

Publications of the Institute
for the History of Arabic-Islamic Science

Islamic Mathematics
and
Astronomy
Volume 77

Publications of the
Institute for the History of
Arabic-Islamic Science

Edited by
Fuat Sezgin

ISLAMIC
MATHEMATICS
AND
ASTRONOMY

Volume
77

Miscellaneous
Texts and Studies on
Islamic Mathematics
and Astronomy

Collected and Reprinted

II

1998

Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

ISLAMIC MATHEMATICS AND ASTRONOMY

Volume

77

MISCELLANEOUS TEXTS AND STUDIES ON ISLAMIC MATHEMATICS AND ASTRONOMY

II

Collected and reprinted

by

Fuat Sezgin

in collaboration with

Mazen Amawi, Carl Ehrig-Eggert,

Eckhard Neubauer

1998

Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

Q23

. J7

1977

V.77



۳۰۱۳۸۴

100 copies printed

© 1998

Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften

Beethovenstrasse 32, D-60325 Frankfurt am Main

Federal Republic of Germany

Printed in Germany by

Strauss Offsetdruck, D-69509 Mörlenbach

TABLE OF CONTENTS

Woepcke, Franz: <i>Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par M. le prince Balthasar Boncompagni et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des arabes. III. Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, et d'un traité sur le même sujet par Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçain.</i> Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei (Rome) 14. 1860-61. pp. 211-227; 241-269; 301-324; 343-356.	1
Carra de Vaux, Bernard: <i>Une solution du problème des deux moyennes proportionnelles entre deux droites données.</i> (On Abû Ja'far ibn al-Husain.) Bibliotheca mathematica (Stockholm) N.F. 12. 1898. pp. 3-4.	85
Wiedemann, Eilhard: <i>Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. V. Auszüge aus arabischen Enzyklopädien und Anderes. 1. Übersetzung der Abhandlung (Qaul = Rede) über die Geometrie aus Al Anşârî's Irschâd al Qâsid. 2. Auszüge aus Ibn Sînâ's Teile der philosophischen Wissenschaften (mathematische Wissenschaften). 3. Auszüge aus dem Abschnitte über Naturwissenschaften von Ibn Sînâ und al Anşârî.</i> Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen 37. 1905. pp. 392-437.	87
Wiedemann, Eilhard: <i>Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. LXXII. Einleitung zu dem astronomischen Teil des Kitâb al Schifâ' (Werk der Genesung) von Ibn Sînâ.</i> Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen 58-59. 1926-27. pp. 225-227.	133
Luckey, Paul: <i>Zur Entstehung der Kugeldreiecksrechnung.</i> (On Abû Nasr ibn 'Irâq.) Deutsche Mathematik (Leipzig) 5. 1940. pp. 405-446. ..	137

Tropfke, Johannes: <i>Zur Geschichte der Mathematik. (Siebeneckkonstruktion des Archimedes, Neuneckkonstruktion des Albîrûnî).</i> Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen (Leipzig/Berlin) 59. 1928. pp. 193-206.	179
Wertheim, Gustav: <i>Über die Lösung einiger Aufgaben im "Tractatus de numeris datis" des Jordanus Nemorarius. (On al-Karajî).</i> Bibliotheca mathematica ((Leipzig) 3. F. 1900. pp. 417-420.	193
Vera, Francisco: <i>El matemático madrileño Maslama Benahmed. Notas para una bio-bibliografía.</i> Revista de la Biblioteca, Archivo y Museo (Madrid) 9. 1932. pp. 135-149.	197
Sánchez Pérez, José Augusto: <i>Chéber Benafлах. De Sevilla.</i> Revista de la Sociedad Matemática Española (Madrid) 1. 1911-12. pp. 113-120.	213
Wiedemann, Eilhard; Karl Kohl: <i>Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. LXX. Einleitung zu Werken von al Charaî.</i> Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen 58-59. 1926-27. pp. 203-218.	221
Rudloff, Gustav; Adolf Hochheim: <i>Die Astronomie des Mahmûd ibn Muḥammed ibn 'Omar al-Ġagmînî.</i> Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft (Leipzig) 47. 1893. pp. 213-275.	237
Suter, Heinrich: <i>Zu Rudloff und Hochheim, Die Astronomie des Ġagmînî. (S. 213ff).</i> Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft (Leipzig) 47. 1893. pp. 718-719.	300
Nallino, Carlo Alfonso: <i>Zu Ġagmînî's Astronomie.</i> Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft (Leipzig) 48. 1894. pp. 120-122.	302

Suter, Heinrich: *Zur Frage über die Lebenszeit des Verfassers des Mulahḥaṣ fi'l-hei'a, Maḥmūd b. Muḥ. b. 'Omar al-Ġaḡmīnī.*

Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft (Leipzig) 53. 1899. pp. 539-540.

305

Suter, Heinrich: *Beiträge zu den Beziehungen Kaiser Friedrichs II. zu zeitgenössischen Gelehrten des Ostens und Westens, insbesondere zu dem arabischen Enzyklopädisten Kemāl ed-din ibn Jūnis.*

Suter, Heinrich: *Beiträge zur Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Arabern.* Hrsg. von Josef Frank. Erlangen 1922. pp. 1-8. (Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin 4).

307

Lee, Samuel: *Notice of the Astronomical Tables of Mohammed Abibeker Al Farsi, two copies of which are preserved in the Public Library of the University of Cambridge.*

Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1. 1822. pp. 249-265.

315

Suter, Heinrich: *Das Rechenbuch des Abū Zakarījā el-Ḥaṣṣār.*

Bibliotheca mathematica (Leipzig) 3.F. 2. 1901. pp. 12-40.

332

Colin, Georges Séraphin; Henri-Paul-Joseph Renaud: *Note sur le "muwaqqit" marocain Abū Muqrī' - ou mieux Abū Miqrā' - al-Baṭṭīwī (XIIIe s. J.-C.).*

Hespéris (Paris) 25. 1938. pp. 94-96.

362

MATEMATICA. — *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés Par. M. le prince BALTHASAR BONCOMPAGNI et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des arabes. Par M. F. WОРРСКЕ (1).*

PREMIÈRE PARTIE

III.

Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, et d'un traité sur le même sujet par Abou Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn.

A.

Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers.

1.

. . . . l'angle (droit de ce triangle est compris entre les côtés) six et huit, et sous-tendu par dix. Ce (triangle) est donc de l'espèce du premier triangle. Il en est de même de celui dont l'angle est compris entre un et demi, et deux, et sous-tendu par deux et demi. Ce (triangle) est encore de la même espèce. La même chose a lieu pour les autres triangles souches qui se comportent de cette manière. fol. 81 recto

OBSERVATIONS

Le fragment dont on lit ici la traduction, est contenu dans le manuscrit 952 bis du Supplément arabe de la Bibliothèque Impériale de Paris (numéro du Catalogue rédigé par M. Reinaud). J'ai inséré une description détaillée de ce manuscrit dans un mémoire intitulé: *Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles* (publié dans le Tome XIV des Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France), pages 6 à 14 du tirage à part. Le présent fragment est

(1) Questa memoria fu presentata dal sig. principe Don Baldassare Boncompagni nella sessione precedente. Il medesimo presentò altresì nella sessione stessa una memoria del sig. Francesco Siacci intitolata: *Intorno ad una linea di quart'ordine* (v. opere venute in dono, p. 194).

mentionné sous le N.° 19 de l'énumération des traités ou fragments de traités contenus dans ce ms., qui est donnée à l'endroit cité.

J'y ai dit aussi que la table qui se trouve à la fin du ms., et qui a été rédigée bien longtemps après l'époque où a été faite la plus grande partie des copies que renferme le ms., est signée du 11 moharram 657 de l'hégire (8 janvier 1259 de notre ère). Or, je crois qu'au temps de cette date le commencement du traité que je traduis ici, manquait déjà dans ce ms.; et voici les raisons qui me déterminent à pencher pour cette opinion. Dans la table dont je viens de parler, chaque titre est précédé d'un numéro d'ordre exprimé par les lettres de l'alphabet numéral. Les mêmes lettres se trouvent dans le corps du ms. écrites à l'encre rouge près des titres des traités correspondants. Or, le présent fragment finit au bas du recto d'un feuillet (fol. 86 r.^o), et le traité suivant, qui commence en haut du verso du même feuillet, porte le numéro d'ordre 22; de cette disposition il résulte que, quand même le volume aurait été défait après la rédaction de la table, et que ses parties auraient été rassemblées par la suite dans un ordre (comme cela paraît avoir été le cas), toujours notre fragment serait le traité correspondant au numéro 21 de la table. Or tandis que le titre du traité qui commence au fol. 86 v.^o du ms., et le titre qu'on trouve sous le numéro 22 de la table, se correspondent parfaitement, le titre que l'on trouve sous le numéro 21 de la table, ne correspond que vaguement au contenu du fragment. Ce titre est : « Du carré et de la racine » (*l' l-mal wa 'l-djidzr*). Je conclus de là que le rédacteur de la table n'avait plus sous les yeux le commencement et le véritable titre du traité, et qu'il a fait lui-même le titre que je viens de dire, d'après un examen plus ou moins superficiel du contenu des pages qui restaient de ce morceau. Je fais observer toutefois, que ce titre « Du carré et de la racine » n'est pas aussi étranger à la matière traitée dans le fragment, qu'on pourrait le croire en voyant qu'il y est question principalement de triangles rectangles formés en nombres entiers. Car on verra plus loin que toute cette théorie a pour but la solution du problème de trouver « des carrés qui, augmentés ou diminués d'un même nombre, produisent deux nombres dont on puisse extraire la racine », ou, comme nous dirions, deux nombres carrés. Les termes de cet énoncé du problème des nombres congruents se rapprochent suffisamment du titre 21 de la table, pour nous convaincre que ce titre se rapporte effectivement au fragment.

La partie qui a précédé le commencement actuel du fragment, et qui manque dans le ms., paraît n'avoir été que d'une étendue peu considérable, ou n'avoir contenu que des préliminaires. Du moins l'absence de cette partie ne nuit en aucune façon ni à la clarté ni à l'intérêt de ce qui nous reste du traité. (Comparer aussi ci-après les observations 15.)

Les lignes ci-dessus paraissent terminer un paragraphe dans lequel l'auteur a expliqué la distinction qu'il faut faire entre les triangles primitifs, qu'il appelle triangles souches, et les triangles souches, et les triangles rectangles dérivés, qu'on obtient en multipliant les trois côtés d'un triangle dérivés, les triangles 6, 8, 10 et $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, que l'on obtient en multipliant respectivement par 2 et par $\frac{1}{2}$ les côtés du triangle primitif 3, 4, 5.

2.

Nous avons trouvé que ces triangles ne sont jamais que des moitiés de carrés oblongs, et qu'il est impossible qu'ils soient des moitiés de carrés

équilatéraux. Car, si les deux côtés qui comprennent l'angle droit, sont égaux et rationnels, il est impossible qu'ils soient sous-tendus par un nombre rationnel, et s'ils sont sous-tendus par un (nombre) rationnel, il est impossible qu'ils soient rationnels et égaux. En effet, il ne saurait exister de nombre ayant une racine rationnelle, et dont le double ait également une racine rationnelle.

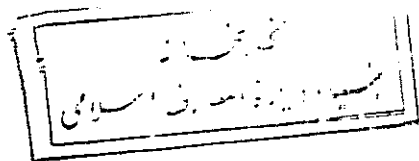
OBSERVATION.

Le fait énoncé par l'auteur est une conséquence du théorème démontré déjà par Euclide dans la 117^e proposition du X^e livre des *Éléments* (page 326 de l'Édition d'Oxford), ou de la vérité que $\sqrt{2}$ est une quantité irrationnelle.

3.

Nous avons trouvé que l'hypoténuse de chacun de ces triangles qui sont les souches des espèces, c'est à dire le côté qui sous-tend l'angle droit, est toujours impair, et que ce nombre impair est constamment divisible en deux nombres dont on peut extraire la racine, et dont l'un est impair et l'autre pair.

Nous avons trouvé aussi que ces nombres impairs se suivent dans un ordre déterminé par une propriété unique, et qu'ils n'en sortent jamais. C'est que le premier des nombres qui peuvent être des hypoténuses, est le nombre cinq. Or, si l'on ordonne les nombres impairs qui suivent le cinq, d'après leur ordre naturel, à savoir: sept, neuf, onze, treize, quinze, dix-sept, dix-neuf, vingt un, vingt trois, vingt cinq, vingt sept, vingt neuf, trente un, et ainsi de suite jusqu'au nombre que vous voudrez; vous trouverez qu'entre le second des nombres qui peuvent être des hypoténuses de triangles souches de leurs espèces, et entre le cinq qui en est le premier, sont compris trois nombres impairs, et que le (nombre dont il s'agit), est le quatrième, à savoir treize. (Vous trouverez) ensuite qu'entre ce second nombre et le troisième est compris un seul nombre impair, et (le nombre cherché) est le second (à partir du précédent) à savoir dix-sept. Entre ce troisième et le quatrième sont compris trois nombres (de la suite que nous venons de dire); ensuite entre le quatrième et le cinquième un nombre, entre le cinquième et le sixième trois nombres, et entre le sixième et le septième un nombre; et ainsi de suite, en montant de cette manière jusqu'au nombre que vous voudrez, si ce n'est que cette suite comprend aussi (quelquefois) un nombre im-



pair qui n'est pas décomposable en deux nombres dont on puisse extraire la racine, comme par exemple quarante neuf, soixante dix-sept et cent vingt un. Lorsqu'on arrive à un nombre semblable, il est impossible que ce (nombre) soit hypoténuse d'un triangle, mais il en occupe seulement le rang; les nombres qui le suivent, restent rangés suivant l'ordre que nous avons expliqué, et qu'ils ne cessent pas de conserver.

OBSERVATIONS.

L'auteur énonce ici trois théorèmes: premièrement que l'hypoténuse d'un triangle primitif est toujours décomposable en deux carrés. Secondement qu'elle est toujours de la forme $12m+1$ ou $12m+5$. Troisièmement que tous les nombres de la forme $12m+1$ ou $12m+5$ ne sont pas réciproquement des hypoténuses de triangles primitifs.

Pour nous rendre compte de la justesse de ces théorèmes il ne sera pas inutile d'exposer en quelques mots les principes fondamentaux de la théorie dont l'auteur s'occupe; ces explications serviront en même temps de base à l'éclaircissement d'autres considérations que l'auteur développe dans la suite de son traité.

1. Soit

$$x^2 + y^2 = z^2$$

un triangle rectangle primif. Comme x , y , z sont premiers entre eux, ni deux de ces nombres, ni tous les trois ne peuvent être pairs. Ils ne peuvent pas non plus être tous les trois impairs, parce que la somme de deux nombres impairs est paire. Le seul cas possible est donc que l'un des trois nombres soit pair, et que les deux autres soient impairs; et encore on voit que ce n'est pas x et y qui peuvent à la fois être impairs; car la somme de deux carrés impairs $(2\mu+1)^2 + (2\nu+1)^2$ est de la forme $4m+2=2(2m+1)$ ce qui ne peut pas être un carré. Il résulte de là que l'hypoténuse d'un triangle rectangle primitif est toujours impaire, tandis que l'une de ses deux cathètes est paire et l'autre impaire.

Soit y la cathète paire; il s'ensuit que $\frac{z+x}{2}$ et $\frac{z-x}{2}$ sont des nombres entiers; mais ce sont en même temps des nombres carrés. En effet, on a

$$\frac{z+x}{2} \cdot \frac{z-x}{2} = \frac{1}{4} y^2.$$

Or, $\frac{z+x}{2}$ et $\frac{z-x}{2}$ sont premiers entre eux; car, si $\frac{z-x}{2}$ et $\frac{z+x}{2}$ avaient un facteur commun a , de sorte que $\frac{z+x}{2} = ra$ et $\frac{z-x}{2} = sa$, il s'ensuivrait que

$$z = (r+s)a \text{ et } x = (r-s)a,$$

et le triangle ne serait pas primitif. Le produit de deux nombres premiers entre eux

$$\frac{z+x}{2} \text{ et } \frac{z-x}{2}$$

étant un carré, il faut donc que chacun de ces deux nombres soit un carré. Conséquemment z est la somme de deux carrés. On voit en même temps que x est la différence des deux mêmes carrés, tandis que y est deux fois le produit des racines des mêmes carrés.

2. Tout triangle rectangle primitif étant, comme on vient de le voir, de la forme

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2,$$

on obtiendra tous les triangles primitifs en prenant pour a et b toutes les valeurs qui rendent $a^2 + b^2$ impair, d'où il suit que toujours l'un des deux nombres a , b doit être pair et l'autre impair, donc $a + b$ de la forme $2n + 1$. On obtiendra par conséquent tous les triangles primitifs en prenant toutes les décompositions de tous les nombres impairs:

$$2n + 1 = (n + a + 1) + (n - a) \quad \text{où} \quad a = 0, 1, 2, \dots, n - 1,$$

et en excluant parmi ces décompositions où $n + a + 1$ et $n - a$ auraient un facteur commun. On voit d'abord qu'aucune de ces décompositions ne peut être identique avec une décomposition précédente; et que les côtés de tous les triangles résultant de ces décompositions seront représentés par les expressions

$$\begin{aligned} 1) \quad & (n + a + 1)^2 - (n - a)^2 = (2n + 1)(2a + 1) \\ 2) \quad & 2(n + a + 1)(n - a) \\ 3) \quad & (n + a + 1)^2 + (n - a)^2 = 2n(n + 1) + 2a(a + 1) + 1 \end{aligned}$$

De ces expressions il suit immédiatement que, pour que le triangle soit primitif, il faut et il suffit que $(n + a + 1)$ et $(n - a)$ soient premiers entre eux. On reconnaît, en outre, qu'aucun triangle ne se présentera deux fois. Car si deux décompositions d'un même nombre impair $2n + 1$ donnaient lieu à deux triangles égaux, les hypoténuses de ceux-ci seraient égales, donc

$$2n(n + 1) + 2a(a + 1) + 1 = 2n'(n' + 1) + 2a'(a' + 1) + 1,$$

ce qui est impossible tant que a' est différent de a , attendu qu'on ne peut pas prendre $a' = -(a + 1)$. Si les deux décompositions appartenaient à deux nombres impairs différents $2n + 1$ et $2n' + 1$, on remarquerait que non seulement les deux hypoténuses doivent être égales, mais encore que le côté 1) de l'un des deux triangles doit être égal au côté 1) et non pas au côté 2) de l'autre, parce qu'un nombre impair ne peut pas être égal à un nombre pair. On aurait donc les deux équations simultanées

$$\begin{aligned} (n + a + 1)^2 + (n - a)^2 &= (n' + a' + 1)^2 + (n' - a')^2 \\ (n + a + 1)^2 - (n - a)^2 &= (n' + a' + 1)^2 - (n' - a')^2 \end{aligned}$$

d'où l'on tirerait les suivantes

$$n + a + 1 = n' + a' + 1$$

$$n - a = n' - a'$$

lesquelles donneraient, enfin $n = n'$, $a = a'$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3. La seconde valeur du troisième côté

$$2n(n + 1) + 2a(a + 1) + 1$$

prouve que l'hypoténuse est toujours de la forme $4m + 1$ et conséquemment que, par rap-

port au module 12, elle ne peut être que des formes $12m+1$, $12m+5$, $12m+9$. Mais il est aisé de voir que cette dernière forme doit être exclue, parce que l'hypoténuse d'un triangle rectangle primitif ne peut pas être divisible par 3.

En effet, tout carré ne pouvant être que de la forme $3m$ ou $3m+1$, la somme des deux carrés $(n+a+1)^2 + (n-a)^2$ ne pourra être divisible par 3 que lorsque chacun des deux carrés séparément est divisible par 3, et, par conséquent, lorsque $n+a+1$ et $n-a$ sont chacun divisible par 3. Mais, dans ce cas, les deux cathètes seraient également divisibles par 3, donc le triangle rectangle ne serait pas primitif.

Il suit de là que l'hypoténuse d'un triangle rectangle primitif est toujours de la forme $12m+1$ ou de la forme $12m+5$ (*).

4. La réciproque n'a pas lieu. Tout nombre des formes $12m+1$ ou $12m+5$ n'est pas nécessairement décomposable en deux carrés. Car, soient $p, q, r, s, \dots$ des nombres premiers et, inégaux, plus grands que 3 et de la forme $4m+3$, et soient, $t, u, v, w, \dots$ des nombres premiers, et inégaux de la forme $4m+1$; le nombre

$$p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \cdot r^{\gamma} \cdot s^{\delta} \cdot \dots \cdot t^{\lambda} \cdot u^{\mu} \cdot v^{\nu} \cdot w^{\rho} \cdot \dots$$

(où la somme $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\dots$ des exposant des facteurs de la forme $4m+3$ doit être paire et >0 , tandis que ces exposant mêmes ne doivent pas tous être pairs) sera toujours de la forme $12m+1$ ou $12m+5$, et cependant ne pourra pas être décomposé en deux carrés. Paraillement le nombre

$$(p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \cdot r^{\gamma} \cdot s^{\delta} \cdot \dots)^2$$

(*) De ce qui précède découle immédiatement la démonstration d'un théorème que M. Poinsot a énoncé dans la séance du 7 mai 1849 de l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes Rendus*, I.^{er} semestre 1849, pag. 582), à savoir que le produit des trois côtés du triangle est toujours divisible par le produit 3. 4. 5, mais que l'hypoténuse n'est jamais divisible par 3 ou 4.

1 L'hypoténuse z étant de la forme $12m+1$ ou $12m+5$, ne peut être divisible ni par 3, ni par 4.

2. La cathète

$$y = 2(n+a+1)(n-a)$$

est toujours divisible par 4. Car, si n et a sont à la fois pairs ou impairs, $n-a$ est pair; et si l'un des deux nombres n, a est pair et l'autre impair, $n+a+1$ est pair.

3. L'un des trois côtés x, y, z est nécessairement divisible par 5. En effet, chacun des deux carrés $(n+a+1)^2$ et $(n-a)^2$ ne peut être que de l'une des trois formes $25m$, $5m+1$, $5m+4$. Si l'un des deux carrés est de la forme $5m+1$ et l'autre de la forme $5m+4$, z est divisible par 5. Si l'un est de la forme $25m$ et l'autre de la forme $5m+1$ ou $5m+4$, y est divisible par 5. S'ils sont tous les deux de la forme $5m+1$ ou $5m+4$, $x = (n+a+1)^2 - (n-a)^2$ est divisible par 5.

