p}$ 28′ 44″ als zweiter Wert. Du quadrierst den ersten und den zweiten Wert und erhältst für deren Quadrate bzw. 29 56 53 43 21 und 89 50 57 36 16. Die Summe beider Quadrate beträgt 119 47 51 19 37. Die Quadratwurzel hieraus ist rund $10^{p}$ 56′ 43″. Du merkst dir diesen Betrag. Nunmehr multiplizierst du den ersten Wert mit sin. tot. und teilst das Produkt durch die Quadratwurzel. Es ergibt sich annähernd $30^{p}$. Dies ist ein Sinus, dessen Bogen 30° ist, und das ist die Breite des Ortes. Darauf multiplizierst du den Sinus der einen Höhe, ich meine der von 20°, der $20^{p}$ 31′ 16″ beträgt, mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst S. 379.

---

[1] Der Sinus des Azimuts von 39° 20′ 12″ ist nicht gesondert angegeben. Er beträgt nach der Sinustafel des Autors $38^{p}$ 9′ 14″ 6‴ $38^{IV}$. (Vgl. die arab. Hdschr. Landberg, Nr. 1038 Berlin.)

das Produkt durch den Kosinus der Breite; es kommt 11$^p$ 50′ 53″ heraus, und dies ist der Ichtilāf des Horizontes. Du ziehst ihn vom nasịb dieser Höhe, nämlich 35$^p$ 51′ 11″, ab, und es bleibt 24$^p$ 0′ 18″ übrig, was gleich dem Sinus der Morgenweite ist. Dies multiplizierst du mit dem Kosinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch sin. tot. Das ergibt 20$^p$ 47′ 20″, und dies ist der Sinus der Sonnendeklination; die entsprechende südliche Deklination ist 20° 16′ 20″.

Doch ich kann die Ortsbreite in diesem Beispiel auch noch anders ermitteln, und zwar so, daß ich den ersten Wert mit 60$^p$ multipliziere und was sich ergibt, durch den zweiten Wert dividiere. Es kommt alsdann 34$^p$ 38′ 24″ heraus, und das ist ein 60$^{er}$ Schatten. Der zugehörige Bogen ist rund 60°, was gleich der Mittagshöhe des Beginns des Widders ist. Ziehe es von 90°, so bleibt 30° als Ortsbreite, und es ist Gott, der zum Richtigen verhilft.

d) Andere Risāle: Wenn die Meridianhöhe sowie eine andere Höhe vor oder nach der Tagesmitte bekannt sind, dazu außerdem das Azimut der letzteren nach Größe und Vorzeichen gegeben ist, so ist damit auch die Ortsbreite und die Sonnendeklination bestimmt. Und falls es sich um einen Fixstern mit Breite handelt, so ist seine Entfernung vom Himmelsäquator an Stelle der Deklination bestimmbar. Der Weg zur Ermittlung der gesuchten Stücke ist der folgende:

Du multiplizierst den Kosinus der bekannten Höhe mit dem Sinus ihres Azimuts und teilst das Produkt durch sin. tot. Das Resultat ist der nasịb der Höhe, den du dir merkst. Und beachte: Wenn die Sonne in den südlichen Sternbildern steht, so ziehe den nasịb der Höhe vom Kosinus der Meridianhöhe ab; was übrigbleibt, ist der erste Wert. Steht die Sonne aber in den nördlichen Sternbildern und ist das Azimut nördlich, so addiere den nasib der Höhe zum Kosinus der Meridianhöhe der Sonne; was sich ergibt, ist der erste Wert. Wenn aber das Azimut südlich ist, so ziehe den nasịb der Höhe vom Kosinus der Meridianhöhe ab; was übrigbleibt, ist der erste Wert. Und falls du ihn berechnet hast, wird er ins Quadrat erhoben. Und du ziehst den Sinus der (beliebigen) Höhe vom Sinus der Meridianhöhe ab; der Rest ist der zweite Wert. Quadriere ihn, addiere beide Quadrate und ziehe die Quadratwurzel aus der Summe; was sich ergibt, das merke dir. Dann multiplizierst du den ersten Wert mit sin. tot. und teilst das Produkt durch die Quadratwurzel. Das Ergebnis ist ein Sinus, dessen Bogen gleich der Ortsbreite ist. Wenn du diesen Bogen von 90° abziehst, so ist der Rest die Höhe des Beginns des Widders oder der Wage. — Du kannst aber auch den ersten Wert mit 60$^p$ multiplizieren und das Produkt durch den zweiten Wert dividieren; der Quotient ist ein 60$^{er}$ Schatten. Ermittle den zugehörigen Bogen aus der Tafel der 60$^{er}$ Schatten; was sich an Bogen ergibt, ist die Ergänzung der Ortsbreite. Ziehe sie von 90° ab, so ist der Rest die Ortsbreite selbst. h

## Erläuterungen zum 21. Kapitel der Ḥākimitischen Tafeln.

ad a) Zur Aufhellung dieser Lehren des Autors sei auf die zwei Figuren 1a und 1b auf Tafel 1 verwiesen. In denselben bedeutet $HH_1$ den Durchmesser des Horizontkreises, $AQ$ den des Himmelsäquators, während $MZ$ und $MN$ bzw. die Richtung zum Zenit und zum Nadir ist. Die zwei Orte, wo die Sonne in zwei einander entgegengesetzten Punkten der Ekliptik gleiche Höhe h hat, seien $S_1$ und $S_3$. Die augenblicklichen Sonnendeklinationen müssen dann von gleichem Betrag, aber entgegengesetztem Vorzeichen sein. Sie seien durch die Parallelkreise $BB_1$ und $B_2B_3$ dargestellt. ZWN ist der Höhenkreis ohne Azimut; W sei also der Westpunkt (Fig. 1a). Das Azimut des Sonnenortes $S_1$ ist Bogen $W\Sigma_1 = \alpha_1$, dasjenige von $S_3$ aber Bogen $W\Sigma_2 = \alpha_2$. Wir fällen von $S_1$ und $S_3$ die Lote $S_1U$ und $S_3S_4$ auf die Horizontalebene. Die Fußpunkte dieser Lote, U und $S_4$, müssen in der Ebene der Azimutkreise $ZS_1\Sigma_1N$ und $ZS_3\Sigma_2N$ liegen, also auf die Halbmesser des Horizontkreises $M\Sigma_1$ und $M\Sigma_2$ fallen. Ferner ist Bogen $WV$ = Bogen $WV_1$ = Morgenweite m der Sonne. Die Lote von $S_4$, $V_1$, U, V auf den Durchmesser des Horizontes gefällt, treffen dort bzw. in $G_1$, $T_1$, G und T auf. Errichtet man in G und $G_1$ die Senkrechten $GS$ und $G_1S_2$, so stellen sie den

Abstand des Almuqanṭarâts $H_2S_1S_3H_3$ vom Horizont dar und sind $= r \cdot \sin h$, falls man den Radius der Himmelskugel mit r bezeichnet. Mit der Bemerkung, daß $S_1Y \perp MW$ und (in Fig. 1b) $UX \perp MW$ ist und daß man unter Ichtilâf al-ufq (ufq = Horizont) die Strecke $TG = T_1G_1$ versteht, ist die Erläuterung der zwei Figuren 1a und 1b wohl ausreichend.

Nun liest man aus diesen Abbildungen der Reihe nach ab:

$$\begin{array}{rl} MS_1 &= r \cdot \cos h \\ S_1Y = MG_1 &= r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I) \\ UX = MG &= r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II) \\ \hline \end{array}$$

$$(I) + (II) = MG_1 + MG = r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_2 + r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_1 \quad \ldots\ldots \quad (III)$$

Es ist weiterhin

$$\begin{array}{rl} MG &= MT - GT \\ MG_1 &= MT + GT \\ \hline \end{array}$$

das ist

$$\begin{aligned} MT &= \tfrac{1}{2}(MG + MG_1) \\ &= \tfrac{1}{2}(r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_1 + r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_2) \,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IV) \end{aligned}$$

Dividiert man links und rechts mit r, so gilt für Fig. 1a

$$\frac{MT}{r} = \sin m = \tfrac{1}{2}(\cos h \cdot \sin \alpha_1 + \cos h \cdot \sin \alpha_2) \qquad \text{q. e. d.}$$

Für Fig. 1b gilt:

$$\begin{array}{rl} MG + MT = GT &= G_1T_1 \\ MG &= G_1T_1 - MT \\ &= G_1T_1 - MT_1; \end{array}$$

ferner ist

$$\begin{array}{rl} MG_1 &= G_1T_1 + MT_1 \\ \hline \end{array}$$

Mithin

$$\tfrac{1}{2}(MG + M_1G_1) = G_1T_1 = GT = \text{Ichtilâf al-ufq}\,. \qquad \text{q. e. d.}$$

Sodann liest man für Fig. 1a ab:

$$\begin{array}{rl} MT &= r \cdot \sin m \\ MG &= r \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos h \\ \hline \end{array}$$

folglich

$$MT - MG = GT = \text{Ichtilâf al-ufq}\,. \qquad \text{q. e. d.}$$

Aus Fig. 1b aber folgt

$$\begin{array}{rl} MG_1 &= r \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos h \\ MT_1 &= r \cdot \sin m \\ \hline \end{array}$$

mithin ist auch

$$MG_1 - MT_1 = G_1T_1 = \text{Ichtilâf al-ufq}\,, \qquad \text{q. e. d.}$$

In den rechtwinkligen (schraffierten) Dreiecken TGS und $T_1G_1S_2$ ist $\measuredangle TSG = \measuredangle T_1S_2G_1 = \measuredangle \varphi$ (Ortsbreite oder Polhöhe). Daraus ergibt sich

$$\sin \varphi = \frac{TG}{\sqrt{\overline{SG}^2 + \overline{TG}^2}}\,, \quad \text{oder}$$

$$r \cdot \sin \varphi = \frac{r \cdot \text{Ichtilâf al-ufq}}{\sqrt{(r \cdot \sin h)^2 + (\text{Icht. al-ufq})^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V). \qquad \text{q. e. d.}$$

Es ist in Formel (V) zu beachten, daß die arabische Sinustafel nicht die reinen Sinuswerte aufführt, sondern stets das Produkt eines Sinus in den Radius r (sin. tot.).

Da $PP_1$ die Weltachse und $\measuredangle HMP = \measuredangle \varphi$ (Polhöhe) ist, so liest man endlich aus dem rechtwinkligen Dreieck TRM ab:

$$MR = r \cdot \sin \delta \qquad (\delta = \text{Sonnendeklination})$$

$$\frac{MR}{MT} = \frac{r \cdot \sin \delta}{r \cdot \sin m} = \cos \varphi\,, \qquad \text{das ist}$$

$$\sin \delta = \sin m \cdot \cos \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (VI) \qquad \text{q. e. d.}$$

ad b) Die Bestimmung der Äquatordistanz eines Sterns mit Breite ist wohl dahin zu verstehen, daß man dessen Höhe h mißt und mit Kenntnis der Ortsbreite $\varphi$ den Ausdruck für den Ichtilâf des Horizontes

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \sin h$$

bildet. Dann ergibt sich auf bekanntem Wege der Äquatorabstand des Sterns. Aber zur Bestimmung zweier unbekannten Größen (Polhöhe und Äquatordistanz) genügt ein einziger Stern im vorliegenden Falle nicht. Die Darlegungen des Autors sind hier nicht ganz klar; ein Zahlenbeispiel gibt er für einen Stern nirgendwo.

ad **c)** Hier faßt der Autor in dem Ausdruck für den Ichtilāf des Horizontes den Quotienten $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ als einen Schatten, d. i. eine Kotangente auf, indem er dafür setzt $\operatorname{cotg}(90^\circ - \varphi)$. Auch in der Schattentafel schleppten die arabischen Astronomen fast stets den Faktor r mit, der bei einem sogenannten 60er Schatten = 60 partes war. Man sieht, daß Ibn Yûnus der Gebrauch der Tangente zwar nicht ferne lag, daß er sie aber vielleicht in Rücksicht auf seine Leser nur nebenbei erwähnt, wo zu seiner Zeit der Gebrauch des Sinus noch ganz dominierte.

ad **d)** Zur Erläuterung der Yûnusischen Vorschriften für diesen Fall sei auf Fig. 2 (Tafel 1) verwiesen. Wenn die Sonne in S den Ostwestkreis passiert, ist ihre Höhe („ohne Azimut") $= \eta$, während sie in dem beliebigen Punkte $S_1$ den Betrag $h_1$ bei einem Azimut $\alpha_1$ haben möge. Wiederum werde von $S_1$ auf den Horizont das Lot $S_1S_2$ gefällt, dessen Größe $= r \cdot \sin h_1$ sei. Ferner sei $S_2L_1 \perp HH_1$ und $S_1L \perp BB_1$. Da $LL_1$ in der Meridianebene liegt und gleichzeitig vom Horizont bis zur Ebene des Almuqanṭarâts reicht, der durch $S_1$ geht, so ist $LL_1 = S_1S_2$, d. h. $LL_1S_1S_2$ ist ein Rechteck, mithin $S_1L = S_2L_1$. Wir fällen weiter das Lot $S_2X$ auf MW und errichten in X eine Senkrechte zum Horizont, die wir in Y zum Schnitt mit dem Umfang des Ostwestkreises ZWN bringen. Von Y fällen wir den Perpendikel $Y\Sigma_1$ auf den Durchmesser NZ und verbinden außerdem $\Sigma_1$ mit L, Y mit $S_1$. Machen wir auch noch $S\Sigma \perp BB_1 \perp NZ$, so ist $M\Sigma = r \cdot \sin\eta$, und wenn wir $\Sigma K \parallel ML_1$ ziehen, ist auch $KL_1 = r \cdot \sin\eta$. Nun liest man aus Fig. 2 ab:

$$ML_1 = S_2X = \Sigma K = r \cdot \sin h_1 \cdot \cos\alpha_1 = \text{erster Wert} = Q_1$$

$$LK = LL_1 - KL_1 = LL_1 - M\Sigma = r \cdot (\sin h_1 - \sin\eta) = \text{zweiter Wert} = Q_2.$$

Somit ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $L\Sigma K$:

$$r \cdot \sin\varphi = \frac{r \cdot \Sigma K}{\sqrt{\overline{\Sigma K}^2 + \overline{LK}^2}} = \frac{r \cdot Q_1}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Fällt man sodann noch auf den Durchmesser $BB_1$ des Parallelkreises der Sonne das Lot MR, welches also in der Weltachse liegt, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck $\Sigma MR$:

$$\frac{MR}{\Sigma M} = \sin\varphi; \quad \text{das ist}$$

$$r \cdot \sin\delta = \sin\varphi \cdot r \cdot \sin\eta,$$

$\sin\delta = \sin\varphi \cdot \sin\eta$ [1], q. e. d.

ad **e)** u. **f)** Der Wert $\delta = 23^\circ\, 35'$ ist die größtmögliche Deklination (Ekliptikschiefe).

ad **g)** Es sei auf Fig. 3 (Tafel 1) verwiesen, die nach den vorhergegangenen Erläuterungen sofort verständlich ist. Man liest ab:

$ML_1' = r \cdot \cos h_1 \cdot \sin\alpha_1 =$ naṣîb für $h_1$ [1]

$ML_2' = r \cdot \cos h_2 \cdot \sin\alpha_2 =$ naṣîb für $h_2$. [1]

In unserer Fig. 3 ist das Azimut $\alpha_1$ südlich, $\alpha_2$ aber nördlich. Durch Addition folgt also:

$$\text{(I)} \quad \ldots \quad ML_1' + ML_2' = L_1'L_2' = r(\cos h_1 \cdot \sin\alpha_1 + \cos h_2 \cdot \sin\alpha_2) = \text{erster Wert} = Q_1'.$$

Sodann liest man ab:

$$S_1S_1' = L_1L_1' = r \cdot \sin h_1$$

$$\underline{S_2S_2' = L_2L_2' = r \cdot \sin h_2}$$

$$\text{(II)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad L_1K = L_1L_1' - L_2L_2' = r \cdot (\sin h_1 - \sin h_2) = \text{zweiter Wert} = Q_2'.$$

Wiederum ist

$$\text{(III)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad r \cdot \sin\varphi = \frac{r \cdot L_2K}{\sqrt{\overline{L_2K}^2 + \overline{L_1K}^2}} = \frac{r \cdot Q_1'}{\sqrt{Q_1'^2 + Q_2'^2}}. \qquad \text{q. e. d.}$$

Alles weitere ergibt sich nach dem früheren von selbst oder läßt sich unmittelbar aus einer Figur ablesen.

ad **h)** Da nach arabischer Zählweise das Azimut $(\alpha_1)$ im Meridian $= 90^\circ$ ist, so wird Formel (I) [ad g)]

$$Q_1' = r \cdot (\cos h_1 + \sin\alpha_2 \cdot \cos h_2) \qquad \text{usw.}$$

---

[1] Vgl. das ad b), XII. Kap. Gesagte.

# Abhandlung über die Ziehung der Mittagslinie, dem Buche über das Analemma entnommen, samt dem Beweis dazu von Abû Sa'îd aḍ-Ḍarîr.

(Arabische Handschrift der Vizekönigl. Bibliothek in Kairo.)

Zum 75. Geburtstag des Herrn Geheimen Rats Professor S. Günther,

übersetzt und erläutert von C. Schoy, Essen a. d. R.

Über die näheren Lebensumstände des arabischen Autors Abû Sa'îd aḍ-Ḍarîr (der Blinde) ist nichts bekannt. H. Suter erwähnt ihn kurz in seinem trefflichen Buche: „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke", Leipzig 1900, S. 27, wonach er ein Schüler des 845/46 gestorbenen Ibn al-A'râbî war und Verfasser obiger Abhandlung ist. Der Beiname: al-Ğorğânî, den die Kairiner Handschrift nicht enthält (er findet sich bei Suter), weist darauf hin, daß er aus Ğorğân stammt, einem Städtchen in Chorâsân, an dem Flüßchen Gürgen gelegen, das sich in den Kaspisee ergießt, der bei den Arabern auch Meer von Ğorğân heißt[1]).

Selbständige Monographien über die Ziehung der Mittagslinie werden in der arabisch-astronomischen Literatur nur zwei aufgeführt: Es ist außer der vorstehenden diejenige des berühmten arabischen Gelehrten Ibn al-Haiṯam (965—1039), die aber leider unauffindbar ist, mit deren Titel uns aber Fr. Woepcke bekannt gemacht hat[2]). Doch spielt unsere Aufgabe in der astronomischen Geographie der Araber eine wichtige Rolle und kommt deshalb in jedem ihrer zîğ (astronom. Tafelwerk) mehr oder weniger ausführlich zur Sprache, worüber zum Schluß dieser Studie nähere Angaben gemacht werden sollen.

In den Besitz des interessanten Schriftchens gelangte ich durch die Güte zweier Herren, denen dafür den herzlichsten Dank auch an dieser Stelle auszusprechen mir Bedürfnis ist. Herr Professor A. Schaade in Hamburg wandte sich behufs Erlangung einer Kopie des arabischen Originals an seinen Freund Saijid Muḥammed al-Biblâwî, den früheren Unterdirektor der vizeköniglichen Bibliothek zu Kairo, jetzt Obmann der Scherife dortselbst, und Herr Biblâwî nahm sich die Mühe, selbst eine äußerst sorgfältige Abschrift des Originals anzufertigen, die er mir durch Herrn Professor Schaade als „Hadija" (Geschenk) überreichen ließ.

Es möge jetzt gleich die Verdeutschung des arabischen Textes folgen:

„Im Namen Allâhs, des barmherzigen Erbarmers!

Das Buch (kitâb) über die Ziehung der Mittagslinie, entnommen aus dem Buche des Analemmas, nebst dem Beweis dazu von Abû Sa'îd aḍ-Ḍarîr, Allâh erbarme sich seiner; er helfe zur sorgfältigen Durchführung der Aufgabe. —

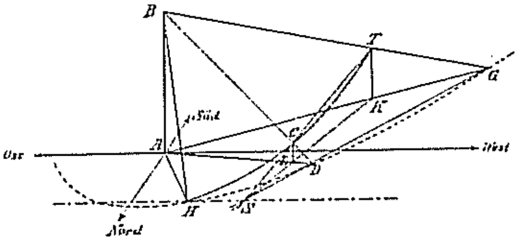
Es seien für den miqjâs (Gnomon) 3 benachbarte Schatten beobachtet worden, deren erster und längster = AG, deren zweiter und mittlerer = AD und deren dritter und kürzester = AH sei. Die Höhe des miqjâs sei = AB. Wir ziehen die Strecken BG, BD und BH und beschreiben alsdann um B als

---

[1]) In den Prolégomènes des Tables astronomiques d'Oloug-Beg par L. A. Sédillot, Paris 1853, S. 265 hat Djordjan (Gorğan) die Breite $\varphi = 36^\circ 50'$ und die Länge $\lambda = 90^\circ$ (vom äußersten Westen, falls die Länge der Stadt Bagdâd = 80° ist). Al-Bîrûnî gibt in seinem großen Werk über astronom. Geographie: al-Qânûn al-Mas'ûdî (Berl. orient. Hdschr. Oct. 275, S. 143b) an, daß Gorğan 10° 14′ östlich von Bagdâd liege. Leider fehlen gerade auf der Seite seiner geogr. Tafel, auf der Gorğân angeführt wird, die Zahlen in den Rubriken für Breite und Länge (a. a. O. S. 131a). Dagegen ist Ğorğân auch in den Ḥâkimitischen Tafeln des Ibn Yûnus erwähnt (Leidener arab. Mscr. 143, S. 135) mit den Koordinaten $\varphi = 37^\circ 45'$, $\lambda = 80^\circ$ (von den Kanaren gerechnet). Stimmt sonach die Länge genau mit der des Ulūğ Beg, so kommt die Breitenangabe bei Ibn Yûnus der Wahrheit viel näher.

[2]) In seiner „Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, Paris 1851, S. 75: „Mémoire sur la détermination de la méridienne avec la dernière exactitude".

Fig. 1.



Mittelpunkt mit dem Halbmesser BH den Kreisbogen HCT. Vom Punkte T fällen wir das Lot TK auf die Strecke AG und ebenso von C das Lot CL auf AD. Jetzt verlängern wir KL und GD bis zum Durchschnittspunkt S. Alsdann verbinden wir S mit H, und diese Verbindungslinie ist der Äquinoktiallinie (Ost-West-linie) parallel. Das vom Punkte A auf die Strecke SH (oder deren Verlängerung) gefällte Perpendikel gehört der Mittagslinie an.

Beweis hierfür. Es ist (von vorne herein) evident, daß der gemeinschaftliche Durchschnitt zwischen der Kreisfläche HCT und der Ebene, welche die horizontalen Schatten auffängt, der Äquinoktiallinie parallel ist. Ferner ist einleuchtend, daß CT der gemeinschaftliche Schnitt dreier Ebenen ist, nämlich 1. der Kreisfläche HCT, 2. der Ebene TCL und 3. der Ebene CTGD. Nun liegt die Strecke KL in der Ebene CTKL und die Strecke GD in der Ebene CTGD. Der Durchschnitt dieser beiden Strecken ist aber der Punkt S, er liegt andererseits auch in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der drei genannten Ebenen, und daraus erhellt, daß TCS eine gerade Linie ist, nämlich die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der besagten Ebenen. Sodann liegt der Punkt S auch auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen CTKL und CTGD, und diese gemeinschaftliche Schnittlinie ist gleichzeitig auch gemeinschaftlicher Durchschnitt zwischen diesen zwei Ebenen und der Kreisfläche HCT. Nun liegt der Punkt S in dieser Kreisfläche und auch in der Ebene des Horizontes, mithin in der gemeinschaftlichen Schnittlinie dieser beiden Ebenen. Ebenso liegt der Punkt H in der Ebene des Horizontes und auf dieser Kreisfläche HCT, und da wir eben dargetan haben, daß der Punkt S in den nämlichen zwei Ebenen liegt, so ist die Verbindungslinie HS der gemeinschaftliche Schnitt zwischen der Horizontalebene und der genannten Kreisfläche, mithin ist SH der Äquinoktiallinie parallel.

Was aber die Konvergenz der zwei Strecken GD und KL in der Richtung nach den Punkten D und L anbetrifft, so hat sie deshalb statt, weil BG > BD und BT = BC ist.

Daraus folgt: TG > CD, und somit ergibt sich:

$$\frac{GT}{TB} > \frac{DB}{BC},$$

woraus durch Zusammenfügung (Addition)

$$\frac{GB}{TB} > \frac{DB}{BC} \quad \text{wird.}$$

Es ist aber:

$$\frac{GB}{TB} = \frac{GA}{KA}, \qquad \frac{DB}{BC} = \frac{DA}{LA},$$

mithin

$$\frac{GA}{KA} > \frac{DA}{LA}.$$ [1]

Und der Sachverhalt wird ebenso klar, wenn wir zur größeren Bequemlichkeit die 3 Schatten in der Weise betrachten, daß wir in der Ebene des Horizontes mit dem Radius GB um G als Mittelpunkt den Kreisbogen ZM beschreiben und ebenso mit dem Halbmesser DB um D als Mittelpunkt den Kreis-

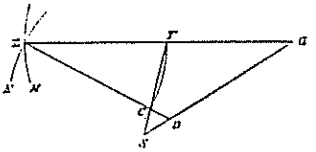
---

[1] Hier folgt eine Textstelle, mit der ich nichts anzufangen weiß, auch selbst unter Zuhilfenahme von Konjekturen. Sie lautet: „Und wenn wir durch den Punkt K eine Parallele zu GD ziehen, d. i. die Linie KE, so fällt E zwischen A und L, und die 2 Winkel ELC und CKE sind gleich 2 Rechten, und sie beide sind größer als die 2 Winkel CLK und CKL, und somit sind die 2 Winkel CLK und CKL kleiner als 2 Rechte, und es schneiden sich daher die 2 Linien GD und LK nach jener Richtung hin, welche wir weiter oben schon bezeichneten, und dies ist es, was wir beweisen wollten.“ Die Figur der Handschrift ist, besonders für diese Textstelle, gänzlich unbrauchbar.

bogen ZE. Beide Bögen mögen sich in Z durchschneiden. Wir ziehen GZ und DZ und stellen die Differenzen zwischen diesen 2 Strecken und BH her; sie sind bez. TG und CD. Dann ziehen wir TC und GD und bringen beide Strecken in S zum Schnitt, und ich behaupte jetzt, daß dieser Punkt S der 2. Figur dem Punkt S der 1. Figur entspricht (mit ihm identisch ist, naẓir).

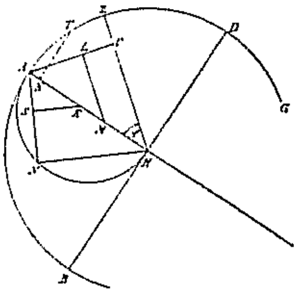
Dies beweisen wir wie folgt: Wir machen GZ gleich GB der 1. Figur, und DZ der 2. Figur ist gleich GB der 1. Figur, und je eine der 2 Strecken ZC und ZT ist jetzt je einer von den 2 Strecken BC und BT gleich, und Dreieck GZD ist dem Dreieck GBD kongruent. Somit ist auch $\measuredangle GBD = \measuredangle GZD$; ferner $TZ = TB$ und $ZC = BC$, während TC und TG in beiden Dreiecken sich selbst entsprechen (gleich sind), ebenso ist es hinsichtlich der Strecke CD. Es decken sich alsdann auch die Winkel ZGD und BGD, sowie ZDG und BDG. Die verlängerte Seite TC begegnet der verlängerten Seite GD im Punkte S, und es ist jetzt GS der 1. Figur = GS der 2. Figur, denn GT ist in beiden gleich, $\measuredangle ZGD = \measuredangle BGD$ und $\measuredangle CTG$ ist in beiden Figuren gleich, somit schneidet sich TC mit GD in einem Punkte, dessen Entfernung von G in der 2. Figur genau der Entfernung des gleichen Schnittpunktes von G in der ersten Figur gleich ist. Dieser Punkt ist aber S, und das war es, was wir beweisen wollten.

Fig. 2.



Es möge nun zur Auffindung der Mittagslinie auf einer ebenen Tafel (lauḥ) der Kreis ABGD gezeichnet und sein Umfang in 360 gleiche Teile geteilt werden. Dann machen wir arc AZ gleich der Ortsbreite ($\varphi$), ziehen HZ und fällen darauf vom Punkt A aus das Lot AC; arc AT machen wir gleich der augenblicklichen Sonnendeklination ($\delta$). [Von T fällen wir auf den Halbmesser AH das Lot TK, welches wir auf AC abtragen und so $AL = TK$ erhalten.][1] Im Punkte L errichten wir eine Senkrechte auf AC, sie schneide AH im Punkte M. Nunmehr beschreiben wir über AH einen Halbkreis; er sei ANH; in demselben machen wir die Sehne $AN = AM$ und ziehen auch NH; wir tragen ferner auf AN die Strecke AS ab, die gleich der Länge des miqjās sei, und errichten in S auf AN die Senkrechte SE, vorausgesetzt, daß sie AH im Punkte E trifft. Alsdann beschreiben wir in einer horizontalen Ebene an der gewählten Stelle einen Kreis mit dem Radius SE. Im Mittelpunkte desselben errichten wir senkrecht zu der wagerechten Fläche den $miqjās = AS$. Wir beobachten seinen Schatten vor und nach der Mitte des Tages, bis daß seine Spitze auf den Umfang jenes Kreises fällt. Wenn wir jetzt von dieser Stelle des Kreisumfangs eine gerade Verbindungslinie nach dem Mittelpunkt ziehen, so stellt sie die Ost—Westlinie dar. Errichten wir im Kreismittelpunkt eine Senkrechte auf dieser Linie, so ist dies die Mittagslinie, und das war es, was wir dartun wollten, doch Gott, der Erhabene, weiß es am besten."

Fig. 3.



### Erläuterungen und Zusätze.

Wie man aus Vorstehendem ersieht, trägt Abû Sa'îd aḍ-Ḍarîr zwei verschiedene Verfahren zur Ziehung der Mittagslinie vor: zuerst dasjenige, die Linie der Tagesmitte aus 3 beobachteten ungleichen Schattenlinien eines Gnomons zu bestimmen, und dann ein zweites, das sich auf die Kenntnis der Sonnenhöhe im 1. Vertikal stützt. Die erste Methode lehrt bereits der römische Gromatiker Hyginus (ca. 100 n. Chr.), worüber man die ausführlichen Darlegungen in

---

[1] Der in Klammer stehende Satz fehlt im arabischen Text.

meiner Studie: „Mittagslinie und Qibla" (Ztschr. d. Ges. f. Erdkunde in Berlin, 1915, S. 558—576) nachsehen mag. Bietet das Schriftchen des arabischen Autors hierin auch nichts wesentlich Neues, so ist doch die Feststellung von historischem Wert, daß also auch die Araber die genannte, höchst wahrscheinlich griechische Methode der Auffindung der Mittagslinie kannten.

Indessen hatte sie auch für die arabischen Astronomen wohl nur ein theoretisches Interesse; denn für die Praxis lehrt unser Autor ein anderes Verfahren, das ich bis jetzt in keinem arabischen zīǵ fand: Die Beobachtung des Gnomonschattens im Augenblick, wo die Sonne durch den 1. Vertikal geht, und wo dieser Schatten dann von selbst die Ost—West-Richtung angibt. Die Länge dieses Schattens wird in hübscher Weise rein konstruktiv ermittelt. Wir beweisen in Kürze, daß es mit diesem Graphikon von al-Ǵorǵānī seine Richtigkeit hat:

Ist $h_{a_0}$ die Höhe der Sonne im 1. Vertikal („Höhe ohne Azimut", nach arabischer Zählweise) so ist bei einer Gnomonhöhe AS = q die Schattenlänge im Ost—Westkreis

$$m = q \cdot \operatorname{cotg} h_{a_0} = q \cdot \frac{\cos h_{a_0}}{\sin h_{a_0}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

Nach einer bekannten Formel der sphärischen Astronomie ist aber

$$\sin h_{a_0} = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II)$$

falls $\delta$ die augenblickliche Sonnendeklination und $\varphi$ die Ortsbreite bezeichnet. Damit wird aus (I):

$$m = q \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta}}{\sin \delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (III),$$

und dieser Ausdruck muß sich bei der Richtigkeit der Ǵorǵānischen Konstruktion für die Strecke SE = m aus der Figur 3 ablesen lassen. Tatsächlich hat man nach dem Text des Autors: (Radius AH = 1 gesetzt).

$$AC = \sin \varphi; \qquad KT = AL = \sin \delta$$

$$AN = AM = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}.$$

Nun gilt die Proportion:

$$AS : SE = AN : NH$$

oder
$$q : m = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} : \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \delta}{\sin^2 \varphi}},$$

woraus folgt:
$$m = q \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta}}{\sin \delta}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Hier begegnen wir einer Verwendung der Sonnenhöhe, bzw. des Schattens, im Ost—Westkreis, und da die arabischen Astronomen das Azimut von der Ost—West-Richtung aus zählen, so nennen sie die Höhe im 1. Vertikal: „Höhe ohne Azimut". Auch zur Bestimmung der geographischen Breite wurde diese Höhe mit Vorteil in der arabischen Astronomie angewandt, und zwar von dem Kairiner Astronomen Ibn Yūnus († 1009), wie ich an anderer Stelle eingehend dargetan habe[1]). Die Lehre von der Berechnung der Höhe ohne Azimut findet sich schon ausführlich bei al-Ḥabaš al-Ḥāsib (gestorben zwischen 865 und 875) dargestellt[2]), wo unter den 3 Verfahren zu ihrer Bestimmung auch eines gelehrt wird, das, als Formel ausgedrückt, mit (II) identisch ist. Ausführlich tritt Ibn Yūnus auf die Behandlung dieser Höhe ein, ja er berechnet zum Schluß seiner Darlegungen noch eine Tafel der Höhen ohne Azimut für seinen Wohnort Altkairo ($\varphi = 30°$), für die Sonnenlängen von 0°—90° von Grad zu Grad[3]). Diese Höhe ist nur bei positiver Sonnendeklination möglich, und sie erreicht im Maximum in Kairo 53° 8', die Ekliptikschiefe (um 1000 n. Chr.) zu 23° 35' vorausgesetzt. Das ist ein so bedeutender Betrag, daß Höhen- und Schattenmessungen

---

[1]) Über eine arab. Methode, die geograph. Breite aus der Höhe der Sonne im 1. Vertikal („Höhe ohne Azimut") zu bestimmen. (Ann. d. Hydr. usw. 1921, S. 124 ff.)

[2]) Kitāb al-Ḥabaš (Berlin. arab. Mscr. Wetzstein I 90, S. 93).

[3]) Ḥākimitische Tafeln (Leidener arab. Mscr. 143, S. 360).

im 1. Vertikal um die Zeit des Sommersolstitiums in südlicheren Breiten durchaus zu empfehlen sind.

Ich möchte hier noch die höchst eigenartige Methode zur Auffindung des Meridians erwähnen, die ich bei Ibn Yûnus fand: ich meine die Methode der sog. korrespondierenden Höhen[1]) (al-irtifâ'ain al-mutakâfijatain). Aber der arabische Autor versteht unter besagten Höhen etwas anderes als die moderne Astronomie. Ich lasse ihn am besten selbst zu Worte kommen:

„Das 25. Kapitel: Über die Berechnung der korrespondierenden Höhen und das Ziehen der Mittagslinie mittels dieser Höhen.

Wenn wir 2 einander entsprechende Sonnenhöhen ermitteln wollen, so bestimmen wir zuerst den Sinus der Ortsbreite und nehmen die eine der zwei Höhen kleiner an als die Ortsbreite. Darauf ziehen wir den Sinus dieser (angenommenen) Höhe vom Sinus der geographischen Breite ab. Die entstandene Differenz vermehren wir um den Sinus der Breite des Ortes. Was sich dadurch ergibt, entspricht dem Sinus der jener (angenommenen) Höhe korrespondierenden Höhe; wir machen ihn zu Bogen, und dieser Bogen ist die jener Höhe entsprechende Höhe. — Oder: Wir nehmen den doppelten Sinus der Ortsbreite; dessen Wert, den wir im Gedächtnisse behalten, sei der Aṣl[2]). Alsdann ziehen wir vom Aṣl den Sinus jener Höhe ab; der Rest ist dem Sinus der korrespondierenden Höhe gleich. Wir verwandeln ihn in Bogen, und der Bogen selbst ist die jener Höhe entsprechende Höhe, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen.

Beispiel für die Breite von 30°[3]):

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin 30^\circ = 30^p\ 0'\ 0'' \\ \sin h_1 &= \sin 20^\circ = 20^p\ 31'\ 16', \\ \hline \sin\varphi - \sin h_1 &= \sin 30^\circ - \sin 20^\circ = 9^p\ 28'\ 44'' \\ \sin\varphi + \sin\varphi - \sin h_1 &= 2\cdot\sin 30^\circ - \sin 20^\circ = 39^p\ 28'\ 44'' \\ &= \sin h_2 \\ h_2 &= 41^\circ\ 8'\ 45'', \end{aligned}$$

und das ist die mit $h_1 = 20^\circ$ korrespondierende Höhe für die Breite von 30°.

Oder:

$$\begin{aligned} 2\cdot\sin\varphi &= 2\cdot 30^p = 60^p \\ 2\cdot\sin\varphi - \sin h_1 &= 60^p - 20^p\ 31'\ 16'' \\ &= 30^p\ 28'\ 44'' = \sin h_2 \\ h_2 &= 41^\circ\ 8'\ 45'', \end{aligned}$$

mithin ist für die Breite von 30°, falls wir eine Höhe (beliebig) zu 20° annehmen, die ihr korrespondierende Höhe = 41° 8' 45".

### Auffindung der Mittagslinie mittels der korrespondierenden Höhen.

Nimm an, es sei eine der beiden korrespondierenden Höhen, mittels deren wir in der Breite von 30° die Mittagslinie ziehen wollen, 20°, so wird damit die andere Höhe = 41° 8' 45". Es sei ferner die Linie des Azimuts der 20^er^ Höhe = AB, die Richtungslinie der anderen Höhe aber sei = AD[4]). Greife jetzt mit dem Zirkel auf einem in 60 gleiche Teile geteilten Lineal so viele Teile ab, als dem Kosinus der 20$^{\text{er}}$ Höhe, ich meine dem Sinus der 70$^{\text{er}}$ Höhe, zukommen, und das sind $56^p\ 22'\ 44''$, setze den einen Zirkelfuß im Punkte A ein, während der andere auf der Linie AB nach dem Punkte H falle. Greife ebenso auf dem Lineal die Teile ab, die auf den Kosinus der korrespondierenden Höhe, das ist Kosinus 41° 8' 45", kommen, das sind $45^p\ 10'\ 46''$, setze den einen Zirkelfuß wieder im Punkte A ein und lasse den anderen auf der Linie AD nach dem

---

[1]) Mscr. Huntington 331 der Bodleyana zu Oxford, S. $114^r$—$115^v$ (II. Teil d. Ḥâkim. Tafeln). Die Beschaffung der Photos dieser interessanten Partien der Hâkimitischen Tafeln war mir bei der augenblicklichen deutschen Geldentwertung nur durch die hochherzige materielle Unterstützung des Herrn Prof. G. Eneström in Stockholm möglich, und ich möchte dem verdienten Forscher und Förderer historischer Studien auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank darbringen.

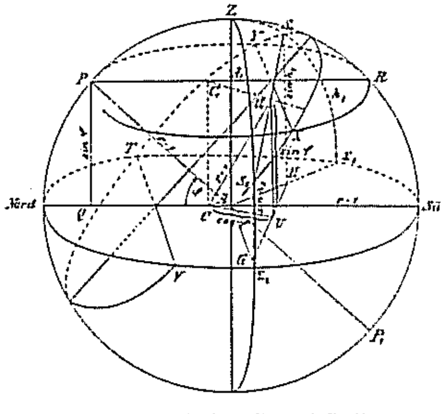
[2]) Aṣl = Ursprung, Wurzel. Dieser Terminus für ein trigonometr. Produkt findet sich in der arabischen Astronomie oftmals.

[3]) Ich gebe für diese Stelle die Darstellung in moderner übersichtlicherer Ausdrucksweise.

[4]) Da ich in der Fig. 4 die 2 Sonnenpositionen am Himmel mit $S_1$ und $S_2$ bezeichnet habe, in denen die Sonne die Höhen $h_1$ und $h_2$ erreicht, so nannte ich die Durchschnitte der Höhenkreise mit der Horizontebene entsprechend $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$. Es ist also $\Sigma_1$ mit B, $\Sigma_2$ mit D identisch.

Punkte G fallen. Verbinde H mit G durch eine gerade Linie; es sei dies die Strecke HG; halbiere HG und errichte im Mittelpunkt U die Senkrechte. Greife nunmehr mit dem Zirkel auf dem Lineal eine Strecke = cos 30°; die also = dem Kosinus der Ortsbreite, ich meine = sin 60° = 51ᵖ 57′ 41″ ist, ab, setze den einen Zirkelfuß in den Punkt U und mache mit dem anderen auf dem Mittellot die Marke C. Verbinden wir jetzt die beiden Punkte A und C durch eine gerade Linie, so ist AC ein Stück der Mittagslinie, doch Allâh leitet zum Richtigen. Dies ist der Gang der Konstruktion vor dem Zawâl (Mittag), und sie weist uns den Weg, wie nach dem Zawāl zu verfahren ist, und Lob sei Gott!"

Fig. 4.



Zum Beweise dieser eigenartigen Praktik, den uns der Autor, wie immer, schuldig bleibt, sei auf Fig. 4 verwiesen. Dieselbe stellt eine Meridianprojektion der Himmelskugel dar. P und $P_1$ sind die Himmelspole. Senkrecht auf der Weltachse steht die Ebene des Tageskreises der Sonne: VTXY; in den 2 Positionen $S_1$ und $S_2$ habe die Sonne die Höhen $h_1$ und $h_2$. Nach unserer Zeichnung ist die Sonne in $S_1$ vor und in $S_2$ nach dem Zawāl, was nicht im Sinne des Autors, für den Beweis aber ganz gleichgültig ist. Fällen wir von $S_1$ und $S_2$ die Lote auf die in der Horizontalebene liegenden Azimutlinien $A\Sigma_1$ und $A\Sigma_2$ der 2 Sonnenhöhen, so erhalten wir deren Fußpunkte H und G, und es ist jetzt $S_1H = \sin h_1$, $S_2G = \sin h_2$, $AH = \cos h_1$ und $AG = \cos h_2$, den Radius der Himmelskugel $r = 1$ vorausgesetzt. Da nun U in der Mitte zwischen H und G, also auch $U_1$ in der Mitte zwischen $S_1$ und $S_2$ liegt, so ist $UU_1 = \frac{1}{2}(\sin h_1 + \sin h_2)$, d. h. es ist nach dem Begriff der korrespondierenden Höhen $UU_1 = \sin \varphi$. Da $UU_1$ senkrecht auf dem Horizonte steht, so ist das Dreieck $CUU_1$ bei U rechtwinklig. Ist aber in einem so charakterisierten Dreieck eine Kathete = sin $\varphi$, so kann die Hypotenuse nur = 1 und damit die andere Kathete = cos $\varphi$ sein. Es ist also das Stück des Mittellotes zu GH, nämlich UC tatsächlich = cos $\varphi$, wie der arabische Text behauptet. Da die Linie $U_1C_1$ in $C_1$ die Meridianebene passiert, so muß der Punkt C, als senkrechte Projektion von $C_1$, ebenfalls im Meridian liegen. Man hat daher zwei Punkte der Mittagslinie: A und C, und durch ihre geradlinige Verbindung die Mittagslinie selbst.

Ibn Yûnus lehrt noch mehrere andere Verfahren zur Bestimmung der Mittagslinie, die aber weniger bemerkenswert sind. So lautet z. B die Überschrift des 24. Kapitels der Ḥâkimitischen Tafeln: „Über die Ziehung der Mittagslinie mittels der Höhe, deren Azimut = 30° ist, und mittels anderer Höhen, deren Azimute bekannt und Zehner (Vielfache von $10^{er}$ Graden) sind"[1]. Zu dieser Gruppe ist auch die Methode zu rechnen, die Ibn Yûnus in der kurzen Abhandlung lehrt, welche die Ambrosiana zu Mailand als arab. Mscr. $281^{e}$ bewahrt. Das Azimut der Sonnenhöhe ist in diesem Falle = 60°[2]. Ich habe diese arabischen Texte ebenfalls studiert, möchte aber hier nicht näher darauf eintreten.

Oftmals lehren die arabischen Astronomen die allbekannte Methode, mit Hilfe des Indischen Kreises (dā'ira hindīja) die Mittagslinie zu finden, so z. B. al-Ḥabaš al-Ḥâsib[3], der aber auch noch ein zweites Verfahren angibt, von

---

[1] Oxford. Mscr. Hunt. 331, S. $43^{v}$.

[2] S. $105^{b}$ ff.

[3] a. a. O. S. $163^{b}$ ff.

dem das Berliner Mscr. leider nur noch wenige Sätze enthält, um dann abzubrechen, ferner al-Bīrūnī (973—1048)[1]. Aber bei der wissenschaftlich gründlichen Art dieses großen ostarabischen Gelehrten ist von vorne herein zu erwarten, daß er in diesem Falle sich nicht mit einer einfachen Darstellung begnügt, vielmehr gibt er auch den Weg zur Verbesserung des Verfahrens an. Es würde aber hier zu weit führen, auf die umfangreichen Bīrūnischen Ausführungen näher einzutreten. Ich darf für derlei Details auf die „Fundgruben der arabischen Mathematik und Astronomie" verweisen, die in absehbarer Zeit in dem Verlag von Henri Grand, Hamburg, erscheinen werden.

Zum Schlusse ist es mir noch eine angenehme Pflicht, den Bibliotheksverwaltungen der Preuß. Staatsbibliothek zu Berlin, des Legati Warneriani zu Leiden, der Ambrosianae zu Mailand und der Bodleyanae zu Oxford für die leihweise Überlassung der Originale, resp. die Übersendung von Photographien der in Frage kommenden Handschriften, bestens zu danken.

---

[1] al-Qānūn al-Mas'ūdī (Berl. Mscr. S. 99ᵇ ff.).

# Aus der astronomischen Geographie der Araber

## Originalstudien aus « Al-Qânûn al-Mas'ûdî » des arabischen Astronomen Muḥ. b. Aḥmed Abû'l-Riḥân al-Bîrûnî (973-1048).

Al-Birûnî ist im September des Jahres 973 in einem Vorort (1) der Stadt Chîwa (Chwârizm) geboren und starb Ende des Jahres 1048 zu Ġazna in Afġanistan. Er gehört unstreitig zu den ganz selbständigen und originellen muslimischen Gelehrten. Ueber sein Leben und seine Werke orientieren uns die trefflichen Schriften von E. Sachau (2), H. Suter (3) und E. Wiedemann (4). Der Mas'ûdische Kanon, dem Ġaznawiden Mas'ûd b. Maḥmûd b. Sebukteġin gewidmet, in dessen Diensten al-Birûnî zur Zeit der Abfassung des Werkes stand, ist eine Art astronomischer Geographie, von der gesagt wird, dass al-Birûnî sich darin Ptolemaios zum Vorbilde genommen habe. Sicher ist, dass al-Birûnî den Almagest des spätgriechischen Astronomen gründlich kannte, — verschiedene Kapitel lehnen sich eng an die entsprechenden des Almagest an — aber es ist evident, dass der Chwârizmer im Mas'ûdischen Kanon uns ein durchaus eigenes Werk hinterliess, dessen oft höchst originelle und wertvolle Partien dazu angetan sind, unser lebhaftes Bedauern darüber wach zu rufen, dass sie immer noch der Erschliessung durch eine sachkundige Hand harren.

Meine Beschäftigung mit der arabischen Astronomie hat mich auch zum Studium dieses seltenen Codex geführt, und ich schulde den Bibliotheksverwaltungen der Preussischen Staatsbibliothek zu Berlin, des British Museums zu London und der Bodleyana in Oxford wärmsten Dank für die Ueberlassung des Originals (Berlin Mscr.

---

(1) Im Persischen heisst « bîrûn » soviel als « ausserhalb », « draussen ». Al-Bîrûnî wäre danach « der Vorstädter ».

(2) *Chronologie orientalischer Völker von* al-Bîrûnî, arab. Text, Leipzig 1876-1878, S. 12-48.

(3) *Die Mathematiker und Astronomen der Araber u. ihre Werke*, Leipzig 1900, S. 98 ff.

(4) *Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften*, LX, Erlangen 1920-1921, S. 53-96.

Orient. Oct. 275) resp. die Uebersendung von Photos (1) (London Mscr. Or. 1997; Bodl. Oxford Mscr. Or. 516). Auch ist der Mas'ûdische Kanon in zwei weiteren Handschriften in Aligarch (Vorderindien) vorhanden, die ich jedoch nicht kenne.

Da in der arabisch-astronomischen Literatur die Frage der *Bestimmung der geographischen Länge* ziemlich stiefmütterlich behandelt wird, im Vergleich zur *Breitebestimmung*, so verdienen zwei Kapitel des Mas'ûdischen Kanons, wo dieses Problem unter einem anderen — in der arabischen Astronomie bislang unbekannten — Gesichtspunkte betrachtet ist, unser vollstes Interesse : Es ist *die Ermittlung der Längendifferenz zweier Orte aus ihren* (genau bestimmten) *geographischen )Breiten und dem in Farasangen, resp. Teilen eines grössten Kreises bekannten Abstand derselben.* Ich habe dergleichen in anderen arabischen zîǧât (astronomischen Tafelwerken) nirgendwo gefunden. Und entgegen der sonstigen Sparsamkeit al-Bîrûnî's hinsichtlich der illustrativen Zahlenbeispiele, gibt er für unsern Fall eine ausführliche zahlenmässige Durchführung der Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Alexandria (Iskenderija) in Ægypten und Ġazna.