4. L'un des deux côtés x, y est nécessairement divisible par 3. Car chacun des deux carrés $(n+a+1)^2$ et $(n-a)^2$ ne peut être que de l'une des deux formes $9m$ ou $3m+1$. Si l'un est de la forme $9m$ et l'autre de la forme $3m+1$, y est divisible par 3; et si tous les deux sont de la forme $3m+1$, x est divisible par 3.

sera toujours de la forme $12m + 1$, et ne sera cependant pas décomposable en deux carrés. Enfin les nombres de la forme $12m + 1$ ou $12m + 5$ qui sont décomposables en deux carrés ne donnent pas toujours lieu à des triangles rectangles primitifs. (Voir ci-après les observations).

4.

Une des choses merveilleuses qu'on trouve en examinant les nombres, c'est que si la suite (que nous avons décrite) conduit à un de ces nombres impairs qui ne peut pas être hypoténuse d'un triangle, et qu'on la prolonge à partir de là d'un nombre ou de quelques nombres, il viendra un nombre qui est hypoténuse de deux triangles différents dont chacun est souche de son espèce. C'est ainsi que la suite conduit à quarante neuf qui ne peut pas être hypoténuse, parce qu'il n'est pas divisible en deux parties dont on puisse extraire la racine; ensuite si nous allons jusqu'au nombre soixante cinq, nous trouvons qu'il sous-tend deux triangles dont l'un a pour un de ses deux (autres) côtés soixante trois et pour l'autre seize, tandis que l'autre triangle a pour un de ses deux (autres) côtés trente trois et pour l'autre cinquante six. Pareillement la suite conduit à soixante dix-sept, qui est un des (nombres) qui ne peuvent pas être hypoténuses; puis, lorsque nous sommes arrivés au nombre quatre-vingt cinq, nous trouvons qu'il sous-tend deux triangles dont l'un a pour un de ses deux (autres) côtés soixante dix-sept et pour l'autre côté trente six, tandis que l'autre triangle a pour un de ses deux (autres) côtés treize et pour l'autre côté quatre-vingt quatre. Cela avec d'autres choses encore fait partie de ce qui sera certainement expliqué dans la table ordonnée suivant ces nombres que nous proposerons bientôt, si telle est la volonté de Dieu.

fol. 31 verso

Ceci sont les principes fondamentaux de la connaissance des hypoténuses des triangles qui sont les souches des espèces. Je n'ai pas trouvé que cela fût mentionné dans aucun des ouvrages anciens; ni aucun des modernes qui ont composé des traités sur le calcul, ne l'a mentionné non plus; et je ne sache pas que cela ait été révélé à quelqu'un avant moi. La gloire appartient à Dieu seul.

OBSERVATIONS.

Après avoir énoncé que la suite des nombres des formes $12m+1$ et $12m+5$ renferme des nombres qui ne sont pas décomposables en deux carrés, l'auteur fait observer maintenant, qu'elle en renferme qui le sont de plus d'une manière. En effet, en désignant par $\lambda, \mu, \nu, \omega, \dots$ des nombres premiers et inégaux de la forme $4m+1$ et par V^2 un facteur quadratique dont les facteurs premiers sont de la forme $4m+3$ et plus grands que 3, le nombre

$$F^2. \lambda^1. \mu^2. \nu^3. \omega^4. \dots$$

sera de la forme $12m+1$ ou $12+5$, et décomposable en deux carrés de

$$\frac{1}{4}(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)(\omega+1) \dots$$

ou de

$$\frac{1}{4}(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)(\omega+1) \dots - \frac{1}{4}$$

manières, selon que parmi les nombres $\lambda, \mu, \nu, \omega, \dots$ il s'en trouve un au moins qui soit impair, ou qu'ils sont tous pairs. (Comp. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*. Lipsie 1801. Pagg. 218, 210).

Remarquons qu'il faudra exclure quelquefois certains de ces décompositions parce qu'elles ne donnent pas lieu à des triangles primitifs. Ainsi, le nombre $(4n^2+1)^2$ est de la forme $12m+1$ ou $12m+5$ (suivant que n^2 est de la forme $3m$ ou $3m+1$), et donne lieu aux décompositions

$$1) \quad (4n^2+1)^2 = (4n^2+1)^2 + (8n^2+2n)^2$$

$$2) \quad (4n^2+1)^2 = (12n^2-1)^2 + (8n^2-6n)^2$$

La première de ces décompositions doit être exclue, parce que les deux carrés qu'elle donne, ont le facteur commun $(4n^2+1)^2$. La seconde au contraire donnera toujours lieu à un triangle primitif, parce que

$$12n^2-1 \quad \text{et} \quad 8n^2-6n = (4n^2-3)2n$$

sont premiers entre eux. En effet, $12n^2-1$ ne peut d'abord être divisible ni par 2, ni par n , ni par un diviseur de n . Ensuite si

$$12n^2-1 \quad \text{et} \quad 4n^2-3$$

avaient un facteur commun 2, de sorte que

$$12n^2-1 = p.2 \quad \text{et} \quad 4n^2-3 = q.2,$$

il s'ensuivrait $8 = (p-3q)2$, et 2 devrait être un des nombres 8, 4, 2. Mais

$$12n^2-1 \quad \text{et} \quad 4n^2-3$$

sont impairs. Donc $12n^2-1$ et $8n^2-6n$ premiers entre eux.

L'auteur ne mentionne que des décomposition en deux carrés de *deux* manières différents; probablement parce qu'il n'a sous les yeux qu'un commencement peu étendu de la suite des nombres de la forme $12m+1$ et $12m+5$.

Il s'exprime aussi presque comme s'il avait pensé que les nombres de cette suite qui ne sont pas décomposables en deux carrés, et ceux qui le sont de plusieurs manières, se présentent à tour de rôle. Ce serait un erreur. En effet, les deux nombres 469 et 473 qui ne sont pas décomposables en deux carrés, sont deux termes consécutifs de la suite, il en est de même des deux nombres 309 et 317; les deux nombres 329 et 341 ne sont pas décomposables en deux carrés, et ne comprennent cependant entre eux que le nombre 337 qui n'est décomposable que d'une seule manière; de même les nombres 385 et 413 qui ne sont pas décomposables en deux carrés, ne comprennent entre eux que les nombres 389, 397, 401, 409, tous décomposables d'une manière seulement en deux carrés.

Les dernières lignes de l'auteur sont d'une certaine importance historique. Les formules telles que « si telle est la volonté de Dieu », et l'opposition établie entre les « ouvrages anciens » c'est à dire les ouvrages grecs, et les traités de calcul des « modernes, » prouvent que l'auteur est mahométan, et que ce qu'il y a dans le présent traité d'original sur la théorie des triangles rectangles en nombres entiers, appartient à l'école arabe. D'un autre côté des dates de copie qu'on trouve à la fin d'une assez grande partie des morceaux contenus dans le ms. qui renferme ce fragment, constatent que ces morceaux ont été copiés pendant les années 969 à 972 de notre ère; il y a donc toute probabilité que l'auteur du fragment écrivait ce traité avant 972. A cette époque le développement des sciences chez les Arabes durait environ depuis deux siècles: et je pense qu'il faut placer la composition du présent traité bien plutôt vers la fin que vers le commencement de cet espace de temps.

5.

Il existe différentes manières d'arriver à la connaissance des côtés qui comprennent l'angle droit de chacun de ces triangles. Une de ces manières consista à diviser l'hypoténuse que vous voudrez, dans ses deux parties dont on peut extraire la racine, à prendre la racine de l'une de ces parties, et à la multiplier par deux fois la racine de l'autre. Le produit sera toujours un nombre pair; et ce résultat (de la multiplication) est l'un des deux côtés de ce triangle. Ensuite vous additionnez les deux racines, et vous multipliez la somme par la différence des deux (racines). Le résultat, qui est toujours un nombre impair, est l'autre côté.

Par ce procédé on obtient ces triangles suivant l'ordre, de manière que l'un se présente après l'autre; il n'en sera oublié aucun, et il ne pourra arriver ni qu'on en omette un pour en prendre un autre, ni que certains d'entre eux aient des diviseurs communs avec certains autres.

OBSERVATIONS

Ayant précédemment trouvé le suite des hypoténuses, $h = a^2 + b^2$, l'auteur aura maintenant la suite complète des triangles rectangles primitifs en nombres entiers en formant pour chaque h et pour chaque décomposition d'un h où a et b sont premiers entre eux, les expressions $2ab$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Il fait observer avec raison que le premier de ces produit est toujours pair et le second impair. Comparer ci-dessus les observations 3.

6.

Voici une autre manière d'arriver à la même connaissance, et qui comprend à la fois les triangles souches et ceux qui en sont dérivés. C'est que si vous multipliez la somme de deux nombres différents quelconques, quels qu'ils soient, par leur différence, il en résulte un côté d'un triangle rectangle; si vous multipliez l'un des deux (nombres) par l'autre (pris) deux fois, il en résulte un autre côté du même triangle; et si vous multipliez chacun des deux (nombres) par lui-même, et que vous additionnez les (deux résultats), il résulte l'hypoténuse qui sous-tend ces deux côtés. C'est pour cette raison que chacune des hypoténuses des triangles est divisible en deux nombres dont on peut extraire la racine.

Si ensuite vous voulez obtenir par cette opération les triangles souches à l'exclusion des triangles dérivés, sachez qu'elle ne donne pas ces triangles purement, de manière que les uns n'aient pas des diviseurs communs avec les autres, si la somme des deux nombres dont on multiplie l'un par l'autre (pris) deux fois, et dont on multiplie la somme par la différence, n'est pas un nombre impair. Donc si votre but est celui (de trouver les triangles souches), prenez les nombres impairs, dont le premier est trois, divisez chacun de ces nombres dans les parties entières dans lesquelles il peut être décomposé, (ordonnez) ces parties deux à deux, et opérez sur les deux parties, comme vous aviez opéré sur les deux nombres (quelconques) dont nous avons parlé (ci-dessus). Les triangles qui résultent se suivent l'un l'autre. Il faut cependant que vous ayez sous les yeux les hypoténuses rangées suivant l'ordre, afin que vous puissiez chercher les (triangles), que vous auriez peut-être omis, et afin que (ce contrôle) vous révèle les triangles dérivés (qui par hasard se seraient glissés parmi vos résultats et) que vous n'auriez pas reconnus comme tels. Vous les supprimeriez ensuite, afin que vous ne les fassiez pas passer pour des triangles souches. Si telle est la volonté de Dieu.

fol. B2 recto.

Par exemple, le trois se divise en un et deux. Si vous multipliez l'un par le deux (pris) deux fois, vous aurez quatre, ce qui est l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du premier triangle. Si vous multipliez la somme de l'un et du deux par la différence de ces deux (nombres) qui est un, il résulte trois, ce qui est de second côté. Et si vous multipliez chacun de deux (nombres) par lui-même, et que vous additionnez les produits, il résulte cinq, ce qui est l'hypoténuse.

Paraillement le cinq, qui suit le trois, se divise en trois et deux, et en un et quatre. Si vous opérez sur le trois et le deux comme nous l'avons décrit, vous aurez le second triangle, qui est cinq et douze sous-tendus par treize. Et si vous opérez d'une manière semblable sur le quatre et l'un, vous aurez le troisième triangle, qui est quinze et huit sous-tendus par dix-sept.

De même le sept se divise en trois et quatre, en deux et cinq, et en un et six.

OBSERVATIONS.

Il est évident que, a et b étant deux nombres quelconques différents l'un de l'autre, on aura

$$[(a+b)(a-b)]^2 + [2ab]^2 = [a^2 + b^2]^2.$$

Cette formule est aussi celle qu'on trouve constamment employée dans le VI.^e livre de Diophante. Mais il faut remarquer que cette solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ n'est qu'un cas particulier de la solution générale donnée déjà par Euclide (*Elément*, X, 29, lemme 1), savoir

$$\left(\frac{\mu\alpha^2 - \mu\beta^2}{2}\right)^2 + \mu\alpha^2 \cdot \mu\beta^2 = \left(\frac{\mu\alpha^2 + \mu\beta^2}{2}\right)^2.$$

où $\mu\alpha^2$ et $\mu\beta^2$ doivent être en même temps pairs ou impairs.

L'auteur fait observer ensuite que, pour que le triangle soit primitif, il faut qu'on ait $a + b = 2n + 1$; c'est ce qui a été déjà expliqué ci dessus (observations 3). Il va compléter ci-après cette condition en ajoutant qu'il faut, en outre, que a et b soient premiers entre eux.

Prenant pour exemples les nombres impairs 3 et 5, il a

$$\begin{aligned} 2n + 1 = 3, \quad a = 2, \quad b = 1; \quad 2ab = 4, \quad (a+b)(a-b) = 3, \quad a^2 + b^2 = 5 \\ 2n + 1 = 5 \left\{ \begin{array}{l} a = 3, \quad b = 2; \quad 2ab = 12, \quad (a+b)(a-b) = 5, \quad a^2 + b^2 = 13 \\ a = 4, \quad b = 1; \quad 2ab = 8, \quad (a+b)(a-b) = 15, \quad a^2 + b^2 = 17. \end{array} \right. \end{aligned}$$

7.

L'opération (ci-dessus mentionnée, appliquée) à chaque couple de ces parties, produit un de ces triangles suivant l'ordre. Cependant si vous con-

linuez de cette manière, les triangles ne sont plus produits suivant l'ordre, mais confondus entre eux. C'est pourquoi j'ai dit qu'il faut que vous ayez sous les yeux les hypoténuses rangées suivant l'ordre, afin qu'il n'y ait pour vous rien de difficile dans cette recherche. Vous verrez cela clairement dans le tableau que je vous en proposerai, si telle est la volonté de Dieu,

Si vous trouvez qu'un des nombres impairs, lorsque vous en faites la décomposition, se divise en deux parties qui ont un diviseur commun, n'employez pas ces deux (parties), parce que le triangle qui en résulte, est de l'espèce d'un triangle précédent.

Ainsi parmi les décompositions du neuf se trouvent six et trois qui ont un diviseur commun. L'opération (ci-dessus décrite, appliquée) à ces deux (nombres), produit un triangle dont un des deux côtés (comprenant l'angle droit) est trente six, l'autre vingt sept, et l'hypoténuse quarante cinq. Ce (triangle) est de l'espèce du triangle trois et quatre dont l'hypoténuse est cinq.

Paraillement parmi les décompositions du quinze se trouvent : six et neuf, cinq et dix, trois et douze. Chacun des ces couples a un diviseur commun, et ne donne lieu qu'au multiple d'un triangle précédent.

De même parmi les décompositions du vingt et un se trouvent : neuf et douze, sept et quatorze, six et quinze, trois et dix-huit. Tous ces (couples), se comportent comme on vient de le dire. Entendez cela, si Dieu le permet.

OBSERVATIONS.

L'auteur veut dire, dans le premier alinéa, que si l'on décompose les nombres impairs suivant l'ordre dans deux parties a , b , et si on forme au moyen de chaque couple a , b un triangle rectangle, les hypoténuses ($a^2 + b^2$) de ces triangles ne se suivent plus, à partir d'un certain point, d'après l'ordre de leur grandeur. Le premier cas de ce genre se présente pour le nombre 9 qui donne lieu, par la décomposition $8+1$ à l'hypoténuse 65, tandis que le nombre 11, par la décomposition $6+5$, donne lieu à l'hypoténuse 61.

En général, étant proposés deux nombres impairs $i = a + b$ et $i' = a' + b'$, où $i < i'$, on aura cependant $a^2 + b^2 > a'^2 + b'^2$, si

$$(a - b)^2 - (a' - b')^2 > (a' + b')^2 - (a + b)^2.$$

Prenant pour $a - b$ et $a' - b'$ les limites extrêmes en posant

$$a = 2n, \quad b = 1, \quad a' = n' + 1, \quad b' = n',$$

on voit que cette inégalité pourra avoir lieu dès que $2n^2 > n'(n' + 1)$ pendant que $n < n'$,

par conséquent dès que $2(n' - 1)^2 > n'(n + 1)$, d'où $n' \geq 5$. L'inégalité dont il s'agit peut donc avoir lieu dès que $n' = 5$, $n = 4$, ou à partir des nombres impairs $i = 9$, $i' = 11$.

Le tableau auquel l'auteur fait allusion est celui qu'on trouvera ci-dessous au N.° 19.

Ensuite l'auteur complète la condition qui doit être remplie que a et b produisent un triangle rectangle primitif, en énonçant comme nécessaire que a et b soient premiers entre eux. (Comparer observations 6.) Les valeurs $a + b = 3, 5, 7$ considérées précédemment, n'avaient pas donné lieu à cette remarque. En effet, si a et b ont un commun diviseur δ , de sorte que $a = p\delta$, $b = q\delta$, on a

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= (p^2 - q^2)\delta^2 \\ 2ab &= 2pq\delta^2 \\ a^2 + b^2 &= (p^2 + q^2)\delta^2;\end{aligned}$$

le triangle produit sera donc semblable au triangle produit précédemment au moyen des nombres p et q qui forment une décomposition d'un nombre impair plus petit que $p\delta + q\delta$; car si $(p + q)\delta$ est impair, $p + q$ l'est également.

8.

Il existe différentes manières de produire ces triangles, dont une consiste en ce que (si vous prenez) deux nombres quelconques se suivant | d'après l'ordre naturel, la somme des deux (nombres) est un côté du triangle, et le produit de l'un des deux (nombres) par l'autre (pris) deux fois est le second côté du même triangle. fol. 82 verso

OBSERVATIONS.

Prenant deux nombres consécutifs m et $m + 1$ on a

$$[m + (m + 1)]^2 + [2m(m + 1)]^2 = [2m(m + 1) + 1]^2.$$

Cette règle est exactement celle que Proclus, dans son Commentaire du premier Livre des Éléments d'Euclide (Éd. de Bâle, pag. 111; traduction de Barocius, Padoue 1560, pag. 271) attribue à Pythagore, et qu'il énonce de la manière suivante: « (Cette méthode) pose le nombre donné impair comme le plus petit des deux côtés comprenant l'angle droit; prenant le carré du même nombre, et en retranchant une unité, elle pose la moitié du reste comme le plus grand des deux côtés comprenant l'angle droit; ajoutant de nouveau à celui-ci une unité, elle forme le côté qui reste, à savoir l'hypoténuse. » Or, désignant le nombre donné impair par $2m + 1$, on a précisément

$$\begin{aligned}2m + 1 &= m + (m + 1) \\ \frac{(2m + 1)^2 - 1}{2} &= 2m(m + 1) \\ \frac{(2m + 1)^2 - 1}{2} + 1 &= 2m(m + 1) + 1\end{aligned}$$

Ces expressions montrent en même temps que cette formule donne toujours des triangles primitifs; car $2m + 1$ est premier à $(2m+1)^2 - 1$ et à $(2m+1)^2 + 1$; et

$$\frac{(2m+1)^2 - 1}{2}, \frac{(2m+1)^2 + 1}{2}$$

sont premiers entre eux comme ayant pour différence l'unité.

9.

Et (si vous prenez) trois nombres quelconques, se suivant en succession continue d'après l'ordre naturel, le produit du premier de ces (nombres) par le troisième est un côté d'un de ces triangles, et le produit du (nombre) moyen par deux est toujours le second côté du même triangle.

Si l'on additionne le premier et le troisième (nombre), il en résulte pareillement le second côté, parce que tout nombre est la moitié des (deux nombres) qui l'avoisinent. Il revient donc au même que nous multiplions le (nombre) moyen par deux, ou que nous additionnions la deux extrêmes.

(Il faut remarquer) cependant que, si le premier et le dernier des trois nombres sont impairs, il en résulte par cette opération un triangle qui est souche de son espèce; et si le premier et le dernier sont pairs, il résulte par cette opération un triangle qui appartient à une espèce qui s'est déjà présentée antérieurement.

S'il en est ainsi, il résulte de cette proposition que si l'on multiplie un nombre pair quelconque par deux, le produit est un côté d'un de ces triangles qui est souche de son espèce; et si on multiplie l'un par l'autre les deux nombres impairs qui se trouvent placés des deux côtés de ce nombre pair, le produit est le second côté du même triangle.

Par exemple (prenons) un, deux, trois. Le produit de deux par deux est un côté d'un triangle (rectangle), c'est quatre; et l'unité fois trois est trois, ce qui est le second côté du même triangle. De même (prenons) trois, quatre, cinq. Le produit du quatre par deux est huit, ce qui est un côté d'un triangle (rectangle); et le produit du trois par cinq est quinze, ce qui est le second côté du même triangle. Et pareillement des autres.

Quant aux (cas où les deux extrêmes sont des nombres) pairs, (prenons) par exemple deux, trois, quatre. Le produit du trois par deux est six, ce qui est un côté d'un triangle (rectangle); et le produit du deux par le quatre est huit, ce qui est le second côté du même triangle; si ce n'est

que ce triangle est de l'espèce du triangle souche qui est trois et quatre avec l'hypoténuse cinq. Entendez cela, si Dieu le permet.

OBSERVATIONS.

Prenant trois nombres consécutifs $m-1$, m , $m+1$, on a

$$[(m-1)(m+1)]^2 + (2m)^2 = (m^2+1)^2.$$

Cette règle est identique à celle que Proclus, à l'endroit que je viens de citer, attribue à Platon, et qu'il énonce en ces termes : « Le méthode de Platon prend pour point de départ les nombres pairs. Car prenant un nombre pair donné, elle le pose comme un des deux côtés comprenant l'angle droit; et partageant ce nombre en deux parties égales, prenant le carré de la moitié, et ajoutant une unité au carré, elle produit l'hypoténuse: mais retranchant une unité du carré, elle produit le second des deux côtés qui comprennent l'angle droit. » Cela revient à poser la formule

$$(m^2-1)^2 + (2m)^2 = (m^2+1)^2.$$

Il est évident que, si m est un nombre impair $2\mu+1$, le triangle n'est pas primitif, parce que les trois côtés sont divisibles par 2; car on a dans ce cas

$$m^2-1=2(2\mu^2+2\mu), \quad 2m=2(2\mu+1), \quad m^2+1=2(\mu^2+2\mu+1).$$

Au contraire si m est pair, m^2-1 et m^2+1 sont impairs et par conséquent premiers entre eux; car ayant pour différence 2, s'ils avaient un facteur commun, ce ne pourrait être que 2; comme, en outre, $2m$ est en ce cas premier à m^2+1 et à m^2-1 , ceux-ci n'étant ni pairs, ni divisibles par m : il s'ensuit que, si m est pair, le triangle produit est toujours primitif.

On voit du reste que, dans le cas où m est impair, les moitiés des côtés du triangle que l'on obtient, sont les côtés d'un triangle rectangle primitif formé d'après la règle de Pythagore.

10.

(Si l'on prend) quatre nombres consécutifs quelconques suivant l'ordre naturel, et si on multiplie l'un des deux moyens par l'autre (pris) deux fois, le résultat est un côté d'un de ces triangles qui est souche de son espèce; et si l'on additionne les deux extrêmes, le résultat est le second côté du même triangle.