## I

Bevor ich zu diesem Exempel die Uebersetzung des arabischen Textes mitteile, scheint es mir zweckmässig, den Gedankengang des Autors etwas näher zu skizzieren. Es handelt sich (2. Kap. 6. Abschnitt, Berl. Mscr. S. $141^b$; Oxf. Mscr. S. 126) um die *Verbesserung* taṣḥîḥ) der Länge Ġazna's und Alexandria's. Zu diesem Behufe nimmt al-Bîrûnî eine ganze Anzahl Zwischenorte zwischen den beiden äussersten Städten an und berechnet aus ihrem gegenseitigen Abstand und den jeweiligen Ortsbreiten die einzelnen Längendifferenzen, die er zum Schluss nur zu summieren braucht, um die gesuchte Endgrösse zu erhalten.

Die erste Längenbestimmung bezieht sich auf das Intervall : *Baġdâd-Schîrâz.* In nebenstehender Figur 1 sei T der Nordpol der Erde, CD ein Stück des Erdäquators, TAZC der Meridian von Bagdâd (A), TGBD derjenige von Schîrâz (B). Bogen AG ist ein Abschnitt

---

(1) Die Beschaffung der Photographien war mir bei der derzeitigen deutschen Goldentwertung nur durch die materielle hochherzige Unterstützung von Seiten des Herrn Prof. G. Eneström (Stockholm) möglich, und ich möchte dem verdienten Forscher und Förderer historisch-mathematischer Studien auch an dieser Stelle meinen geziemenden Dank sagen.

des Breitenparallels von Baġdâd, ZB der entsprechende von Schirâz,

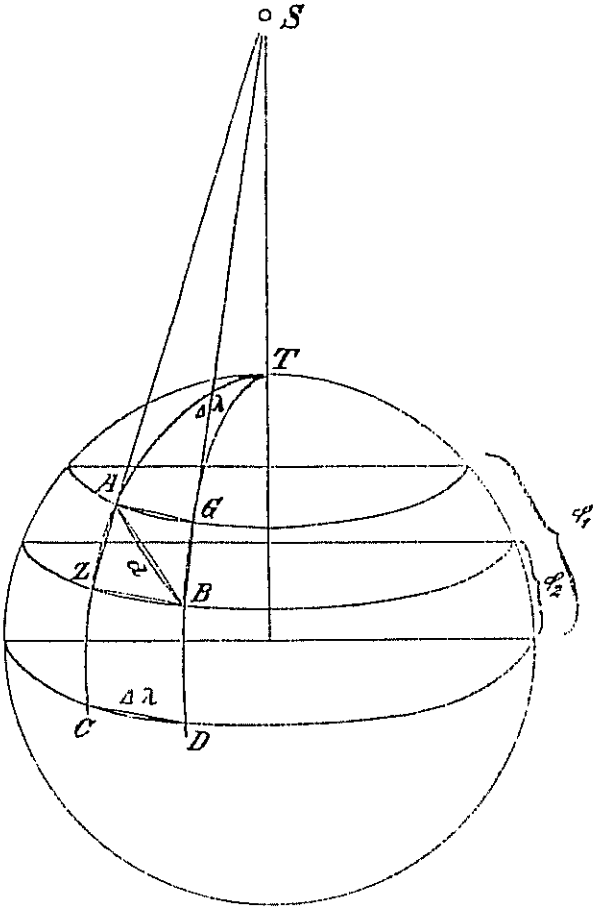


Fig. 1

und arc AB = $d$ ist die Distanz der beiden Orte in Graden des grössten Kreises auf der Erdkugel. Nun ist gegeben :

arc AC = $\varphi_1$ = Breite von Baġdâd = 33°25′ (1)
arc BD = $\varphi_2$ = Breite von Schîrâz = 29°36′
arc AB = $d$ - 153 Farasangen = 8°6′0″.

---

(1) Schon die Söhne des Mûsâ b. Schâkir hatten für die Breite Baġdâds den genaueren Wert $\varphi_1 = 33°20'$ gefunden. (Vgl. *Annalen der Hydrographie und maritim. Meteorologie*, Hamburg, 1922, S. 11).

Durch die vier Punkte AGZB lässt sich eine Ebene legen, welche die verlängerte Erdachse im Punkte S schneidet (1), und die geradlinigen Verbindungen (AB, AZ u. s. w.) sind die Sehnen (chordae) der Kreisbögen, welche sie unterspannen. Da sich, wie man leicht sieht, um das symmetrische ebene Paralleltrapez AGZB ein Kreis beschreiben lässt, so kann man dasselbe als ein *Kreisviereck* auffassen, in welchem der *Ptolemäische Lehrsatz* gilt. Der Autor lehrt nun folgendes : (2)

$$(\text{chord AB})^2 = (\text{chord AZ})^2 + \text{chord AG} . \text{chord ZB} \dots\dots \quad (\text{I})$$

$$\overline{AB}^2 - \overline{AZ}^2 = AG.ZB,$$

$$\frac{\overline{AB}^2 - \overline{AZ}^2}{\overline{AG}^2} = \frac{ZB}{AG} \dots\dots \quad (\text{II})$$

Mit Hilfe des Satzes, dass in zwei verschiedenen Kreisen die zu gleichen Bogen gehörigen Sehnen in demselben Verhältnis wie die Kreisdurchmesser stehen, folgert der Autor aus (II) :

$$\frac{\text{chord ZB}}{\text{chord AG}} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} = \frac{\sin BT}{\sin AT} \dots\dots \quad (\text{III})$$

Setzt man in (III) $\varphi_2 = 0°$, d. h. BT $= 90°$, wodurch ZB $=$ chord CD wird, so folgt daraus :

$$CD = \frac{AG}{\sin AT} \dots\dots \quad (\text{IV}),$$

und dies ist die gewünschte Schlussformel, mittels der man aus chord CD die Längendifferenz $=$ arc CD findet. Al-Bîrûnî lehrt alsdann :

$$\text{chord AB} = 0^p8'28''32'''$$
$$\text{chord AZ} = 0^p3'59''46'''$$
$$\cos \varphi_1 = 0^p50'3''2'''$$
$$\cos \varphi_2 = 0^p52'10''17'''$$

Mit diesen Datis erhält man aus (I) und (III) :

$$\text{chord AG} = 0^p7'28''27''',$$

und zuletzt aus (IV) :

$$\text{chord CD} = 0^p8'17''16''',$$
$$\text{arc CD} = \Delta\lambda_1 = 8°33'32''$$

---

(1) Der Punkt S ist in der Figur des Bîrûnî nicht vorhanden, auch sind die Chorden dort nicht gezogen.

(2) Die Formeln stehen im arabischen Text natürlich in Worten da.

In Formel (III) kommt sowohl die Sinusfunktion als auch die griechische Sehne (Chorda) vor, die den Bogen AG, bezw. ZB unterspannt. Die Griechen behandelten alle trigonometrischen Fragen im Wege der *Sehnenrechnung;* die Araber führten an Stelle der Chorden die Sinus ein. Den Zusammenhang zwischen Sehne und Sinus erkennt man leicht aus Fig. 2. Man liest aus derselben ab :

$$AB = \text{chord } 2\alpha$$

$$AD = \frac{1}{2} AB = \sin \alpha$$

$$\overline{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxx}}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \text{chord } 2\alpha$$

Man erhält also aus dem Wert der Sehne eines Winkels den Sinuswert seiner Hälfte, indem man den ersten Wert durch 2 dividiert.

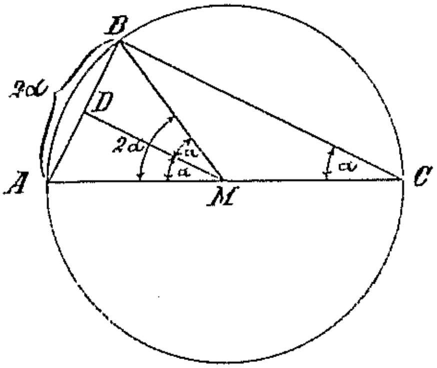


Fig. 2

Somit lässt sich eine Sehnentabelle leicht durch ständige Halbierung der Chordenwerte in eine Sinustafel verwandeln. Al-Bîrûnî, dessen Qânûn eine Sinustafel aufweist, die von $\frac{1^\circ}{4}$ zu $\frac{1^\circ}{4}$ im Argument fortschreitet (Berl. Mscr. S. $72^a$ — $75^a$), vermochte danach leicht diese « gemischte Rechnung » auszuführen. Der Radius des Kreises (= sin 90° = sin. tot.) ist bei Bîrûnî stets der Einheit gleich (= 1 pars) und ihre Unterabteilungen : minutae ('), secundae ('') u. s. w. sind, dem Gebrauche der älteren Mathematik entsprechend, sexagesimaler Art.

In den Ausdrücken (I), (II), (III) und (IV) gibt unser Autor eine höchst bemerkenswerte Lösung der Aufgabe, die Länge zwischen 2 Orten, deren geographische Breiten und deren Bogendistanz gegeben sind, zu berechnen.

Auf ganz ähnliche Weise ermittelt Al-Bîrûnî den Wert $\Delta\lambda_2 = 16^\circ 20' 54''$ als Längendifferenz : Schirâz-Ġazna. Und da Baġdâd (nach der Zählweise vieler arabischer Astronomen) unter 70° östlicher Länge vom Anfangsmeridian liegt, so eignete Ġazna demnach die Länge :

$$\lambda_1 = 70^\circ + \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 = 94^\circ 54' 26''.$$

Zur Controlle dieses Ergebnisses wird die Bestimmung des Längenabstandes der Stadt Ġazna von Baġdâd noch auf eine zweite Art durchgeführt, nämlich unter Einschaltung der Zwischenorte Ar-Raij und Ǧorǧânija, deren Breiten und gegenseitigen Distanzen dem Autor ebenfalls bekannt sind. Es findet sich :

$$\Delta\lambda_3 = 8^\circ 5' 20'' \text{ (Baġdâd — Ar-Raij)}$$
$$\Delta\lambda_4 = 6^\circ 1' 26'' \text{ (Ar-Raij — Ǧorǧânija)}$$
$$\Delta\lambda_5 = 9^\circ 37' 16'' \text{ (Ǧorǧânija — Ġazna).}$$

Daraus folgt :

$$\lambda_2 = 70^\circ + \Delta\lambda_3 + \Delta\lambda_4 + \Delta\lambda_5 = 93^\circ 44' 2''$$

als Länge von Ġazna. Al-Bîrûnî hält nunmehr dafür, dass der Mittelwert $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = 94^\circ 19' 14''$ der Wahrheit am nächsten komme.

In ähnlicher Weise wird jetzt zwischen Baġdâd und Alexandria der Zwischenort Ar-Raqqa eingeschaltet und so die Länge von Alexandria ermittelt. Indessen gebrach es dem Ostaraber offenbar an einer einigermassen richtigen Kenntnis der Entfernung Ar-Raqqa-Alexandria (wegen der übertriebenen Längenerstreckung des Mittelmeeres nach althergebrachten Vorstellungen) und das letzte Resultat wird recht fehlerhaft. Der kürzeste Weg von Ar-Raqqa nach Alexandria führt zum Teil durch das Mittelländische Meer.

Ich habe auf der beigefügten Plattkarte den Sachverhalt, der gewisse Anklänge an eine moderne *Triangulation* verrät, zeichnerisch klar zu stellen versucht, indem ich (nach Bîrûnî's Text) die einzelnen Orte artographisch zur Darstellung brachte. Es folgt jetzt die

## Uebersetzung des arabischen Textes.

### *Das 2. Kapitel : Ueber die Berichtigung der Länge Ġazna's und Alexandria's.*

Weil wir die Bewegungen der Himmelskörper auf den Meridian der Stadt Ġazna reducieren wollen, müssen wir ihre Beobachtung in den kultivierten Teilen der οἰκουμένη voraussetzen, damit aus der Verände-

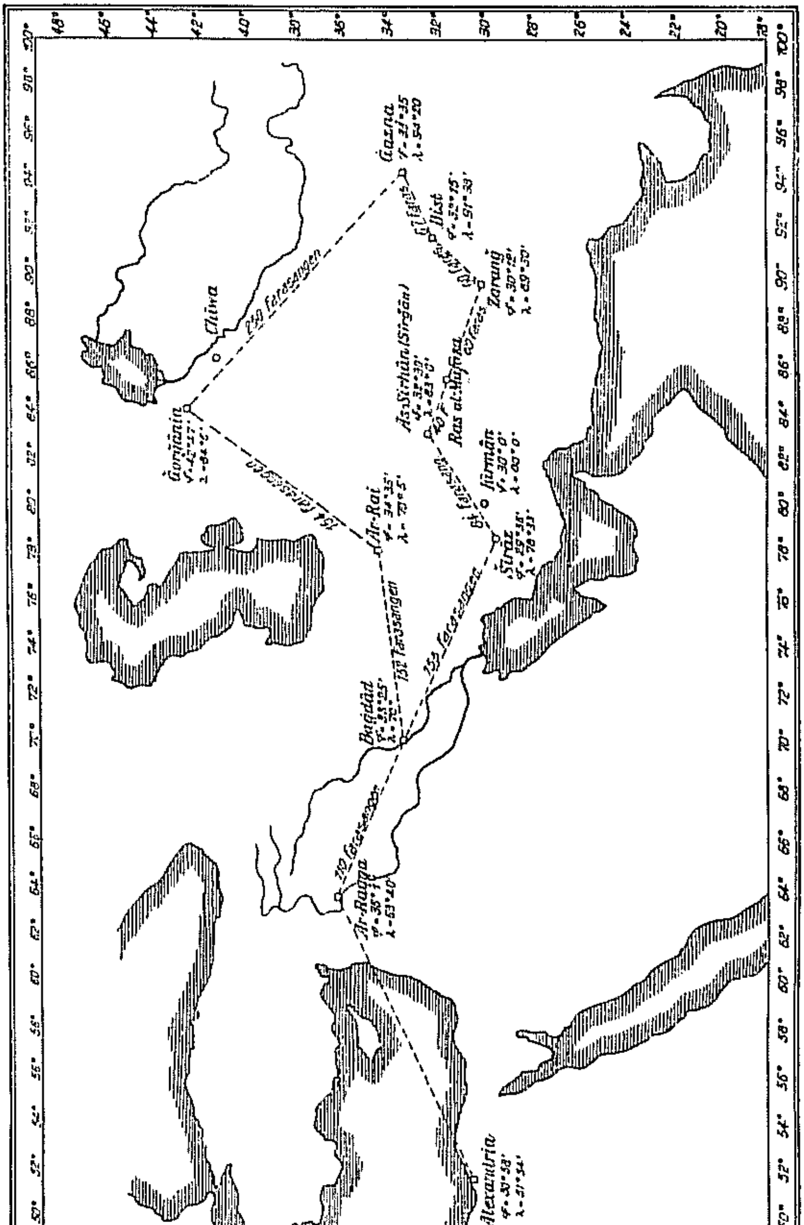

Alexandria
φ = 30°58'
λ = 51°54'
Ar-Raqqa
φ = 35°1'
λ = 63°40'
210 Farsangen
Baġdād
φ = 33°25'
λ = 70°
132 Farsangen
153 Farsangen
Ar-Rai
φ = 34°35'
λ = 75°5'
154 Farsangen
Ġorğānia
φ = 42°17'
λ = 84°6'
Chiwa
240 Farsangen
Ġazna
φ = 33°35
λ = 94°20
Šīrāz
φ = 29°36'
λ = 78°33'
Ğirmān
φ = 30°0'
λ = 80°0'
81 Farsang
As-Sirhān (Sirğān)
φ = 32°30'
λ = 83°0'
40 F.
Ras al-Mafāza
60 Farsas
Zarang
φ = 30°12'
λ = 89°30'
50 Farsas
Bist
φ = 32°15'
λ = 91°33'
67 Farsas
48° 50° 52° 54° 56° 58° 60° 62° 64° 66° 68° 70° 72° 74° 76° 78° 80° 82° 84° 86° 88° 90° 92° 94° 96° 98° 100°
48° 46° 44° 42° 40° 38° 36° 34° 32° 30° 28° 26° 24° 22° 20° 18°

Fig. 3

rung der Zeiten, die sich für unseren Wohnort in Bezug auf jene Gegenden ergeben, der Längenunterschied berechnet werden kann. Was die Stadt Ġazna anbetrifft, so sei bemerkt, dass sie auf dem Parallelkreis 33°35′ n. Br. und auf dem Meridian $24\frac{1^{\circ}}{3}$ östlich von Bağdâd liegt. Der Weg, auf dem wir zu dieser Kenntnis (1) gelangten, ist der, dass wir beharrlich die Breite Ġazna's mit einem Achtelring (Oktanten) beobachteten, der in Minuten geteilt war. Die Teilung gestattete (leicht) die Achtelung (das Abschätzen des 8. Teiles ?) einer jeden einen von ihnen. Und so wurde in den beiden Jahren 409 und 410 der Hiğra (= 1011/1012 und 1012/1013) beobachtet. Wir wählten, um zur Kenntnis der äussersten (östlichsten) Länge zu gelangen, die Stadt Schîrâz als Zwischenort zwischen ihm (Ġazna) und Bağdâd. Es möge der Punkt A (Fig. 1) Bağdâd mit dem Meridian TAZC vorstellen, und B Schîrâz, das auf dem Meridian TBD gelegen sei. Der Bogen CD ist das Mass für die gleiche (aequinoctiale) Zeit (2). AB ist die (Bogen =) Distanz zwischen den beiden Städten; ihr Betrag ist 170 Farasangen. Der grösste Teil dieses Weges entfällt auf die Ebene und ist leicht zu durchmessen. Von den 170 Farasangen ist ihr 10. Teil zu subtrahieren; man ziehe $\frac{1}{10}$ ab wegen der Krümmung des Weges, und alsdann kommt das Ergebnis der Länge des geraden Weges sehr nahe. Damit verkürzt sich die Entfernung auf 153 Farasangen, eine Zahl, die in Bogenmass = 8°6′0″ ist (3). Wir beschreiben jetzt um den Pol T die 2 Kreisbögen AG und BZ, auf der Oberfläche der (Erd =) Kugel, und die Ebene eines solchen schneidet (in ihrer Vervollständigung) die Kugelfläche in einem Kreis. Die 2 Seiten AZ und BG sind gleich; verschieden sind die 2 parallelen Seiten AG und BZ. Es ist nun das Quadrat der Sehne AB gleich dem Quadrat über der Sehne AZ, vermehrt um das Produkt aus den Sehnen AG und BZ. Der Chorde AB eignet der Wert 0°8′28″32‴; die Breite Bağdâd's ist 33°25′, diejenige von Schirâz aber nach den Beobachtungen, die mit dem grössten Ringe von Abû'l-Ḥusain ibn

---

(1) Diese Längenangabe kann an Genauigkeit sich wohl mit einem modernen Resultat vergleichen.

(2) Zum Unterschied von den ungleichen (temporalen) Stunden, wo jede der 12. Teil des Lichttages ist.

(3) Danach kämen auf den Erdumfang (von 360°) : 6800 Farasangen.

aṣ-Ṣûfî (1) und einer Anzahl anderer Gelehrten ausgeführt wurden, 29°36′. Die Chorde der Differenz (AZ oder BG) dieser beiden Breiten ist $= 0^p3'59''46'''$. Die Differenz der Quadrate über den Sehnen AB und AZ ist gleich dem Produkt aus den beiden Sehnen AG und BZ, und das Verhältnis dieser Differenz zu $\overline{AG}^2$ ist gleich $\frac{BZ}{AG}$. Er stehen aber die Sehnen gleicher Bögen in demselben Verhältnis wie die Durchmesser der zugehörigen Kreise, und dies Verhältnis ist das von $\frac{\sin TB}{\sin TA}$, welches also $= \frac{BZ}{AG}$ ist. Der Kosinus der Breite von Baġdâd ist $= 0^p50'3''2'''$, und derjenige der Breite von Schirâz $= 0^p52'10''17'''$, so dass chord AG $= 0^p7'28''27'''$ wird. Damit ergibt sich

$$\frac{\text{chord AG}}{\sin \text{AT}} = \text{chord CD} = 0^p8'17''16'''.$$

Der entsprechende Bogen ist = 8°33′32″, und das ist der Längenunterschied zwischen Baġdâd und Schirâz. Wir haben bereits erwähnt, dass die Länge Baġdâd's vom Gestade des umfassenden Oceans 70 Zeiten (Grade) sei, somit ist die Länge von Schirâz = 78°33′32″. Doch es findet sich dafür in den (dies bezüglichen) Werken : 79°0′; es rücken also die beiden Enden etwas näher zusammen.

Und was die Entfernung der beiden Orte Schirâz und Ġazna anbelangt, so ist es von Schirâz bis nach as-Sirǧân (2), zur Provinz Kirmân gehörig, 98 Farasangen, und bis nach Ra's al-Mafâza 47 Farasangen, von hier bis zur Stadt Zaranǧ, in der Landschaft Siǧistân, 70 Farasangen, bis zur Stadt Bist 60, und endlich bis Ġazna 80 Farasangen. Und wenn wir jetzt in ähnlicher Weise wie vorher bei Berechnung der Wege die Annahme machen, dass von den einen $\frac{1}{6}$,

---

(1) Geboren 903 zu Ar-Raij, gestorben 986. Er schrieb u. a. : *Das Buch der Fixsterne* (französ. von SCHJELLERUP : *Description des étoiles fixes*, St. Pétersbourg, 1874).

(2) As-Sirǧân, wie es meist geschrieben wird, findet man erwähnt in YÂQÛT's » Muschtarik » (arab. Text, 1846 herausgegeben von F. WÜSTENFELD, Göttingen). Im Kapitel über Kirmân heisst es da : « und die 2 grössten Städte sind Germîr und as-Sirǧân. » (Freundl. briefl. Mitt. von Dr. M. MEIJERHOF, Hannover). Bei BîRûNî steht immer « Sirḫân »; in seiner Klimatafel liest man : (Berl. Mscr. S. 132ª) « Sirḫân in der Provinz Kirmân », « ...die Stadt Bist liegt am Ufer (schaṭṭ) des Flusses Hindmând. » In dieser Tabelle finden sich die geographischen Koordinaten von Sirǧân, Zaranǧ und Bist, wie ich sie in der Plattkarte vermerkte.

von den anderen $\frac{1}{7}$ in Abzug zu bringen sei, in der Durchmessung dieser Wege, so bleibt nach diesem Ausgleich die Anzahl der Farasangen, die auf die Entfernung entfällt; es sind (statt 355) 284 Farasangen (1); das entspricht in Graden des Weges der Zahl 15°2'7''. Die zugehörige Sehne ist $= 0^p15'41''59'''$. Wir ersetzen jetzt in der obenstehenden Figur (1) A durch Ǧazna, B durch Schirâz. Die Sehne der Breitendifferenz beider Orte ist $0^p4'10''14'''$; und wenn wir in diesem Falle wieder genau so verfahren, wie im vorhergehenden, so erhalten wir für chord AG den Wert : $0^p14'50''6'''$. Der Kosinus der Breite Ġazna's ist $0^p49'59''5'''$, chord CD $= 0^p17'3''43'''$, und so wird arc CD = 16°20'54''. Wenn wir um diesen Betrag die Länge von Schirâz vermehren, erhalten wir für die Länge Ġazna's : 94°54'26'', und es möge jetzt ein Ausgleich der Längendifferenz von Bağdâd bis zum äussersten Ende bewerkstelligt werden.

Dazu sei in der obigen Figur (1) A die Stadt ar-Raij und B Bağdâd. Nach Abzug des 6. Teiles des Weges zwischen beiden Städten, bleiben 132 Farasangen übrig, denen die Gradzahl 7°5'21'' substituiert werden kann; die entsprechende Sehne ist $0^p7'19''14'''$. Die Breite von ar-Raij ist gemäss der Beobachtungen des Abû'l-Faḍl al-Herawi (2) und des Abû Maḥmûd al-Choǧendi (3) = 34°35'; der Kosinus hiervon ist $0^p48'47''59'''$; die Sehne der Differenz der beiden Breiten ist $= 0^p2'15''45'''$; chord AG wird $0^p6'13''2'''$ und chord CD $= 0^p8'27''50'''$. Der Bogen der Längendifferenz errechnet sich damit zu 8°5'20''. Wir haben bereits gesagt, dass wir die Breite von al-Ǧorgânija, das in der Landschaft Chwârizm liegt (4), mit dem

---

(1) Danach hat Birûni für die Gesamtentfernung Schirâz-Ġazna $\frac{1}{5}$ der Farasangen = 71, in Abzug gebracht (365 : 5 = 71 ; 355 — 71 = 284).

(2) Es ist dies Aḥmed b. Abi Sa'id Abû'l-Faḍl al-Herawi, der die Sphärik des Menelaos vom 10. Satz des 2. Buches an bearbeitete. (Vgl. H. Suter : a. a. O. S. 228).

(3) d. h. aus Choǧenda, in Transoxanien am Sir Darja gelegen. Choǧendi soll zuerst den sphärischen Sinussatz angewandt haben. Er starb um das Jahr 1000. (Vgl. H. Suter : a. a. O. S. 74).

(4) Ueber *Ǧorǧânija* verdanke ich Herrn Dr. Meyerhof folgende Stelle aus dem Muschtarik des Geographen Yâqût : (S. 405) « al-Manṣûra ist eine Stadt in Chwârizm. Die alte lag auf dem Ostufer des Ǧiḥûn (Oxus), bis man sie zerstörte, und ihre Einwohner nach der westlichen Seite übersiedelten. Und ie bewohnten *Gorgânig*, das ist *al-Ǧorǧânija*. Sie bauten sie zu einer Gross-

scharfsichtigen? Ring = 42°17′ (47?) gefunden haben. Der Kosinus hiervon ist $0^{p}44'23''22'''$, und zwischen ar-Raij und Ğorğânîja sind es, nach dem Ausgleich mit $\frac{1}{6}$, 154 Farasangen, und dieser Zahl entspricht ein Weg von 8°10′14″. Die Sehne hiervon ist $0^{p}8'33''16'''$, die Sehne der Breitendifferenz aber ist $0^{p}7'1''5'''$, und es findet sich chord $AG = 0^{p}4'39''54'''$ und chord $CD = 0^{p}6'18''20'''$. Damit gelangt man zu dem Längenunterschied CD = 6°1′26″. — Und zwischen al-Ġorgânîja und Ġazna sind es 230 Farasangen (es ist), an der Grenze der Länge, und wenn wir wieder den vorschriftsmässigen Ausgleich machen, wegen der Geradestreckung (Rektificierung) des Weges, so können wir dafür mit genügender Richtigkeit 12°10′37″ setzen. Die Sehne hiervon ist $0^{p}12'43''40'''$. Nun sei Punkt A al-Ğorğânîja und B sei Ġazna (Fig. 1). Die Chorde der Breitendifferenz ist $0^{p}9'6''7'''$. Es wird somit chord $AG = 0^{p}8'23''2'''$, chord $CD = 0^{p}10'3''50'''$. Der Bogen der Längendifferenz ist 9°37′16″. Wenn wir jetzt die Zeiten (Grade) zusammenzählen, die sich zwischen den einzelnen Orten ergaben, so belaufen sich dieselben auf 23°44′2″. Es resultiert hieraus für Ġazna die Länge : 93°44′2″. Es hatte sich aber schon vorher auf dem Wege über Schîrâz für Ġazna die Länge 94°54′26″ ergeben. Die Hälfte der Summe dieser beiden (verschiedenen) Längen für Ġazna ist, gemäss der Vorschrift der Arithmetiker, 94°19′14″, und so erhärtet sich die Tatsache, dass Ġazna 23 $\frac{1}{3}$ Zeiten (Grade) östlich von Baġdâd liegt. Von diesem Resultat machen wir nachher, bei der Ermittlung der Längendifferenz zwischen Ġazna und Alexandria, Gebrauch.

Er besagt der Almagest, dass es $\frac{5}{6}$ Stunden westlich von Bâbel (Babylon) liege, und dass seine Breite = 30°58′ sei. Der Ort Bâbel liegt in der Nähe von Baġdâd, und es ist notwendig, dass wir das prüfen, was (darüber) berichtet ist; denn ohne Zweifel fand es sich so in den Büchern, wie wir es ganz ähnlich (ebenso) finden, in seiner Abweichung von der Wahrheit (vom Richtigen). Es werde zwischen beide Städte ar-Raqqa als Zwischenort eingeschaltet, und es berichtet

---

Stadt aus, und sie ist noch heute eine Stadt in Chwârizm; bis die Tataren sie zerstörten und sie dem Erdboden gleich machten, wie wir berichtet haben. » Gorgânig dürfte wohl in *Uergendsch* übergegangen sein und dem heutigen *Köhne-Uergendsch* = Alt-Uergendsch entsprechen.

Muhammed b. ʿAbd al-ʿAziz al-Haschimi (1), dass der Längenunterschied, der zwischen ar-Raqqa und Baġdâd durch Beobachtung einer Mondfinsternis gefunden worden sei, auf 7 Zeiten datiert wurde (wörtlich : auf eine Datierung von 7 Zeiten (= Graden) hinweise).

Es möge in der obigen Figur (1) B die Stadt Baġdâd und A ar-Raqqa bedeuten, dessen Breite Muḥ b. Ǧâbir al-Battâni zu $36^{\circ}1'$ bestimmt hat (2). Der Kosinus hiervon ist $0^{p}48'31''51'''$, die Sehne der Breitendifferenz der 2 Orte ist $0^{p}2'43''21'''$. Von Baġdâd nach ar-Raqqa sind es 130 Farasangen, und wenn wir statt dessen 110 Farasangen nehmen, den Weg etwa durch Abzug von $\frac{1}{6}$ ausgleichend, so kommt darauf die Gradzahl : $6^{\circ}49'34''$; davon ist die Chorde $0^{p}6'5''43'''$; Chord AG wird $= 0^{p}5'32''36'''$ und Chord CD $= 0^{p}6'38''28'''$. Der Bogen der Längendifferenz CD ist mithin $= 6^{\circ}20'43''$.

Und was die Entfernung von ar-Raqqa bis Alexandria anbetrifft, so ist sie, nach Verminderung um $\frac{1}{6}$, 228 Meilen oder $11^{\circ}20'56''$ ; die entsprechende Sehne hat den Wert $0^{p}11'34''14'''$; die Sehne der Differenz der Breiten ist $0^{p}6'16''12'''$; für Chord AG ergibt sich $0^{p}10'32''9'''$; für Chord CD $0^{p}12'16''14'''$, und dem entspricht die Längendifferenz $11^{\circ}45'15''$. Die Gesamtdifferenz (Baġdâd-Alexandria) ist also $18^{\circ}5'58''$, was rund $1\frac{1}{5}$ Stunden ergibt. Und der Längenunterschied zwischen Alexandria und Ġazna ist somit $= 42^{\circ}26'$ oder in Zeitmass : $2^{h}49^{m}44^{s}$, und in « Minuten der Tage » $= 7^{m}4^{s}20^{t}$ (3). Und so wird der Ort, für welchen wir die Rechnung machten, bekannt (hinsichtlich seiner Länge).

*Frage :* Was ist dies Sechstel, um welches wir den Weg vermindert haben ?

*Antwort :* Die Fachleute stimmen ohne Einschränkung zu, und es ist bekannt, dass, wenn die Strecke zwischen den beiden Orten auf der

---

(1) Verfasser astronomischer Tafeln und einer Abhandlung über das Ausziehen der Quadratwurzel. (Vgl. H. Suter : a. a. O. S. 79.)

(2) Ar-Raqqa war der langjährige Beobachtungsort des berühmten Astronomen. Seine astronomischen Tafeln, die C. A. Nallino als *Opus Astronomicum* herausgab, haben den speciellen Titel : « Kitâb zîǧ aṣ-ṣâbî. Talif Abî-ʿAbdallâh Muḥ Ibn Sinân Ibn Ǧâbir al-Ḥarrânî al-maʿrûf b'il-Battânî ». 3 Bde., Mediolani, 1899-1907.

(3) Wie man sofort erkennt, sind die « Minuten der Tage » das 24 Fache der gewöhnlichen Zeitminuten..

ebenen Bodenfläche ist, keinen Abzug von sich braucht; denn das Abweichen von der geraden Linie findet statt aufgrund von dazwischen liegenden Hindernissen, die zur Deklination von ihr zwingen, wie (z. B.) Berge, auf die sie hinaufsteigen und von denen sie hinuntersteigen will im Verlauf der Strecke und ähnliche Erhöhungen, und Flüsse, von denen ihre Uebergänge sich abwenden (oder : deren Uebergänge sich von ihr abwenden) und zu denen man zurückkehrt, und Sandstrecken oder Salzseen oder Sümpfe, um die man herumgeht, und Bergpfade, durch die man sich winden muss, ferner die Zustände in den Angelegenheiten des Einzelnen, wie (z. B.) Sicherheit vor Unglücksfällen oder genügende Menge von Wasser und Proviant, wodurch die gerade Richtung beeinträchtigt und die Krümmung in ihr hervorgerufen wird. Und dies sind Dinge, die verschiedene Masse (zur Folge) haben, je nach ihrem einzelnen oder paarweisen Vorkommen, und durch sie wird das Mass des Abzugs verschieden bestimmt. Und die Sache richtet sich dabei nach dem Ermessen des Beobachters und seinem Gutdünken. Und von den Entfernungen gibt es einige, die den Abzug der Hälfte und noch mehr brauchen, und von ihnen gibt es solche, die den Abzug eines Sechstels und noch weniger brauchen. Der Abzug des Sechstels wird allgemein gebilligt, wenn die Wege den geraden Linien ähnlich sind.

*Frage :* Lassen sich die Längen besser aus den (terrestrischen) Entfernungen oder durch Beobachtung der Finsternisse ermitteln?

*Antwort :* Wenn du die Entfernungen so genau erfasst hast, dass du ihnen mit grosser Annäherung an die Wahrheit einen geradlinigen Weg substituieren kannst, so liegt der Vorteil bei diesem Verfahren. Die Bestimmung der Längen aus Finsternissen ist... (1), weil sowohl der Beginn als auch das Ende einer Eklipse, sich hinsichtlich der grössten Deutlichkeit ihres zeitlichen Eintritts nur angenähert bestimmen lassen (denn), es geht ja (dem Anfang und dem Ende ?) die Berührung zweier Schattenkreise voraus (2). Und der Mond verfinstert sich in der Weise, dass seine verdunkelte Farbe dem Rauch eines Lichtes in der Hand gleicht. Ebenso verspätet sich die Berührung (?) ganz ähnlich bei der beiden Kreise (?) Austritt im Verlauf ihres Verschwindens. Sodann ist der kreisförmige Umriss des Schattens nicht deutlich, ausser nachdem man ihn vom Monde etwas nach

---

(1) Hier fehlt wohl ein Wort, etwa « schwierig ».

(2) Ob damit die Kreisschnitte durch den Kern = und Halbschatten der Erde gemeint sind?

Uebereinkunft genommen hat. In dieser Zwischenheit bewegt sich der Mond nach aequinoktialer Zeit weiter (1). Das was zwischen den Längen bei der Addition oder Subtraktion Lücken verursacht, ist häufig darauf zurückzuführen, dass in der Beobachtung eine Zwischenpause eintritt, falls beide Beobachter nicht vorher übereingekommen sind, nach einem bestimmten Plane ihr Gesicht und ihre Erfahrung sich dienstbar zu machen, und nicht soll der eine von ihnen nach einem Flusse, der andere zu Meeren gehen (2).

*Frage :* Warum sind in diesem Kapitel Ġazna und Alexandria hinsichtlich der Verbesserung der Länge gesondert behandelt worden ?

*Antwort :* Was Gazna anbelangt, so verfüge ich über gut erprobte eigene Sonnenbeobachtungen, während ich bei Alexandria in der Tat auf Ptolemaeus zu rekurrieren mich genötigt sah. Es traf sich, dass Ġazna gerade der östliche Grenzort von all den Städten ist, von denen ich weiss, dass in ihnen die Sonne beobachtet worden ist. Alexandria ist nun der westliche Grenzort, und deshalb ist der Abstand einer jeden der übrigen Städte von ihm in einer gebrauchsfertigen Tafel angegeben, und zwar einmal in Minuten des Tages, und dann auch in aequinoktialer Zeit. (Graden.) Es folgt Seite 65 die Tabelle.

## II

Im 2. Kapitel des 5. Abschnitts des Masʿûdischen Qânûns (Berl. Mscr. S. $120^r$; Oxf. Mscr. S. $120^v$) behandelt AL-BIRÛNI die Aufgabe, den Längenunterschied zweier Orte aus ihrer Entfernung und ihren Breiten zu finden, in anderer Weise. Trigonometrisch gesprochen handelt es sich um die Ermittlung eines Winkels in einem beliebigen sphärischen Dreieck, falls man dessen drei Seiten kennt. In einem solchen Falle bedienten sich frühere arabische Astronomen der

---

(1) Seine ungleichförmige Bewegung in der Mondbahn muss während der Dauer einer Eklipse in gleichförmiger (aequinoktialer) Zeit gemessen werden, um sie mit der gleichförmigen Bewegung der Sonne in Beziehung setzen zu können.

(2) Es schien hinsichtlich dieses etwas knappen und nicht ganz deutlichen Textes besonders angezeigt, eine möglichst wörtliche Uebersetzung desselben zu geben. Dabei erfreute ich mich der gütigen Unterstützung der beiden Herren Geheimrat D$^{r}$ E. LITTMANN (Tübingen) und D$^{r}$ M. MEYERHOF (Hannover.

*Projektionsmethode*, so z. B. Ḥabas al-Ḥâsib (1), al-Battânî (2) und Ibn Yûnus (3), während Bîrûnî eine andere bemerkenswerte Lösung gibt, die für die Geschichte der arabischen Trigonometrie nicht ohne Interesse sein dürfte. Ich führe seine Lösung wörtlich an, den Beweis dazu in etwas freierer Fassung :

| | Namen der Städte | Zeiten | | Minuten der Tage | | | | Namen der Städte | Zeiten | | Minuten der Tage | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | ' | ' | " | ''' | | | ° | ' | ' | " | ''' |
| Ġazna ist östlich von diesen Städten. | Balch . . . . | 3 | 20 | 0 | 33 | 4 | Alexandria liegt westlich von diesen Städten. | Dimašq . . . | 8 | 0 | 1 | 21 | 0 |
| | Nišâbûr . . . | 9 | 20 | 1 | 33 | 20 | | Ar-Raqqa . . | 11 | 45 | 1 | 57 | 20 |
| | Ğorğânija . . | 10 | 13 | 1 | 42 | 10 | | Surramanra'â. | 17 | 55 | 2 | 58 | 30 |
| | Ğorğân. . . . | 14 | 0 | 2 | 21 | 0 | | Bagdâd. . . . | 18 | 0 | 3 | 1 | 0 |
| | Schirâz. . . . | 15 | 40 | 2 | 37 | 40 | | Ar-Raij. . . . | 26 | 11 | 4 | 21 | 50 |
| | Ar-Raij . . . | 16 | 15 | 2 | 42 | 30 | | Schirâz. . . . | 26 | 40 | 4 | 26 | 40 |
| | Bagdâd. . . . | 24 | 20 | 4 | 3 | 20 | | Ğorğân. . . . | 28 | 20 | 4 | 43 | 20 |
| | Surramanra'â. | 24 | 35 | 4 | 5 | 50 | | Ğorğânija . . | 32 | 13 | 5 | 22 | 10 |
| | Ar-Raqqa . . | 30 | 41 | 5 | 6 | 50 | | Nîšâbûr . . . | 33 | 6 | 5 | 31 | 0 |
| | Dimašq . . . | 34 | 20 | 5 | 43 | 20 | | Balch . . . . | 30 | 0 | 6 | 31 | 0 |
| | Iskenderija . | 42 | 26 | 7 | 4 | 20 | | Ġazna . . . . | 42 | 26 | 7 | 4 | 20 |

« *Das 2. Kapitel : Ueber die Berichtigung der Längen der Städte mittels der Kenntnis ihrer Entfernungen.*

---

(1) Kitâb al-Ḥabaš. (arab. Mscr. Berlin, Wetzstein I, 90, S. 94ᵃ ff.)

(2) *Opus astronomicum.* (Cap. IX ; vergl. hierzu die Bemerkungen A. v. Braunmühls in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, I, Leipzig 1900, S. 53, und von dem gleichen Autor : *Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie* [*Nova acta*, Abhandl. der Kaiserl. Leopold-Carol-Deutschen Academie d. Naturforscher, Halle 1898, S 24 ff.])

(3) *Annalen d. Hydrographie und maritim. Meteorologie*, Hamburg 1920, S. 110.

Wenn wir die geographischen Breiten zweier Orte, sowie ihren Abstand in Teilen des grössten Kreises kennen, und wir wollen den Längenunterschied zwischen ihnen wissen, so müssen wir den Sinus der kleineren Breite mit dem Sinus der Distanz multiplizieren und das Produkt durch den Sinus der grösseren Breite dividieren. Das Ergebnis ist die *1. Grösse*, die wir im Gedächtnis behalten. Wir bilden die Differenz zwischen der 1. Grösse und dem halben Sinus des doppelten Weges und merken sie uns als *2. Grösse*. Darauf bilden wir die halbe Differenz zwischen dem Sinus totus und dem Kosinus des doppelten Weges. Die 2. Grösse und die letzte halbe Differenz quadrieren wir einzeln und ziehen die Wurzel aus der Summe beider Quadrate. Damit teilen wir in das Quadrat des Sinus der Distanz: Der Quotient ist der *1. Sinus*. Und wenn wir das Produkt, das gebildet ist aus dem 1. Sinus und der 1. Grösse, durch den Sinus des Weges teilen, so ist der Quotient der *2. Sinus*. Alsdann teilen wir den Sinus der grösseren Breite durch den 1. Sinus und machen das Ergebnis (das einem Sinus entspricht) zu Bogen, den wir von 90° subtrahieren. Der Sinus des Restes (Kosinus) ist der *Aṣl* (1). Nunmehr teilen wir mit dem Kosinus der grösseren Breite in das Produkt, das aus dem 1. Sinus und dem Aṣl gebildet ist; das Ergebnis ist der *Sinus des grösseren Bogens*. Ebenso teilen wir mit dem Kosinus der kleineren Breite in das Produkt, das aus dem 2. Sinus und dem Aṣl gebildet wird; das Ergebnis entspricht dem *Sinus des kleineren Bogens*. Die Differenz zwischen dem grösseren und kleineren Bogen ist dem Längenunterschied der 2 Orte gleich. Zählen wir diesen Unterschied zur Länge des westlichen Ortes hinzu, so erhalten wir die Länge des östlicheren, ziehen wir ihn aber von der Länge des östlicheren Ortes ab, so bleibt die Länge des westlicheren, und falls beide Breiten gleich sind, so teilen wir den Sinus des halben Weges durch den Kosinus der (gemeinschaftlichen) Breite; es kommt dann der Sinus der halben Längendifferenz heraus. Und wenn der Weg dem Breitenunterschied der beiden Orte gleich wird, so giebt es keine Längendifferenz. »

Zum Beweise dieses sei (Fig. 4) HE der dem Himmelsäquator entsprechende Erdäquator mit dem Pol T. TG sei der Meridian des Ortes mit der grösseren Breite $\varphi_1$, TD aber der Meridian des Ortes mit der geringeren Breite $\varphi_2$. Dann stelt der Bogen DG den Längen-

---

(1) Aṣl = Wurzel, Ursprung. Diesem Ausdruck für eine trigonometrische Grösse begegnet man in der arabischen Astronomie öfters.

unterschied der 2 Orte A und B dar, und AB $= d$ ist der bekannte Weg in Graden des grössten Kreises. Die Verlängerung von AB begegnet dem Aequator in H, und jenseits von AB werde auf dessen

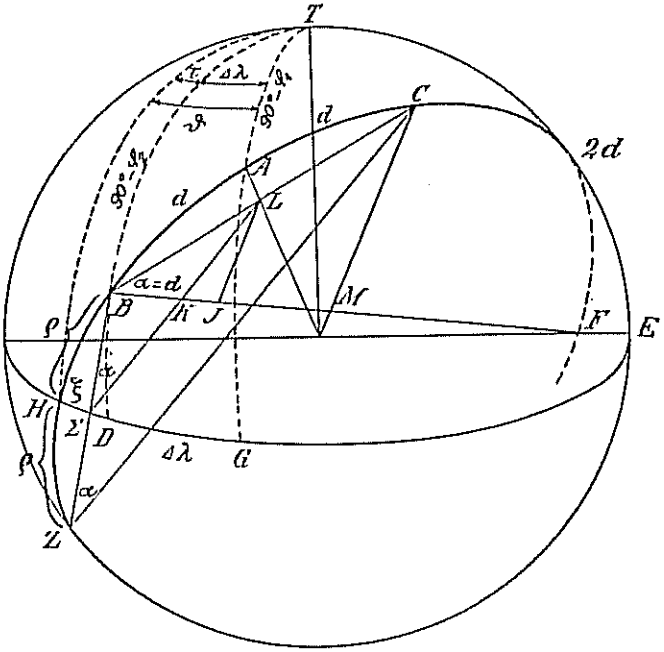


Fig. 4

Verlängerung Bogen AC = AB abgetragen, und ebenso Bogen HZ = HB = $\rho$ gemacht. Dann ziehen wir die geradlinigen Strecken BC, BZ und CZ. Die Mittelpunkte der 2 Geraden BC und BZ verbinden wir durch die Gerade LΣ, dann ist $L\Sigma = \frac{1}{2} CZ = \sin ABH = \sin (d + \rho)$ und ausserdem ist LΣ//CZ. Nun bestehen folgende Gleichheiten :

$$\frac{L\Sigma}{\Sigma B} = \frac{\sin AH}{\sin HB} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}$$ (nach der *Regula quatuor quantitatum*),

und das letzte Verhältnis ist eine bekannte Grösse. Aber von den Winkeln des durch seine 3 Seiten gegebenen Dreiecks ABT ist keiner bekannt. Wir machen jetzt Winkel CBK = Winkel CZB(= α) resp. = Winkel LΣB, indem wir BK bis F ziehen. Auf diese Gerade fällen wir die Lote CM und LJ. Aus den 2 ähnlichen Dreiecken BLΣ und KBL liest man die Proportion ab :

$$\frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{BK}}=\frac{\mathrm{L\Sigma}}{\mathrm{\Sigma B}},$$

hieraus ergibt sich :

$$\mathrm{BK}=\frac{\mathrm{\Sigma B}}{\mathrm{L\Sigma}}\cdot\mathrm{LB}=\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}\cdot\sin d=\mathit{1.\ Grösse}=\mathrm{G}_1\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{I})$$

Ferner ist :

$$\mathrm{BJ}=\frac{1}{2}\,\mathrm{BM}\qquad=\frac{1}{2}\sin 2d,\quad \text{und nach Figur :}$$

$$\mathrm{KJ}=\mathrm{BJ}-\mathrm{BK}=\frac{1}{2}\sin 2d-\mathrm{G}_1=\mathit{2.\ Grösse}=\mathrm{G}_2\ .\ .\ .\ (\mathrm{II}),$$

$$\mathrm{LJ}=\frac{1}{2}\,\mathrm{CM}=\frac{1-\cos 2d}{2}.$$

Man hat im rechtwinkligen Dreieck JKL :

$$\mathrm{LK}=\sqrt{\overline{\mathrm{KJ}}^2+\overline{\mathrm{JL}}^2},\ \text{womit LK bekannt ist.}$$

Aus der Proportion

$$\frac{\mathrm{LK}}{\mathrm{LB}}=\frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{L\Sigma}}\ \text{folgt :}$$

$$\mathrm{L\Sigma}=\frac{\overline{\mathrm{LB}}^2}{\mathrm{KL}}=\frac{\sin^2 d}{\sqrt{\mathrm{JK}^2+\overline{\mathrm{JL}}^2}}=\sin\mathrm{AH}=\mathit{1.\ Sinus}.\ .\ .\ .\ (\mathrm{III})$$

Weiterhin hat man auch :

$$\frac{\mathrm{\Sigma B}}{\mathrm{\Sigma L}}=\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{BL}},$$

und somit :

$$\mathrm{\Sigma B}=\frac{\mathrm{BK}\cdot\mathrm{\Sigma L}}{\mathrm{BL}}=\frac{\mathrm{G}_1\cdot\sin\mathrm{AH}}{\sin d}=\sin\mathrm{HB}=\mathit{2.\ Sinus}.\ .\ .\ (\mathrm{IV})$$

Zieht man noch den Quadranten TH senkrecht zum Aequator HE, und nennt man den sphärischen Winkel AHG $=\xi$ und Winkel AHT dementsprechend $=90^\circ-\xi$, so gibt die Anwendung des sphärischen Sinussatzes auf das bei G rechtwinklige Kugeldreieck AHG die Formel :

$$\sin\varphi_1:\sin\mathrm{AH}=\sin\xi:\sin 90^\circ,$$

oder :

$$\sin\xi=\frac{\sin\varphi_1}{\sin\mathrm{AH}}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{V})$$

womit $\xi$ bekannt ist. Dem Text zufolge ist jetzt :

$$\sin(90^\circ-\xi)=\cos\xi=\mathrm{Asl}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{VI})$$

Aus dem Dreieck AHT folgt durch Anwendung des Sinussatzes:

$$\frac{\sin AH \cdot Asl}{\cos \varphi_1} = \sin \theta = \textit{Sinus des grösseren Bogens} \;\ldots\; \text{(VII)},$$

während man in dem Dreieck BHT hat:

$$\frac{\sin BH \cdot Asl}{\cos \varphi_2} = \sin \tau = \textit{Sinus des kleineren Bogens} \;\ldots\; \text{(VIII)}$$

Aus den Gleichungen (VII) und (VIII) lassen sich die beiden Winkel $\theta$ und $\tau$ berechnen; dann ist nach Figur 4:

$$\theta - \tau = DG = \Delta\lambda = \text{Längendifferenz zwischen A und B.}$$

Hierdurch sind Vorschriften, die AL-Birûnî im Text gelehrt hat, vollständig klar gestellt.