Par exemple (prenons) un, deux, trois, quatre. Le produit de deux par trois (pris) deux fois, est douze, ce qui est un côté d'un de ces triangles: et la somme de l'un et du quatre qui sont les deux extrêmes, est cinq, ce qui est le second côté du même triangle. Il en est de même des autres nombres. Donc (soient proposés) deux, trois, quatre, cinq. Si vous multipliez le

trois par la quatre (pris) deux fois, c'est vingt quatre, ce qui est un côté d'un triangle (rectangle); et si vous additionnez le deux et la cinq, c'est sept, ce qui est le second côté du même triangle.

fol. 83 recto.

Il est indifférent pour cette règle, et en opérant de cette manière, que ce soient quatre, six, ou huit nombres consécutifs, | parce que la somme des deux termes extrêmes est toujours exactement la même, que ceux-ci soient rapprochés ou éloignés du milieu. Seulement, si (ces nombres) s'écartent de plus en plus des deux (termes) moyens (en augmentant) des deux en deux nombres, vous aurez successivement des (triangles rectangles d') espèces différents, lorsque les deux (termes) moyens changent; mais lorsque ceux-ci restent identiquement les mêmes, le triangle ne change point du tout, quelle que soit d'ailleurs la distance du milieu (de la suite des nombres choisis aux deux nombres extrêmes).

Exemples du cas où les deux (termes) moyens changent. Un, deux, trois, quatre: les deux (termes) moyens sont deux et trois. Un, deux, trois, quatre, cinq, six: les deux (termes) moyens sont trois et quatre. Pareillement un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit: les deux (termes) moyens sont quatre et cinq. Chacun des triangles qui résultent de ces (termes) moyens est d'une espèce différente de celle des autres.

Exemples du cas où ne changent ni les deux (termes) moyens, ni le triangle. Trois, quatre, cinq, six: les deux (termes) moyens sont quatre et cinq. Et si vous posez six nombres dont le premier est deux et le dernier sept, ou huit nombres dont le premier est un et le dernier huit, les deux (termes) moyens restent exactement les mêmes, et (on n'obtient qu')un seul triangle. Entendez cela, si Dieu le permet.

OBSERVATIONS.

La règle énoncée dans le premier alinéa du présent numéro est identique à celle du N.º 8. Car prenons quatre nombres consécutifs: $m-1$, m , $m+1$, $m+2$. La somme des deux termes extrêmes et le double produit des deux termes moyens sont respectivement

$$2m+1 \text{ et } 2m(m+1),$$

c'est à dire exactement le mêmes expression que celles que l'on a trouvées pour le deux cathètes dans les observations 8.

Quant aux deux autres remarques de l'auteur, il est évident que, tant les deux termes moyens restent les mêmes, la distance des deux termes extrêmes est indifférente, parce que

$$(m-1) + (m+2) = (m-1-x) + (m+2+x);$$

mais que le changement des termes moyens entraîne celui du triangle, parce que

$$2(m + \beta)(m + \beta + 1) > 2m(m + 1)$$

et aussi $> 2m + 1$, tandis que, quand même on pourrait faire

$$2(m - \beta)(m - \beta + 1) = 2m + 1$$

(ce qui est impossible, parce qu'un nombre pair ne peut pas être égal à un nombre impair), on aurait pourtant

$$(m - \beta - 1) + (m - \beta + 2) < 2m(m + 1) .$$

(Continuera)

MATEMATICA. — *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise déconvertis et publiés Par. M. le prince БАЛТНАСАВ БОЖОМПАНИ et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des Arabes. Par M. F. ВОЗРСКЕ (Continuazione) (1).*

11.

Si nous allions chercher les autres manières de produire ces triangles, cela augmenterait considérablement l'étendue de ce traité.

Car (si nous prenons) trois nombres impairs consécutifs quelconques suivant l'ordre naturel, tels que trois, cinq et sept, ou cinq, sept et neuf : le (nombre) moyen multiplié par quatre est toujours un côté d'un de ces triangles qui est souche de son espèce, et le produit de l'un des deux extrêmes par l'autre est le second côté du même triangle.

Et (si nous prenons) quatre nombres impairs quelconques suivant le même ordre, le produit de l'un des deux (nombres) moyens par l'autre est un côté d'un de ces triangles qui est souche de son espèce, et la somme des deux extrêmes est le second côté du même triangle.

Mais ce que nous venons de donner sur cette matière est suffisant, attendu que rien de ce dont on a besoin, n'a été passé sous silence.

La méthode au moyen de laquelle vous pourrez reconnaître que vous avez obtenu tous les (triangles) que vous vous étiez proposé de chercher, de sorte qu'il ne se présente pour vous aucune difficulté ni aucune incertitude dans cette opération, est celle que je vous ai déjà expliquée, (et qui consiste) à connaître les hypoténuses et leur ordre d'après la suite que je vous ai déclinée, et à les mettre sous vos yeux, afin que vous rapportiez à chacune de ces hypoténuses les côtés qui y appartiennent, quelle que soit celle des méthodes ci-dessus mentionnées par laquelle ils aient été obtenus. Et cela vous sera facile, si Dieu le permet.

OBSERVATIONS.

Prenant trois nombres impairs consécutifs.

$$2m - 1, \quad 2m + 1, \quad 2m + 3$$

(1) Continuazione; vedi pag. 227.

on a

$$1) \quad \{4(2m+1)\}^2 + \{(2m-1)(2m+3)\}^2 = \{(2m+1)^2 + 4\}^2$$

ce qui est la première des deux règles énoncées par l'auteur; elle donne évidemment lieu à un triangle rectangle primitif; car les nombres $2m-1$, $2m+3$ étant impairs et premiers entre eux, les côtés $4(2m-1)$ et $(2m-1)(2m+3)$ sont également premiers entre eux.

On peut généraliser cette formule en prenant les trois nombres

$$bm+c-b, \quad bm+c, \quad bm+c+b$$

qui donnent lieu au triangle rectangle

$$2) \quad \{2b(bm+c)\}^2 + \{(bm+c-b)(bm+c+b)\}^2 = \{(bm+c)^2 + b^2\}^2.$$

La formule 2) se réduit à la formule 1) pour $b=2$, $c=1$; et elle donne la règle de Platon, si l'on fait $b=1$, $c=0$.

Prenant quatre nombre impairs consécutifs

$$2m-3, \quad 2m-1, \quad 2m+1, \quad 2m+3$$

on a

$$3) \quad \{(2m-1)(2m+1)\}^2 + \{(2m-3) + (2m+3)\}^2 = \{(2m)^2 - 1\}^2 = \{(2m)^2 + 1\}^2$$

ce qui est la seconde des deux règles énoncées par l'auteur. On voit que les triangles rectangles représentés par cette formule sont compris parmi ceux que donne la règle de Platon, et que ce sont tous ceux de ces derniers triangles rectangles qui sont primitifs. Comparer les observations 9.

Du reste toutes les règles particulières proposées dans les numéros 8 à 11, sont contenues dans la formule précédemment proposée

$$\{(a+b)(a-b)\}^2 + \{2ab\}^2 = \{a^2 + b^2\}^2;$$

car en y faisant $a=bm+c$, on obtient la formule 2); en faisant $a-b=1$, la règle de Pythagore; et en faisant $b=1$, la règle de Platon.

Le dernier alinéa du présent numéro rappelle un passage du N.^o 6 (voir ci-dessus pag. 220, lig. 23 à 34) et le commencement du N.^o 7. Quant à la suite des nombres qui peuvent être hypoténuses de triangles rectangles primitifs, il en a été question ci-dessus aux numéros 3 et 4.

12.

Parmi les (propriétés) qui se présentent dans ces triangles, et qui leur sont naturellement inhérentes (nous devons mentionner) aussi que, si les nombres impairs sont rangés à partir du trois suivant l'ordre naturel, que l'on divise chacun de ces nombres en deux parties dont l'une dépasse l'autre seulement d'une unité, et que l'on forme un moyen de ces parties-les côtés d'un de ces triangles de la manière que nous avons décrite: alors l'aire du

triangle qui résulte du premier nombre, à savoir du trois, est égale à la moitié de la somme de ses côtés; l'aire du triangle qui résulte du second nombre, à savoir du cinq, est égale à la somme de tous ses côtés; l'aire du triangle qui résulte du troisième nombre, à savoir du sept, est égale à la somme de ses côtés une fois et demie; puis pour le quatrième l'aire est égale à deux fois les côtés, pour le cinquième à deux fois et demie, et ainsi de suite en augmentant toujours de la moitié d'une fois, et en montant dans les nombres jusqu'où vous voudrez. Ceci est la première section (de triangles).

Dans la seconde section, qui est celle où l'excès de l'une des deux parties (au moyen desquelles on forme le triangle) sur l'autre [est égal à trois], comme pour le cinq lorsqu'on le divise en un et quatre, ou le sept lorsqu'on le divise en deux et cinq: l'aire du triangle qui résulte du premier de ces nombres, est égale à la somme de ses côtés une fois et demie; pour le second nombre c'est trois fois, pour le troisième quatre fois et demie, pour le quatrième six fois, et ainsi de suite, chaque nombre ajoutant à celui qui le précède une fois et demie, pendant que vous monterez dans les nombres jusqu'où vous voudrez.

Dans la troisième section le premier (triangle a pour aire) deux fois et demie (la somme des côtés), puis on ajoute continuellement deux fois et demie.

Dans la quatrième section le premier (triangle a pour aire) trois fois et demie (la somme des côtés), puis on ajoute continuellement trois fois et demie.

En général entre deux sections (consécutives) quelconques l'augmentation du multiple (de la somme des côtés qui exprime l'aire) est d'une fois; ensuite le nombre ainsi déterminé reste fixe (comme différence) entre (les aires des triangles correspondant à) deux nombres (impairs consécutifs) quelconques (relativement à la même section).

OBSERVATIONS.

Partageant le nombre impair $2n + 1$ dans les deux parties

$$n - a, \quad n + a + 1,$$

formant au moyen de ceux-ci, d'après la règle donnée par l'auteur au numéro 6, le triangle rectangle:

$$\{ (n+a+1) - (n-a) \} \{ (n+a+1) + (n-a) \}^2 + \{ 2(n+a+1)(n-a) \}^2 = \{ (n+a+1)^2 + (n-a)^2 \}^2,$$

et désignant l'aire du triangle par A et son périmètre par P, on a

$$A = \{(n + a + 1)^2 - (n - a)^2\}(n + a + 1)(n - a) = (2n + 1)(2a + 1)(n + a + 1)(n - a)$$

$$P = 2(n + a + 1)^2 + 2(n + a + 1)(n - a) = 2(2n + 1)(n + a + 1)$$

d'où

$$\frac{A}{P} = \frac{(2a + 1)(n - a)}{2}$$

Pour avoir les expressions relatives à la $p^{\text{ième}}$ section on fera $a = p - 1$, et pour avoir l'expression relative au $q^{\text{ième}}$ triangle de la $p^{\text{ième}}$ section on fera $n = p + q - 1$, de sorte que $n - a = q$.

Il suit de là que la différence de deux valeurs consécutives de $\frac{A}{P}$ appartenant à la même (soit à la $p^{\text{ième}}$) section est $\frac{2p - 1}{2}$, donc constante pour cette section; que la différence de deux valeurs de $\frac{A}{P}$ prises au même (soit au $q^{\text{ième}}$) rang dans deux sections consécutives est q , et pour le premier rang 1; enfin on voit que la différence constante des valeurs de $\frac{A}{P}$ pour la $p^{\text{ième}}$ section, est égale à la première valeur de $\frac{A}{P}$ dans cette section; cette valeur étant pareillement $\frac{2p - 1}{2}$.

13.

Lorsqu'on double les côtés d'un de ces triangles, l'aire du second triangle est égale à quatre fois celle du premier, et le rapport de l'aire à (la somme des) côtés est le double du rapport (qui a lieu dans le) premier (triangle). Et d'autant de fois vous augmentez les côtés, d'autant de fois est augmenté le rapport (qui a lieu dans le) premier (triangle). Donc (au cas où l'on a doublé les côtés), si (dans) le premier (triangle l'aire est) égale à (la somme des) côtés, (dans) le second (elle) en est le double; et si (dans) le premier (elle) en est la moitié, (dans) le second (elle) est égale à la (somme des côtés).

Et lorsqu'on ajoute aux côtés des parties aliquotes, ou qu'on en ôte des parties aliquotes, le rapport des aires (aux périmètres) est (changé) dans la même proportion.

Ceci donne lieu à l'invention de problèmes (où il est question) de rapports des aires aux (sommes des) côtés, égaux dans les triangles et différents relativement aux souches,

OBSERVATIONS.

Le texte de ce numéro manque un peu de clarté par suite d'une trop grande concision. Toutefois le sens n'est pas douteux.

Désignant par x, y, z les côtés d'un triangle rectangle, par A et P son aire et son périmètre, et par A' et P' l'aire et le périmètre du triangle dont les côtés sont

$$x' = x + \frac{m}{n}x, \quad y' = y + \frac{m}{n}y, \quad z' = z + \frac{m}{n}z,$$

on a

$$A' = \left(\frac{n+m}{n}\right)^2 A, \quad P' = \frac{n+m}{n} P,$$

d'où

$$\frac{A'}{P'} = \frac{n+m}{n} \cdot \frac{A}{P},$$

donc

$$\frac{A' : P'}{A : P} = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

Lorsque en particulier $x' = 2x, y' = 2y, z' = 2z$, on aura

$$A' = 4A, \quad P' = 2P, \quad \frac{A'}{P'} = 2 \frac{A}{P};$$

donc

$$A' = 2P' \text{ si } A = P, \text{ et } A' = P' \text{ si } A = \frac{1}{2}P.$$

Quant aux problèmes auxquels l'auteur fait allusion dans le dernier alinéa, il paraît qu'on s'y proposait de trouver deux triangles rectangles non primitifs dans lesquels la valeur du rapport $A : P$ était la même, tandis que cette valeur était différente dans les deux triangles primitifs dont les premiers étaient dérivés. C'est ce qu'on obtient en multipliant les côtés du premier des deux triangles primitifs par $(2x' + 1)(n' - a')$ et ceux du second par $(2x + 1)(n - a)$. Ces triangles devaient en outre satisfaire à d'autres conditions qui variaient d'un problème à l'autre. Mais je donne cette explication comme une simple conjecture.

Parmi les (propriétés) qui sont naturellement inhérentes à ces (triangles, nous devons mentionner) que l'excès de l'hypoténuse sur l'un des deux côtés qui comprennent l'angle (droit), à savoir celui des deux qui est pair, est toujours nécessairement un nombre dont on peut extraire la racine, et que ce nombre dont on peut extraire la racine est la différence entre les deux nombres au moyen desquels on a produit les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle, multipliée par elle-même. En même temps l'excès de l'hypo-

ténuse sur l'autre côté qui est le (côté) impair, est toujours nécessairement le double d'un nombre dont on peut extraire la racine, lequel nombre dont on peut extraire la racine résulte de la multiplication du plus petit des deux nombres | au moyen desquels on a produit les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle, par lui-même.

OBSERVATION.

On a en effet $(a^2 + b^2) - 2ab = (a - b)^2$ et $(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) = 2b^2$.

15.

Nous avons déjà dit, dans le premier chapitre, qu'il faut, pour connaître les côtés qui comprennent l'angle droit, diviser l'hypoténuse au moyen de laquelle on a besoin de connaître ces (côtés), dans ses deux parties dont on peut extraire la racine. Il est donc nécessaire pour cela (de posséder) une méthode expéditive qui rende cette recherche facile.

Cette (méthode) est (fondée) sur ce que vous savez déjà, (à savoir) que les hypoténuses de ces triangles sont toujours exclusivement impaires; et les (nombres) impairs sont seulement les suivants: un, trois, cinq, sept, neuf.

Sachez donc que l'unité (combinée) avec les dizaines, se divise en cinq et six seulement; et si (le nombre) dépasse cent, il peut se diviser en (l'unité) même et cent ou des centaines, lorsque celles-ci sont de nature qu'on puisse en extraire la racine.

Le trois (combiné) avec les dizaines et les centaines, est divisible seulement en quatre et neuf.

Le cinq lui-même se divise en un et quatre. (Combiné) avec les dizaines, il se divise de la même manière, et en six et neuf; et avec les centaines pareillement. Il se peut aussi qu'il soit divisible en lui-même multiplié par lui-même, et des centaines dont on peut extraire la racine.

Le sept se divise, (combiné) avec les dizaines et les centaines, en un et six seulement.

Le neuf (combiné) avec les dizaines, se divise en cinq et quatre seulement. Lorsque (le nombre) dépasse cent, il se peut qu'il soit divisé dans le (neuf) même et cent ou des centaines, lorsque celles-ci sont de nature qu'on puisse en extraire la racine.

Conséquemment, si vous voulez diviser un nombre en deux nombres dont on puisse extraire la racine, ne cherchez pour chaque nombre que ce qui peut s'y trouver, en laissant de côté le reste. Cela facilitera la découverte de la chose cherchée, si telle est la volonté de Dieu.

OBSERVATIONS.

Les premières lignes du présent numéro me paraissent contenir une confirmation de ce que j'ai dit ci-dessus (observations 1.), à savoir que la partie perdue de ce fragment, qui formait le commencement du traité, n'était pas d'une étendue considérable; car l'auteur dit ici que la règle de trouver les deux côtés qui comprennent l'angle droit, en décomposant l'hypoténuse en deux carrés, faisait partie du premier chapitre, et cette règle est proposée ci-dessus dans le N.° 5. On peut conclure de là que ce qui nous manque de ce traité, ne formait qu'une partie, et même une assez petite partie du premier chapitre. Le manuscrit 952 bis Suppl. ar. n'offre plus de trace de cette division en chapitres mentionnée ici; la division en numéros adoptée dans la présente traduction, a été faite par moi, d'après la nature du contenu, pour faciliter l'intercalation des observations. Le manuscrit présente seulement en beaucoup d'endroits un petit signe composé de trois points et marquant des sections, mais ne correspondant évidemment pas aux chapitres dont il s'agit ici, et qui seraient déterminés au moyen de ce signe d'une façon fort arbitraire. On aura remarqué aussi que les théorèmes énoncés ne sont pas accompagnés de démonstrations, chose assez rare dans les traités mathématiques arabes. Il n'est pas impossible que le géomètre Alsijdzi, qui paraît avoir copié et recueilli pour son propre usage les morceaux contenus dans le ms. N.° 952 bis, ait supprimé la division en chapitres et les démonstrations d'un original plus complet qu'il avait sous les yeux. Mais ce n'est qu'une conjecture. En tout cas le morceau que la copie d'Alsijdzi nous a conservé, est antérieur à l'an 972 de notre ère, et un document précieux pour l'histoire des mathématiques chez les Arabes.

Le présent numéro nous fournit une nouvelle preuve de cette dernière assertion, en nous présentant en quelque sorte la première trace d'une considération des résidus quadratiques. Voici, en effet, sur quelles raisons est fondée la règle donnée par l'auteur pour abréger la recherche des couples de carrés dans lesquels on pourra décomposer des hypoténuses proposées. Il est évident que le premier chiffre à droite d'un nombre carré est résidu quadratique par rapport au module 10, ou 0; le premier chiffre d'un nombre, qui est la somme de deux carrés, sera donc un des nombres qu'on obtient en additionnant deux à deux les nombres 0, 1, 4, 5, 6, 9, et en retranchant 10 de la somme, s'il y a lieu. On obtient ainsi

$$\begin{array}{l} 0 + 0 \equiv 0 \quad 1 + 1 \equiv 2 \quad 4 + 4 \equiv 8 \quad 5 + 5 \equiv 0 \quad 6 + 6 \equiv 2 \quad 9 + 9 \equiv 8 \\ 0 + 1 \equiv 1 \quad 1 + 4 \equiv 5 \quad 4 + 5 \equiv 9 \quad 5 + 6 \equiv 1 \quad 6 + 9 \equiv 5 \\ 0 + 4 \equiv 4 \quad 1 + 5 \equiv 6 \quad 4 + 6 \equiv 0 \quad 5 + 9 \equiv 4 \\ 0 + 5 \equiv 5 \quad 1 + 6 \equiv 7 \quad 4 + 9 \equiv 3 \\ 0 + 6 \equiv 6 \quad 1 + 9 \equiv 0 \\ 0 + 9 \equiv 9 \end{array}$$

Ce tableau montre que chacun des nombres depuis 0 jusqu'à 9 ne correspond, comme premier chiffre d'une somme de deux carrés, qu'à un nombre très-restreint de combinaisons des deux premier chiffres de deux nombres carrés; c'est ce qu'on voit plus clairement encore en retournant les formules de ce tableau de la manière suivante :

$0 \equiv 0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 9, 4 \rightarrow 6, 5 \rightarrow 5$	$5 \equiv 0 \rightarrow 5, 1 \rightarrow 4, 6 \rightarrow 9$
$1 \equiv 0 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 6$	$6 \equiv 0 \rightarrow 6, 1 \rightarrow 5$
$2 \equiv 1 \rightarrow 1, 6 \rightarrow 6$	$7 \equiv 1 \rightarrow 6$
$3 \equiv 4 \rightarrow 9$	$8 \equiv 4 \rightarrow 4, 9 \rightarrow 9$
$4 \equiv 0 \rightarrow 4, 5 \rightarrow 9$	$9 \equiv 0 \rightarrow 9, 4 \rightarrow 5$

Ainsi, soit proposée une hypoténuse dont le premier chiffre est 3; pour trouver les carrés dans lesquels elle est décomposable, on n'aura à essayer que des carrés dont les premier chiffres sont 4 et 9. Ce second tableau explique complètement les règles données par l'auteur, si l'on remarque encore que 0, comme premier chiffre d'un carré, appartient toujours à des centaines au moins, jamais à des dizaines, attendu qu'un nombre carré ne peut commencer que par un nombre pair de zéros.

16.

Ayant fait cette observation relativement au (nombre) impair, nous devons mentionner aussi (ce qui concerne) les (nombres) pairs, quoique nous n'ayons pas besoin d'en parler en cet endroit, afin que notre discussion soit générale (et s'étende) aux deux (espèces de) nombres simultanément. Or, les nombres pairs sont deux, quatre, six, huit, dix.

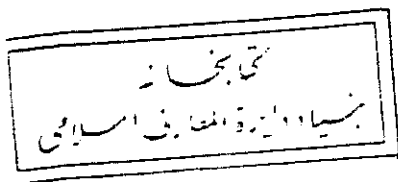
Le deux se divise en un et un; et (combiné) avec les dizaines et les centaines, de la même manière, et en six et six.

Le quatre (combiné) avec les dizaines, se divise en cinq et neuf seulement; si (le nombre) dépasse cent, il est possible qu'il se divise dans le (quatre) même et cent ou des centaines dont on peut extraire la racine.

Le six (combiné) avec les dizaines et les centaines, se divise en un et cinq seulement.