## III.

Ich lasse im Anschluss hieran noch die Uebersetzung des 7. Kapitels der 5. Maqâle des Mas'ûdi'schen Qânûns folgen (Berl. Mscr. S. $124^a$ ff., Or. Mscr. 1997 des Brit. Mus. S. $95^r$ ff.), wo AL-Birûnî auf *metrologische Fragen* hinsichtlich der Erdkugel näher eintritt. Dies Kapitel fehlt in der Oxforder Handschrift; die Schrift des Exemplars, das sich im Brit. Mus. befindet, ist zwar deutlich, aber oft unpunktiert, während das Berl. Manuscr. in einem schwer zu entziffernden Ta'liq geschrieben ist. Dies und das Vorkommen von arabischen Wörtern, die mir nicht geläufig sind, hat verursacht, dass ich die richtige Lesung und Uebersetzung einiger Stellen zu Anfang des Kapitels nicht sicher verbürgen kann. Der Autor sagt:

« Die Erde befindet sich in der Mitte der Himmelskugel, und die (auf diesen zwei Kugelflächen) auftretenden Winkel (haben ihre Scheitel im Weltmittelpunkt. Wir schneiden aus beiden Räumen (Erd = und Himmelskugel) einander ähnliche Ausschnitte heraus, wie z. B. Flächen, die körperlichen Winkeln (Ecken), oder Bögen, die gleichen Flächenwinkeln gegenüberliegen. Und gleiche Bögen sind in ihrer linearen Grösse proportional der Entfernung vom Mittelpunkt, und gar mannigfach sind die Benennungen für die Ausmasse irdischer Bogendistanzen. Sie (die Gelehrten) haben sich dann hinsichtlich des Masses der Wegeslängen geeinigt, und in erster Linie in dem, was für jene betreffs der Ellen von Nutzen ist, welche sie als die vorzüglichsten erachten und bei sich führen. Ihre Nichtverwandschaft, die Darlegungen der Schwierigkeit, bestehen in diesem Falle in der Schwierigkeit des Ausdruks, und manchmal ist es schwierig, für dieselben ein erschöpfendes wissenschaftliches Resumé zu gewinnen.

Nunmehr sei jenes Verständnis erzielt durch richtige Unterscheidung und Verbindung; aber es verändert sich dies alles in kurzer Zeit, und deshalb erstreben wir keine (eigene) Festsetzung (Konstruktion).

Dieses Kapitel enthält eine Darlegung, die sich auf zwei wissenschaftliche Autoritäten stützt, ausserdem, was von Seiten der Griechen und Inder zu uns kam. Jede eine derselben unterscheidet sich von der andern in der Grösse der Leistung (Macht), welche ihr Ansehen verleiht. Die Inder bestimmten den Erdgrad zu 8 Meilen unserer Meilen, und sie hegen verschiedene Ansichten hinsichtlich der Grösse des ganzen Erdumfangs; in jedem einzelnen ihrer 5 Siddhântâs ist das davon erwähnt, was von den Angaben des anderen abweicht. Die Griechen bestimmten ihn in einem Masse, welches Stadion hiess, und es berichtet Ğâlînûs (Galenos), das Eratosthenes in diesem Mass die Entfernung : Syene (Asuân) — Alexandria ermittelt habe, die beide auf ein und demselben Meridian lägen, gerade wie z. B. Tadmur und ar-Raqqa. Wenn man alles zusammenstellt von dem an, was in der Geometrie (Buch des Beweises) des Apollonius steht, bis zu dem, was in den einzelnen Büchern des Ptolemaios — dem Buch von der Einführung in die Wissenschaft über die Kugel und seinem Buch über die Gestalt der Erde — sich findet, so sind auch da die Werte (des Stadions?) verschieden, vorausgesetzt, dass wir mit ihren Wortbestimmungen, falls solche getroffen werden mussten, uns nicht zu sehr abmühen müssen, um unser Volk dabei, angesichts seiner (ganz anderen) Sprache und der Verschiedenheit der Uebersetzer in sie, richtig zu leiten. Dieses und die grosse Meinungsverschiedenheit der Parteien, ist es, was al-Ma'mûn ibn ar-Rašîd veranlasste, die Beobachtung in der Ebene (Wüste) Sinğâr in der Provinz Mauṣil, durch eine Anzahl trefflicher Fachmänner wiederholen zu lassen. Sie machten sich die Ermittlung eines Bogens des grössten Kreises zur Aufgabe, dessen Verhältnis zum ganzen Kreisumfang bekannt war, nach Ellen, Meilen oder Farasangen. Jeder von ihnen sollte in stetem Fortschreiten einen geraden Weg auf einer unebenen? Bodenfläche durchmessen. Und er (der technische Fachmann) ging dem Umfang eines grössten Kreises soweit nach als es nach dem common sense nötig erschien. Eine Schwierigkeit besteht für den Fussgänger in der Krümmung, in welcher er von der direkten Distanz abseits ist, und in der Veränderung der Richtung (des Azimuts) in jedem Teile und von den grössten Kreisen, ausser dem Aequator und den Meridianen. Und deshalb hielt sich ein jeder genau an die Dispositionen des (ersten) Führers, und sie erfüllten die Bedingungen, welche die

Richtigkeit der geradlinigen Marschroute gewährleisten, des Marsches bei Tage und der Märsche bei Nacht. Und sie bestimmten einen der angenommenen 360 Teile des Erdumfanges zu 56 $\frac{2}{3}$ Meilen; jede Meile hat 4000 Ellen von den als « schwarze » bekannten, jede dieser Ellen, das Mass der Höfe und Häuser in Baġdâd, hält 24 Finger, und je 3 von diesen Meilen bilden eine Farasange, und deshalb beläuft sich einer der Erdgrade auf 226666 $\frac{2}{3}$ Ellen oder auf 18 $\frac{1}{3}$ Farasangen und $\frac{5}{9}$ Minuten. Somit kommen auf den ganzen Erdumfang 11600000 Ellen oder 20400 Meilen oder 6800 Farasangen.

Zur Bestätigung (der Richtigkeit) meiner Meinung (ist es nötig), dass ich zu einem Bericht abschweife, des Inhalts, dass ich ein ebenes Gelände im Norden von Dehistân, in der Landschaft Ǧorǧân, auswählte, auf dem der eifrige Gehilfe einen Teil des Erdgrades mass, — und ich habe diese zuverlässige Hilfe dabei als richtig befunden — bis ich zu einer anderen Methode im Lande Indien geführt wurde, wo ich für meine Zwecke einen die weite Ebene überragenden Berg fand. Die Oberfläche der Ebene war glatter als der Meeresspiegel selbst. Ich suchte auf des Berges Gipfel den Anblick der Begegnung von Erde und Himmel, d. h. des Horizontkreises, und ich fand ihn eingegrenzt im Instrument durch die (horizontale) Ostwestlinie in einer Kleinheit von etwas weniger als $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\left(=\frac{7}{12}\right)$ Grad, und ich nahm statt dessen 34 Bogenminuten. Ich bestimmte die Vertikale des Berges, indem ich die Höhe seines Gipfels an 2 Stellen nahm, die mit dem Fusspunkt der Vertikallinie in einer geraden Linie lagen (1), und ich fand sie 652 Ellen und die Hälfte einer Zehntel Elle (= 652,05 Ellen).

---

(1) Derlei geodätische Messungen nach Al-Bîrûnî, Ibn aṣ-Ṣaffâr (†1035) und anderen erläutert E. Wiedemann in seinen *Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften*, XVIII, Erlangen 1909, S. 59 ff. — Besonders ausführliche Angaben über diesen Gegenstand habe ich in den Ḥâkimitischen Tafeln des Ibn Yûnus (Cap. 11, S. 254 ff.) gefunden, und ich teile hieraus einiges mit. Der Autor sagt : « Falls du die Länge aufrecht stehender Gegenstände aus ihren Höhenwinkeln wissen willst, so stellst du die Spitze der 'Iḍâde auf 45° der Höhe ein. Du blickst durch die 2 Löcher ihres Visiers und suchst den höchsten Punkt des Gegenstandes in das Auge zu bekommen. Und du trittst dabei vor und wieder zurück, bis dass du den höchsten Punkt in der Mitte des Loches siehst. Dann trägst du von deinem Standpunkt bis zu einer Stelle hinter dir

(Zur Veranschaulichung des Sachverhalts) sei HC die Höhe des Berges, die senkrecht auf der Erdkugel BAC steht und die Fortsetzung der Geraden CTB ist, die man erhält, wenn man CT über den Erdmittelpunkt hinaus nach der Tiefe verlängert. T sei der Erdmittel-

---

$6\frac{2}{3}$ Spannen ab; das ist ungefähr der Abstand zwischen den Augen und der Fusssohle. Und in diesem Masse missest du jetzt die Entfernung vom Fusse des Gegenstandes, dessen Länge bestimmt werden soll, bis zu der Stelle hinter dir. Was sich ergibt, ist dessen Länge (Höhe) in Spannen. — Und wenn du seine Länge von der Spitze bis zum Fusspunkte ermitteln willst, so tu also: Du fügst zu der Stelle deines Standpunktes $(B_1)$ $6\frac{2}{3}$ Spannen hinzu und machst den dadurch erhaltenen Punkt $(B_2)$ durch eine Marke kenntlich. Dann stellst du die 'Iḍâde auf 26°34' Höhe ein, diese Gradzahl vom horizontalen Nullpunkt aus gerechnet. Du trittst von deinem augenblicklichen Standort zurück, bis du wiederum (im Visier) die höchste Spitze des Gegenstandes erblickst, dessen Länge du bestimmen willst. Du bist jetzt das Vis à Vis zu deinem ersten Standpunkt. Du trittst ebenfalls so lange vor und zurück, bis dass sich dir die höchste Stelle in der Mitte des Visierloches zeigt. Diesem zweiten Standort $(C_1)$, den du im Auge behältst, fügst du noch $13\frac{1}{3}$ Spannen hinzu, bis du zu einem Punkt $(C_2)$ hinter dir gelangst, d. h. hinter dem Vis à Vis. Und diesen Ort $(C_2)$ machst du ebenfalls durch eine Marke kenntlich. Jetzt missest du den Abstand zwischen den beiden Marken, und er ist der Länge (Höhe) des senkrecht stehenden Gegenstandes gleich. »

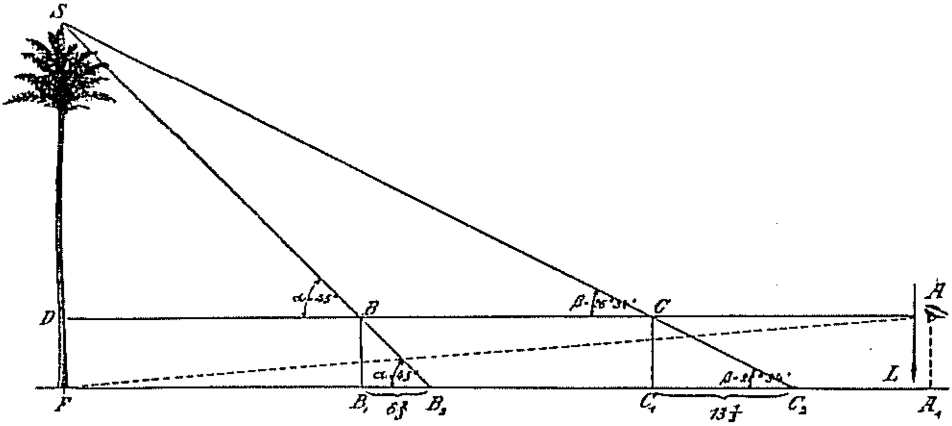


Fig. 6

Während die Richtigkeit des ersten Verfahrens sich ohne Weiteres aus der punkt und HA Tangente an den Kreis des Erdumfangs; wir ziehen TA und erhalten dadurch das bei A rechtwinklige Dreieck HTA, dessen Winkel in der Weise bekannt sind, dass AHT der Ergänzung der Abgrenzung des Horizontes [Horizontaldepression] gleich ist, und diese

---

Eigenschaft des rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks ergibt, kann sie für das zweite also bewiesen werden :

Ist $B_1$ der Fusspunkt von B (Fig. 6) und also $BB_1 = 6\frac{2}{3}$ Spannen $= DF = CC_1 = AA_1 = B_1B_2 = \frac{1}{2}C_1C_2$. so ist leicht einzusehen, dass $B_2C_2 = SF$ ist.

Denn man hat :

$$\begin{array}{rl} 2\cdot SF = FC_2 & \left(\text{weil cotg } 26°34' \text{ [genauer } 26°33'56''] = 2 = \frac{FC_2}{FS}\right) \\ SF = FB_2 & \\ \underline{2\cdot SF - SF = SF = FC_2 - FB_2} & \\ SF = B_2C_2, \quad \text{q. e. d.} & \end{array}$$

Sind die in den Punkten B und C gemessenen Höhenwinkel nicht 45° und 26°34', sondern (allgemein) $\alpha$ und $\beta$, so lehrt Ibn Yûnus zur Ermittlung von SF eine Vorschrift, die in eine Formel umgesetzt, lautet :

$$SF = \frac{B_2C_2}{\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Ist nämlich $a = BB_1$ die Grösse eines normalen Menschen, so hat man (Fig. 6)

$$B_1B_2 = a\cdot \text{cotg}\,\alpha = a\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$C_1C_2 = a\cdot \text{cotg}\,\beta = a\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta},$$

wodurch die rückwärts abzutragenden Strecken $B_1B_2$ und $C_1C_2$ berechenbar sind. Aus der Fig. 6 liest man jetzt ab :

$$FC_2 = SF\cdot\text{cotg}\,\beta = SF\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$FB_2 = SF\cdot\text{cotg}\,\alpha = SF\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Durch Subtraktion folgt :

$$FC_2 - FB_2 = B_2C_2 = SF\cdot\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \quad \text{u. s. w.}$$

Bemerkt sei noch, dass das Bleilot L dazu dient, die Einfallstellen aufrechter Gegenstände (z. B. F) festzulegen und zu bewirken, dass alle diese Stellen (F, $B_2$, $C_2$) in einer Geraden liegen.

beträgt 89°26'. Der sinus hiervon ist $= 59'59''49'''2^{\text{iv}}$ (1). Winkel HTA ist 34' sein Sinus $= 35''36'''$ (2), und das ist eine bekannte Erlaubnis (Vernachlässigung) für das Mass, in welchem TH ausgedrückt ist. Setzen wir TH = sin. tot., so wird mit dieser Festsetzung TA = cosinus der Horizontdepression, und CH ist der Ueberschuss des sin. tot. über den cosinus der Horizontdepression, und $= 10''17'''32^{\text{iv}}$, und sein Verhältnis zu AT, d. h. dem cosinus der Horizontdepression ist gleich dem Verhältnis der Zahl der Ellen der Bergeshöhe CH zur Ellenzahl des Erdradius. Und so wird dieser = 12851369 (5042) (3) Ellen, und der Erdumfang = 80780039 (1 33); ferner 1 Erdgrad = 224388 (5950) Ellen. Die Zahl der Meilen eines Erdgrades ist $= 56^{\text{M}}0'50''6'''$; und sie nähert sich derjenigen, welche die Fachmänner gefunden haben, und das Herz beruhigt sich bei dem, was sie (die Astronomen AL-MA'MÛNS) berichteten... »

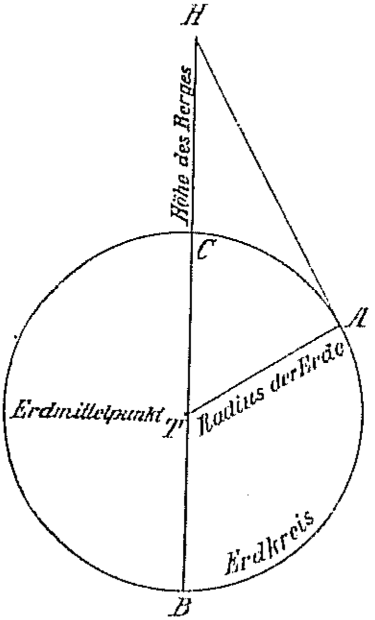


Fig. 5

Für die einschlägige Literatur möchte ich auf meine Studie : « Erdmessungen bei den Arabern » verweisen (4).

(Essen a. d. R.). CARL SCHOY.

---

(1) Die Sinustafel des *Ibn Yûnus* gibt : sin 89°26' $= 59^{p}59'49''13'''24^{\text{iv}}$ (Berl. arab. Mscr., Landberg 1038), diejenige des *Ulug Beg* dagegen : $59^{p}59'49''26'''9^{\text{iv}}26^{\text{v}}$ (Berl. pers. Mscr., 280).

(2) $= 35'36''15'''24^{\text{iv}}$ bei *Ibn Yûnus* und $35'36''14'''54^{\text{iv}}$ bei *Uluġ Beg.*

Die Sinustafel des *Ibn Yûnus* (nach d. Berl. Mscr.) liegt bei mir in deutscher Reinschrift; sie schreitet im Argument von Minute zu Minute fort und umfasst 90 Blätter. Die trigonometrischen Tafeln des *al-Bîrûnî* schreiten im Argument um $\frac{1^{\circ}}{4}$ fort, haben aber dafür 2 *Differenztafeln*, mittels welcher *Bîrûnî Ausgleichsrechnungen* vornimmt.

(3) Die in Klammern stehenden Zahlen sind in Buchstaben des arab. Alphabets geschrieben, die andern in den jetzt gebräuchlichen arab. Zahlzeichen.

(4) *Zeitschr. d. Gesellschaft f. Erdkunde*, Berlin, 1917, S. 438-453.

# Über den Gnomonschatten und die Schattentafeln der arabischen Astronomie

## Ein Beitrag zur arabischen Trigonometrie nach unedierten arabischen Handschriften

von

**Karl Schoy**

Mit 5 Abbildungen

---

Hannover 1923
Orient-Buchhandlung Heinz Lafaire

# Vorwort.

Noch immer ist unser Wissen über die arabische Mathematik gering und lückenhaft. Dies gilt in nicht geringerem Maße von der arabischen Trigonometrie. Wohl hat A. von Braunmühl vor nun nahezu 25 Jahren bei Abfassung seiner Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie alles damals in Übersetzung vorhandene Material aus der arabischen Trigonometrie gewissenhaft verwertet, allein es fehlte seither zu sehr an eigentlichen Quellenstudien nach arabischen Handschriften, als daß inzwischen von einem nennenswerten Fortschritte gesprochen werden könnte. Insbesondere über die Tangensfunktion, ihr Auftreten in der arabischen Trigonometrie und die Tabulierung dieser trigonometrischen Beziehung ist unser Wissen bis heute mehr als dürftig, ja unsicher. So hielt es der Unterzeichnete für wünschenswert, durch Erschließung neuer Quellen und Analyse bedeutender arabischer Schattentafeln, besonders von bis jetzt so gut wie nur dem Namen nach bekannten Autoren, eine Förderung unserer Kenntnisse der arabischen Trigonometrie anzustreben. Der Verfasser ist dem Verlage besonders dankbar für Herausgabe dieses kurzen Beitrags. Er hofft jedoch, noch mehrere ähnliche Studien wie die hier vorliegende folgen lassen zu können.

Essen a. d. R., im Frühjahr 1923.

**Karl Schoy.**

# Inhalt.

# I. Begriff und Arten des Schattens. Ursprung und Erstellung der Schattentafeln.

Der Schatten wird von Ibn Yûnus († 1009) also definiert[1]: „Der Schatten, den die Männer der Wissenschaft meinen, ist der Teil des Sonnenscheins, den ein Gegenstand verdeckt, der senkrecht auf ebenen, dem Horizont parallelen Flächen steht." In unserem besonderen Fall handelt es sich um den Schlagschatten eines Gnomons oder Schattenwerfers auf eine wagerechte oder senkrechte Ebene, auf welcher dieser Gnomon seinerseits rektangular steht. Er hat in der arabischen Astronomie gewöhnlich die Bezeichnung miqjâs (Messer), weil er vom Fuß bis zur Spitze in eine Anzahl Teile geteilt war, in denen man die Länge seines Schlagschattens maß. Auch die Bezeichnungen šaḫṣ (Gegenstand) und šai' (Sache, Gegenstand) für den Schattenmesser kommen vor. Der Schatten heißt nach Ibn Yûnus in der guten arabischen Sprache vor dem zawâl (Mittag): ẓill, nach dem zawâl aber fai'. Bemerkenswert sind die klaren Begriffsbestimmungen, die der ostarabische Astronom al-Bîrûnî (973—1048) über den Schatten und was damit zusammenhängt, gibt. Er sagt wörtlich[2]: „Der miqjâs und der Schatten. Der miqjâs ist von Holz oder einer anderen Substanz und gleichmäßig von Gestalt; er ist am Ende spitz auslaufend wie ein Kegel. Er steht senkrecht wie ein Pflock auf der Fläche, auf der er errichtet ist. Was den Schatten anbetrifft, so verstehen wir darunter den Schatten dieses miqjâs. Die Schattenlänge wird nach den Teilen des miqjâs abgeschätzt (gemessen), bis daß man weiß, wieviel es ihrer sind. Die Verbindungslinie des Schattenendes mit der Spitze des miqjâs heißt Durchmesser des Schattens (quṭr aẓ-ẓill). Und wieviel Teile hat der miqjâs? Falls er 12 gleiche Teile hält, heißen sie Finger[3]; ist ihre Zahl 60, so führen sie den Namen Teile, sind es aber $6^{1}/_{3}$, so werden sie Füße genannt. Doch besteht hierin ein Unterschied insoferne, als es unter den Gelehrten auch solche gibt, die den miqjâs in 7 Teile teilen. — Der Art nach gibt es zweierlei Schatten: Der eine heißt basîṭ (ausgebreitet) oder mustawî (eben). Man erhält ihn, falls man den miqjâs senkrecht auf den Horizont stellt, nachdem dieser vorher geebnet und fehlerfrei ge-

---

[1] Arab. Mscr. 143, Leiden, Kap. XI, S. 288.

[2] Kitâb at-tafhim w'at-tanǧîm. (Berlin, 5665) S. 41 a.

[3] Dies war die indische und früheste Teilung des Gnomons.

macht ist; er breitet sich auf dem Boden aus. Der andere heißt ma'kūs (umgekehrt), auch muntaṣib (vertikal). In diesem Falle ist der miqjās auf einer Fläche, die der Sonne gegenüberliegt, (senkrecht) aufgerichtet, oder auf einer Wand oder etwas anderem. Auch hier steht der miqjās wie ein Pflock auf ihr. Wenn sein Schatten auf den Boden fällt, so ist dessen Spitze zu unterst; deshalb nennt man ihn ma'kūs (gewendet)."

Der Horizontalschatten heißt auch noch ẓill ṯānī (2. Schatten); der Vertikalschatten ẓill awwal (1. Schatten).

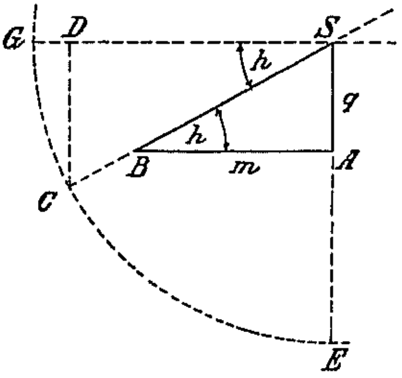


Abb. 1a.

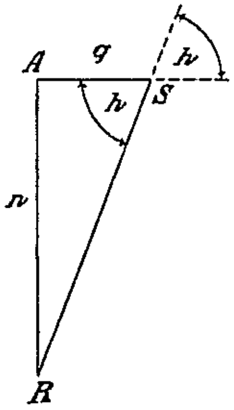


Abb. 1b.

Aber der Schatten, der durch die Beobachtung gewonnen wird, gibt die Höhe des oberen Sonnenrandes, nicht des Sonnenmittelpunktes. Dies hat zuerst Ibn Yūnus deutlich gemacht[1]). Vom Schatten, der durch die Beobachtung gewonnen wird, ist der durch die Rechnung ermittelte zu unterscheiden, der der Höhe des Sonnenmittelpunktes entspricht. Ibn Yūnus sagt über die Bestimmung des letzteren folgendes: „Stelle den Sinus und den Kosinus der Höhe fest und multipliziere den Kosinus derselben mit der Länge des Gnomons; das Produkt teile durch den Sinus der Sonnenhöhe: das Ergebnis ist der Schatten. Oder du teilst den Kosinus der Höhe durch deren Sinus und multiplizierst den Quotienten mit der Länge des Gnomons: Das Ergebnis ist wiederum der Schatten; oder endlich, du teilst die Gnomonlänge durch den Sinus der Höhe und multiplizierst den Quotienten mit dem Kosinus der Höhe, und abermals ist das Resultat der Schatten. Doch wenn der Gnomon quer gerichtet ist, so ist es gerade umgekehrt: Dann mußt du den Sinus der Höhe mit der Länge des Gnomons multiplizieren und das Produkt durch den Kosinus der Höhe dividieren. Das Ergebnis ist alsdann der verlangte Schatten."

---

[1]) Leidener Mscr. 143, S. 238, Kap. XI. (Den deutschen Text s. Anm. d. Hydrogr. u. maritim. Meteorologie, 1921, S. 181.)

Diese Vorschrift zur Berechnung des Schattens findet sich wohl übereinstimmend bei allen arabischen Astronomen. Wir lassen anschließend gleich eine kurze geometrische Ableitung — im Sinne der arabischen Autoren — folgen: Es sei in Abb. 1a $AS = q$ der vertikale miqjâs und $AB = m$ sein Horizontalschatten bei der Sonnenhöhe h. In Abb. 1b ist $AS = q$ der horizontal oder quer gerichtete miqjâs und $AB = n$ sein Vertikalschatten. Um S ist in Abb. 1a der Viertelkreis EG mit dem Radius $SE = 60^{\text{partes}} =$ sinus totus beschrieben. CD ist eine halbe Sehne und nach den Lehren der arabischen Trigonometrie der Sinus (ǧaib) des Winkels h. Und der Kosinus desselben Winkels h (ǧaib at-tamâm) ist der Sinus seiner Ergänzung zu 90°, d. h. $DS = \sin(90° - h)$. Aus den beiden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken ABS und CDS (Abb. 1a) folgt die Proportion:

$$AB : q = DS : DC,$$

d. i.
$$AB = m = q \cdot \frac{\cos h}{\sin h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Ganz ebenso findet man für den Vertikalschatten $AB = n$ (Abb. 1b):

$$AB = n = q \cdot \frac{\sin h}{\cos h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

q. e. d.

Für die Verwandlung des 1. Schattens in den 2. und umgekehrt, geben die arabischen Astronomen1) Vorschriften, die, in die Formelsprache umgesetzt, also lauten: Es ist

$$m = q \cdot \operatorname{cotg} h,$$

$$n = q \cdot \operatorname{tang} h = \frac{q}{\operatorname{cotg} h} = \frac{q}{\frac{m}{q}} = \frac{q^2}{m}, \text{ d. h.}$$

$$\text{Vertikalschatten } n = \frac{(\text{miqjâs})^2}{\text{Horizontalschatten}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

und ebenso ist

$$\text{Horizontalschatten } m = \frac{(\text{miqjâs})^2}{\text{Vertikalschatten}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

Es mögen hier noch der Begriff des „Schattens der Treppe“ (ẓill as-sullam) Erwähnung finden. Man begegnet diesem Ausdruck bei al-Bîrûni, der darüber das folgende sagt2): „Kenntnis von az-ẓill al-mustawî aus dem ẓill as-sullam. Wir beschreiben in der Ebene des Horizontes einen Kreis, dessen Mittelpunkt im Fußpunkt des miqjâs liegt, und dessen Radius gleich der Höhe des Schattenmessers ist. Im Durchschnittspunkt des Schattens dieses miqjâs mit dem Kreisumfang stellen wir einen zweiten miqjâs auf. Von diesem wird ein Teil im Sonnenschein, der andere Teil im Schatten (des ersten miqjâs) sein. Und dies ist der Fall, wenn der Gnomonschatten über den Betrag der Länge des miqjâs hinausgeht. Was nun an Teilen des zweiten miqjâs im Schatten

---

1) Traité des instruments astronomiques des Arabes par Aboul Hhassan Ali de Maroc, publié par L. Am. Sédillot, Paris 1834, S. 155.

2) al-Qânûn al-Masʽûdî (Berl. Mscr. Orient. 275). S. 72b.

liegt, das nennen wir den Schatten der Treppe, weil er während des Vormittags (meist) bis zum Fuß (der Wand, des Gnomons) herunter (und ganz verloren) geht, wobei sich sein Ende von der untersten Kante der Wand weghebt; nach der Tagesmitte sich jedoch wieder erhebt und steil emporsteigt, indem sich seine Spitze wieder erhöht. Und wenn der ebene Schatten wieder so weit hinaufgegangen ist, bis wieder ẓill as-sullam eingetreten ist, dann kennen wir vom zweiten miqjâs auch den Teil, der in der Sonne liegt: es ist der Teil in der Nähe seiner Spitze, der dem dunkleren entgegensieht (steht). Wir nehmen von den 12 Teilen des zweiten miqjâs den dunkleren Abschnitt. Darauf teilen wir mit dem, was übrig bleibt (heller Teil), in das Produkt des miqjâs und des ẓill as-sullam. Das Ergebnis der Division vermehren wir um 12, und die resultierende Summe ist der Betrag des ebenen Schattens. Oder aber: wir teilen mit dem hellen Teil in 144, dann kommt ebenfalls der horizontale Schatten heraus."

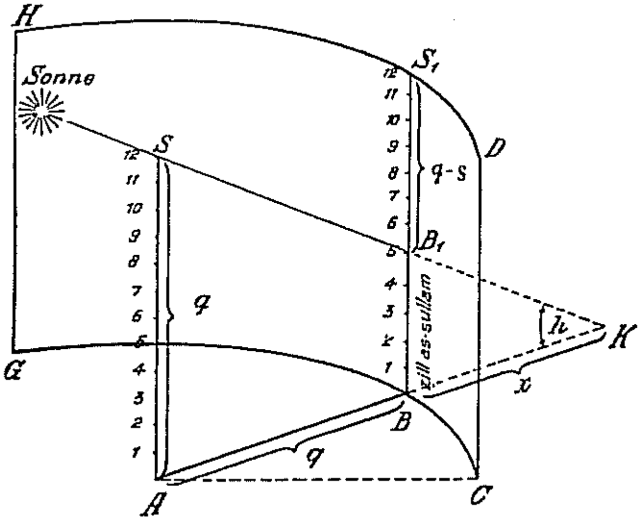


Abb. 2.

Abb. 2 soll den Sachverhalt näher erläutern: $AS = q$ ist der erste miqjâs, um dessen Fuß A der Kreis(bogen) GBC beschrieben ist. Bei der Sonnenhöhe h wirft AS den ebenen Schatten AK, der den Kreisumfang in B durchsetzt. Hier ist der zweite miqjâs $BS_1 = q$ (12 Teile) errichtet, und sein unterer Abschnitt $BB_1$ wird vom Schatten des ersten miqjâs verdunkelt. Dieser Teil heißt ẓill as-sullam. Sein Betrag sei $= s$ Teile. Der obere Abschnitt $B_1S_1$, der in der Sonne ist, hat dann die Länge q—s. Nun liest man aus den beiden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken SAK und $B_1BK$, falls man zur Abkürzung die Strecke BK noch mit x bezeichnet, sofort die Proportion ab:

$$s : x = q : (q + x),$$

woraus folgt:

$$x = \frac{q \cdot s}{q - s} = \frac{q \cdot \text{dunkler Teil}}{\text{heller Teil}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V)}$$

Damit wird:

$$AK = x + q = x + 12 \text{ Teile, q. e. d.}$$

Zu Abb. 2 sei noch bemerkt, daß ich den zweiten miqjâs durch eine zylindrische Wand als (konkave) Auffangfläche für den Treppenschatten ersetzt habe, wodurch dieser auch in jedem anderen Augenblick abgemessen werden kann, wo der Schatten des ersten miqjâs nicht gerade auf den zweiten miqjâs fällt. Sonst muß man annehmen, daß al-Bîrûnî den letzteren in der Kreisperipherie sich als beweglich dachte. Der weiteren Vorschrift des Textes liegt die Formel IV zu Grunde:

$$m = \frac{q^2}{n},$$

denn n ist in diesem Falle = s.

Gnomonschatten, nach deren Länge man die Tageszeit bestimmte, treten in Tabellenform schon bei den alten Ägyptern auf[1]); sie erfüllten denselben Zweck im alten Griechenland[2]); die Verwendung der Gnomonschatten zur Bestimmung der geographischen Breite und der Ekliptikschiefe kommt bei den Chinesen, Griechen und Indern vor[3]), hingegen scheinen die eigentlichen Schattentafeln, wo jeder beliebigen Sonnenhöhe in der Tabelle der zugehörige Schatten gegenübersteht (bâ'zâ'), eine Schöpfung der Araber zu sein. Vermutlich wurden sie bei der liebevollen Pflege der Sonnenuhrkunde durch die Berechnung der Schattenlänge, die dem Sonnenzeiger bei dem wechselnden Stand der Sonne entsprach, ganz von selbst darauf geführt, die Schattenlängen den Sonnenhöhen zuzuordnen, d. h. eine Schattentafel (ğedwal aẓ-ẓill) zu erstellen. Wer die erste Schattentafel bei den Arabern berechnet hat, wissen wir nicht. Als der älteste Astronom, dessen zîğ (astronomisches Tafelwerk) eine kleine Kotangententabelle (Horizontalschatten) enthält, wird gewöhnlich Muḥammed b. Mûsâ al-Ḫwârizmî angesehen, dessen Lebenszeit wir zwar nicht genau kennen, der aber zu den Astronomen des Chalifen al-Ma'mûn gehörte (Chalife von 813—833). Indessen basiert unsere Kenntnis dieses zîğ nicht auf den Originaltafeln, sondern nur auf einer lateinischen Übersetzung einer späteren arabischen Umarbeitung dieser Tafeln durch den spanisch-arabischen

---

[1]) Vgl. E. von Bassermann-Jordan, Die Geschichte der Zeitmessung und der Uhren, Bd. I, Lieferung B; Altägyptische Zeitmessung von L. Borchardt, Berlin 1920, S. 27.

[2]) Vgl. G. Bilfinger, Die Zeitmesser der antiken Völker, Stuttgart 1886, S. 16.

[3]) Vgl. C. Schoy, Die geschichtliche Entwicklung der Pohlhöhebestimmungen bei älteren Völkern, Hamburg 1911, S. 5, 7, 13.

Astronomen Maslama b. Aḥmed al-Mağrīṭī († 1007/08), welche Übersetzung von Athelhard von Bath stammt, und die wohl zwischen 1143 und 1150 ausgeführt worden sein mag . . . „Es ist keineswegs unmöglich, ja sogar nicht unwahrscheinlich, daß diese Kotangententafel sich nicht in dem ursprünglichen Werke Khwârizmî's befunden habe, sondern erst von Maslama in seine Bearbeitung aufgenommen worden sei . . .", sagt der Herausgeber H. Suter selbst[1]). Somit dürften — entgegen den etwas weitgehenden Folgerungen, die A. Björnbo zugunsten der Priorität Ḫwārizmī's zieht[2]) — die uns erhaltenen Tafeln dieses Astronomen in diesem Punkte nur mit großer Reserve zur Diskussion zugelassen werden. Auf sicherem Boden stehen wir erst mit Ḥabaš al-Ḥāsib al-Merwazī, der ebenfalls zur Zeit al-Ma'mūns und al-Mo'taṣims Astronom in Bağdād war und hochbetagt zwischen 864 und 874 starb[3]). Von seinen astronomischen Tafeln finden sich 168 Blätter in der Staatsbibliothek zu Berlin (Wetzstein I, 90) als „Kitāb al-Ḥabaš al-Ḥāsib". Dies schöne Buch, das eine deutsche Bearbeitung verdiente, habe ich näher eingesehen[4]). Die Seiten 80b—88a handeln von der Berechnung der Sinus und enthalten Sinustabellen, in welche auch mehrere Schattentafeln eingestreut sind. Die Ermittlung des Schattens aus der Sonnenhöhe wird S. 97b und die inverse Aufgabe S. 97b—98a gelehrt.

Um die den einzelnen Höhengraden der Sonne zugehörigen Schattenlängen berechnen zu können, bedarf man, wie die Formeln I und II zeigen, einer Sinustafel. Diese fehlt natürlich in keinem zīğ. Vorgerechnete Beispiele für die Bestimmung des Schattens aus der Sonnenhöhe h bei gegebener Einteilung des miqjās q, findet man in den Ḥākimitischen Tafeln des Ibn Yûnus[5]), und ich führe 2 numerische Beispiele daraus an, allerdings unter Umgehung des weitschweifigen Textes.

Beispiel für den Horizontalschatten. $(h = 40^{0}; q = 60^{p})$

$$\sin h = 38^{p}\ 34'\ 2''; \quad \cos h = 45^{p}\ 57'\ 46''$$

$$1)\ q \cdot \cos h = 45\ 57^{p}\ 46'; \qquad q \cdot \frac{\cos h}{\sin h} = 71^{p}\ 30'\ 20'' = m$$

$$2)\ \frac{\cos h}{\sin h} = 1^{p}\ 11'\ 30''\ 20'''; \ q \cdot \frac{\cos h}{\sin h} = 71^{p}\ 30'\ 20'' = m$$

$$3)\ \frac{q}{\sin h} = 1^{p}\ 33'\ 20''\ 37'''; \ q \cdot \frac{\cos h}{\sin h} = 71^{p}\ 30'\ 20'' = m.$$

---

[1]) Die astronomischen Tafeln des Muḥ ibn Mûsâ al-Khwârizmi v. H. Suter, Kobenhavn 1914, S. 77.

[2]) All-Chwarizmi's Trigonometriske Tavler v. A. Björnbo. Festskrift til H. G. Zeuthen, Kobenhavn 1909, S. 16 ff.

[3]) H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. Leipzig 1900, S. 12 ff. (Ḥabaš al-Ḥāsib soll über 100 Jahre alt geworden sein.)

[4]) Das arab. Mscr. 922 im Escorial enthält ebenfalls die astron. Tafeln des Ḥabaš al-Ḥâsib. Leider habe ich diese Schrift noch nie gesehen.

[5]) a. a. O. S. 243.

### Beispiel für den Vertikalschatten

[az-ẓill al-ma'tariḍ = Querschatten]

$h = 30^0$; $q = 60^p$; $\sin h = 30^p$; $\cos h = 51^p\ 57'\ 41''\ 29'''$

1) $q \cdot \sin h = 1800$; $q \cdot \frac{\sin h}{\cos h} = 34^p\ 38'\ 28'' = n$

2) $\frac{\sin h}{\cos h} = 34'\ 38''\ 28'''$; $q \cdot \frac{\sin h}{\cos h} = 34^p\ 38'\ 28'' = n$

3) $\frac{q}{\cos h} = 1^p\ 9'\ 16''\ 55'''$; $q \cdot \frac{\sin h}{\cos h} = 34^p\ 38'\ 28'' = n$.

Falls $q = 12$ Finger ($12^f$) ist, so hat man vorstehende Schattenlängen durch 5 zu dividieren. Der Autor lehrt für diese Zahl:

$$m = 14^f\ 18'\ 4'' \text{ und } n = 6^f\ 55'\ 42'',$$

wo die ' und " die 60. Teile ihrer vorhergehenden Stellenwerte sind.

Man sollte erwarten, daß die arabischen Astronomen bei der umgekehrten Aufgabe, der *Ermittlung der Sonnenhöhe aus dem Schatten*, von den aus I und II hervorgehenden Formeln $m : q = \text{cotg}\, h$ und $n : q = \text{tang}\, h$ Gebrauch gemacht hätten. Aber dazu hätten sie einer *wirklichen* Kotangens- oder Tangenstafel bedurft, die sich von ihrer Schattentafel insoferne unterschieden haben würde, als die Schatten m und n hätten 60 oder 12 mal kleiner sein müssen; oder kürzer gesagt: *Es hätte $q = 1$ sein müssen.* Diese Vereinfachung hat *al-Bîrûnî* tatsächlich erreicht[1]). Damit lautet die diesbezügliche Bîrûnî'sche Vorschrift: „Wenn wir den (Höhen-)Winkel wissen wollen, der zu einem gegebenen Schatten gehört, so multiplizieren wir den Schatten mit 5', oder (was dasselbe ist) teilen ihn durch 12, indem wir, falls das möglich ist, jeweils 60' zu ganzen Schattenteilen machen. Dann gehen wir mit dem erhaltenen Betrag des Schattens in die Tafel ein und nehmen das, was an Bogen diesem Betrag gegenübersteht; den Bogen ziehen wir von 90° ab; der Rest ist die gesuchte Höhe. Und falls vom Schatten ein Rest übrig blieb, so teilen wir damit in die (in der Tafel) gegenüberstehende Differenz, und was wir finden, zählen wir zu dem erlangten Bogen. Dann ziehen wir das Ganze von 90° ab; es bleibt die Höhe, und sie ist der Bogen jenes Schattens.“ Man erkennt aus dieser Vorschrift, daß *al-Bîrûnî* einen 12er Schatten auf den eines miqjâs mit der Einheit als Länge transformiert, mit dem seine Tafel der Vertikalschatten gerechnet ist (a. a. O. S. 78a und 78b). Andere Astronomen aber erwähnen die Kenntnis der Höhe aus dem Schatten, mittels der Schattentafel, nur nebenbei; sie lehren statt

---

[1]) al-Qânûn usw. S. 78a. Ob Abû'l-Wafâ' († 998) auch trigonometrische Tafeln mit $q = 1$ hatte, läßt sich nicht sicher ausmachen; da die trigonometrischen Tafeln im Almagest des trefflichen Mathematikers fehlen.

dessen für die praktische Berechnung der Höhe aus dem Schatten eine Formel, in welcher die Sinusfunktion auftritt, nämlich:

$$\sin h = \frac{q}{\sqrt{q^2 + m^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{VI)}$$

Dies hatte seinen Grund wohl in dem Bestreben, jeden zu berechnenden Ausdruck tunlichst der Sinustafel zu adaptieren. In VI tritt ein der arabischen Mathematik eigentümlicher Begriff auf: Der Schattendurchmesser, (quṭr aẓ-ẓill) der mit der Hypotenuse des Schattendreiecks ASB (Abb. 1a) identisch ist. Dieser Durchmesser war also bei Anwendung von VI erst zu berechnen. Bei Ibn Yûnus findet sich dafür folgendes Zahlenbeispiel[1])

$$m = 50^p\ 40'\ 30'' = 182400''; \ q = 60^p = 216000''$$

$$d = \sqrt{q^2 + m^2} = \sqrt{33280704900 + 46656000000} = 282731'' = 73^p\ 32'\ 51''$$

Nun steht in der arabischen Sinustafel nicht der reine Sinuswert,[2]) sondern das Produkt aus dem Sinus und dem Radius (q), der gleich dem sinus totus ist. Also statt sin h findet man in der Tafel den Wert für q · sin h. Daher ist statt VI zu schreiben:

$$q \cdot \sin h = \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + m^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{VII)},$$

und wir erhalten mit obigen Zahlen:

$$q \cdot \sin h = \frac{3600}{73^p\ 32'\ 51''} = 45^p\ 50'\ 19'',$$

was einem Winkel $h = 49^0\ 48'\ 58''$ entspricht[3]).

Für solche Höhenberechnungen wäre zweifellos eine Tafel der Schattendurchmesser von Nutzen gewesen; denn es ist nach VI:

$$d = \frac{q}{\sin h} = \frac{1}{\sin h} = \operatorname{cosec} h \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{VIII)},$$

falls man $q = 1$ setzt. Es entspricht also nach VIII jeder Sonnenhöhe h ein gewisser Wert d. Es ist auffallend, daß sich Tafeln für den Schattendurchmesser bis jetzt in keinem arabischen zîǧ nachweisen lassen außer in dem von al-Ḥabaš al-Ḥâsib[4]). Aber auch da ist die Tabelle

---

[1]) a. a. O. S. 244.

[2]) Dieser findet sich jedoch bei al-Bîrûni (al-Qânûn usw. S. 72a—74b).

[3]) Von Ibn Yûnus gibt es eine Sinustafel (Mscr. Landberg 1088, Berlin), die alle Sinuswerte von 0°—90° enthält und dabei von Minute zu Minute fortschreitet. Sie liegt bei mir in deutscher Reinschrift vor und umfaßt 90 Blätter.

[4]) Berliner Exemplar S. 86v und 88v.

lückenhaft: sie enthält die Werte der d nur für h von 0°—30° und von 60°—90°. Ich lasse dies Unikum unverkürzt nachstehend folgen.

| h | Schattendurchmesser | | | h | Schattendurchmesser | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | p | ′ | ″ | ° | p | ′ | ″ |
| 1 | 57 | 40 | 40 | 61 | 1 | 8 | 37 |
| 2 | 28 | 39 | 20 | 62 | 1 | 7 | 57 |
| 3 | 19 | 6 | 30 | 63 | 1 | 7 | 21 |
| 4 | 14 | 23 | 24 | 64 | 1 | 6 | 45 |
| 5 | 11 | 28 | 25 | 65 | 1 | 6 | 12 |
| 6 | 9 | 34 | 11 | 66 | 1 | 5 | 41 |
| 7 | 8 | 52 | 22 | 67 | 1 | 5 | 11 |
| 8 | 7 | 51 | 7 | 68 | 1 | 4 | 43 |
| 9 | 6 | 23 | 13 | 69 | 1 | 4 | 18 |
| 10 | 5 | 45 | 32 | 70 | 1 | 3 | 52 |
| 11 | 5 | 14 | 27 | 71 | 1 | 3 | 29 |
| 12 | 4 | 48 | 35 | 72 | 1 | 3 | 5 |
| 13 | 4 | 26 | 43 | 73 | 1 | 2 | 45 |
| 14 | 4 | 8 | 1 | 74 | 1 | 2 | 25 |
| 15 | 3 | 51 | 7 | 75 | 1 | 2 | 7 |
| 16 | 3 | 37 | 41 | 76 | 1 | 1 | 50 |
| 17 | 3 | 25 | 13 | 77 | 1 | 1 | 34 |
| 18 | 3 | 14 | 10 | 78 | 1 | 1 | 21 |
| 19 | 3 | 4 | 18 | 79 | 1 | 1 | 8 |
| 20 | 2 | 55 | 27 | 80 | 1 | 0 | 55 |
| 21 | 2 | 47 | 26 | 81 | 1 | 0 | 45 |
| 22 | 2 | 40 | 10 | 82 | 1 | 0 | 35 |
| 23 | 2 | 33 | 34 | 83 | 1 | 0 | 27 |
| 24 | 2 | 27 | 18 | 84 | 1 | 0 | 20 |
| 25 | 2 | 21 | 57 | 85 | 1 | 0 | 13 |
| 26 | 2 | 16 | 52 | 86 | 1 | 0 | 9 |
| 27 | 2 | 12 | 10 | 87 | 1 | 0 | 4 |
| 28 | 2 | 7 | 48 | 88 | 1 | 0 | 2 |
| 29 | 2 | 3 | 48 | 89 | 1 | 0 | 1 |
| 30 | 2 | 0 | 0 | 90 | 1 | 0 | 0 |

Aus dieser Tafel erkennt man, daß al-Ḥabaš al-Ḥâsib die Länge des miqjâs = 1 setzt, während er in den Schattentafeln q = 60p annimmt. Statt der Bezeichnung ağzâ' = partes findet man bei al-Ḥabaš (und auch bei an-Nairîzî) den Ausdruck darağ = Treppe, Leiter, Grad. Doch habe ich für die Längen der Schattendurchmesser partes gewählt.

## II. Der saṭr ʿadd al-qusîj (Kolumne der Gradzahl). Genauigkeit der trigonometrischen Funktionswerte. Das Interpolationsverfahren des Abû'l-Rîḥân al-Bîrûnî.

Eine Schattentafel setzt sich aus den 2 integrierenden Bestandteilen: Gradzahl der Sonnenhöhe (saṭr ʿadd al-qusîj) und Betrag der Schattenlängen (al-aẓlâl) zusammen, was 2 Kolumnen ausfüllt. Mitunter tritt noch eine dritte Kolumne auf: Die Differenzen (al-fuḍûl) der Schatten, so bei Abû'l-Wafâ', al-Bîrûnî, Ulûġ Beg u. a., ja bei al-Bîrûnî kommt noch eine vierte Kolumne vor: nämlich die zweiten Schattendifferenzen (Differenzen der fuḍûl = at-taʿâdîl = die Ausgleichen). Die frühesten arabischen Schattentafeln wiesen in dem saṭr ʿadd al-qusîj die Zahlen der fortlaufenden ganzen Grade auf. Aber mit den Fortschritten, welche die arabische Trigonometrie bald zu verzeichnen hatte, verfeinerte sich auch die Staffelung der Intervalle bezüglich der Sonnenhöhe. So schritt der ǧedwal aẓ-ẓill des Abû'l-Wafâ' von $^1/_4$ ° zu $^1/_4$ ° im Höhenwinkel fort, und in den Ḥâkimitischen Tafeln findet sich das Intervall zwischen 2 ganzen Graden bereits in 6 gleiche Teile geteilt[1]. Nach der Überschrift des arabischen Manuskripts 924, Escorial: „Kitâb as-samt w'aẓ-ẓill l'Ibn Yûnus maḥlûl daqîqatan daqîqatan" (Azimut- und Schattenbuch des Ibn Yûnus, gelöst [ausgeführt] von Minute zu Minute) muß man auf die ehemalige Existenz einer Schattentafel des Ibn Yûnus schließen, die von Bogenminute zu Bogenminute fortschritt. Leider enthält die Handschrift 924 diese Tafel nicht mehr. Minutenweises Fortschreiten bis zum 45 ° der Sonnenhöhe und von da ab in Intervallen von $^1/_{12}$ ° zu $^1/_{12}$ ° weist die (Vertikal-)Schattentafel des Ulûġ Beg auf[2], während wir in der ganz ähnlichen Tafel des Naṣîr ad-dîn aṭ-Ṭûsî († 1274) durchweg das Intervall des $^1/_{12}$ ° antreffen[3].

Die Genauigkeit der Schattenlängen hängt naturgemäß von der Güte der Sinustafel ab, die dem Rechner zu Gebote stand. Auch hierbei tritt der allmähliche Fortschritt in der erreichten Genauigkeit klar zutage. Da die Ptolemäische Sehnentafel die Sehnen der Kreisbögen, die sie unterspannen, in partes (p) minutae (ʹ) und sekundae (ʺ), d. h. bis zur 6. Dezimale nach dem Komma richtig gibt[4], so ist auch bei den ersten arabischen Astronomen keine geringere Genauigkeit zu erwarten. Dies bestätigen die Sinustafeln des al-H̱wârizmî[5] und des

---

[1] a. a. O. S. 248ff.