Le huit se divise en quatre et quatre; et (combiné) avec les dizaines et les centaines, de la même manière, et en neuf (et neuf).

Le dix se divise en un et neuf; et (combiné) avec les dizaines et les centaines, de la même manière, et en cinq et cinq, et en quatre et six.



OBSERVATION.

On voit par le second tableau des observations du numéro précédent que l'auteur oublie de faire mention des décompositions qui correspondent à $0 \equiv 0 + 0$ et $0 \equiv 0 + 0$.
Exemples: $116 = 110 + 16$, $200 = 100 + 100$.

17.

Sachez que tous ces triangles rectangles (en nombres) rationnels (jouissent de la propriété que) si l'on multiplie l'hypoténuse d'un deux par elle-même, et qu'on y ajoute ce qui résulte de la multiplication de l'un des deux côtés qui comprennent l'angle droit, par l'autre (pris) deux fois, il provient de cela un nombre qui a une racine rationnelle; et lorsqu'on retranche le produit de l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois de l'hypoténuse multipliée par elle-même, il résulte après cela un nombre qui a (également) une racine rationnelle.

fol. 84 ver.

La raison de cela, pour (le cas de) l'addition, est que, si une ligne quelconque est divisée en deux parties, le produit de chacune des deux parties par elle-même et le produit de l'une d'elles par l'autre (pris) deux fois, sont (ensemble) égaux au produit de la ligne entière par elle-même. Or, (le carré de) l'hypoténuse est dans chacun de ces triangles (la somme) des produits de chacun des deux côtés par lui-même: donc, si l'on y ajoute le produit de l'un d'eux par l'autre (pris) deux fois, la somme de cela est égale au produit des deux côtés (considérés) ensemble comme une seule ligne, par eux-mêmes; et puisque chacun d'eux est rationnel, la somme est rationnelle.

Quant à la raison pour (le cas de) la soustraction, (c'est) que, si une ligne quelconque est divisée en deux parties, la somme du produit de la ligne par elle-même et (du produit) de l'une des deux parties par elle-même, est égale au produit de la ligne par cette partie (pris) deux fois et au produit de l'autre partie par elle-même. Donc, si nous mettons le plus grand des côtés (comprenant l'angle droit) du triangle à la place de la ligne divisée, et si nous posons le plus petit côté comme une de ses deux parties, il reste l'autre partie comme la différence des deux côtés, laquelle est rationnelle; car chacun des deux côtés est rationnel, donc leur différence est également rationnelle. Or, comme la somme du produit de la ligne (entière), qui est l'un des deux côtés, par elle-même et du produit de l'une de ses parties qui est

l'autre côté, par elle-même est (égale à) l'hypoténuse (multipliée) par elle-même, et que cela est égal (aussi) au produit de la ligne (entière) par cette partie (pris) deux fois, qui est le produit de l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois, et au produit de l'autre partie par elle-même, (il s'ensuit que) le produit de l'hypoténuse par elle-même est égal au produit de l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois et au produit de la différence des deux côtés par elle-même. Conséquemment, si on retranche de l'hypoténuse (multipliée) par elle-même le produit de l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois, il reste la différence des deux côtés multipliée par elle-même; et ce (carré) est rationnel, parce que sa racine est rationnelle.

La démonstration de cela est exposée dans le second livre de l'ouvrage d'Euclide, et la répétition de ce que les anciens ont déjà expliqué dans leurs ouvrages serait une rédonance vide de sens.

OBSERVATION.

Si l'on a

$$1) \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

il s'ensuit immédiatement

$$2) \quad z^2 + 2xy = (x+y)^2, \quad 3) \quad z^2 - 2xy = (x-y)^2.$$

En remplaçant dans l'équation 2) x par a , y par b , et dans l'équation 3) x par $a+b$, y par a , donc $x-y$ par b , on aura

$$4) \quad a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 \quad 5) \quad (a+b)^2 - a^2 = 2(a+b)a - b^2.$$

ce qui est la traduction en formules algébriques des énoncés des propositions 4.^e et 7.^e du II.^e livre des Éléments d'Euclide.

18.

Ceci est aussi l'artifice le plus convenable pour (résoudre le problème de trouver) une quantité qui a une racine, et telle que, si l'on y ajoute un nombre connu, la somme a une racine, et que si l'on en retranche exactement le même nombre, le reste a une racine.

C'est encore (une propriété) inhérente aux triangles premiers que, pour tous ces nombres qui résultent comme sommes après l'addition, et comme restes après la soustraction, et qui ont des racines, le cinq ne se présente (comme premier chiffre à droite) dans aucune de leurs racines, et à cause de cela tous (ces nombres) ont nécessairement (pour premier chiffre) l'unité ou le neuf, et le cinq ne s'y trouve (comme premier chiffre) point du tout.

Nous en voyons un exemple dans le triangle dont l'hypoténuse est cinq, et dont les deux côtés (comprenant l'angle droit) sont quatre et trois, lequel est le premier. Si nous multiplions cinq par cinq, il résulte vingt cinq; et si nous multiplions l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois, il résulte vingt quatre. Or, si nous ajoutons cela à vingt cinq, il résulte quarante neuf, ce dont la racine, à savoir sept, est égale à la somme des deux côtés. Et si nous retranchons le vingt quatre du vingt cinq, il reste un, ce dont la racine est un; et cela est égal à l'excès de l'un des deux côtés sur l'autre.

Il en est de même du second triangle dont l'hypoténuse est treize, ce qui (multiplié) par lui-même donne cent soixant neuf. Les deux côtés du (même triangle qui comprennent l'angle droit) sont cinq et douze, et le produit de l'un d'eux par l'autre (pris) deux fois est cent vingt. | Or, si nous ajoutons cent vingt à cent soixante neuf, il résulte deux cent quatre-vingt neuf, ce dont la racine est dix-sept; et cela est égal à la somme des deux côtés. Et si nous retranchons cent vingt de cent soixante neuf, il reste quarante neuf, ce dont la racine est sept; et cela est l'excès de l'un des deux côtés sur l'autre.

fol. 95 recto

Il en est de même du reste de ces triangles, en suivant la même marche.

Donc, si nous avons trouvé un des triangles rectangles dont les côtés (comprenant l'angle droit) et l'hypoténuse sont (des nombres) rationnels, nous avons trouvé en même temps un nombre dont on peut extraire la racine (et tel que) lorsqu'on y ajoute un nombre connu, la (somme) qui en résulte a une racine; et lorsqu'on en retranche le même nombre connu, le reste a une racine.

Et si vous voulez former pour une des espèces de ces triangles un (triangle) dérivé au moyen des multiples ou des parties, vous multipliez chacun des côtés du triangle qui est la souche et le premier de son espèce, par le nombre des multiples auxquels vous voulez l'élever, ou par le nombre des parties, auxquelles vous voulez l'abaisser, et vous faites de ce qui résulte des côtés (ainsi multipliés) un triangle; celui-ci sera de la même espèce.

OBSERVATIONS.

L'auteur énonce ici en termes explicites le problème des nombres congruents, c'est à dire le problème de satisfaire simultanément aux deux équations indéterminées.

1)

$$x^2 + k = u^2, \quad 2) \quad x^2 - k = v^2$$

k étant un nombre donné. Ce qui donne à ce problème un intérêt tout particulier, c'est qu'il est intimement lié à plusieurs questions difficiles et fondamentales de l'analyse indéterminée qui ont été traitées par Fermat, Euler, Lagrange et Legendre. Aussi n'a-t-il pas manqué de fixer l'attention des historiens des mathématiques dès qu'ils en avaient remarqué l'existence dans les ouvrages de Léonard de Pise et de Luca Pacioli. C'est ainsi qu'il a été l'objet d'une étude approfondie de la part de Cossali (*Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra*, Vol. I, pag. 125 à 143), et qu'il a été signalé par M. Libri dans son *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (Vol. III, pagg. 139, 140 et 277 à 283). Il acquit une nouvelle importance lorsque M. le Prince Balthasar Boncompagni découvrit et publia trois ouvrages de Léonard de Pise, dont deux entièrement inconnus auparavant, et dont le troisième est le célèbre « Traité des nombres carrés » que pendant longtemps on avait cru complètement perdu, mais que le zèle infatigable de l'illustre savant que je viens de nommer, réussit à rendre à la science. Le Prince Boncompagni ne tarda pas à appeler l'attention des géomètres sur les parties du Traité des nombres carrés où Léonard de Pise résout le problème des nombres congruents, dans un mémoire intitulé : *Intorno alla risoluzione delle equazioni simultanee $x^2 + k = y^2$, $x^2 - k = z^2$* Nota di Baldassarre Boncompagni, et publié dans les *Annali di scienza matematica e fisica compilati da Barnaba Tortolini*, Tome sexto, Roma 1855, pages 135 à 154. Enfin M. Genocchi a consacré à la théorie des nombres congruents une partie considérable d'un mémoire intitulé : *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni nota analitica di Angelo Genocchi*. (Voir le même volume des *Annali di scienza mat. e fis.* pages 273 à 320).

On voit maintenant que ce problème a occupé les géomètres arabes dès la seconde moitié du X.^e siècle de notre ère (et probablement avant cette époque). Il est vrai que le problème de résoudre les deux équations indéterminées simultanées

$$x^2 + w = u^2$$

$$x^2 - w = v^2$$

se trouve déjà chez Diophante (voir *Arithmetica* V, 9. III, 22, et comparer III, 9. II, 20. IV, 48) qui n'a manqué de remarquer que tout triangle rectangle en nombres rationnels fournit une solution du problème. Mais ce qui distingue le point de vue où se place l'auteur arabe, c'est qu'il remplace l'inconnue w par un nombre k ; et qu'il a reconnu que le moyen de traiter le problème dans ce cas, est de dresser une table des solutions que fournissent les triangles rectangles en nombres entiers, afin qu'on puisse trouver dans cette table soit le nombre k même, soit ce nombre multiplié par un carré; et la solution ou les solutions correspondantes. C'est en effet la meilleure méthode possible, à moins qu'on ne s'attende à voir les Arabes trouver du premier coup: et les divers moyens particuliers qui permettent dans certains cas de reconnaître immédiatement si un nombre donné est ou n'est pas nombre congruent; et le principe de Fermat qui consiste à ramener des problèmes d'analyse indéterminée à des problèmes de même forme satisfaits par des nombres plus petits; et les méthodes de Fermat et de Lagrange pour traiter les équations biquadratiques dont la solution donne celle du problème exprimé par les équations simultanées 1) et 2).

L'auteur arabe a reconnu, en outre, qu'il suffit pour la construction de la table des nombres congruents, de former les triangles rectangles primitifs; mais d'un autre côté il n'exclut pas de sa considération les valeurs fractionnaires, ainsi que nous le voyons par l'allégué du présent numéro dans lequel il définit des triangles rectangles dérivés dont la for-

mule sera

$$\left(\frac{p}{q}x\right)^4 + \left(\frac{p}{q}y\right)^4 = \left(\frac{p}{q}z\right)^4.$$

si $x^2 + y^2 = z^2$ est la formule du triangle primitif. Or, nous avons vu que l'auteur a trouvé antérieurement pour les deux cathètes x et y les expressions $(a+b)(a-b)$ et $2ab$, et il vient de donner pour le nombre congruent l'expression $2xy$ par rapport aux triangles primitifs; il s'ensuit donc qu'il est en possession de l'expression suivante des nombres congruents

$$\frac{p^4}{q^2} 4ab(a+b)(a-b)$$

qui est la plus générale possible.

On remarquera surtout que le problème des nombres congruents n'est pas placé ici seulement par accident, ou comme un simple corollaire de la théorie des triangles rectangles en nombres rationnels. D'ailleurs nous verrons l'auteur du traité dont on trouvera plus loin la traduction, Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn, dire en propres termes que le but principal et essentiel de la théorie des triangles rectangles rationnels est la résolution du problème des nombres congruents, ce qui prouve assez que les Arabes avaient reconnu toute l'importance de ce problème.

La tendance à dresser des tables des solutions de problèmes indéterminés, tendance dont nous trouverons d'autres exemples dans le traité d'Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn qui contient une table des solutions de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$, et des tables de certaines solutions de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ cette tendance dis-je me paraît mériter d'être signalée comme caractéristique pour les mathématiciens arabes. Une autre particularité remarquable qui doit, dans le présent traité, fixer l'attention des historiens des mathématiques, ce sont les essais faits par l'auteur de découvrir pour les nombres qui satisfont à certaines conditions d'analyse indéterminée, des caractères qui consistent au fond à énoncer que ces nombres doivent être de telle forme par rapport à tel module, caractères qui forment la base de la théorie moderne des nombres. C'est ainsi que nous l'avons vu énoncer ci-dessus que les hypoténuses des triangles rectangles primitifs sont toujours de la forme $12m+1$ ou $12m+5$; que, lorsqu'il s'agit de décomposer un nombre donné $10m+r$ en deux carrés $10m'+r'$ et $10m''+r''$, r' et r'' ne peuvent avoir, à deux exceptions près, qu'une ou deux valeurs déterminées. C'est ainsi qu'il énonce dans le présent numéro que les carrés u^2 et v^2 des équations 1) et 2) ci dessus, ne sont jamais que de la forme $10m+1$ ou $10m+9$, lorsque la solution des équations 1) et 2) est fournie par des triangles rectangles primitifs (ou, comme dit l'auteur, par des triangles rectangles « premiers », (awâil).

Pour démontrer cette propriété des carrés u^2 et v^2 , rappelons que l'auteur a trouvé (voir observat. 17.)

$$u^2 = z^2 + 2xy = (x+y)^2, \quad v^2 = z^2 - 2xy = (x-y)^2,$$

et que nous avons vu ci dessus (observation 3.) que

$$x = (n+a+1)^2 - (n-a)^2, \quad y = 2(n+a+1)(n-a)$$

d'où

$$u = x+y = (2n+1)^2 - 2(n-a)^2, \quad v = x-y = (2a+1)^2 - 2(n-a)^2.$$

Ces expressions montrent en premier lieu que u et v sont des nombres impairs, de sorte que leurs carrés ne peuvent être que de l'une des formes $10m+1$, $10m+5$, $10m+9$; il s'agit de prouver que la forme $10m+5$ ne peut pas avoir lieu. En effet, si u^2 et v^2 étaient de la forme $10m+5$, c'est à dire divisibles par 5, u et v devraient également être divisibles par 5. Mais u et v sont de la forme f^2-2g^2 , où f^2 ne peut être par rapport au module 5 que de l'une des formes

$$5m, \quad 5m+1, \quad 5m+4$$

et par conséquent $2g^2$ d'une des formes

$$5m, \quad 5m+2, \quad 5m+3;$$

il suit de là que f^2-2g^2 ne peut être divisible par 5 que lorsque f et g , c'est à dire $2n+1$ et $n-a$, ou $2a+1$ et $n-a$ le sont simultanément. Or si $2n+1$ ou $2a+1$ étaient divisibles par 5 en même temps que $n-a$, $(2n+1)-(n-a)$ ou $(2a+1)-(n-a)$ c'est à dire $n+a+1$ le serait également; donc $n-a+1$ et $n-a$ auraient un facteur commun, et, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus (observations 3.), le triangle rectangle formé au moyen des nombre $n+a+1$ et $n-a$, ne serait pas primitif, ce qui est contraire à l'hypothèse.

19.

Nous avons inscrit dans le tableau qui se trouve à la suite de cette dissertation, les nombres impairs au moyen des parties desquels on forme ces triangles, et les parties dans lesquelles on divise ces nombres, (en mentionnant) celles de ces parties qu'on emploie, et celles qu'on laisse de côté à cause de l'existence de facteurs communs, comme nous l'avons expliqué; (nous y avons inscrit en outre) les côtés qui sont engendrés au moyen de ces (parties); les hypoténuses qui sont les souches de chacune des espèces; ces hypoténuses multipliées par elles-mêmes; ce qui résulte de la multiplication de l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) de chacun des triangles par l'autre (pris) deux fois; ce qui résulte lorsque ce (produit) est ajouté à l'hypoténuse multipliée par elle-même, et la racine de cela; et ce qui résulte de la soustraction du même (produit) de l'hypoténuse multipliée par elle-même, et la racine de cela. Nous avons proposé ces (quantités) pour les hypoténuses dont la première est cinq; et la dernière deux cent cinq, afin que celui qui examine (ce tableau) les ait visiblement sous les yeux, et qu'il puisse y prendre facilement ce dont il a besoin en fait de ces (choses), si telle est la volonté de Dieu.

Les nombres impairs suivant l'ordre.	3	5
Les (deux) parties entières dans lesquelles on divise les nombres impairs, et qui sont les racines des deux parties de l'hypoténuse dont on peut extraire la racine.	2, 1	2, 3
Le côté qui résulte de la multiplication de la somme des deux parties par leur différence, et qui est toujours impair.	3	5
Le côté qui résulte du produit de l'une des deux parties par l'autre, (pris) deux fois, et qui est toujours pair.	4	12
L'hypoténuse, qui est toujours impaire. Chacune de ces hypoténuses suit la précédente d'après l'ordre que nous avons défini. L'hypoténuse est la somme des deux parties multipliées chacune par elle-même.	5	13
Le produit de l'hypoténuse par elle-même, lequel est une quantité qui a une racine, (et qui jouit de la propriété que) si on y ajoute un (certain) nombre, la (somme) a une racine, et si on en retranche le même nombre, ce qui reste a une racine.	25	169
Le produit de l'un des deux côtés par l'autre, (pris) deux fois, ce qui est le nombre tel que si on l'ajoute à l'hypoténuse multipliée par elle-même, ou si on l'en retranche, ce qui résulte de l'addition et de la soustraction, a une racine.	24	120
L'hypoténuse multipliée par elle-même à laquelle on a ajouté ce nombre, laquelle (somme) a une racine.	49	289
La racine de cette (somme), qui est la somme des deux côtés dont on a pris deux fois le produit de l'un par l'autre.	7	17
L'hypoténuse multipliée par elle-même dont on a retranché le nombre ci-dessus, laquelle (différence) a une racine.	1	49
La racine de cette (différence), qui est l'excédant de l'un des deux côtés sur l'autre.	1	7

fol. 85 verso

7, 49	23, 529	240	289	17	8	15	4, 1	5
17, 289	31, 961	336	625	25	24	7	4, 3	7
1, 1	41, 1681	840	841	29	20	21	5, 2	7
23, 529	47, 2209	840	1369	37	12	35	6, 1	7
31, 961	49, 2401	720	1681	41	40	9	5, 4	9

L'hypoténuse qui suit dans l'ordre après quarante et un, est quarante neuf. Il est impossible que cette (hypoténuse) sous-tende un angle droit dont les deux côtés soient rationnels et souche de leur espèce; parce qu'elle n'est pas divisible en deux nombres dont on puisse extraire la racine. — Les deux parties du neuf qui suivent après le quatre et la cinq, sont trois et six; mais ces nombres ont un diviseur commun, et le triangle qui en résulte a pour côtés trente six, vingt et quarante cinq; il est donc de l'espèce du premier triangle qui est quatre, trois et cinq.

17, 289	73, 5329	2520	2809	53	28	45	7, 2	9
49, 2401	71, 5041	1320	3721	61	60	11	6, 5	11
47, 2209	79, 6241	2016	4225	65	16	63	8, 1	9
23, 529	89, 7921	3696	4225	65	56	33	7, 4	11

L'hypoténuse soixante cinq revient ici dans deux triangles, et tient lieu de l'hypoténuse quarante neuf qui manque.

7, 49	103, 10609	5280	5329	73	48	55	8, 3	11

L'hypoténuse qui suit dans l'ordre après soixante treize, est soixante dix-sept; à ce (nombre) la présente opération ne peut pas s'appliquer, parce qu'il n'est pas divisible en deux nombres dont on puisse extraire la racine.

41, 1681	113, 12769	5544	7225	85	36	77	9, 2	11
71, 5041	97, 9409	2184	7225	85	84	13	7, 6	13

L'hypoténuse quatre-vingt cinq revient ici dans deux triangles souches, et tient lieu de l'hypoténuse soixante dix-sept qui manque.

41, 1681	119, 14161	6240	7921	89	80	39	8, 5	13
7, 49	137, 18769	9360	9409	97	72	65	9, 4	13
79, 6241	119, 14161	3960	10201	101	20	99	10, 1	11
31, 961	151, 22801	10920	11881	109	60	91	10, 3	13
97, 9409	127, 16129	3360	12769	113	112	15	8, 7	15

L'hypoténuse qui suit dans l'ordre après cent treize est cent-vingt un; à ce (nombre) la présente opération ne peut pas s'appliquer, parce qu'il n'est pas divisible en deux nombres dont on puisse extraire la racine. — Des parties du quinze il reste encore: les deux parties six et neuf, qui ont un diviseur commun, et dont il résulte l'espèce douze et cinq avec l'hypoténuse treize; les deux parties cinq et dix, qui ont pareillement un diviseur commun, et dont il résulte l'espèce quatre, trois et cinq; et les deux parties trois et douze qui ont un diviseur commun,

86 recto.

et dont il résulte l'espèce quinze et huit, avec l'hypoténuse dix-sept.										
73,	5329	161,	25931	10296	15625	125	44	117	11, 2	13
L'hypoténuse qui suit dans l'ordre après cent vingt cinq, est cent trente trois; la présente opération ne peut pas s'appliquer non plus à ce (nombre) pour la cause que nous avons mentionnée.										
17,	289	193,	37249	18480	18769	137	88	105	11, 4	15
119,	14161	167,	27889	6864	21025	145	24	143	12, 1	13
127,	16129	161,	25921	4896	21025	145	144	17	9, 8	17
L'hypoténuse cent quarante cinq revient ici dans deux triangles souches différents, et tient lieu de ce qui manque.										
89,	7921	191,	36481	14280	22201	149	140	51	10, 7	17
47,	2209	217,	47089	22440	24649	157	132	85	11, 6	17
L'hypoténuse qui suit après cent cinquante sept, est cent soixante un; la présente (opération) ne peut pas s'appliquer non plus à ce (nombre) pour la cause qui a été mentionnée.										
1,	1	239,	57121	28560	28561	169	120	119	12, 5	17
113,	12769	217,	47089	17160	29929	173	52	165	13, 2	15
161,	25021	199,	39601	6840	32961	181	180	19	10, 9	19
49,	2401	257,	66049	31824	34225	185	104	153	13, 4	17
119,	14161	233,	54289	20064	34225	185	176	57	11, 8	19
L'hypoténuse cent quatre-vingt cinq revient ici dans deux triangles souches différents, et tient lieu de ce qui manque.										
73,	5329	263,	69169	31920	37249	193	168	95	12, 7	19
167,	27889	223,	49729	10920	38809	197	28	195	14, 1	15
103,	10609	271,	73441	31416	42025	205	84	187	14, 3	17
23,	529	280,	83521	41496	42025	205	156	133	13, 6	19
L'hypoténuse deux cent cinq revient ici dans deux triangles souches différents, et tient lieu de ce qui manque.										