[2] Diese ungemein genaue Tafel, von der ich später noch näher handeln werde, habe ich bis zu 45 ° aus dem pers. Mscr. 980, Berlin, ausgeschrieben (S. 86$^{a}$—40$^{a}$).

[3] Pers. Mscr. 181, Berlin (ziǧ il-ḫâni, S. 105).

[4] Natürlich ist dabei ein Wert von mehr als 80 Tertien auf eine Sekunde erhöht, und ebenso ein Betrag von weniger als 80 Tertien unterdrückt.

[5] H. Suter: Die astronom. Tafeln usw., S. 169ff.

**al-Battânî**[1]), während die Schattentafeln beider Astronomen sich auf ganze Finger und deren Sechzigstel beschränken. Diese Abkürzung ergibt sich nach den Sinustafeln der Autoren mit Notwendigkeit. Folgerichtig treffen wir in den Ḥâkimitischen Tafeln des **Ibn Yûnus** zu der Sinustafel, welche noch die Tertien umfaßt[2]), eine entsprechende Schattentafel, die mit den Sekunden der Schattenlängen abschließt[3]). Eingehender habe ich die Schattentafel des **Ulûġ Beg** untersucht, und ich gebe nachstehend eine Anzahl Werte des Autors. Dieselben sind in der zweiten Kolumne in das Dezimalsystem umgerechnet. Daneben stehen zum Vergleich die Abweichungen von den wahren Werten. Gerne und dankbar erwähne ich hierbei der freundlichen Unterstützung durch Herrn Professor A. **Wedemeyer** (Berlin), der mir hier, wie auch in der Behandlung der Aufgaben am Schluß dieser Abhandlung, zu sicheren numerischen Resultaten verhalf.

| Höhe | | Vertikalschatten im Sexagesimalsystem | | | | | | Vertikalschatten im Dezimalsystem | Wahrer Wert |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ′ | ε | p | ′ | ″ | ‴ | IV | | |
| 1 | 0 | — | 1 | 2 | 50 | 17 | 38 | 0·017455065 | 0·017 455 064 |
| 4 | 7 | — | 4 | 40 | 9 | 55 | 6 | 0·077823697 | 696 |
| 11 | 53 | — | 12 | 37 | 32 | 43 | 16 | 0·210429365 | 364 |
| 14 | 5 | — | 15 | 3 | 8 | 39 | 31 | 0·250873420 | 419 |
| 17 | 30 | — | 18 | 55 | 4 | 32 | 18 | 0·315298789 | 789 |
| 20 | 40 | — | 22 | 37 | 56 | 1 | 25 | 0·377203813 | 813 |
| 24 | 19 | — | 27 | 6 | 43 | 23 | 27 | 0·451867550 | 550 |
| 30 | 54 | — | 35 | 54 | 33 | 20 | 0 | 0·598487654 | 654 |
| 35 | 7 | — | 42 | 11 | 41 | 13 | 45 | 0·703246431 | 431 |
| 39 | 19 | — | 49 | 8 | 18 | 54 | 4 | 0·818976394 | 394 |
| 42 | 25 | — | 54 | 49 | 10 | 21 | 19 | 0·913659052 | 052 |
| 75 | 0 | 3 | 43 | 55 | 22 | 28 | 28 | 3·732050808 | 808 |
| 81 | 30 | 6 | 41 | 28 | 9 | 44 | 51 | 6·691156239 | 239 |
| 87 | 20 | 21 | 28 | 13 | 26 | 37 | 26 | 21·470401046 | 039 |
| 88 | 0 | 28 | 38 | 10 | 30 | 42 | 33 | 28·636253281 | 283 |
| 89 | 0 | 57 | 17 | 23 | 51 | 42 | 44 | 57·289961633 | 630 |
| 89 | 35 | 137 | 30 | 26 | 48 | 29 | 58 | 137·504446757 | 754 |

$\varepsilon$ = marfûʿ = erhöht = 60 partes.

Leider ist der Schatten von 89° 55′, der letzte Wert in der Tafel des

---

[1]) C. A. **Nallino**: Al-Battânî sive Albatenii Opus astronomicum, II. Teil, Mailand 1907, S. 55.

[2]) a. a. O. Kap. X, S. 216 ff. Die Photographien dieses interessanten Kapitels, das vom Sinus handelt, und das ich bald zu veröffentlichen gedenke, verdanke ich einer gütigen materiellen Unterstützung des Herrn Prof. G. **Eneström** in Stockholm.

[3]) Bei **al-Ḥabaš** enthält sowohl die Sinus- als auch die Schattentafel die Sekunden. Ich habe seine Schattentafel mit der des **Ulûġ Beg** verglichen und durchweg richtige Werte auch in den Sekunden gefunden.

Ulûġ Beg, ziemlich unleserlich. Er müßte nach Wedemeyer den Wert haben:

$$11\ 27_s\ 32_p\ 55'\ 59''\ 22'''\ 42^{IV}\ 40^{V},$$

statt dessen steht etwa da:

$$11\ 27_s\ 32_p\ 55'.47''\ 1'''\ 14^{IV}.$$

Wir sehen somit die arabische Trigonometrie zur Zeit des Ulûġ Beg († 1449) im Besitze von trigonometrischen Tafeln, deren Genauigkeit weit über jene hinausging, die damals durch die sorgfältigste Beobachtung erreicht werden konnte.

Besonderes Interesse bietet die Schattentafel von al-Bîrûnî, die, wie schon erwähnt, auch die zweiten Differenzen (Ausgleiche) der Schatten enthält. Die Tafel schreitet nach ganzen Graden der Sonnenhöhe fort, steht also in dieser Hinsicht für jene Zeit nicht auf der Höhe. Dafür lehrt aber Bîrûnî ein eigenes Verfahren, wie man mit Hilfe der 1. und 2. Differenzen den Schatten eines Zwischenintervalls berechnen kann. Ich gebe erst ein Spezimen der Bîrûnischen Schattentafel, lasse alsdann den Text seiner Rechenvorschrift folgen und schließe daran die Berechnung der Schattenlänge für die Sonnenhöhe h = 11° 24′ als (von mir gewähltes) numerisches Beispiel an.

| satr ʿadd al-qusij | al-aẓlâl | | | | | al-fuḍûl | | | | | at-taʿâdîl | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | p | ′ | ″ | ‴ | IV | p | ′ | ″ | ‴ | IV | p | ′ | ″ | ‴ | IV |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 50 | 17 | 0 | 1 | 2 | 52 | 36 | 0 | 0 | 0 | 5 | 21 |
| 2 | 0 | 2 | 5 | 42 | 53 | 0 | 1 | 2 | 57 | 57 | 0 | 0 | 0 | 5 | 25 |
| 3 | 0 | 3 | 8 | 40 | 50 | 0 | 1 | 3 | 3 | 22 | 0 | 0 | 0 | 9 | 59 |
| 4 | 0 | 4 | 11 | 44 | 12 | 0 | 1 | 3 | 13 | 21 | 0 | 0 | 0 | 11 | 37 |
| 5 | 0 | 5 | 14 | 57 | 33 | 0 | 1 | 3 | 24 | 58 | 0 | 0 | 0 | 13 | 59 |
| 6 | 0 | 6 | 18 | 22 | 31 | 0 | 1 | 3 | 38 | 57 | 0 | 0 | 0 | 16 | 24 |
| 7 | 0 | 7 | 22 | 1 | 28 | 0 | 1 | 3 | 55 | 21 | 0 | 0 | 0 | 18 | 53 |
| 8 | 0 | 8 | 25 | 56 | 49 | 0 | 1 | 4 | 14 | 14 | 0 | 0 | 0 | 21 | 23 |
| 9 | 0 | 9 | 30 | 11 | 3 | 0 | 1 | 4 | 35 | 37 | 0 | 0 | 0 | 23 | 52 |
| 10 | 0 | 10 | 34 | 46 | 40 | 0 | 1 | 4 | 59 | 29 | 0 | 0 | 0 | 26 | 36 |
| 11 | 0 | 11 | 39 | 46 | 9 | 0 | 1 | 5 | 26 | 5 | 0 | 0 | 0 | 29 | 13 |
| 12 | 0 | 12 | 45 | 12 | 14 | 0 | 1 | 5 | 55 | 18 | 0 | 0 | 0 | 32 | 1 |

Der Autor lehrt nun das Folgende[1]): „Wenn wir den zu einem gegebenen Bogen gehörigen ebenen Schatten wissen wollen, so ziehen wir den Bogen von 90° ab und gehen mit dem Rest in die Linie der Zahl (saṭr al-ʿadd) ein und nehmen das, was an Schatten der Zahl gegenübersteht. Dies multiplizieren wir mit 12, und es ergeben sich die Finger des Schattens. Und wenn für uns ein Rest an Bogen bleibt, so multiplizieren wir ihn mit der ihm gegenüberstehenden Differenz, hierauf mit 12 und zählen das Ergebnis zu dem, was sich für uns als Schatten bereits ergab, die Summe wird der ebene Schatten jenes Bogens sein.

---

[1]) al-Qânûn usw., S. 77b.

Das Genaumachen des Schattens. Wir merken uns den Schatten, genommen für die ganzen Teile des von 90° subtrahierten Bogens. Darauf nehmen wir den gegenüberstehenden Ausgleich, und er ist der Unterschied der vorhergehenden und der gegenüberliegenden Differenz. Was uns an Rest des Bogens bleibt, multiplizieren wir mit diesem Ausgleich und zählen das Ergebnis zu der vorhergehenden Differenz. Dann multiplizieren wir das, was sich hieraus ergab, wiederum mit dem Rest des Bogens und vermehren das Ergebnis um den genommenen Schatten. Und wenn wir das Ganze mit 12 multiplizieren, so erhalten wir den Schatten in Fingern ausgedrückt."

Wir wollen hiernach den Vertikalschatten von $11^0\,24'$ (= Horizontalschatten von $78^0\,36'$) berechnen. Seine Länge sei $= f(x)$. Die Schattenlänge von $11^0$ sei $= f(x_0) = 0^p\,11'\,39''\,46'''\,9^{IV}$. Die dem Schatten $f(x_0)$ vorhergehende Differenz heiße $\Delta_1$; sie ist $= 0^p\,1'\,4''\,59'''\,29^{IV}$; die gegenüberliegende Differenz ist $= 0^p\,1'\,5''\,26'''\,5^{IV}$. Der Unterschied dieser beiden Differenzen ist der gegenüberstehende Ausgleich $\Delta_2 = 0^p\,0'\,0''\,26'''\,36^{IV}$. Der Bogenrest $24'$ sei $= \Delta x$. Dann ist nach al-Bîrûnî:

$$f(x) = f(x_0) + \Delta x \cdot (\Delta x \cdot \Delta_2 + \Delta_1)\text{[1]} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I)}$$

oder nach Potenzen von $\Delta x$ geordnet:

$$f(x) = f(x_0) + \Delta_1 \cdot \Delta x + \Delta_2 \cdot (\Delta x)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ia)}$$

Ausdruck I oder Ia ist also eine Interpolationsformel, welche die zweite Differenz berücksichtigt. Ich habe dergleichen in der arabischen Mathematik kaum je gefunden[2]). Ähnliche Vorschriften gibt Bîrûnî, um aus der Schattenlänge die genaue Sonnenhöhe zu finden. Für unser Zahlenbeispiel ist jetzt:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= 0^p\,11'\,39''\,46'''\,9^{IV} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II)}\\
\Delta x &= 24' = 0{,}4^0\\
\Delta_1 &= 0^p\,1'\,4''\,59'''\,29^{IV}\\
\Delta_2 &= 0^p\,0'\,0''\,26'''\,36^{IV}\\
\Delta x \cdot \Delta_2 &= 10'''\,38 \cdot 4^{IV}\\
\Delta x \cdot \Delta_2 + \Delta_1 &= 0^p\,1'\,5''\,10'''\,7 \cdot 4^{IV}\\
\underline{(\Delta x \cdot \Delta_2 + \Delta_1)\,\Delta x} &\underline{= 0^p\,0'\,26''\,4'''\,3^{IV}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{III)}\\
f(x) &= 0^p\,12'\,5''\,50'''\,12^{IV} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV)}
\end{aligned}$$

Der richtige Wert von $f(x)$ ist nach der Schattentafel des Ulûġ Beg: ($q = 1$ gesetzt) $0^p\,12'\,5''\,53'''\,14^{IV}\,24^{V}$, so daß der nach al-Bîrûnîs Verfahren ermittelte Betrag von $f(x)$ um rund $3'''$ zu klein ausfiel. Dies ist keineswegs verwunderlich: Das Verfahren verlangt die Berücksichtigung von Differenzen höherer Ordnung.

---

[1]) Die moderne (richtige) Interpolationsformel heißt:

$$f(x) = f(x_0) + \Delta x \left(\Delta_1 + \frac{\Delta x - 1}{2} \cdot \Delta_2\right) + \ldots$$

[2]) Eine Vorschrift des Ibn Yûnus, die Werte der Sinus nahe beieinanderliegender Argumente zu berechnen, beruht ebenfalls auf Verwendung der 2. Differenzen (X. Cap. d. Ḥâkim. Tafeln S. 215).

# III. Bedeutung der Schatten ⟨Tangenten oder Kotangenten⟩ in der arabischen Astronomie.

Wie wir bereits bemerkten, adaptierten die arabischen Astronomen ihre Rechenvorschriften tunlichst der Sinustafel. Nur vereinzelt trifft man die Formulierung der trigonometrischen Regel dergestalt, daß die Errechnung der gesuchten Größe das Eingehen in die Schattentafel erfordert. Solche Fälle wollen wir jetzt zur Sprache bringen.

Indem die Araber in die Beziehungen, welche Menelaos in seiner Sphärik für die Sehnen, welche die Kreisbogen in den Kugeldreiecken unterspannen, aufstellte, die Begriffe des Sinus und Schattens einführten, gelangten sie wohl frühzeitig zu ihrer „Tangenten- oder Schattenregel“[1]). A. von Braunmühl bezeichnet diese Regel als eine Erfindung von Abū'l-Wafā'[2]), indessen läßt sich nachweisen, daß sie schon dem 921/22-verstorbenen arabischen Astronomen al-Faḍl ibn Ḥātim an-Nairīzī (Anaritius) bekannt war. Der Inhalt der Regel ist folgender: Wenn die Seite AH des sphärischen Dreiecks AHB von den 2 Großkreisbögen (Meridianen) PH und PU in den Punkten H und U senkrecht durchschnitten wird, so besteht (modern umgeschrieben) die Beziehung:

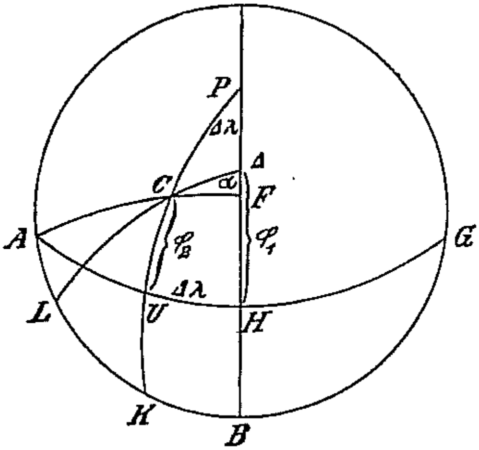


Abb. 3.

tang UK : tang HB = sin AU : sin AH . . . . . . . . . . . I)

---

[1]) Man vergleiche für nähere Details die treffliche Abhandlung von Axel A. Björnbo: „Studien über die Sphärik des Menelaos“ (Abhandlungen z. Geschichte d. math. Wissensch., Leipzig 1900, S. 94.)

[2]) Vorlesungen über Geschichte d. Trigonometrie I, Leipzig 1900, S. 58.

Soweit unsere immer noch sehr lückenhafte Kenntnis der arabischen Mathematik und Astronomie reicht, können wir die Anwendung von I) auf astronomische Fragen bei an-Nairîzî und Abû'l-Wafâ' feststellen, während der Beweis der Regel sich bei Abû'l-Wafâ'[1], al-Bîrûnî[2]) und Naṣîr ad-dîn[3]) findet.

Der Wichtigkeit halber sei hier die Stelle von an-Nairîzî wiedergegeben, wo er mit der Schattenregel operiert[4]). An-Nairîzî stellt sich die Aufgabe, den Azimutwinkel $\alpha$ zu berechnen, den die Blickrichtung von Baġdâd ($\Delta$) nach Mekka (C) mit dem Meridian von Baġdâd bildet, wenn die geographische Breite beider Orte, sowie deren Längenunterschied UH $= \Delta\lambda$ gegeben ist. AUHG ist der Äquator der Erde und AH ein Quadrant. Arc $\Delta H = \varphi_1$ ist die Breite von Baġdâd. Der Autor sucht jetzt zuerst den Bogen UK mittels der Schattenregel I zu ermitteln, die sich in diesem Falle so schreiben läßt:

$$\operatorname{cotg} UK = \frac{\operatorname{tang} \varphi_1 \cdot \sin 90^0}{\cos \Delta\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II)}$$

Nunmehr wäre der Bogen UK in der Schattentafel nachzuschlagen. Aber an-Nairîzî war entweder nicht im Besitze einer solchen — $\operatorname{tang} \varphi_1$ drückt er als $\sin \varphi_1 : \cos \varphi_1$ aus — oder sie war ihm zu ungenau. Denn er transformiert II) in

$$\sin UK = 1 : \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tang} \varphi_1}{\cos \Delta\lambda}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{III)}$$

$$\text{Mit } \sin \varphi_1 = 33^p\ 2'\ 33''\ (\varphi_1 = 33^0\ 25')$$
$$\cos \varphi_1 = 50^p\ 4'\ 54''$$
$$\cos \Delta\lambda = 59^p\ 55'\ 4''\ (\Delta\lambda = 3^0)$$

erhält der Autor aus III:

$$UK = 56^0\ 24'\ 8''\ (\text{richtig ist } UK = 56^0.32'\ 49'').$$

Der weitere Verlauf seiner Rechnungen ist hier nicht von Belang.

Anders bei Abû'l Wafâ'! Ihm stand eine ausreichend genaue Schattentafel zu Gebote, und so gestaltet sich bei ihm die Berechnung des Azimuts der Qibla ($= \sphericalangle \alpha$) — um bei diesem Beispiel zu bleiben — also[5]): Man fälle von A auf den (Mittel)-Meridian von Baġdâd das sphärische Lot AF und setze $UC = \varphi_2$ (Breite Mekkas). Der Autor lehrt:

$$\frac{\operatorname{tang} \varphi_2}{\operatorname{tang} HF} = \frac{\sin (90^0 - \lambda)}{\sin 90^0}, \text{ woraus er folgert:}$$

---

[1]) Von seinem Almagest hat Carra de Vaux im Journ. asiatique 1892, S. 408—71 unter anderem auch die trigonometrischen Partien veröffentlicht, wo sich im 4. Kap. des I. Buches dieser Beweis findet.

[2]) al-Qânûn usw., S. 81b.

[3]) Traité du Quadrilatère attribué à Nassiruddin-el-Toussy, traduit par Alexandre Pacha Carathéodory, Constantinople 1891, S. 169ff.

[4]) In der arab. „Abhandlung von al-Faḍl b. Ḥâtim an-Nairîzî über die Richtung der Qibla". (Mscr. Paris 2457, 17°.) Ich habe den interessanten Traktat in der math.-physikal. Classe der Akademie der Wissensch. zu München, 1922, veröffentlicht. (Übersetzung und Kommentar.) S. 55—69.

[5]) Arab. Mscr. Paris 2494, (Almagest), S. 67v und 67r.

$$\text{tang HF} = \frac{\text{tang } \varphi_2}{\cos \Delta\lambda} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{IV)}$$

Mit $\Delta\lambda = 3^0$; $\varphi_2 = 22^0$ erhält Abû'l Wafâ':

$$\text{tang HF} = 24^p\ 16'\ 29''\ 26'''; \quad \text{HF} = 22^0\ 1'\ 38''\ 9''',$$

wobei er ausdrücklich betont, diesen Wert von HF mittels der Schattentafel gefunden zu haben. Der Autor lehrt ferner:

$$\frac{\text{tang CF}}{\text{tang } \Delta\lambda} = \frac{\cos \text{HF}}{\sin 90^0}, \text{ (im Dreieck PHU)}$$

und er erhält damit:

$$\text{tang CF} = \text{tang } \Delta\lambda \cdot \cos \text{HF} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{V)}$$

Wiederum ermittelt er aus V Bogen CF mit der Schattentafel und findet:

$$\text{tang CF} = 2^p\ 54'\ 13''\ 46'''; \quad \text{CF} = 2^0\ 46'\ 14''\ 54'''$$

Mit Kenntnis von CF vermag der treffliche Mathematiker durch nochmalige Anwendung der Schattenregel den gesuchten Bogen $\text{BL} = \alpha$ zu berechnen. Er lehrt:

$$\frac{\text{tang } \alpha}{\text{tang CF}} = \frac{\sin 90^0}{\sin \Delta \text{F}} \text{ (im Dreieck L} \Delta \text{B)}$$

und zieht hieraus:

$$\text{tang } \alpha = \frac{\text{tang CF}}{\sin \Delta \text{F}} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{VI)}$$

Da $\Delta\text{F} = \varphi_1 - \text{HF} = 33^0\ 25' - 22^0\ 1'\ 38''\ 9''' = 11^0\ 23'\ 21''\ 51'''$, mithin $\sin \Delta\text{F} = 11^p\ 50'\ 55''$ ist, so liefert VI:

$$\text{tang } \alpha = 14^p\ 45'\ 39''\ 13'''$$

Dazu schlägt der Autor in der Schattentafel auf:

$$\alpha = 13^0\ 49'\ 15''\ 55''';$$

gewiß ein recht instruktives Beispiel der Verwendung der Tangensfunktion und Schattentafel bei Abû'l Wafâ', dem sich noch verschiedene andere an die Seite stellen ließen.

Auch Ibn Yûnus lag der Gebrauch der Kotangente nicht ganz ferne, wennschon er die Schattenregel nicht erwähnt. Bei trigonometrischen Beziehungen von der Form:

$$\sin \alpha = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin \text{h}}{\cos \text{h}}$$

bemerkt der Kairinische Astronom, daß man die beiden Quotienten der rechten Seite auch als zwei Schatten deuten könne. Zur Berechnung von $\alpha$ schlägt er alsdann cotg $(90^0 - \varphi)$ und cotang $(90^0 - \text{h})$ in der Schattentafel auf, und ähnliches lehrt er in anderen Fällen[1]); doch sind dabei die Schatten stets gegebene Größen; die Unbekannte ist der Sinus.

Dies die wenigen Quellennachweise zum Gebrauch der Tangenten und Kotangenten in der arabischen Astronomie.

---

[1]) Vgl. den deutschen Text und Kommentar in „Annalen d. Hydrographie usw.“, 1920, S. 98 und 109, 1921, S. 126 und 132, 1922, S. 14 und 20.

# IV. Besondere Schattenprobleme aus den Ḥâkimitischen Tafeln des Ibn Yûnus.

Hier soll von einigen Anwendungen des Schattens des miqjâs auf die Bestimmung der Höhe senkrecht stehender Gegenstände die Rede sein, wie man sie in den Ḥākimitischen Tafeln findet[1]). Ibn Yûnus behandelt 2 verschiedene Fälle:

1. „Im Falle, daß du zum Fuße (Untersten) des Gegenstandes gelangen kannst, während er genau aufrecht steht, stellst du zur Ermittlung seiner Länge eine Marmorplatte auf. Die eine Seite derselben sei vollkommen glatt und von milchweißer Farbe. Nachdem du durch sorgfältiges Nivellieren dich davon überzeugt hast, daß sie ganz eben ist, machst du sie mit Gips oder einer anderen Substanz fest. Und wenn dir keine tadellose Marmorfläche zur Verfügung steht, so genüge dir statt dessen eine Platte aus weichem Stein (kaḏḏān) oder Holz, nachdem sie ganz oder nahezu fehlerfrei ist. Dann nimmst du einen für das Schattenwerfen hergerichteten miqjâs aus Erz oder auch aus Holz, falls dir Erz mangelt. Du greifst seine Länge mit dem Zirkel ab und schlägst mit der unveränderten Zirkelöffnung auf der nivellierten Fläche einen Kreis. Hierauf stellst du diesen miqjâs im Kreismittelpunkt senkrecht auf, wobei du darauf achtest, alles recht genau auszuführen. Du beobachtest die Spitze seines Schattens, bis daß sie auf den Umfang fällt. Und wenn dies eintritt, machst du im Schattenende des Gegenstandes eine Marke. Dann missest du die Entfernung zwischen dem Fußpunkt des Gegenstandes, dessen Länge du wissen willst, und der Marke in irgendeinem Maß: in Spannen, Ellen oder dergleichen.

Und wenn der Gegenstand in seinem Emporragen sich in die Erde (im Boden) ausdehnt, wie ein Gebäude mit Höhe und Länge, indem es einen langen Bau bildet, so fassest du am höchsten Teil desselben eine Stelle ins Auge, die sich durch Hervor- oder Zurücktreten oder durch Farbe unterscheidet. Diese Stelle nimmst du zu einer Marke, und du richtest dein rechtes Auge auf den Rand des Schattens dieses Gebäudes zu jenem Zeitpunkt, und mit geschlossenem linken Auge suchst du zu erreichen, daß diese Marke in genaues Vis à Vis mit der Sonne kommt. Nachdem du so lange vor- und zurückgetreten bist, bis sich dies ergeben hat, missest du die Entfernung von dieser Schattenspitze bis zu jenem Punkt, der Fußpunkt zu der Marke ist. Und was sich ergibt, ist die Länge (Höhe) des Gegenstandes. Es ist notwendig, daß du dies an einer der geeignetsten Stellen, die sich vorfinden, genau ausführst.