FIN DU TRAITÉ.

OBSERVATIONS.

Je ferai remarquer en premier lieu que les nombres du tableau qui précède, sont écrits, dans le ms. 952 bis suppl. arabe, en chiffres indiens, et non pas au moyen des lettres numériques, circonstance qui, par la date ancienne du manuscrit (voir observations 4.), acquiert un intérêt particulier pour la question de la propagation des chiffres indiens en Orient. J'ai déjà signalé ce fait historique dans une courte note insérée dans les *Annali di scienze matematiche e fisiche* publiés par M. Tortolini (Vol. VI, pag. 321 à 323), et le tableau dont on vient de lire la reproduction, est celui auquel j'ai fait allusion à l'endroit cité (pag. 323, lig. 12 et suiv.). Je profite de la présente occasion pour ajouter que l'on sait par l'Histoire des Dynasties d'Abou'l Pharadje (Édition de Pococke, Oxford, 1663, in 4.^e, pag. 215, lig. 6 à 23 de la traduction latine) et par les Biographies des médecins d'Ibn Qatbiab (Ms. 673, suppl. arabe de la Bibliothèque Impériale, fol 130 v.^e, lig. 32 à fol. 131 r.^e, lig. 11) que le médecin Nazhif mentionné dans la même note, vécut à la cour de sultan Bouide Adhâd Al-daoulah (mort en 372 de l'hégire, 983 de notre ère).

On voit que les nombres du tableau sont rangés suivant l'ordre de grandeur des hypoténuses qui se trouvent dans la 3.^e colonne en allant de droite à gauche. Cela est conforme à ce que l'auteur a dit précédemment à ce sujet; comparer ci-dessus pag. 220 pag. 222 lig. 6; pag. 241, lig. 19.

Quant aux observations intercalées par l'auteur dans ce tableau, elles rappellent pour les nombres de la forme $12m + 1$ ou $12m + 3$ non divisibles en deux carrés, les passages ci-dessus pag. 213, lig. 14 en remontant, et lig. dernière pour les nombres impairs divisibles en deux parties qui ont un facteur commun, le passage pag. 222, lig. 6 et suiv.; pour les hypoténuses qui se présentent plus d'une fois, et qui « tiennent lieu », comme dit l'auteur, « de ce qui manque », le passage pag. 217, lig. 6 et suiv.

Les nombres du tableau présentent dans le ms. arabe un certain nombre de fautes consistant en ce que le copiste a quelquefois omis un chiffre d'un nombre, et quelquefois à la place d'un chiffre en a mis un autre que par sa forme ressemblait à celui qu'il fallait mettre. La loi de formation de ces nombres étant d'ailleurs connue, on reconnaît sur le champ, et sans qu'il puisse rester le moindre doute à cet égard, que ce sont de simples fautes de copie; je crois donc inutile de les énumérer ici une à une.

Les nombres contenus dans les neuf colonnes du tableau en allant de droite à gauche, sont respectivement de la forme suivante :

$$1.^{\circ} \quad 2n + 1 = a + b.$$

$$2.^{\circ} \quad a, \quad b.$$

$$3.^{\circ} \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

$$4.^{\circ} \quad 2ab.$$

$$5.^{\circ} \quad a^2 + b^2.$$

$$6.^{\circ} \quad (a^2 + b^2)^2.$$

$$7.^{\circ} \quad 2(2ab)[(a + b)(a - b)] = 4ab(a^2 - b^2).$$

$$8.^{\circ} \quad (a^2 + b^2)^2 + 4ab(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2 + 2ab)^2, \quad a^2 - b^2 + 2ab.$$

$$9.^{\circ} \quad (a^2 + b^2)^2 - 4ab(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2 - 2ab)^2, \quad = (a^2 - b^2 - 2ab).$$

La septième colonne est celle qui contient les nombres congruents. En appelant nombres congruents primitifs les nombres congruents débarrassés de tous leurs facteurs quadratiques, on trouve que la table de l'auteur arabe contient les nombres congruents primitifs suivants :

5	34	210	420	2730
6	65	231	546	3370
14	70	231	1165	4290
15	110	286	1254	5610
21	154	330	1785	7854
30	190	390	1905	10374

Cette table fournit donc en 34 lignes 30 nombres congruents primitifs, tandis que la table de Cossali (*Origine etc. dell'algebra*, Tome I, pag. 126) en 29 lignes n'en fournit que 12, qui sont tous contenus parmi ceux ci-dessus, à savoir :

5, 6, 14, 15, 21, 30, 70, 210, 231, 330, 390, 546.

La table de Fra Luca Pacioli (*Summa de Arithmetica* etc. Toscolano. 1523, fol. Dist. 2.^a Tract. 6.^{us} fol. 46. o.^a) contient 52 nombres congruents qui n'en fournissent que 14 de primitifs, à savoir :

5, 6, 14, 15, 21, 30, 65, 70, 154, 210, 231, 330, 390, 546.

L'auteur arabe a obtenu cet avantage en excluant les combinaisons où a et b auraient eu un diviseur commun. Cependant il a été loin de tirer des triangles rectangles en nombres entiers qui contiennent sa table, tous les nombres congruents qu'ils auraient pu lui fournir. C'est ce que prouveront, je pense, les considérations suivantes.

En divisant par un même carré q^2 les deux équations fondamentales du problème

$$x^2 + k = u^2, \quad x^2 - k = v^2$$

on obtient deux nouvelles équations de la même forme que les premières. Il suit de là qu'en supprimant dans un nombre congruent un facteur quadratique, on obtient de nouveau un nombre congruent. Les nombres congruents du tableau dressé par l'auteur arabe sont, comme on vient de le voir, de la forme $4ab(a^2 - b^2)$; on peut donc supprimer le facteur 4. Les équations du problème deviennent en ce cas

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 = ab(a^2 - b^2) = \left(\frac{a^2 - 2ab - b^2}{2}\right)^2$$

et le nombre congruent sera de la forme

$$1) \quad ab(a^2 - b^2).$$

Or, les colonnes 3^e, 4^e et 5^e du tableau de l'auteur arabe nous fournissent des nombres qui satisfont à l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

où

$$x = (n + a + 1)^2 - (n - a)^2, \quad y = 2(n + a + 1)(n - a), \quad z = (n + a + 1)^2 + (n - a)^2.$$

Donc, si dans I. on fait $a = z$, $b = x$, le facteur $a^2 - b^2$ se transformera en un carré y^2 ; et en le supprimant on aura le nombre congruent :

$$1) \quad zx = (n + a + 1)^4 - (n - a)^4.$$

Mais on peut aussi transformer $a^2 - b^2$ en un carré en faisant $a = z$, $b = y$, d'où $a^2 - b^2 = x^2$, ce qui donne comme nombre congruent

$$2) \quad zy = 2(n + a + 1)(n - a)[(n + a + 1)^2 + (n - a)^2].$$

Les équations du problème qui correspondent à la forme 1. du nombre congruent, sont

$$\left(\frac{z^2 + x^2}{2y}\right)^2 = zx = \left(\frac{y^2 \pm 2zx}{2y}\right)^2$$

ou, en remplaçant du nouveau x , y , z par leurs valeurs $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$,

$$\left(\frac{a^4 + b^4}{2ab}\right)^2 = (a^4 - b^4) = \left(\frac{a^4 \pm 2a^2b^2 - b^4}{2ab}\right)^2.$$

et le nombre congruent sera de la forme

$$II) \quad (a^2 + b^2)(a^2 - b^2).$$

Dans cette expression faisons $a = x$, $b = y$; le facteur $a^2 + b^2$ devient un carré, et l'on aura comme nombre congruent

$$3) \quad \pm(x^2 - y^2) = \pm[(n + a + 1)^4 + (n - a)^4 - 6(n + a + 1)^2(n - a)^2].$$

Faisant $a = z$, $b = x$, on transforme en un carré le facteur $a^2 - b^2$, et le nombre congruent sera

$$4) \quad z^2 + x^2 = 2(n + a + 1)^4 + 2(n - a)^4.$$

Mais le facteur $a^2 - b^2$ se transforme aussi en un carré par la substitution $a = z$, $b = y$, de sorte que l'on a le nombre congruent

$$5) \quad z^2 + y^2 = (n + a + 1)^4 + (n - a)^4 + 6(n + a + 1)^2(n - a)^2.$$

Considérons maintenant les équations du problème qui correspondent à la forme 2. du nombre congruent; ce sont

$$\left(\frac{z^2 + y^2}{2x}\right)^2 = zy = \left(\frac{x^2 \pm 2xy}{2x}\right)^2$$

ou, en remplaçant x , y , z par leurs valeurs $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$,

$$\left[\frac{a^4 + b^4 + 6a^2b^2}{2(n^2 - b^2)}\right]^2 = 2ab(a^2 + b^2) = \left[\frac{(a \pm b)^4 - 3a^2b^2}{2(a^2 - b^2)}\right]^2$$

et le nombre congruent sera de la forme

III)

$$(a^2 + b^2)2ab.$$

En faisant dans cette expression $a=x$, $b=y$ on transformera en un carré le facteur a^2+b^2 ; mais le nombre congruent qui résulte de cette substitution est $2xy$, c'est-à-dire la forme qui nous a servi de point de départ. On pourra ensuite transformer en un carré $4x^2$ le facteur $2(a^2 + b^2)$ en faisant

$$a = x + y, \quad b = x - y;$$

mais on retombe en ce cas sur le nombre congruent $=(x^2 - y^2)$. De même, en faisant

$$a = \frac{z+x}{2}, \quad b = \frac{z-x}{2},$$

ce qui transformera le facteur ab dans le carré $\frac{1}{4}y^2$, on retrouve le nombre congruent z^2+x^2 .

Enfin faisons $a = \frac{z+x}{2}$, $b = z-x$; le facteur $2ab$ se transforme en un carré y^2 , et l'on obtient le nombre congruent

$$6) \quad \left(\frac{z+x}{2}\right)^2 + (z-x)^2 = (n+a+1)^4 + 4(n-a)^4$$

Si, comme on l'a fait ici, on suppose $n+a+1 > n-a$, il faut encore distinguer le cas $a = z+x$, $b = \frac{z-x}{2}$, qui donne lieu au nombre congruent

$$7) \quad (z+x)^2 + \left(\frac{z-x}{2}\right)^2 = 4(n+a+1)^4 + (n-a)^4.$$

Aprésent considérons les équations du problème qui correspondent à la forme 3; ce sont

$$\left(\frac{x^4+y^4}{2xyz}\right)^2 = x^2 - y^2 = \left[\frac{(x^2+y^2)^2 - 2y^4}{2xyz}\right]^2$$

ou, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs en a, b

$$\left[\frac{a^4 - b^4 + 16a^4b^4}{4ab(a^4 - b^4)}\right]^2 = [(a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2] = \left[\frac{(a^2 + b^2)^4 - 8a^2b^2(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2}{4ab(a^4 - b^4)}\right]^2$$

et le nombre congruent sera de la forme

$$IV) \quad [(a+b)^2 - 2b^2][(a-b)^2 - 2b^2].$$

Le signe du nombre congruent étant indifférent, on obtiendra encore des nombres congruents, si on peut transformer l'un ou l'autre des facteurs de l'expression IV) en un carré négatif. Faisant $a=x+y-z$, $b=z$, on aura $(a+b)^2 - 2b^2 = -(x-y)^2$, et le nombre congruent sera

$$8) \quad 2z^2 - (x+y-z)^2 = 2\left[(n+a+1)^2 + (n-a)^2\right]^2 - \left[\overline{n+a+1} - \overline{n-a}^2 + 2(n-a)^2\right]^2$$

Faisant $a = x+y+z$, $b = z$, on aura $(a-b)^2 - 2b^2 = -(x-y)^2$, et le nombre congruent sera

$$9) \quad (x+y+z)^2 - 2z^2 = \left[\overline{(n+a+1) + n-a}^2 + 2(n+a+1)^2 \right] - 2 \left[(n+a+1)^2 + (n-a)^2 \right]$$

Faisant pareillement $a = x - y = z$, $b = z$ on obtient les nombres congruents

$$10) \quad (x-y+z)^2 - 2z^2 = \left[\overline{(n+a+1) + n-a}^2 + 2(n-a)^2 \right] - 2 \left[(n-a+1)^2 + (n-a)^2 \right]$$

$$11) \quad (x-y+z)^2 - 2z^2 = \left[\overline{(n-a+1) - n-a}^2 + 2(n+a+1)^2 \right] - 2 \left[(n+a+1)^2 + (n-a)^2 \right]$$

La forme 3. de laquelle on vient de déduire les formes qui précèdent, montre aussi immédiatement que, toutes les fois que $x+y$ est un nombre carré, $x-y$ est un nombre congruent, et réciproquement. La table de l'auteur arabe, où les quantités $x+y$ et $x-y$ se trouvent dans la 8.^e et la 9.^e colonne fournit de cette manière les nombres congruents

7, 23, 31, 41, 72, 230, 257

Ces nombres résultent des quatre formes que l'on vient d'obtenir, si l'on prend les valeurs de x, y, z dans les triangles rectangles 1, 0, 1; 3, 4, 5; 6, 12, 13. Les mêmes nombres sont aussi compris dans la forme 8. seule ainsi qu'on le voit aisément en prenant

$$\begin{cases} n+a+1 = 0, & 3, & 1, & 2, & 2, & 1, & 3 \\ n-a = 1, & 2, & 2, & 1, & -1, & -2, & 2 \end{cases}$$

et ils sont aussi compris dans la forme 9 seule, attendu que si on remplace $n+a+1$ et $n-a$ par $n-a$ et $-(n+a+1)$ ou par $-(n-a)$ et $(n+a+1)$, l'expression 8. se change dans l'expression 9, et l'expression 9 dans l'expression 8; enfin ces nombres sont pareillement compris dans chacune des formes 10 et 11.

On a vu ci-dessus (pag. 253) que les expressions $x+y$ et $x-y$ sont les racines u et v des deux carrés qui satisfont aux équations fondamentales du problème des nombres congruents

$$x^2 + k = u^2, \quad x^2 - k = v^2$$

Il suit maintenant de ce qui précède, que parmi les valeurs de n et de v sont compris les nombres congruents contenus dans les formes 8, 9, 10, et 11.

On reconnaît aussi que les valeurs de la racine $u = x+y$ se retrouvent toutes parmi les valeurs de la racine $v = x-y$, car on a

$$u = (a+b)^2 - 2b^2 \quad v' = (a'-b')^2 - 2b'^2$$

et faisant

$$-a' = 5a - 2b, \quad b' = 2a - b$$

on aura

$$v' = u.$$

Or, $5a - 2b$ et $2a - b$ sont premiers entre eux; car, si

$$5a - 2b = ps \quad \text{et} \quad 2a - b = qs,$$

on aurait

$$a = (p - 2q)a \quad \text{et} \quad b = (2p - 5q)a.$$

On voit, en outre, que la somme

$$(5a - 2b) - (2a - b) = 7a - 3b$$

est toujours impaire, a et b ne pouvant être en même temps ni pairs, ni impairs, et que, par conséquent, il en est de même de $5a - 2b$ et $2a - b$. Donc toutes les combinaisons a', b' se trouvent parmi les a, b .

Pareillement par les valeurs de x , c'est à dire parmi les hypoténuses des triangles rectangles primitifs, sont compris tous les nombres congruents qui résultent des formes 6 et 7, si dans 6 on prend n et a en même temps pairs, ou en même temps impairs, et si dans 7 on en prend l'un pair et l'autre impair, en supposant du reste, comme on en est convenu, $n + a + 1$ et $n - a$ premiers entre eux.

Parmi les valeurs de x sont compris aussi tous les nombres congruents de la forme 5, car z et y sont premiers entre eux, et $z + y$ est impair. Il en est de même des moitiés des nombres congruents de la forme 4, car $n + a + 1$ et $n - a$ sont supposés premiers entre eux et $(n + a + 1)^2 + (n - a)^2$ est impair.

En comparant la forme 3 à la forme primitive $2xy$ on voit que l'on peut tirer encore, si l'on veut, du tableau de l'auteur arabe le nombre congruent

$$12) \quad = 4xy(x^2 - y^2)$$

et l'on a en même temps le théorème que, étant donné un nombre congruent $2xy$, on peut toujours trouver un autre nombre congruent tel que le double produit des deux nombres soit de nouveau un nombre congruent. On arrive à un résultat semblable en formant le double produit des formes 1 et 2.

Je n'étendrai pas ici davantage ces recherches que je reprendrai et développerai peut-être à une autre occasion. Mais j'ai calculé encore comme un exemple des douze formes de nombres congruents ci-dessus établies, et de la forme primitive $2xy$, les équations fondamentales du problème correspondantes à ces formes, en prenant les valeurs de x, y, z dans le triangle rectangle 15, 8, 17. Voici ces exemples :

$$x^2 \pm 2xy = 17^2 \pm 240 = 23^2, 7^2.$$

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{2y}\right)^2 \pm xz = \left(\frac{257}{8}\right)^2 \pm 265 = \left(\frac{287}{3}\right)^2, \left(\frac{223}{8}\right)^2.$$

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{2x}\right)^2 \pm zy = \left(\frac{253}{30}\right)^2 \pm 136 = \left(\frac{497}{30}\right)^2, \left(\frac{47}{30}\right)^2.$$

$$\left(\frac{x^4 + y^4}{2xyz}\right)^2 \pm (x^2 - y^2) = \left(\frac{54721}{4080}\right)^2 \pm 161 = \left(\frac{75329}{4080}\right)^2, \left(\frac{17729}{4080}\right)^2$$

$$\left(\frac{z^4 + x^4}{2xyz}\right)^2 \pm (z^2 + x^2) = \left(\frac{134146}{4080}\right)^2 \pm 814 = \left(\frac{162946}{4080}\right)^2, \left(\frac{27154}{4080}\right)^2$$

$$\left(\frac{z^4 - y^4}{2xyz}\right)^2 \pm (z^2 + y^2) = \left(\frac{87617}{4080}\right)^2 \pm 353 = \left(\frac{116417}{4080}\right)^2, \left(\frac{42433}{4080}\right)^2$$

$$\left| \frac{\left(\frac{z+x}{2}\right)^4 + (z-x)^4 + \frac{3}{2}y^4}{2\left\{\left(\frac{z+x}{2}\right)^2 - (z-x)^2\right\}y} \right|^2 = \left[\left(\frac{z+x}{2}\right)^2 + (z-x)^2 \right] = \left(\frac{4481}{252}\right)^2 = 260 = \left(\frac{6049}{252}\right)^2 + \left(\frac{1889}{252}\right)^2.$$

$$\left| \frac{(z+x)^4 + \left(\frac{z-x}{2}\right)^4 + \frac{3}{2}y^4}{2\left\{(z+x)^2 - \left(\frac{z-x}{2}\right)^2\right\}y} \right|^2 = \left[(z+x)^2 + \left(\frac{z-x}{2}\right)^2 \right] = \left(\frac{1054721}{16368}\right)^2 = 1025 = \left(\frac{1177729}{16368}\right)^2 + \left(\frac{915329}{16368}\right)^2.$$

$$\left[\frac{x+y)^4(x+y-z)^4 + 16(x+y-z)^4z^4}{4(x-y)z(x-y-z)\{(x+y-z)^4 - z^4\}} \right]^2 = [(x-y-z)^2 - z^2]^2 = \left(\frac{5899043537}{234834600}\right)^2 = 457 = \left(\frac{7692857713}{234834600}\right)^2 + \left(\frac{2962336463}{234834600}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(x+y)^4(x+y+z)^4 + 16(x+y+z)^4z^4}{4(x-y)z(x+y+z)\{(x+y+z)^4 - z^4\}} \right]^2 = [(x+y+z)^2 - z^2]^2 = \left(\frac{6375029035841}{47152160160}\right)^2 = 2671 = \left(\frac{6824911007359}{47152160160}\right)^2 + \left(\frac{5890874439041}{47152160160}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(x-y)^4(x-y-z)^4 + 16(x-y-z)^4z^4}{4(x+y)z(x-y-z)\{(x-y-z)^4 - z^4\}} \right]^2 = [(x-y-z)^2 - z^2]^2 = \left(\frac{14639349841}{1149868440}\right)^2 = 151 = \left(\frac{20346065359}{1149868440}\right)^2 + \left(\frac{3828674959}{1149868440}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(x-y)^4(x-y+z)^4 + 16(x-y+z)^4z^4}{4(x+y)z(x-y+z)\{(x-y+z)^4 - z^4\}} \right]^2 = [(x-y+z)^2 - z^2]^2 = \left(\frac{450148864897}{9318499680}\right)^2 = 1103 = \left(\frac{546271346303}{9318499680}\right)^2 + \left(\frac{326887774847}{9318499680}\right)^2.$$

$$z^4 = 4xy(x^2 - y^2) = 289^2 = 77280 = 401^2 + 79^2.$$

Enfin j'ai calculé pour tous les triangles rectangles contenus dans la table de l'auteur arabe les nombres congruents que fournissent les douze formes ci-dessus développées. J'ai inscrit dans le tableau ci-après tous ces nombres congruents, et j'y ai reproduit aussi ceux de la forme $2xy$. Au près de ceux de ces nombres qui contiennent des facteurs quadratiques, j'ai placé les nombres congruents qui en résultent lorsqu'on supprime le plus grand facteur quadratique contenu dans chacun des premiers. J'ai marqué d'un astérisque ceux de ces nombres qui sont premiers, et du signe $2p$ ceux qui sont doubles de nombres premiers. Quant

aux facteurs premiers des autres, il est évident qu'on n'en peut rien dire pour les nombres congruents qui contiennent les facteurs $x = (a + b)(a - b)$ ou $y = 2ab$. Parmi les autres, les nombres congruents des formes 4. 5. 6. 7. étant des sommes de deux carrés, ont tous leurs facteurs premiers des formes $8m + 1$, $8m + 5$; cependant cette dernière forme des facteurs premiers doit être exclue pour les nombres congruents 4. et 5, attendu que le premier peut s'écrire aussi $y^2 + 2x^2$, et le second $x^2 + 2y^2$. Les facteurs premiers des nombres congruents des formes 3. 8. 9. 10. 11 sont des formes $8m + 1$, $8m + 7$, parceque la forme 3 peut s'écrire $=(x^2 - 2y^2)$, de sorte que tant le nombre congruent de la forme 3 que ceux des formes 8. 9. 10. et 11. appartiennent à la forme quadratique $g^2 - 2h^2$ ou à la forme $2g^2 - h^2$ qui est équivalente à $g^2 - 2h^2$.

Voici le tableau dont il s'agit.

x	y	z	xy	xz	yz	$=(x^2-y^2)$	z^2-x^2	z^2-y^2
3	4	5	21	6	20	7	31	31
5	12	13	120	30	136	39	194	213
15	8	17	120	15	126	31	311	333
	21	22	336	21	600	6	671	1201
21	20	29	420	210	609	85	1262	1211
33	12	37	342	210	1293	141	2591	1513
9	10	11	720	5	369	41	1762	3281
28	33	35	2320	70	2385	265	4531	3593
11	60	61	1320	330	671	3660	3842	7321
63	16	65	2016	14	1093	135	5194	4481
33	36	63	3696	331	2115	3610	8311	7361
55	18	73	2350	330	4013	3304	8354	7633
77	36	85	2544	154	6515	3060	13154	8321
13	84	85	3534	316	1103	7140	7394	14231
39	80	89	3210	390	3471	7120	9112	14321
63	72	97	9360	65	6303	6984	13634	14593
99	20	101	2960	110	9999	2020	20009	10601
91	60	109	10920	2730	9919	6340	20162	15431
15	112	113	7360	210	1695	12656	12991	25313
107	44	125	10696	286	14625	5300	29311	17361
105	88	127	13180	1153	14383	12056	29794	26513
143	24	135	6854	429	20723	3480	41474	21601
17	144	145	1896	34	2463	20880	21314	41761
51	140	149	14980	3570	7399	20860	16999	41801
35	132	137	22140	5610	13345	20724	10199	43073
119	120	169	23560	1783	20111	20950	339	42961
163	32	171	7160	4290	28545	3996	57154	32633
153	104	183	31824	221	22305	19240	37634	43041
37	176	185	30664	1254	10545	32560	37474	65201
95	168	193	31920	1993	18335	32424	16274	65473
195	28	197	10920	2730	38415	3516	76831	39593
187	84	205	31116	7834	38335	17220	76994	19081
133	156	205	11196	10374	27963	31980	39714	66361

x	y	z	$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + (x-z)^2$	$(x+y-z)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$	$2x^2 - (x+y-z)^2$	$(x+y-z)^2 - 2z^2$	$2z^2 - (x+y-z)^2$	$(x+y-z)^2 - 2z^2$	$2z^2 - (x+y-z)^2$	$(x+y-z)^2 - 2z^2$	$2z^2 - (x+y-z)^2$
3	4	5	20, 5°	00	41	239	71	31	330, 21		
6	12	13	116	340, 86	267	1611	761	23	28660, 1766		
16	8	17	260, 00	1025, 41	467	2671	161	1163	77280, 4830		
7	24	26	680, 116	1105	880	6711	3239	161	364144, 22134		
24	20	29	680	2610, 629	1393	6119	1667	1799	68880, 4306		
35	12	37	1300, 19°	6180	2005, 41°	11003	137	6671	1816080, 113606		
9	40	41	1640	2760, 659	2273	13799	8407	761	2167360, 310		
46	26	53	2460	9620, 2406	4629	26423	2303, 47°	9611	6264640, 43436		
11	60	61	3700, 940	5809	4811	29807	21799	2113	8184640, 11716		
69	10	68	4100, 41°	10388	5849	36231, 719°	1661	23879	14970816, 26091		
31	60	65	3425, 137°	0860, 2466	6769	39611	14069	2939	16131424, 946714		
66	48	78	4420, 1100	16466	8809	61343	8663	12761	7613760, 118966		
77	36	85	6025, 206	26260, 0606	11201	66639	2191	30071	61370704, 366741		
13	84	86	7688	10000, 109°	9121	66839	43631	4649	30082416, 1880151		
39	80	89	6690, 1649	17009	12361	72367	32119	2927	60889928, 961406		
65	72	97	7686	26600, 266	16669	90743	21683	16161	17902480, 124670		
99	20	101	10004, 2601	40081	13613	82639	6273	68569	74466920, 617066		
91	60	109	10324, 2581	40081	19273	112399	11207	38239	102233040, 6389666		
16	112	113	13700, 137°	18786, 66	16737	99071	78791	6897	82733660, 1293496		
117	44	126	14705	68880, 14646	23329	13767	70	73070	242017770, 1680679		
106	88	137	16606	68820, 14705	30977	180661	28611	47143	121266760, 7679110		
149	24	148	20740, 6186	82046	26921	106790	12600	126231	272810644, 17061031		
17	141	146	22916	30340, 7686	26409	161361	131839	16481	200217024, 347690		
61	140	140	10604, 20°	42401	32069	194719	106367	721	186491440, 36343216		
86	192	167	10826, 793	60800, 14905	39889	232663	81023	21991	467731120, 28608196		
119	126	189	22230, 6800	83600	47321	276807, 287	66447	160829	13061080, 861230		
165	82	173	28020, 1146	114260, 28606	43217	267111	6609	107111	641660720, 62697646		
123	104	185	26688	114600, 1146	65081	324679	34691	6449	801619264, 113694		
57	178	186	31026, 1241	62660, 16666	49681	296109	170671	23471, 479°	1112629060, 17384829		
95	168	193	30940, 7586	86346, 606	69300	346707	136163	237103	1226664160, 76604010		
196	28	197	38420, 9006	153665	48277	303071	96089	237103	613343440, 56833066		
187	84	206	36740, 9066	153746	64729, 1321°	379711	10199	179119	1763829610, 109614361		
133	126	206	33746	116640, 28886	69409	404061	102439, 2111°	66719	661647824, 119301		

ADDITION AUX OBSERVATIONS 8 et 9.

Les règles de Pythagore et de Platon pour trouver des triangles rectangles en nombres entiers étant en quelque sorte les premiers pas qu'on ait faits dans la théorie des nombres, il n'est peut-être pas entièrement sans intérêt, de dire ici un mot de la manière d'arriver à ces règles qui paraît être la plus naturelle, et par conséquent celle qui a conduit les deux célèbres philosophes à cette découverte.

Étant proposée l'équation

$$1) \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

on en tire immédiatement

$$x^2 \cdot 1 = (z + y)(z - y),$$

et égalant les facteurs séparément

$$z + y = x^2, \quad z - y = 1,$$

on a

$$y = \frac{x^2 - 1}{2}, \quad z = \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} + 1;$$

afin de rendre ces valeurs de y et z entières, on prendra naturellement pour x un nombre impair $2m + 1$, de sorte que l'on aura

$$x = 2m + 1, \quad y = \frac{(2m + 1)^2 - 1}{2}, \quad z = \frac{(2m + 1)^2 + 1}{2} + 1$$

et ce sont précisément les expressions énoncées par Proclus pour la règle de Pythagore.

Quant à la règle de Platon, on tire de 1), en introduisant l'indéterminée m ,

$$mx \cdot \frac{x}{m} = (z + y)(z - y),$$

et posant

$$z + y = mx, \quad z - y = \frac{x}{m},$$

on a

$$y = \frac{m^2 - 1}{2m} x, \quad z = \frac{m^2 + 1}{2m} x;$$

afin de se débarrasser des fractions on prendra naturellement pour x un nombre pair $2m$, et l'on aura

$$x = 2m, \quad y = m^2 - 1, \quad z = m^2 + 1$$

et ce sont exactement les expressions énoncées par Proclus pour la règle de Platon.

Voici encore une autre manière très-simple et très-naturelle, mais moins élégante d'arriver aux expressions de Platon.

Egalant dans 1) le nombre z à y plus une indéterminée i , on a

$$x^2 = (2y + i)i,$$

et pour que le second membre devienne un carré, il faudra que $2y + i$ soit égal à i fois un carré, donc

$$2y + i = i \cdot m^2 \quad \text{ou} \quad 2y = i(m^2 - 1);$$

la solution qui se présente tout naturellement, est de prendre $i=2$, ce qui donne

$$y = m^2 - 1, \quad x = 2m, \quad z = m^2 + 1.$$

(Continuera).

MATEMATICA. — *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés Par. M. le prince BALTHASAR BONCOMPAGNI et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des Arabes. Par M. F. WOEPCKE (Continuazione) (1).*

B.

Lettre du Chaïkh Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn à Aboû Mohammed Abdallah Ben Ali le calculateur, sur la formation des triangles rectangles à côtés rationnels et sur l'utilité qu'offre leur connaissance. fol. 36 verso.

J'ai déjà expliqué que (les arguments) qu'avait proposés Aboû Mohammed Alkhodjandî, que Dieu soit miséricordieux envers lui, dans sa démonstration (du théorème) que de l'addition de deux nombres cubes il ne résulte pas un nombre cube, sont défectueux et inexacts, et que la règle qu'il a donnée pour la connaissance des triangles rectangles à côtés rationnels, est particulière et non générale. Vous avez lu, ô mon frère que Dieu assiste, (la correspondance) qui a été échangée entre moi et lui sur cette matière. Cependant je n'ai pas expliqué comment on forme ces triangles, par quelle méthode on les connaît et les produit, et quelle est l'utilité que l'on tire de leur connaissance, utilité qui est le but et l'objet de (la théorie de) ces (triangles). Or, il se peut que vous éprouviez le besoin de prendre connaissance de cela ; je l'ai donc exposé pour vous, et je vous l'ai envoyé, afin, que vous le lisiez, si telle est la volonté de Dieu.

OBSERVATIONS.

Les lignes que l'on vient de lire, renferment une donnée historique assez importante. Elles nous apprennent qu'à une époque fort ancienne les géomètres arabes connaissaient déjà le célèbre théorème que la somme de deux cubes ne peut pas être un cube, et étaient occupés à en chercher la démonstration. Aboû Mohammed Alkhodjandî est cité par Edward Bernard (*Philosophical Transactions*, Vol. XIII, année 1683, pag. 724, lig. 1 à 5) pour une observation de l'obliquité de l'écliptique qu'il aurait faite en 382 de l'hégire, 992 de notre ère, du temps du prince bouide Fakhr Al-daoulah, qui régna effectivement de 373 à 387 de l'hégire, 983 à 997 de notre ère. Cependant il se présente ici une difficulté chronologique. Le nom d'Alkhodjandî est accompagné ci-dessus des mots « que Dieu soit misé-

(1) Continuazione; vedi pag. 269.

ricordieux envers lui », qui indiquent qu'Alkhodjandl était mort à l'époque où le présent traité fut composé, ou du moins où il fut copié; la copie fut collationnée avec le manuscrit autographe de l'auteur, ainsi que l'atteste un postscriptum qu'on lira plus loin à la fin du traité. Or, quoique ce postscriptum ne renferme pas de date de copie, je serais très-disposé à croire, que le traité d'Abou Dja 'far Mohammed Ben Alhoçain fut copié comme la plupart des autres morceaux contenus dans le ms. où il se trouve, pendant l'espace de temps compris entre les années 969 et 972 de notre ère (comparer ci-dessus, observations 4, pag. 219, lig. 17). Mais Alkhodjandl ne pouvait pas être mort en 972 et observer en 992. Il est vrai qu'Edward Bernard appelle l'astronome dont il parle, Abou Mahmoûd, tandis que le ms. traduit ici porte Abou Mohammed; mais cette différence ne dépend dans l'écriture arabe que de l'omission d'une seule lettre, et ne paraît pas suffisante pour nous décider à admettre l'existence de deux personnages distincts, originaires de la ville de Khodjandah en Transoxiane, à peu près contemporains, l'un géomètre et appelé Abou Mohammed, l'autre astronome et appelé Abou Mahmoûd. Quoi qu'il en soit, il paraît presque certain que la démonstration de l'impossibilité de l'équation $x^3 + y^3 = z^3$ dont il est question dans votre texte, fut donnée antérieurement à la fin du X.^e siècle de notre ère, et il est probable que cette impossibilité fut connue des géomètres arabes, comme thèse, plus ou moins longtemps avant cette époque.

Quant aux objections faites par votre auteur contre la démonstration d'Alkhodjandl, il faudrait peut-être, avant de les admettre sans restriction, connaître le raisonnement même de ce dernier géomètre. Car l'auteur du présent traité critique en même temps une règle d'Alkhodjandl pour trouver les triangles rectangles en nombres rationnels, quoique les considérations qu'il propose lui-même sur cette matière, ne soient nullement à l'abri de toute critique, comme nous le verrons par la suite. Il serait donc possible qu'il n'eût pas bien compris le sens ou la portée des arguments proposés par Alkhodjandl relativement à l'impossibilité de l'équation $x^3 + y^3 = z^3$, et que ce fût là la cause du blâme qu'il émet. Il est toutefois assez probable qu'Alkhodjandl n'ait pas réussi à surmonter toutes les difficultés que la démonstration de cette impossibilité présente en effet, d'autant plus que Euler lui-même a été obligé de revenir sur la démonstration qu'il en avait donnée en premier lieu, et de la compléter par d'importantes considérations subsidiaires (voir *Novi comment. acad. scien. imp. Petrop.* Tom. VIII, 1760 et 1761, pag. 105).

On aura remarqué que l'auteur insiste tout particulièrement sur l'utilité et le but de la formation des triangles rectangles à côtés rationnels. Ce but n'est autre que la résolution du problème des nombres congruents, ainsi que l'auteur le déclarera ci-après d'une manière tout à fait explicite. (Comparer ci-dessus, observations 18, pagg. 251-254).

Voici (les théorèmes préliminaires) qu'il faut placer en tête (de cette théorie).

Si un nombre quelconque peut être divisé en deux parties telles que l'excédant de son carré sur le carré de l'une de ses deux parties soit un carré, le carré de ce (nombre) peut être divisé en deux carrés.

Cette démonstration est inutile, la proposition étant évidente d'elle-même; car elle dit seulement que, si $a^2 + b^2 = c^2$, on a aussi $a^2 = b^2 + c^2$. La citation est exacte.

Toutes les fois qu'un nombre impair est divisible en deux nombres carrés, c'est à dire en deux parties dont on puisse extraire la racine, son carré est divisible en deux nombres carrés.

E A DCB

 CD égal à CB. Je dis que l'excédant du carré de AB sur le carré de AD est un nombre carré.

Démonstration. Si nous prolongeons AB jusqu'à ce que AE soit égal à AD, AD sera à DC comme ED à DB, et *componendo* AC à DC comme EB à DB. Or, AC est à DC comme un nombre carré à un nombre carré, donc EB à DB comme un nombre carré à un nombre carré. Conséquemment (EB et DB) sont deux (nombres) plans semblables en vertu de ce qui est démontré dans la vingt quatrième proposition du huitième Livre du Traité des Eléments. Le produit de l'un d'eux par l'autre est donc un nombre carré. Mais le produit de EB par DB est l'excédant du carré de AB sur le carré de AD. Par conséquent l'excédant du carré de AB sur le carré de AD est un nombre carré.

49

ce qui reste de AC, à savoir du plus grand des deux carrés (dont se compose AB), si l'on en retranche CB, qui est le plus petit carré.

Id. 87 recto.

Et si on multiplie AD | par lui-même, qu'on retranche (ce produit) du produit de l'hypoténuse par elle-même, et que l'on prenne la racine de ce qui resta, ou si l'on multiplie le double de AD avec DC par DB, et que l'on prenne la racine du produit, il résultera de chacune des deux opérations le second côté (de l'angle droit du triangle rectangle).

OBSERVATIONS.

Voici le raisonnement de l'auteur. Il fait

$$AB = a^2 + \beta^2, \quad AC = a^2, \quad BC = CD = \beta^2,$$

$$AD = AE = a^2 - \beta^2, \quad EB = (a^2 + \beta^2) + (a^2 - \beta^2), \quad DB = (a^2 + \beta^2) - (a^2 - \beta^2),$$

et il a

$$\{(a^2 + \beta^2) + (a^2 - \beta^2)\} : \{(a^2 + \beta^2) - (a^2 - \beta^2)\} = a^2 : \beta^2$$

$$\{(a^2 + \beta^2) + (a^2 - \beta^2)\} \cdot \{(a^2 + \beta^2) - (a^2 - \beta^2)\} = \frac{a^4}{\beta^2} [(a^2 + \beta^2) - (a^2 - \beta^2)]^2$$

$$(a^2 + \beta^2)^2 - (a^2 - \beta^2)^2 = 4a^2\beta^2.$$

On voit que $a^2 + \beta^2$ ou AB est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des deux autres côtés est $a^2 - \beta^2$ ou AD, tandis que le troisième côté est

$$2a\beta = \sqrt{(a^2 + \beta^2)^2 - (a^2 - \beta^2)^2} = \sqrt{AB^2 - AD^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2AC \cdot BD}.$$

Voici l'énoncé de la 24.^e proposition du VIII.^e Livre des Éléments d'Euclide citée par l'auteur: « Si le rapport de deux nombres est celui d'un nombre carré à un nombre carré, et que le premier nombre soit un carré, le second sera pareillement un carré. » Pour démontrer ce théorème, Euclide prouve d'abord que, si le rapport de deux nombres est celui d'un nombre carré à un nombre carré, il se trouve entre ces deux nombres qu'un seul nombre moyen proportionnel; d'où il suit, par la 20.^e proposition du VIII.^e Livre, que les deux nombres sont deux nombres plans semblables. Le théorème dont l'auteur se sert ensuite, savoir que le produit de deux nombres plans semblables est un carré, est démontré dans la 1.^{re} proposition du IX.^e Livre des Éléments.

Le triangle construit (de cette manière) a donc l'hypoténuse et les deux côtés (qui renferment l'angle droit) rationnels. Le carré du nombre impair, à savoir de AB, est impair. Ce carré vient d'être divisé en deux nombres carrés. Or, l'impair se divise seulement dans l'impair et le pair. Donc l'un des deux carrés sera impair et l'autre pair. Et le côté du carré impair est impair, et le côté du carré pair est pair. Conséquemment l'un des deux côtés

(qui renferment l'angle droit) du triangle sera toujours impair et l'autre pair. Celui des deux qui est impair sera AD, parce que AB est impair, et qu'on en a retranché DB qui est pair, de sorte que le reste est impair. Nous avons aussi reconnu (que l'on obtient) le second côté (de l'angle droit) qui est le (côté) pair, en multipliant AC par CB, en trouvant la racine du produit, et en la doublant, parce que le produit de AC par CB est le quart du produit de EB par DB. La plus facile et la plus courte de ces méthodes est de trouver la racine de AC et la racine de CB, d'en multiplier l'une par l'autre, et de doubler ce qui en résulte, ou de multiplier l'une par l'autre (prise) deux fois, parce que le produit de la racine d'un nombre carré quelconque par la racine d'un autre carré, est un nombre qui est moyen proportionnel entre les deux carrés, en vertu de ce qui est démontré dans la onzième proposition du huitième Livre du Traité des Éléments.

OBSERVATION.

Si l'hypoténuse $\alpha^2 + \beta^2$ est impaire, le second côté $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta^2$ est pariellement impair; le troisième côté, qui est pair, s'exprime par $\sqrt{[EB.DB]} = 2\beta$, ainsi qu'il résulte des observations précédentes. La citation est exacte.

Nous démontrerons (maintenant) de combien l'hypoténuse dépasse chacun des deux (autres) côtés.

A D C B Traçons de nouveau AB, et posons EZ (égal à) la racine
 de AC, et ZH (égal à) la racine de CB. Coupons ZT
 ET ZH égal à ZH. Le carré de EZ est donc AC, le carré de
 ZH est CB, ZH est égal à ZT, et DC égal à CB. Par conséquent l'excédant
 du carré de EZ sur le carré de ZT est AD. Mais l'excédant du carré de EZ
 sur le carré de ZT est égal au produit de EH par ET. Il résulte (de là) une
 autre manière de trouver AD; elle (consiste en ce) que nous multiplions la
 somme des deux racines par leur différence, qui est ET. Or, comme le pro-
 duit de EH par ET plus les deux carrés égaux de ZT et de ZH est égal à
 la somme des deux carrés de EZ et de ZH, laquelle est AB, AD sera plus
 que AB du double du carré de la plus petite des deux racines.

Quant à l'autre côté, il est plus petit que AB du carré de ET qui est
 la différence des deux racines. Car ce (côté) est égal au produit de l'une des
 deux racines par l'autre (prise) deux fois, le produit de EZ par ZH (pris)
 deux fois avec le carré de ET est égal à la somme des deux carrés de EZ

et de ZH, en vertu de ce qui est démontré dans la septième proposition du second livre du Traité des Éléments, et les deux carrés de EZ et de ZH sont égaux à AB. Conséquemment si l'on prend la différence des deux racines de AC et de CB, qu'on la multiplie par elle-même, et qu'on retranche (le produit) de l'hypoténuse, ce qui reste est cet (autre) côté.

OBSERVATION.

L'auteur fait voir que les différences de l'hypoténuse et de l'une ou de l'autre des cathètes sont :

$$1) \quad a^2 + \beta^2 - (a - \beta)^2 = 2\beta^2, \quad 2) \quad a^2 + \beta^2 - 2a\beta = (a - \beta)^2.$$

C'est ce qui est énoncé aussi dans le N.^o 14 du fragment anonyme. (Voir ci-dessus pag. 245). L'auteur fait observer en passant que la cathète $a^2 - \beta^2$ s'exprime aussi par $(a + \beta)(a - \beta)$. La citation est exacte.

al. 87 verso.

Je n'ai pas fait ressortir que l'on peut trouver un nombre pair qui se divise en deux parties dont on peut extraire la racine, c'est à dire en deux nombres carrés. Mais ce (nombre pair) sera double ou multiple d'un impair qui le précède, et qui se divise en deux parties dont on peut extraire la racine. Le triangle que l'on construit au moyen du (nombre pair) sera donc de l'espèce du triangle que l'on construit au moyen d'un impair qui le précède, de sorte que ce qui est construit au moyen du pair viendra à la suite | de ce qui est construit au moyen de l'impair, et sera produit par la production de ce dernier sans difficulté ; attendu que tout nombre pair, s'il est divisé en deux parties dont on peut extraire la racine, est divisé seulement en deux impairs dont l'un est l'unité exclusivement, et l'autre un nombre dont on peut extraire la racine. Tel est le dix qui se divise en un et neuf, et qui est le double du cinq qui le précède, et qui se divise en un et quatre. Or, les deux (autres) côtés du triangle pour l'hypoténuse duquel on a pris dix, sont six et huit dont chacun est le double du (côté) correspondant (du triangle) pour l'hypoténuse duquel on a pris cinq, et dont les deux (autres) côtés sont trois et quatre. Une propriété caractéristique de tout triangle rectangle primitif à côtés rationnels est donc que son hypoténuse soit impaire, un de ses deux (autres) côtés impair et l'autre pair. Pour ce qui suit ces (triangles primitifs) et qui en est dérivé, l'hypoténuse et les côtés (peuvent) tous (être) pairs.

OBSERVATIONS.