Und wenn der augenblickliche Schatten sich nicht soweit verkürzen kann, um gleich der Länge des senkrecht stehenden miqjâs zu werden, dann nimmst du seine doppelte Länge in den Zirkel und beschreibst damit einen Kreis. Du beobachtest jetzt den Gnomonschatten, bis daß seine Spitze auf den Umfang fällt, machst durch eine Marke die Schattenspitze

---

[1]) Leidener Mscr. 143, S. 253 ff.

des Gegenstandes, dessen Höhe du suchst, (für denselben Augenblick) kenntlich und missest die Entfernung zwischen dieser Marke und dem Fuß des Gegenstandes. Was sich ergibt, das ist die doppelte Höhe jenes Gegenstandes. Nimmst du davon die Hälfte, so ist sie die gesuchte Höhe. Und wenn du den Radius des Kreises gleich dem $1\,{}^{1}/_{2}$fachen der Gnomonhöhe machst, so ist das, was sich für dich an Ellen ergibt, das $1\,{}^{1}/_{2}$fache der Höhe des Gegenstandes. Nimm ${}^{2}/_{3}$ davon! Was alsdann herauskommt, das ist die verlangte Höhe. Nimm ${}^{3}/_{4}$, falls der Radius des Kreises das $1\,{}^{1}/_{3}$fache der Gnomonhöhe ist usw.

2. In diesem Falle handelt es sich um die Ermittlung der Höhe eines senkrecht stehenden Gegenstandes aus seinem Schatten, falls letzterer nicht bis zum Fußpunkt des Gegenstandes gezogen werden kann. Dazu nivellierst du die eine Seite der Schattenfläche, bis du sie einwandfrei findest und befestigst alsdann die Platte mit Gips oder etwas anderem, so daß sie dauernd fest hält und sich nicht neigt. Du wählst auf ihr eine Marke für den Mittelpunkt des šaḫṣ; errichtest diesen genau über der Marke und ziehst durch den Mittelpunkt die Mittagslinie. Gleichviel, ob sie mittels des indischen Kreises gezogen ist oder durch Berechnung der Richtung: du richtest deinen Blick auf die sehr ausgeglichene (ebene) Stelle der Platte, auf die der Schatten des aufrecht stehenden šaḫṣ fällt. Mache in dem augenblicklichen Schattenende des šaḫṣ eine Marke und ebenfalls eine solche in der Schattenspitze des aufrecht stehenden Gegenstandes, dessen Höhe du wissen willst. Und es mögen deine Verrichtungen schnell ausgeführt werden. Alsdann hebst du den šaḫṣ weg und ziehst von seiner Schattenspitze nach seinem Mittelpunkte eine gerade Linie: sie werde Linie des Azimuts der Sonne genannt. Wisse den (Winkel) Abstand der Linie des Azimuts von der Mittagslinie. Und nun machst du oftmals eine solche Messung, bis daß du erkennst, daß der Schatten sich deutlich wahrnehmbar verändert hat, diese Veränderung auf den ersten Schatten bezogen. Nivelliere jetzt wiederum die Schattenfläche, befestige sie, wähle eine Marke auf ihr, mache sie zum Mittelpunkt des šaḫṣ und stelle ihn ganz präzise auf dieser Marke auf. Lege durch sie die Mittagslinie und ziehe vom Mittelpunkt des šaḫṣ eine zweite Linie unter einem Winkel zur Nordsüdlinie, der dem Azimut der früheren Linie genau gleichkommt. Nachdem nun der šaḫṣ über seinem Mittelpunkt aufgestellt ist, beobachtest du seinen Schatten so lange, bis daß er genau auf die Linie des Azimuts fällt. Und wenn dies eintritt, machst du die Schattenspitze des šaḫṣ und ebenso jene des stehenden Gegenstandes durch ein Merkmal kenntlich. Jetzt ermittelst du den Unterschied der zwei Schatten des šaḫṣ, die sich bei der ersten und zweiten (letzten) Messung ergaben. Diesen Unterschied setzest du ins Verhältnis zur Länge des šaḫṣ, wobei der Unterschied als Divisor genommen wird. Dann missest du auch den Unterschied der zwei Schatten des Gegenstandes, dessen Höhe du wissen willst. Das was sich hierbei ergibt, multiplizierst du mit der Länge des šaḫṣ und teilst das Produkt durch den Divisor. Was aus der Teilung

hervorgeht, ist die gesuchte Höhe des Gegenstandes, und Allāh leitet zum Richtigen."

Während zum 1. Falle kaum etwas anderes zu bemerken ist, als daß bei dem Vorschlag, den Radius des Kreises $= 2\,q$, $1^1/_2\,q$, $1^1/_3\,q$ usw. zu nehmen, an verschiedene Sonnenhöhen — also hier wohl an solche zur Zeit des Wintersolstitiums, wo die Sonnenhöhe in dem größten Teil des islāmischen Bereiches kleiner als $45^0$ ist — gedacht werden muß, soll zu dem 2. Falle folgende Erläuterung gegeben werden.

Es sei $F\Sigma = q$ ein Gnomon; (Abb. 4) $C_1$ und $C_2$ seien 2 Schattenkurven, welche die Schattenspitze dieses šaḫṣ an 2 verschiedenen Tagen durchläuft. Bei einer gewissen Sonnenhöhe $h_1$ wird der Schatten zur Ostwestlinie den Winkel (Azimut) $\alpha$ bilden[1]. Dann hat er die Länge

$$F\Sigma_1 = m_1 = q \cdot \operatorname{cotg} h_1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{I)}$$

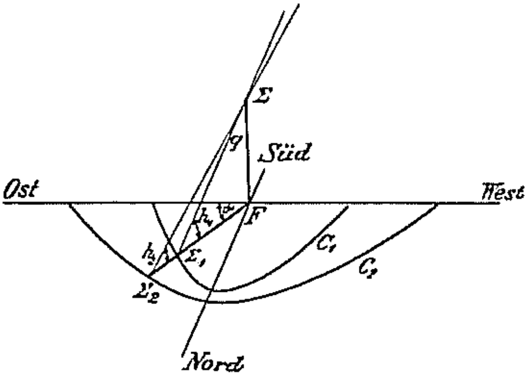


Abb. 4.

Nach einer Reihe von Tagen beschreibe die Schattenspitze die Kurve $C_2$. Fällt alsdann der Schatten des miqjâs wieder in die Richtung $\alpha$, so wird die Sonnenhöhe natürlich eine andere, $h_2$, sein. Dann ist, ähnlich wie in I,

$$F\Sigma_2 = m_2 = q \cdot \operatorname{cotg} h_2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{II)}$$

Die Differenz der 2 Schatten ist mithin:

$$\Delta_1 = F\Sigma_2 - F\Sigma_1 = m_2 - m_1 = q \cdot (\operatorname{cotg} h_2 - \operatorname{cotg} h_1) \; \ldots\ldots \; \text{III)}$$

Ganz analog hat man für einen Gegenstand der Höhe $q_1$:

$$\Delta_2 = \mu_2 - \mu_1 = q_1 \cdot (\operatorname{cotg} h_2 - \operatorname{cotg} h_1) \; \ldots\ldots\ldots \; \text{IV)}$$

Dividiert man jetzt IV durch III, so folgt

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{q_1}{q},$$

und hieraus

$$q_1 = q \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \text{ q. e. d.}$$

---

[1] Bei den Arabern war die Zählung des Azimuts von der Ostwestlinie aus üblich.

Wie schon eingangs dieser Studie erwähnt wurde, hat **Ibn Yûnus** zuerst dargetan, daß die Schattenlänge eines Stabes die Höhe des oberen Sonnenrandes und nicht die des Sonnenmittelpunktes gibt. Soll daher die durch Schattenmessung gewonnene Sonnenhöhe mit der durch ein Instrument beobachteten übereinstimmen, so ist nach des Autors Vorschrift von der ersten Sonnenhöhe der halbe Durchmesser der Sonnenscheibe abzuziehen.

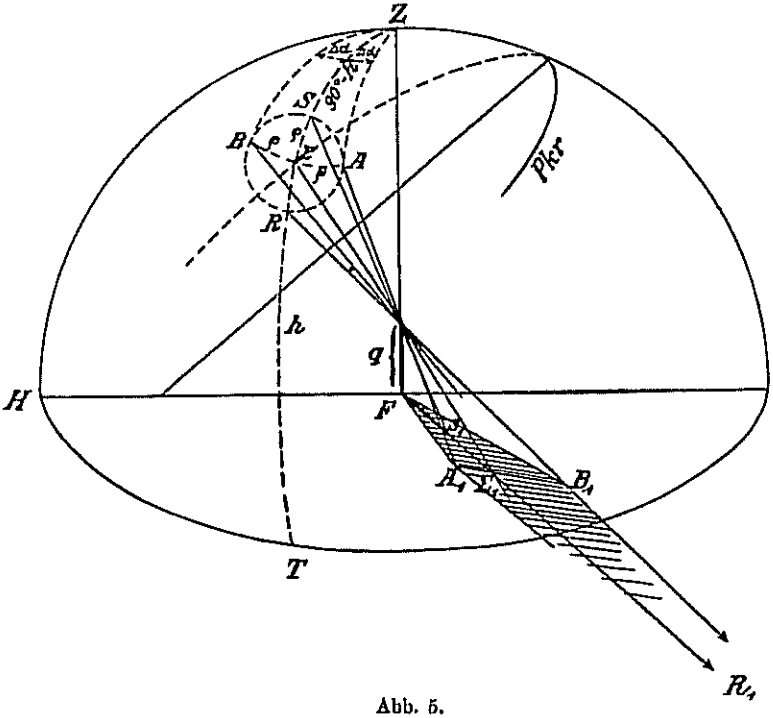


Abb. 5.

In Abb. 5 sei $\Sigma$ der Mittelpunkt und S der obere Rand der Sonnenscheibe. Beide Punkte sind um den Radius $\varrho$ voneinander entfernt, der bei der Sonne durchschnittlich 15′·5 beträgt. In F stehe ein Gnomon der Höhe q senkrecht auf dem Horizont $HTH_1$. Punkt Z ist das Zenit. Dann ist, wie man leicht sieht, die Strecke $FS_1$ der volle Schlagschatten des Gnomons, während längs des Abschnitts $S_1\Sigma_1$ allmähliche Aufhellung des Schattens eintritt; denn die einzelnen Punkte der Strecke $S_1\Sigma_1$ entsprechen Sonnenpunkten, die zwischen dem oberen Sonnenrande S und dem Mittelpunkt $\Sigma$ liegen; das Stück $\Sigma_1 R_1$ ist dem unteren Sonnenradius $\Sigma R$ zugeordnet. Somit ist die Ausdehnung des „Halbschattens der Höhe“

$$H = S_1 R_1 = q \cdot [\operatorname{cotg}(h - \varrho) - \operatorname{cotg}(h + \varrho)] = q \cdot \frac{\sin 2\varrho}{\sin^2 h - \sin^2 \varrho} \quad \ldots \quad \text{I)}$$

falls man unter h die Höhe des Sonnenmittelpunktes $\Sigma$ versteht.

Im 26. Kapitel der Ḥâkimitischen Tafeln[1]), wo **Ibn Yûnus** von der Berechnung des Schattens handelt, den ein quer gerichteter Gnomon auf das Zifferblatt einer vertikalen Sonnenuhr wirft, bemerkt er, daß bei der Sonnenhöhe $h = 0^0$ die Morgenweite um den Radius der Sonnenscheibe zu vermehren sei. Hierdurch ist der Halbschatten in der Breite (im Azimut) angedeutet, den wir „lateralen Halbschatten" nennen und mit M bezeichnen.

1. Es ist von Interesse, den Betrag von H für den Augenblick der größten Mittagshöhe der Sonne in Kairo zu ermitteln. Diese ist zu Beginn des Krebses $= 83^0\,35'$, falls man mit **Ibn Yûnus** die Ekliptikschiefe zu $23^0\,35'$ annimmt. Die Formel I liefert alsdann mit einem Gnomon $q = 10$ cm den verschwindend kleinen Wert:

$$H = 0 \cdot 913165 \text{ mm.}$$

2. In Abb. 5 sind vom Zenit Z zwei Vertikalkreise gezogen, welche die Sonnenscheibe in den Punkten A und B berühren. Sie schließen beim Zenit einen Winkel $2\alpha$ ein, der gleich dem Azimutunterschied der zwei äußersten Sonnenpunkte A und B ist. Zur Berechnung dieser Differenz sei vom Sonnenmittelpunkt $\Sigma$ das sphärische Lot $\Sigma A$ oder $\Sigma B = \varrho$ auf den Großkreisbogen $ZA$ oder $ZB$ gefällt. Die zwei rechtwinkligen sphärischen Dreiecke: $ZA\Sigma$ und $ZB\Sigma$ haben natürlich dieselben Seiten und Winkel. Die Lichtstrahlen von den zwei äußersten Sonnenpunkten A und B liefern auf dem Horizonte die zwei Punkte der lateralen Schattengrenze: $A_1$ und $B_1$, und es stellt das ebene Dreieck $A_1 F B_1$ den gesamten lateralen Halbschatten (M) dar. In der Abb. 5 liegen die Punkte $A_1\,\Sigma_1\,B_1$ in einer geraden Linie, was, streng genommen, nicht ganz korrekt ist, da $A\Sigma$ und $\Sigma B$ zwei Einzelbogen sind und $\sphericalangle A\Sigma B$ nicht genau $180^0$ ist. Doch ist der dabei begangene Fehler bei so kleinem $\varrho$ verschwindend klein. Man liest aus der Zeichnung sofort ab:

$$\sin \varDelta\alpha = \frac{\sin \varrho}{\cos h} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II)}$$

$$M = q \cdot \operatorname{tang} \varDelta\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{III)}$$

Für $\varrho = 15' \cdot 5$ und $h = 83^0\,35'$ folgt aus II:

$$\varDelta\alpha = 2^0\,18'\,44''$$

und damit aus III:

$$M = 0 \cdot 040377 \cdot q = 4 \cdot 0377 \text{ mm, falls } q = 10 \text{ cm ist.}$$

Der Halbschatten M verbreitert sich also bei dieser Sonnenhöhe um mehr als das Vierfache des Halbschattens H[2]). Formel II verliert ihre Gültigkeit, wenn $h = 90^0 - \varrho = 89^0\,45'$ ist.

---

[1]) Mscr. der Bodleyana (Oxford): Huntington 331, S. 60v.

[2]) Trotzdem sind, wie mir Herr Dr. M. **Meyerhof**, Kairo, brieflich mitteilt, die Schatten in Asuân, selbst zur Zeit des Wintersolstitiums, bei Sonnenkulmination messerscharf und ohne Spur eines Halbschattens. Dieser letztere wird auch auf der photographischen Platte, wohl infolge der großen Stärke des Tageslichtes, nicht sichtbar.

3. Es läßt sich jetzt die Frage stellen: Welche Zeit vergeht, bis der laterale Halbschatten über die Mittagslinie hinweggestrichen ist? Das astronomische Dreieck: Zenit-Pol-Sonne gestattet sofort folgende Gleichung abzulesen:

$$\sin\varphi\cdot\cos\varDelta a=\cos\varphi\cdot\operatorname{tang}\mathrm{h}-\sin\varDelta a\cdot\operatorname{cotg}\mathrm{s}\quad\ldots\ldots\ldots\quad \mathrm{IV)}$$

worin $\varphi$ die Ortsbreite und s der Stundenwinkel ist, der der Hälfte der gesuchten Zeit entspricht. Mit $\varphi=30^0$; $\mathrm{h}=83^0\ 35'$; $\varDelta\ a=2^0\ 18'\ 44''$ liefert IV:

$$\mathrm{s}=0^0\ 19'\ 15''.$$

Verdoppelt man s, so entspricht dem Stundenwinkel 2 s die verlangte Zeit:

$$\mathrm{t}=2^{\mathrm{m}}\ 34^{\mathrm{s}}.$$

4. Man kann weiterhin fragen: Bei welcher Sonnenhöhe h ist H = M? — Die Bedingungsgleichung hierfür lautet:

$$\frac{2.\sin\varrho\cdot\cos\varrho}{\sin^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho}=\frac{\sin\varrho}{\sqrt{\cos^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \mathrm{V)}$$

indem aus II $\operatorname{tang}\varDelta a=\dfrac{\sin\varrho}{\sqrt{\cos^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho}}$ folgt.

Aus V hat man weiter:

$$\frac{4.\cos^2\varrho}{(\cos^2\varrho-\cos^2\mathrm{h})^2}=\frac{1}{\cos^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho}$$

und hieraus:

$$\cos^2\mathrm{h}=3\cdot\cos^2\varrho-2\cdot\cos\varrho\cdot\sqrt{3\cos^2\varrho-1}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \mathrm{VI)}$$

Daraus errechnet sich h zu $65^0\ 31'\ 30''$. Die Gleichheit von Vertikal- und Lateralhalbschatten ist demnach im südlichen Deutschland zur Zeit der Sommersonnenwende im Mittag noch möglich.

5. Endlich sei gefragt: Bei welcher Sonnenhöhe h ist die Summe der beiden Halbschatten H + M ein Minimum? — Wie man aus I und III erkennt, muß

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dh}}\left[\operatorname{cotg}(\mathrm{h}-\varrho)-\operatorname{cotg}(\mathrm{h}+\varrho)+\frac{\sin\varrho}{\sqrt{\cos^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho}}\right]=0 \text{ sein,}$$

oder:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dh}}\left[\frac{\sin 2\varrho}{\sin^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho}+\frac{\sin\varrho}{\sqrt{\cos^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho}}\right]=0$$

oder:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dh}}\left[\frac{2.\cos\varrho}{\sin^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho}+\frac{1}{\sqrt{\cos^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho}}\right]=0$$

Nach Ausführung der Differentiation hat man:

$$\frac{4\cdot\sin\mathrm{h}\cdot\cos\mathrm{h}\cdot\cos\varrho}{(\sin^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho)^2}+\frac{\sin\mathrm{h}\cdot\cos\mathrm{h}}{(\cos^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho)^{\frac{3}{2}}}=0$$

oder:

$$\frac{4\cdot\cos\varrho}{(\sin^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho)^2}+\frac{1}{(\cos^2\mathrm{h}-\sin^2\varrho)^{\frac{3}{2}}}=0$$

oder:

$$\frac{16 \cdot \cos^2 \varrho}{(\sin^2 h - \sin^2 \varrho)^4} = \frac{1}{(\cos^2 h - \sin^2 \varrho)^5} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{VII)}$$

Gleichung VII ist in sin h oder cos h vom 4. Grade. Sie hat die brauchbare Wurzel

$$h = 59^\circ\ 5'\ 40''.$$

Folgende kleine Tabelle gibt eine Übersicht über die Beziehungen zwischen Schattengrößen und Sonnenhöhe:

| h | H | M | H+M | H—M |
|---|---|---|---|---|
| 56° | 1312 | 806 | 2118 | 506 |
| 57 | 1282 | 828 | 2110 | 454 |
| 58 | 1254 | 851 | 2105 | 403 |
| 59 | 1227 | 875 | 2102 | 352 |
| 60 | 1202 | 902 | 2104 | 300 |
| 61 | 1179 | 930 | 2109 | 249 |
| 62 | 1156 | 960 | 2116 | 196 |
| 63 | 1135 | 993 | 2128 | 142 |
| 64 | 1117 | 1029 | 2146 | 88 |
| 65 | 1098 | 1067 | 2165 | 31 |
| 66 | 1081 | 1109 | 2190 | — 28 |

Der Verwaltung der Preuß. Staatsbibliothek zu Berlin schulde ich wärmsten Dank für die freundliche Übersendung verschiedener arabischer Handschriften nach Essen, wo sie längere Zeit zu meiner Verfügung standen.

# فهرس المحتويات

## المجلد الأول

لقد كان شوي مثله مثل زميله الأكبر سنا سوتر يقوم بأبحاثه على أساس مخطوطات عربية غير منشورة من مجال الفلك والرياضيات، وبينما كان اهتمام سوتر منصبا على التمهيد لكتب مرجعية الى جانب دراسات لمواضع محددة فقد توجه شوي الى دراسة موضوع جديد ألا وهو الجغرافيا الرياضية عند العرب والمسلمين .

لقد فقدت الدراسات الحديثة لتاريخ العلوم العربية والاسلامية بوفاة كارل شوي في ديسمبر ١٩٢٥م باحثا من الباحثين النادرين المنقطعين الى جوانب الرياضيات والفلك والجغرافيا، بعد أن ترك لنا حصيلة عمله — فى فترة لم يقدر لها أن تطول — عددا غير قليل من الدراسات التي قام بانجازها في ظروف مادية وصحية قاسية كما نقرأ فى تأبين صديقه المستعرب يوليوس روسكا المنشور بعد نهاية المقدمة الألمانية .

وفى ختام هذه المقدمة أعرب عن شكري للمساهمين معى في المعهد فى جمع هذه الدراسات ونشرها تسهيلا للاستفادة منها . والله ولى التوفيق .

فرانكفورت، صفر ١٤٠٨هـ فــؤاد ســزكيــن

---

(١) لقد جمعنا ونشرنا أعماله فى مجلدين ضمن منشورات المعهد : *Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques. Nachdruck von Schriften aus den Jahren 1842-1874*. Ed. Fuat Sezgin. Vol. I-II. Frankfurt: IGAIW 1986.

(٢) لقد جمعنا ونشرنا أعماله في مجلدين ضمن منشورات المعهد أيضا : Heinrich Suter: *Beiträge zur Geschichte der Mathematik und Astronomie im Islam. Nachdruck seiner Schriften aus den Jahren 1892-1922*. Ed. Fuat Sezgin. Vol. I-II. Frankfurt: IGAIW 1986.

بسم الله الرحمن الرحيم

## مقدمة الناشر

اذا كان مؤرخو الرياضيات والفلك يقدرون اليوم اسهام العرب والمسلمين فى هذين المجالين بعد ما كان من موقفهم المُنكِر فى القرن الثامن عشر فالفضل فى هذا التحول يعود الى أعمال قلة من المستعربين التي أنجزوها بصبر وتضحية وحماسة. ويحتل مكان الصدارة بينهم المستعربان الفرنسيان جان جاك سيديو ( Jean - Jacques Sédillot ) وابنه لوي آملي ( Louis - Amélie ) في النصف الأول من القرن التاسع عشر، ثم فرانتز فوبكه ( Franz Woepcke ) الألماني الذي تلاهما فى باريس واستطاع أن يقوم بنحو أربعين دراسة طريقة عميقة خلال عشر سنوات في أواسط نفس القرن (١) .

أما فى الربع الأول من القرن الحالى فقد انتقلت الريادة فى دراسة علمى الرياضيات والفلك الى المستعرب السويسري هاينرش سوتر (٢) وكارل شوي الألماني الذي جمعنا أعماله فى هذين المجلدين.

ولد شوي في قرية صغيرة في جنوب غرب ألمانيا (Bittelschies in Hohen-zollern) سنة ١٨٧٧م، ودرس الفلك والرياضيات والفيزياء فى جامعة ميونيخ. أما اهتمامه بتاريخ العلوم فقد نشأ وتطور متأثرا بمؤرخ الجغرافيا س. جونتر (S. Günther) ومؤرخ الرياضيات براونمول ( A. v. Braunmühl ) وعالم الفلك سيلجر (H. v. Seeliger) . ودفعه اهتمامه هذا الى تعلم اللغة العربية فكان من حسن حظه أن تعرف فى توبنجن سنة ١٩١٧م الى المستعرب سيبولد ( Chr. Seybold ) الذي كان اختصاصه بالدرجة الأولى الجغرافيا عند العرب والمسلمين، حيث كان لعلاقته به أثرها على ما أنجز شوي من دراسات فيما بعد.

طبع في ١٠٠ نسخة

نشر بمعهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
بفرانكفورت ــ جمهورية ألمانيا الاتحادية
طبع بمطبعة شتراوس في هيرشبرج - ألمانيا الاتحادية

كارل شوى

# دراسات فى تاريخ الرياضيات والفلك عند العرب والمسلمين

إعادة طبع لأبحاثه بين سنة ١٩١١ و ١٩٢٦م

المجلد الأول

يصدره

فؤاد سزكين

بالتعاون مع

كارل إيرج- إيجرت وإيكهارد نويباور

١٤٠٨هـ ـ ١٩٨٨م

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

في إطار جامعة فرانكفورت ـ جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

يصدرها
فؤاد سزكين

سلسلة ب: إعادة طبع
فرع الرياضيات
المجلد ١/٤

كارل شوي

# دراسات في تاريخ
# الرياضيات والفلك عند العرب والمسلمين

المجلد الأول

١٤٠٨هـ ــ ١٩٨٨م
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
في إطار جامعة فرانكفورت ــ جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

سلسلة ب - فرع الرياضيات

المجلد ١/٤