L'auteur énonce ici le théorème que les triangles rectangles qui ont pour hypoténuse un nombre pair, ne sont pas primitifs. En effet soit

$$x^2 + y^2 = z^2$$

et supposons que z soit pair. Il faudra que x et y soient à la fois impairs ou pairs. Si x et y étaient en même temps impairs, la somme de leurs carrés serait de la forme $2(2m+1)$ qui ne peut pas être égale à un carré. Conséquemment, si z est pair, x et y le sont nécessairement aussi, les trois côtés ont 2 pour commun diviseur, donc le triangle n'est pas primitif. C'est ce qu'on voit mieux encore pas la considération suivante. Il suit du théorème énoncé par Gauss dans la note au bas de la page 218 des *Disquisitiones arithmeticae*, que le nombre des décompositions en deux carrés d'un nombre $2^{\mu} N$ est indépendant de l'exposant μ , donc que $2^{\mu} N$ n'est décomposable en deux carrés qu'autant que N l'est. Soit donc $N = a^2 + b^2$. On peut évidemment faire abstraction des puissances paires de 2 contenues dans 2^{μ} , de sorte qu'il suffit de considérer le nombre $2(a^2 + b^2)$ pour comprendre tous les cas où un nombre pair est décomposable en deux carrés. Or on a

$$2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2,$$

et formant un triangle rectangle avec les nombres $a + b$ et $a - b$, on obtient

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 2(2ab)$$

$$2(a + b)(a - b) = 2(a^2 - b^2)$$

c'est à dire un triangle dont les côtés sont doubles de ceux du triangle rectangle formé avec les nombres a et b . Dans le cas que l'auteur a choisi pour exemple, on a $a=2$, $b=1$.

Quant aux mots depuis « attendu que tout nombre pair » jusqu'à « et l'autre un nombre dont on peut extraire la racine », ils renferment une assertion complètement fautive. Car les nombres pairs 34, 58, 90, 74, 106, 130 et une infinité d'autres sont respectivement égaux aux sommes de deux carrés 3^2+5^2 , 3^2+7^2 , 3^2+9^2 , 5^2+7^2 , 5^2+9^2 , 7^2+9^2 , etc., et cependant 34—1, 58—1, 90—1, 74—1, 106—1, 130—1 ne sont pas des nombres carrés.

Nous avons trouvé la méthode pour connaître les hypoténuses des triangles rectangles à côtés rationnels; (elle consiste en ce) que nous examinons un à un les impairs se suivant à partir de l'unité d'après l'ordre naturel, et que nous en employons (ceux) qui se divisent en deux carrés. Nous avons fait cela, et nous avons consigné (les nombres) qu'on emploie, dans une table dont l'ordre et l'arrangement exigent (cependant) que nous (y) consignions aussi, en même temps que les (impairs), les pairs qui se divisent en deux carrés. Quant à la formation de la table, elle est divisée en douze lignes suivant la largeur, et en dix lignes suivant la longueur.

Quant à sa construction, on écrit dans la première ligne suivant la longueur les nombres consécutifs depuis l'unité jusqu'au dix. On en multiplie chacun par lui-même, et on écrit le produit en regard dans la seconde ligne. On double ensuite chacun (des nombres) qui (se trouvent) dans la seconde ligne, et on écrit les résultats suivant l'ordre dans la troisième ligne. Ensuite on pose ce qui est écrit dans la première des lignes de la largeur en commençant à partir de la troisième ligne suivant la longueur. Or (les nombres de cette première ligne horizontale) se dépassent l'un l'autre des nombres impairs suivant l'ordre à partir du trois. (Les nombres) qui sont écrits dans la seconde ligne (horizontale) se dépassent l'un l'autre des nombres impairs suivant l'ordre à partir du cinq; ceux qui sont écrits dans la troisième ligne se dépassent l'un l'autre des impairs suivant l'ordre à partir du sept. Ensuite cela continue de cette manière, de sorte que les (quantités) dont se dépassent l'un l'autre (les nombres) qui (se trouvent) dans la dixième ligne, qui est la dernière des lignes de la largeur, sont les impairs à partir de vingt et un.

Quant aux (quantités) dont ces nombres se dépassent l'un l'autre relativement aux lignes de la longueur, (les nombres) qui (se trouvent) dans la seconde ligne se dépassent l'un l'autre des impairs suivant l'ordre à partir du trois; et (ceux) qui (se trouvent) dans les autres lignes se dépassent l'un l'autre des nombres pairs. L'excédant (de l'un sur l'autre des nombres) qui (se trouvent) au commencement de la troisième ligne est six, puis (l'excédant suivant est) dix, puis quatorze; et ainsi de suite en augmentant de quatre en quatre jusqu'à la fin de la ligne. L'excédant (de l'un sur l'autre des nombres) qui (se trouvent) au commencement de la quatrième ligne est huit; puis (l'excédant suivant est) douze, puis seize, et ainsi de suite en augmentant de quatre en quatre. L'excédant (de l'un sur l'autre des nombres) qui (se trouvent) au commencement de la cinquième ligne est dix; puis (l'excédant suivant est) quatorze, puis dix-huit, et ainsi de suite en augmentant de quatre en quatre. L'excédant (de l'un sur l'autre des nombres) qui (se trouvent) au commencement de la sixième ligne est douze; puis (l'excédant suivant est) seize, puis vingt, et ainsi de suite en augmentant de quatre en quatre jusqu'à la fin de la ligne. Les excédants continuent de cette manière dans les autres | lignes de la longueur.

fol. 88 recto.

En vertu de cette combinaison sont produits dans les lignes de la longueur dont le nombre est pair à partir de la première ligne, des nombres

pairs, et dans les lignes dont le nombre à partir de la première ligne est impair, des nombres impairs. Si d'un quelconque de ces nombres on retranche ce qui se trouve en regard de lui dans la première ligne, ce qui est un carré, il reste un résidu qui est un carré. Celui qui veut continuer les lignes (de la table), pourra le faire, en vertu de ce que nous avons montré, jusqu'au terme qu'il voudra. Ces nombres s'étendent donc à l'infini.

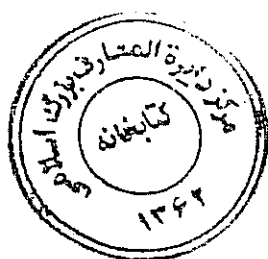
Voici cette table :

Les nombres qui se divisent en deux nombres carrés.										Les carrés	Les racines
101	82	65	50	37	26	17	10	5	2	1	1
125	104	85	68	53	40	29	20	13	8	4	2
153	130	109	90	73	58	45	34	25	18	9	3
185	160	137	116	97	80	65	52	41	32	16	4
221	194	169	146	125	106	89	74	61	50	25	5
261	232	205	180	157	136	117	100	85	72	36	6
305	274	245	218	193	170	149	130	113	98	49	7
353	320	289	260	233	208	185	164	145	128	64	8
405	370	337	306	277	250	225	202	181	162	81	9
461	424	389	356	325	296	269	244	221	200	100	10

OBSERVATIONS.

Pour trouver tous les nombres décomposables en deux carrés, l'auteur a recours à un moyen qui, en vérité, est infailible; c'est d'ajouter le carré de chaque nombre entier successivement à lui-même et aux carrés de tous les nombres entiers suivants, et de dresser une table des résultats. Il a reconnu que cette table se construit facilement au moyen des différences, soit de celles des colonnes horizontales, soit de celles des colonnes verticales. En effet, faisons abstraction, parmi les colonnes verticales, de celle qui contient les doubles des carrés, et appelons la première celle dont le premier nombre est 5, la seconde celle dont le premier nombre est 10, et ainsi de suite, de sorte que la dernière colonne verticale du tableau, dont le premier nombre est 101, sera le neuvième. Cela posé, le $p^{\text{ième}}$ nombre de la $q^{\text{ième}}$ colonne verticale s'exprime par

$$p^2 + (p + q)^2$$



La différence de deux nombres contigus d'une même colonne verticale sera

$$(p+1)^2 + (p+q+1)^2 - p^2 - (p+q)^2 = 4p + 2q + 2,$$

et la différence suivante

$$(p+2)^2 + (p+q+2)^2 - (p+1)^2 - (p+q+1)^2 = 4p + 2q + 6,$$

de sorte que les différences deuxièmes sont constantes et égales à 4.

La différence de deux nombres contigus d'une même colonne horizontale est

$$p^2 + (p+q+1)^2 - p^2 - (p+q)^2 = 2p + 2q + 1,$$

et la différence suivante

$$p^2 + (p+q+2)^2 - p^2 - (p+q+1)^2 = 2p + 2q + 3.$$

donc les deuxièmes différences sont pareillement constantes et égales à 2.

L'idée de l'auteur de se servir du tableau, construit comme on vient de le voir, pour trouver les nombres décomposables en deux carrés, offre certains avantages, notamment celui que le tableau contient tous ces nombres et n'en contient pas d'autres; en outre, si un nombre est décomposable en deux carrés de plusieurs manières, chacune de ces décompositions est donnée séparément par le tableau; enfin le tableau fait connaître immédiatement les deux carrés qui correspondent à une décomposition, l'un de ces carrés se trouvant dans la colonne des carrés sur la même colonne horizontale que le nombre qu'il s'agit de décomposer, et l'autre carré étant la différence de ce nombre et du premier carré. Mais la table a l'inconvénient de ne pas donner les nombres qui sont les sommes de deux carrés, suivant l'ordre de leur grandeur, de sorte que, pour peu que le nombre proposé soit grand, la recherche devient assez longue parce qu'elle doit s'étendre sur un nombre considérable de colonnes. En outre, si on veut se servir du tableau pour en tirer les triangles rectangles primitifs, il offre encore l'inconvénient de ne pas exclure immédiatement les décompositions $a^2 + b^2$ où a et b ont un facteur commun. Toutefois la manière dont le tableau est dressé, présente un moyen facile pour se débarrasser de ces décompositions. C'est de supprimer, à partir de la 3.^e colonne verticale, dans chacun d'elles, soit dans la $q^{\text{ième}}$, tous les nombres dont le rang, dans cette colonne, s'exprime par les facteurs premiers de q et par les multiples de ces facteurs.

En effet, soit un nombre $N = a^2 + b^2$; on en tirera le triangle rectangle $a^2 + b^2, a^2 - b^2, 2ab$. Si ce triangle n'est pas primitif, les trois côtés auront un facteur commun λ , donc

$$a^2 + b^2 = \lambda \lambda, \quad a^2 - b^2 = \mu \lambda, \quad 2ab = \nu \lambda;$$

les deux premières équations donnent

$$2a^2 = (\lambda + \mu)\lambda, \quad 2b^2 = (\lambda - \mu)\lambda,$$

d'où il suit que, si les trois côtés ont un facteur commun autre que 2, ce facteur (où sa moitié) sera aussi facteur commun de a^2 et de b^2 . Conséquemment, pour éliminer les triangles non primitifs, il est nécessaire, et suffisant de supprimer premièrement les hypoténuses paires (ce que l'auteur a fait en supprimant les colonnes verticales de rang pair, ou en ne les introduisant que pour le besoin de la construction de la table), secondement de supprimer toutes les décompositions $p^2 + (p+q)^2$ où p et $p+q$, ou ce qui revient au même,

où p et q auront un facteur commun. Il faut donc supprimer dans la colonne verticale de rang q tous les nombres dont la rang dans la colonne s'exprime par un facteur premier de q , ou par un multiple d'un facteur premier de q . Ainsi on effacera dans la 2.^e colonne le 3.^e, 6.^e, 9.^e, nombre etc.; dans la 5.^e colonne, le 5.^e 10.^e, 15.^e nombre etc., dans la 15.^e colonne, le 3.^e, 6.^e, 9.^e, 12.^e, 15.^e 18.^e etc., puis le 5.^e, 10.^e, 20.^e, 25.^e etc. Lorsque cette opération, qui ressemble au procédé d'Eratosthène pour trouver les nombres premiers est terminée, toutes les décompositions qui restent dans le tableau, ne donnent lieu qu'à des triangles rectangles primitifs.

Gauss a donné, dans les *Disquisitiones Arithmeticae*, le nombre des décompositions d'un nombre en deux carrés premiers entre eux. Cependant cette question (ainsi que le comporte le plan des *Disquisitiones*) n'y est pas traitée isolément, mais de manière à se rattacher aux parties précédentes de l'ouvrage. Comme les présentes recherches ne s'adressent pas seulement à des géomètres de profession, mais aussi à d'autres érudits qui tout en désirant se rendre compte du fond des problèmes historiques discutés ici, pourraient trouver pénible de remonter de proposition en proposition l'enchaînement des théories de l'admirable corps de doctrine de Gauss, j'ai cru utile d'exposer en cet endroit, en me fondant sur des considérations et des démonstrations exclusivement élémentaires, de quelle manière la décomposition d'un nombre en deux carrés premiers ou non premiers entre eux, dépend de la nature des facteurs premiers dont le nombre est composé. J'appellerai, pour abréger, décomposition primitive une décomposition en deux carrés premiers entre eux. Je n'aurai égard qu'aux décompositions réellement distinctes, et je ne compterai pas non plus les décompositions où l'un des deux carrés est zéro.

1. Si un nombre n'est composé que de facteurs premiers de la forme $4m+1$ et tous différents, il n'admet que des décompositions primitives. Car si les deux carrés d'une décomposition avaient un facteur commun, il devrait être quadratique, donc le nombre donné aurait un facteur quadratique, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2. Si un nombre est composé, outre de puissances quelconques de nombres premiers de la forme $4m+1$, aussi de puissances paires d'un ou de plusieurs nombres premiers de la forme $4m+3$, ce nombre n'admet que des décompositions non primitives, parce que les puissances paires des facteurs de la forme $4m+3$ ne sont pas décomposables en deux carrés.

3. Une puissance quelconque d'un nombre premier de la forme $4m+1$, admet toujours une décomposition primitive, et n'en admet qu'une.

En effet, p étant un nombre premier de la forme $4m+1$, donc $p = a^2 + b^2$, où a et b premiers entre eux, si p^n et p^{n-1} jouissent de la propriété que je viens d'énoncer, p^{n-2} en jouira également.

Car soit $a^2 + b^2$ la décomposition primitive de p^{n-1} , de sorte que

$$p^{n-2} = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (a^2 + b^2)^2$$

et supposons que ces deux décompositions de p^{n-2} soient non primitives, donc, en désignant le plus grand commun diviseur des deux carrés de la première et de la seconde décomposition respectivement par s et s' ,

$$a^2 + b^2 = ls, \quad a^2 - b^2 = rs'$$

$$a^2 - b^2 = ms, \quad a^2 + b^2 = s's'$$

d'où

$$\alpha(a^2 + b^2) = (al - bm)a, \quad \alpha(a^2 + b^2) = (ar + bs)a'$$

$$\beta(a^2 + b^2) = (bl + am)a, \quad \beta(a^2 + b^2) = (as - br)a'$$

Mais α et β étant premiers entre eux, et $a^2 + b^2$ premier, il suit de ces équations

$$a = a' = a^2 + b^2$$

donc

$$\mu = al - bm = ar + bs$$

$$\beta = bl + am = as - br$$

et

$$a^2 + \beta^2 = (a^2 + b^2)^{2-1} = (a^2 + b^2)(l^2 + m^2) = (a^2 + b^2)(r^2 + s^2)$$

de sorte que $(a^2 + b^2)^{2-1}$ admettrait les deux décompositions primitives $l^2 + m^2$ et $r^2 + s^2$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc que l'une au moins des deux décompositions de p^{2-1} développées ci-dessus soit primitive.

Il reste encore à démontrer qu'elles ne peuvent pas être primitives toutes les deux. Or, soit $\gamma^2 + \delta^2$ l'unique décomposition primitive de p^2 , $\alpha^2 + \beta^2$ l'unique décomposition primitive de p^{2-1} ; et supposons que p^{2-1} admette deux décompositions primitives. Evidemment celles-ci ne peuvent provenir que de la combinaison $\alpha^2 + \beta^2$ avec $a^2 + b^2$, car les autres décompositions de p^{2-1} , toutes non primitives, ne sauraient engendrer une décomposition primitive. Pour la même raison les deux mêmes décompositions primitives de p^{2-1} devraient être celles qu'on obtient par la combinaison de $\gamma^2 + \delta^2$ avec $(a^2 + b^2)^2 + (2ab)^2$. Ainsi il faudrait que les deux décompositions

$$(a\alpha + b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2, \quad (a\alpha - b\beta)^2 + (a\beta + b\alpha)^2$$

fussent identiquement les mêmes que

$$((a^2 - b^2)\gamma + 2ab\delta)^2 + ((a^2 - b^2)\delta - 2ab\gamma)^2, \quad ((a^2 - b^2)\gamma - ab\delta)^2 + ((a^2 - b^2)\delta + 2ab\gamma)^2$$

Cependant pour que deux décompositions

$$g^2 + h^2, \quad i^2 + k^2$$

d'un nombre soient identiques à deux autres décompositions du même nombre

$$g^2 + h^2, \quad i^2 + k^2,$$

il faut qu'un des huit systèmes suivants puisse avoir lieu

$$1) \quad g=g_1, \quad h=h_1, \quad i=i_1, \quad k=k_1, \quad 5) \quad g=i_1, \quad h=k_1, \quad i=g_1, \quad k=h_1.$$

$$2) \quad g=g_1, \quad h=h_1, \quad i=k_1, \quad k=i_1, \quad 6) \quad g=i_1, \quad h=k_1, \quad i=h_1, \quad k=g_1.$$

$$3) \quad g=h_1, \quad h=g_1, \quad i=i_1, \quad k=k_1, \quad 7) \quad g=k_1, \quad h=i_1, \quad i=g_1, \quad k=h_1.$$

$$4) \quad g=h_1, \quad h=g_1, \quad i=k_1, \quad k=i_1, \quad 8) \quad g=k_1, \quad h=i_1, \quad i=h_1, \quad k=g_1.$$

Mais on vérifie aisément qu'aucun de ces systèmes n'est compatible avec les hypothèses admises.

En effet, le système 1. donne dans notre cas

$$a\alpha + b\beta = (a^2 - b^2)\gamma + 2ab\delta \quad a\alpha - b\beta = (a^2 - b^2)\gamma - 2ab\delta$$

$$a\beta - b\alpha = (a^2 - b^2)\delta - 2ab\gamma \quad a\beta + b\alpha = (a^2 - b^2)\delta + 2ab\gamma$$

d'où

$$2a\alpha = 2(a^2 - b^2)\gamma, \quad 2a\beta = 2(a^2 - b^2)\delta$$

donc

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

ce qui est impossible parce que d'un côté α et β sont premiers entre eux, de même que γ et δ , tandis que d'un autre côté on ne peut pas avoir $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

Le système 2. donne

$$a\alpha + b\beta = (a^2 - b^2)\gamma + 2ab\delta \quad a\alpha - b\beta = (a^2 - b^2)\delta + 2ab\gamma$$

$$a\beta - b\alpha = (a^2 - b^2)\delta - 2ab\gamma \quad a\beta + b\alpha = (a^2 - b^2)\gamma - 2ab\delta$$

d'où

$$(a + b)(\alpha + \beta) = 2(a^2 - b^2)\gamma, \quad (a - b)(\alpha + \beta) = 2(a^2 - b^2)\delta$$

donc

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\gamma}{\delta};$$

mais puisque a et b sont premiers entre eux, $a + b$ et $a - b$, ne pouvant être pairs, à cause de $a^2 + b^2 = 4m + 1$, sont également premiers entre eux; et comme en même temps γ et δ sont premiers entre eux, il s'ensuivrait

$$\gamma = a + b, \quad \delta = a - b; \quad \text{d'où} \quad \gamma^2 + \delta^2 = 2(a^2 + b^2) \quad \text{ou} \quad p^2 = 2p$$

ce qui est absurde.

D'une manière semblable le système 3. conduit à la conséquence

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\delta}{\gamma} \quad \text{d'où} \quad p^2 = 2p,$$

et le système 4. à la conséquence

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma}$$

Enfin les systèmes 5. 6. 7. 8. produisent suivant l'ordre les mêmes résultats que 1. 2. 3. 4. respectivement.

Il est démontré par conséquent que, si p^2 et p^{2n+1} admettent une décomposition primitive et n'en admettent qu'une seule, il en est de même de p^{2n+2} ; or, les deux premières puissances de p admettant chacune une décomposition primitive et n'en admettant qu'une seule, savoir $p = a^2 + b^2$ et $p^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$, il s'ensuit que la même chose a lieu pour toutes les puissances de p .

4. De la démonstration précédente on conclut en même temps le nombre total des décompositions tant primitives que non primitives d'une puissance donnée de p , soit p^λ . Car chaque puissance de p n'admettant qu'une seule décomposition primitive, il est facile de voir quelles sont les décompositions non primitives de p^λ . Evidemment on les obtiendra toutes en multipliant par p^2 les deux carrés de la décomposition primitive de $p^{\lambda-2}$, par p^4 , les deux carrés de la décomposition primitive de $p^{\lambda-4}$, et ainsi de suite; de sorte que p^λ admet, outre sa décomposition primitive, $\frac{\lambda-1}{2}$ décompositions non primitives si λ est impair, et $\frac{\lambda-3}{2}$ si λ est pair. Par conséquent le nombre total des décompositions de p^λ est $\frac{\lambda+1}{2}$ si λ est impair, et $\frac{\lambda}{2}$ si λ est pair.

Soit maintenant p^λ multiplié par la puissance p^μ , d'un autre nombre premier de la forme $4m+1$. Attendu que le produit de deux sommes de deux carrés donne lieu à deux décompositions en deux carrés, et que, si l'une des deux puissances est paire, il faut avoir égard aux décompositions qui résultent de la multiplication de cette puissance même, qui est un carré, par toutes les décompositions de l'autre puissance, le nombre total des décompositions du produit $p^\lambda \cdot p^\mu$ sera

$$2. \frac{\lambda+1}{2} \cdot \frac{\mu+1}{2} = \frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1) \text{ si } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont impairs,}$$

$$2. \frac{\lambda+1}{2} \cdot \frac{\mu}{2} + \frac{\lambda+1}{2} = \frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1) \text{ si } \lambda \text{ est impair et } \mu \text{ pair,}$$

$$2. \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\mu+1}{2} + \frac{\mu+1}{2} = \frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1) \text{ si } \lambda \text{ est pair et } \mu \text{ impair,}$$

$$2. \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\mu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} = \frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1) - \frac{1}{2} \text{ si } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont pairs.}$$

Et par les mêmes considérations on voit que le nombre total des décompositions du nombre $p^\lambda p^\mu p^\nu \dots$, où $p, p_1, p_2, \dots$ sont des nombres premiers de la forme $4m+1$, est $\frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1) \dots$ excepté lorsque $\lambda, \mu, \nu, \dots$ sont tous pairs,

et que dans ce dernier cas le nombre des décompositions est $\frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1) \dots - \frac{1}{2}$.

5. Soient T et U deux nombres premiers ou non, mais premiers entre eux et admettant chacun une ou plusieurs décompositions primitives, de sorte que

$$T = A^2 + B^2, \quad U = C^2 + D^2$$

où A et B, C et D premiers entre eux. On aura

$$TU = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2 = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2$$

et je dis que ces deux décompositions sont primitives. Car supposons le contraire, et soit

$$AC + BD = P\Delta \quad , \quad AD - BC = Q\Delta$$

on aura

$$A(C^2 + D^2) = (CP + DQ)\Delta$$

$$B(C^2 + D^2) = (DP - CQ)\Delta$$

et, A et B étant premiers entre eux, il faudra que Δ soit diviseur de U. En même temps

$$C(A^2 - B^2) = (AP - BQ)\Delta$$

$$D(A^2 - B^2) = (BP - AQ)\Delta$$

et, C et D étant premiers entre eux, il faudra que Δ soit diviseur de T. Les nombres T et U auraient donc un facteur commun contrairement à l'hypothèse, d'où il suit que la première décomposition de TU est primitive; et de la même manière on démontre que la seconde l'est également.

On conclut de là et du N.^o 3 qu'un nombre composé de puissances quelconques de n nombres premiers de la forme $4m+1$ admet 2^{n-1} décompositions primitives.

6. Si un nombre contient comme facteur une puissance de 2 supérieure à la première, il n'admet aucune décomposition primitive, parce que les puissances paires de 2 ne se décomposent pas du tout en deux carrés, et que les puissances impaires de 2 ne se décomposent qu'en deux carrés égaux. Si le nombre contient le facteur 2 à la première puissance seulement, il admet autant de décompositions primitives que son quotient par deux; on les aura en remplaçant chaque décomposition primitive a^2+b^2 de ce dernier par $(a+b)^2+(a-b)^2$. Mais, ainsi que nous l'avons vu dans les observations précédentes, aucune de ces décompositions ne peut donner lieu à un triangle rectangle primitif.

Je fais observer encore que les nombres du tableau ci-dessus sont exprimés, dans le texte manuscrit, au moyen des lettres numériques.

Le premier (nombre) impair que nous trouvons dans la table, lequel est 5, se divise donc en deux parties dont on peut extraire la racine, car ce qui (se trouve) en regard de lui dans la seconde ligne (verticale) est 1, et lorsqu'on retranche cela du (cinq), il reste 4; or 1, 4 sont deux parties dont on peut extraire la racine. On trouve le 5 après un impair, à savoir trois, à partir de l'unité qui est le premier des impairs.

Ensuite 13 se divise dans ce qui se trouve en regard de lui dans la seconde ligne, à savoir 4, et dans ce qui reste, lorsqu'on retranche du (treize) 4, ce qui est 9. Et 13 (se trouve) après trois impairs à partir du 5, qui sont 7, 9, 11.

Ensuite 17 se divise en ce qui se trouve en regard de lui, à savoir 1, et en ce qui reste, lorsqu'on en retranche 1, à savoir 16. Et 17 (se trouve) après un impair à partir du 13, lequel est 15.

Ensuite 25, après trois impairs, qui sont 19, 21, 23, se divise en 9, 16. Ensuite 29, après un impair, se divise en 4, 25. Ensuite 37, après trois impairs, se divise en 1, 36. Ensuite 41, après un impair, se divise en 16, 25.

Ensuite (quant à) 49, après trois impairs, nous trouvons qu'il ne se divise pas en deux parties dont on puisse extraire la racine.

Ensuite 53, après un impair, se divise en 4, 49. Ensuite 61, après trois impairs, se divise en 25, 36.

Ensuite 65, après un impair, se divise en 1, 64, et se divise aussi en 16, 49. C'est pourquoi cet impair sous-tend deux triangles différents.

fol. 38 verso.

Ensuite 73, après trois impairs, se divise en 9, 64.

Ensuite (quant à) 77, après un impair, nous trouvons qu'il ne se divise pas en deux parties dont on puisse extraire la racine.

Ensuite 85, après trois impairs, se divise en 4, 81, et se divise aussi en 36, 49. C'est pourquoi il sous-tend deux triangles différents.

Ensuite 89, après un impair, se divise en 25, 64. Ensuite 97, après trois impairs, se divise en 16, 81. Ensuite 101, après un impair, se divise en 1, 100. Ensuite 109, après trois impairs, se divise en 9, 100. Ensuite 113, après un impair, se divise en 49, 64.

Ensuite 117, après un impair, se divise en 36, 81 ; car ce (nombre) devient comme le commencement, à la manière du cinq qui est le premier impair qui se divise en deux parties dont on peut extraire la racine, (et qui se trouve) après un impair à partir de l'unité, laquelle est le premier des impairs.

Ensuite 125, après trois impairs, se divise en 25, 100, et aussi en 4, 121. C'est pourquoi il sous-tend deux triangles différents.

Ensuite on continue à opérer d'après cette méthode évidente en allant dans les (nombres) impairs jusqu'à l'infini.

La raison de cette manière d'avancer tantôt d'un impair et tantôt de trois impairs, s'explique par ce qui est noté dans la table.

Si (dans) cette manière d'avancer (on) arrive à un (nombre) impair qui devrait se diviser en deux carrés, et qui ne se divise pas (de cette manière, on) arrive ensuite à un (nombre) impair peu éloigné du (premier), qui, par compensation, se divise en quatre parties dont on peut extraire la racine. Ainsi, après que 49 ne s'est pas laissé diviser, 65 se divise ensuite en quatre parties dont on peut extraire la racine ; et après 77, qui ne se divise pas, 85 se divise en quatre parties dont on peut extraire la racine.

OBSERVATIONS.

En prenant les nombres contenus dans le tableau, suivant l'ordre de leur grandeur, afin de les décomposer un à un en deux carrés par les moyens que le tableau offre pour cette opération, l'auteur s'aperçoit qu'entre deux nombres successifs sont compris alternativement un et trois nombres impairs. Mais méconnaissant la véritable loi de cette propriété, à savoir qu'elle est invariable et continue à avoir lieu de la même manière jusqu'à l'infini l'auteur se fourvoie, et arrivé au nombre 113, au lieu de passer de là à 121 en sautant trois impairs, croit voir dans le nombre 117 le commencement d'une nouvelle série semblable à celle qu'il vient de considérer, et qui s'étend depuis 5 jusqu'à 113. La nouvelle série serait donc 117, 125, 129, 137, 151, 149, 153, 161, 165, 173, etc., au lieu de 121, 125, 133, 137, 145, 149, 157, 161, 169, 173, etc., et ne renfermerait pas les nombres 145, 157, 169, 181, 193, 205, etc., qui sont décomposables en deux carrés. L'erreur de l'auteur est d'autant plus singulière que ces derniers nombres se trouvent encore dans la partie du tableau des nombres décomposables en deux carrés qu'il a dressée lui-même, et que l'on a vue ci-dessus.

L'auteur dit que la loi de la série se manifeste par les nombres même contenus dans le tableau, mais cette raison est insuffisante; car en procédant comme il le fait, l'auteur passe le nombre 45 qui cependant figure dans le tableau. Il est vrai que ce nombre n'est pas hypoténuse d'un triangle primitif mais cela n'empêcherait pas l'auteur de l'admettre, ainsi qu'on le voit par les décompositions

$$117 = (3, 2)^2 + (3, 3)^2 \quad \text{et} \quad 125 = (5, 1)^2 + (5, 2)^2$$

En somme l'auteur ne paraît pas avoir bien approfondi ce point; et si on se rappelle la netteté et la justesse avec lesquelles l'auteur du fragment anonyme s'exprime dans le N.^o 3 de ce fragment où il traite le même sujet, on ne peut pas manquer d'être frappé du contraste que ce numéro présente avec les méprises et inadvertances que l'on vient de voir commettre à l'auteur du présent traité.

Mais cette circonstance me semble confirmer ce que j'ai dit ci-dessus à la fin des observations 4 (pag. 216), à savoir que le fragment anonyme fut composé probablement vers le milieu ou dans le troisième quart du X.^e siècle de notre ère. En effet, en lisant la suite du présent traité on ne pourra méconnaître l'uniformité que présente en général la marche suivie dans l'exposé de la théorie des triangles rectangles numériques tant par l'auteur du fragment anonyme que par Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn, uniformité qui paraît indiquer une certaine tradition d'école, un certain cadre commun qu'il était d'usage de remplir, en enrichissant d'ailleurs le sujet d'autant d'observations ou de découvertes originales que possible. En égard à ces points de ressemblance qui doivent nous porter à admettre qu'il existait des rapports plus ou moins suivis entre les savants qui cultivaient les mathématiques en Orient, il est peu vraisemblable que, un des points principaux de la théorie en question, tel que la série qui contient les hypoténuses des triangles rectangles primitifs, ayant été une fois nettement énoncé et défini, on ait pu longtemps après tomber encore dans des incertitudes et des erreurs au sujet de ce même point. Or, on a vu qu'il y a quelque raison de croire que le présent traité fut écrit dans la dernière moitié du X.^e siècle;

je suis donc disposé à penser qu'il faut placer la composition du fragment anonyme à peu près à la même époque, ou peu avant.

Je fais observer encore que les nombres qui sont exprimés ci-dessus et qui seront exprimés dans la suite de la présente traduction au moyen de nos chiffres modernes, sont exprimés dans le texte manuscrit par les lettres numériques.

Nous proposerons (maintenant) des exemples (fondés) sur ce (qui précède) pour faciliter l'intelligence de de (qui concerne la formation des triangles rectangles).

Nous commençons par le nombre 5 parce qu'il est le premier (nombre) impair qui se divise en deux parties dont on peut extraire la racine. Ce sont, comme nous l'avons dit, 1, 4. (Nous fondons) notre opération sur (cette base) que 5 soit la sous-tendante de l'angle droit d'un triangle. Nous prenons les racines des deux parties; ce sont un et deux. Nous multiplions leur somme par leur différence; (le résultat) est trois, et cela est l'un des deux (autres) côtés, ainsi que nous l'avons démontré dans ce qui précède. Nous multiplions (ensuite) l'une des deux racines par l'autre (prise) deux fois, et le produit est le second côté.

Au nombre 5 succède le nombre 13. Ses deux parties dont on peut extraire la racine, sont quatre et neuf, et leurs racines deux et trois. Nous multiplions leur somme par leur différence, (le produit) est cinq; et nous multiplions l'une par l'autre (prise) deux fois, (le produit) est douze. L'hypoténuse du triangle est donc 13, et ses deux (autres) côtés 5, 12.

Quant à 17, ses deux parties dont on peut extraire la racine sont un et seize, le produit de la somme de leur racines par leur différence est quinze, et le produit de l'une des deux racines par l'autre (prise) deux fois est huit. Les deux (autres) côtés du triangle dont l'hypoténuse est 17, sont donc 8, 15.

A cela succède ensuite 25 dont les deux parties dont on peut extraire la racine sont neuf et seize. Le produit de la somme de leurs racines par leur différence est sept, ce qui est l'un des deux (autres) côtés du triangle; et le produit de l'une des deux racines par l'autre (prise) deux fois, qui est le second côté, est vingt quatre.

Ensuite (vient) 29. Ses deux parties dont on peut extraire la racine sont quatre et vingt cinq, et leurs racines deux et cinq. Le produit de leur somme par leur différence, laquelle est trois, est vingt un; et le produit de l'une des deux (racines) par l'autre (prise) deux fois est vingt. Ces deux (nombres) sont les deux (autres) côtés du triangle dont l'hypoténuse est 29.

Si l'on opère de la même manière sur les (nombres) impairs suivants qui se divisent chacun en deux parties dont on peut extraire la racine, il résulte de 37 un triangle dont les deux (autres) côtés sont 12, 35; de 41 un triangle dont les deux (autres) côtés sont 9, 40; de 53 un triangle dont les deux (autres) côtés sont 28, 45; de 61 un triangle dont les deux (autres) côtés sont 11, 60.

Quant à 65 qui est le (nombre) impair qui se divise en quatre parties dont on peut extraire la racine, les deux premières de ces (parties) sont un et soixante quatre, leurs racines un et huit, le produit de la somme de celles-ci par leur différence est soixante trois, et le produit du double de l'une d'elles par l'autre seize. Les deux autres parties sont seize et quarante neuf, le produit de la somme de leurs racines par leur différence est trente trois, et le produit du double de l'une d'elles par l'autre cinquante six. Conséquemment soixante cinq est hypoténuse de deux triangles dont l'un a pour ses deux (autres) côtés 63, 16, et l'autre 33, 56.

De la même manière se fait l'opération pour les autres (nombres) impairs qui se divisent en deux ou en plusieurs parties dont on peut extraire la racine.

OBSERVATION.

L'auteur fait usage du théorème qu'il a démontré ci-dessus dans la seconde de ses propositions préliminaires, pour construire les triangles rectangles en nombres entiers qui ont pour hypoténuses respectivement les nombres 6, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, en formant pour chaque décomposition $a^2 + b^2$ d'une hypoténuse les quantités $(a + b)(a - b)$ et $2ab$ qui donnent les deux cathètes.

Comme les triangles engendrés par ces (nombres) impairs sont les premiers et les souches, les côtés d'aucun de ces triangles n'ont de facteur commun avec les côtés d'un des autres. Mais quant aux triangles qui sont dérivés de chacun de ceux-là, ce sont des triangles tels que les côtés de chacun d'eux sont des multiples postérieurs des côtés du triangle qui est le (triangle) primitif. Tels sont le triangle dont l'hypoténuse est dix, et les deux (autres) côtés six, huit; et le triangle dont l'hypoténuse est deux et demi, et les deux (autres) côtés un et demi, deux. Ces deux (triangles) font partie des (triangles) dérivés du triangle (5, 3, 4) qui précède, et leurs côtés ont des facteurs communs les uns avec les autres. C'est pourquoi il est inutile d'opérer sur les (nombres) pairs. Car si on a produit le triangle relatif à l'impair, on a produit par là le triangle relatif au pair qui vient à sa suite.

OBSERVATIONS.

L'auteur introduit ici la notion des triangles rectangles dérivés par opposition aux triangles rectangles primitifs. L'emploi du terme « primitif » (*awwal*) dans le passage ci-dessus, et déjà précédemment pag. 306, lig. 30, mérite d'être remarqué, le terme employé habituellement dans le fragment anonyme dont la traduction précède, étant « triangle souche », (*aql*). Je fais observer, en outre, que les derniers mots du passage ci-dessus: « le triangle relatif au pair qui vient à sa suite » (comparer pag. 306, lig. 21), signifient: « le triangle ayant une hypoténuse paire et dérivé du triangle à hypoténuse impaire », et que, pour désigner le triangle dérivé, l'auteur du présent traité se sert le plus souvent du terme *tdbr* qui signifie littéralement « suivant », mais que je traduirai dans la suite par « dérivé ». Le terme propre pour exprimer « dérivé » est *far'on* ou *mafrou'on*.

L'auteur dit que les triangles rectangles engendrés par « ces nombres impairs » sont primitifs. Si l'on s'entend par « ces nombres impairs » que strictement les nombres 5, 13, 17 etc. jusqu'à 85, considérés dans le passage précédent, cette assertion est exacte. Mais comme l'auteur ne dit rien des impairs qui donnent lieu à des triangles rectangles non primitifs, on est tenté de lui supposer la pensée que tous les nombres impairs qui restent dans le tableau proposé ci-dessus (pag. 309), après qu'on a y supprimé les colonnes paires, donnent lieu à des triangles rectangles primitifs. Ce serait une erreur, ainsi qu'on a pu le voir par les explications relatives à ce point, contenues dans des observations précédentes.

Ca que nous avons exposé précédemment, a ouvert aussi la route qui conduit à la connaissance de ces triangles sans la connaissance (préalable) des hypoténuses, mais au moyen des nombres se succédant à partir de l'unité suivant l'ordre naturel. Proposons donc une partie de ces nombres (ordonnés) de cette manière: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Le premier et le second de ces (nombres) sont les racines des deux parties (1 et 4) du cinq qui est la première des hypoténuses. Le second et le troisième sont les racines des deux parties du treize. Le troisième et le quatrième sont les racines des deux parties du vingt cinq. Et de cette manière deux quelconques de ces nombres contigus suivant cet ordre, sont la racines des deux parties d'une des hypoténuses ci-dessus mentionnées. Conséquemment le produit de la somme de deux quelconques de ces nombres contigus l'un à l'autre, par leur différence, est un deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un des triangles qui sont les souches. Le produit de l'un des deux (nombres) par l'autre (pris) deux fois est l'autre côté; et l'hypoténuse du (triangle) est la somme des carrés des deux nombres, parce que ceux-ci sont égaux aux racines des deux parties de l'hypoténuse.

Par exemple, le produit de la somme (des nombres) 1, 2 de la suite proposée par leur différence, est trois; le produit de l'un des deux (nom-

bres) par l'autre (pris) deux fois, quatre; le produit de 1 par lui-même un, le produit de 2 par lui-même quatre, et la somme des deux (produits) cinq. Le premier triangle vient donc d'être produit | au moyen de 1, 2 qui occupent la place de deux nombres contigus. Ind. 89. cert.

Par une opération semblable il résulte de 2, 3 le triangle dont l'hypoténuse est 13 et les deux (autres) côtés 5, 12; de 3, 4 le triangle dont l'hypoténuse est 25 et les deux (autres) côtés 7, 24; de 4, 5 le triangle dont l'hypoténuse est 41 et les deux (autres) côtés 9, 40; de 5, 6 le triangle dont l'hypoténuse est 61 et les deux (autres) côtés 11, 60. Et de la même manière il résulte, au moyen de cette opération, de tous les nombres contigus, pris deux à deux les uns après les autres, d'autres (triangles rectanglés) dont les plus petits côtés seront les nombres impairs suivant l'ordre, à partir du premier impair qui est trois.

Lorsque les deux (autres) côtés d'un triangle (rectangle) ont été produits au moyen de deux nombres contigus, la connaissance de son hypoténuse (peut être obtenue) de trois manières. L'une de ces (manières consiste en ce) que l'on additionne les carrés des deux côtés et que l'on prend la racine de la somme, ce qui est une méthode générale pour trouver l'hypoténuse de tout triangle rectangle; et cela est évident. La seconde manière (consiste) à prendre la différence des deux nombres, à la multiplier par elle-même, et à ajouter le (produit) au côté qui est pair. Alors (le résultat) sera l'hypoténuse parce que l'excédant de l'hypoténuse sur ce côté est (le carré de) la différence des deux nombres au moyen desquels ont été produits les deux côtés du triangle. La troisième (manière consiste) à multiplier le plus petit des deux nombres par lui-même, à doubler ce qu'on obtient, et à ajouter (le résultat) au côté qui est impair. Il en résulte l'hypoténuse parce que l'excédant de l'hypoténuse sur le côté qui est impair, est égal au double du carré du plus petit des deux nombres. C'est ce que nous avons déjà démontré dans les théorèmes que nous avons proposés (ci-dessus). Par exemple (dans) le premier triangle l'hypoténuse, qui est cinq, dépasse le côté qui est quatre, du carré de l'unité qui est la différence entre 1, 2; et dépasse trois du double du carré du plus petit des deux nombres qui est un.

OBSERVATION.

Nous avons déjà vu, dans les observations relatives au N.^o 3 du fragment anonyme (voir ci-dessus, pag. 223), que le triangle

$$(2m+1)^2 + [2m(m+1)]^2 = \{m^2 + (m+1)^2\}^2$$

formé au moyen des nombres m et $m+1$, est toujours primitif. On voit aussi que le plus petit côté $2m+1$ prend successivement pour valeurs tous les nombres impairs, pendant que m prend pour valeurs tous les nombres entiers. Quant aux trois manières de trouver l'hypoténuse, et est évident que

- 1) $m^2 + (m+1)^2 = \sqrt{\{2m+1\}^2 + [2m(m+1)]^2}$
- 2) $m^2 + (m+1)^2 = \{(m+1) - m\}^2 + 2m(m+1)$
- 3) $m^2 + (m+1)^2 = 2m^2 + (2m+1)$.

La proposition à laquelle l'auteur fait allusion, est le 3.^e de ses théorèmes préliminaires (voir ci-dessus, pag. 305, lig. 18 à dernière).

(Étant proposés les trois nombres) 1, 2, 3; si l'on en multiplie le premier par le troisième, il résulte l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du premier triangle; et si on additionne (les mêmes deux nombres) l'un à l'autre, il résulte l'autre côté. Il existe donc une troisième méthode de trouver ce triangle. Et comme il est indifférent que l'on additionne les deux (nombres) extrêmes, ou que l'on multiplie le (nombre) moyen par deux; attendu que le moyen de trois nombres consécutifs quelconques est la moitié (de la somme) des deux extrêmes: le produit de 2 par deux est égal à la somme de 1, 3 qui est l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit).

L'opération d'après cette méthode produit des triangles à côtés rationnels qui sont en partie primitifs, et en partie dérivés. Le triangle primitif est celui qui est produit, lorsque l'un des deux extrêmes des trois (nombres) est pair et l'autre impair (*sic*), et s'ils sont tous les deux pairs, le triangle qui est produit, est dérivé d'un triangle qui précède.

Par exemple, (étant proposés), 2, 3, 4; si l'on multiplie le premier de ces (nombres) par le troisième, (le produit) est un des deux côtés (comprenant l'angle droit); et si on les additionne l'un à l'autre, ou que l'on multiplie 3 par deux, (le résultat) est l'autre côté. Or, chacun de ces deux côtés est le double du côté correspondant du triangle précédent, qui est produit au moyen des (nombres) 1, 2; car le trois mesure le six, et la quatre mesure le huit; les côtés des deux triangles ont donc un rapport commun.

Mais quant à 3, 4, 5; si le premier de ces (nombres) est multiplié par le troisième, on aura l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du troisième triangle, à savoir de celui dont l'hypoténuse est 17. Et si on les ad-

کتابخانه
بنیاد دایرة المعارف اسلام

ditionne l'un à l'autre, ou que l'on multiplie le (nombre) moyen par deux, on aura l'autre côté.

Si les nombres (proposés) sont 4, 5, 6, le produit du premier par le troisième est 24, et leur somme, ou le produit du (nombre) moyen par deux, 10. Chacun de ces deux (résultats) est le double | du côté correspondant du triangle précédent qui est produit au moyen de 3, 4, 5 (?). Si les nombres sont 5, 6, 7, il en résulte, par cette opération, le triangle dont l'hypoténuse est trente sept. Si les nombres sont 6, 7, 8, il en résulte le triangle dont chacun des deux côtés (comprenant l'angle droit) est double du côté correspondant du triangle résultant de 5, 6, 7 (?). Ensuite cela a lieu de la même manière pour trois nombres consécutifs quelconques des (nombres) suivants.

Int. 191 rectio.

Si l'on connaît les deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un triangle produit au moyen de trois nombres consécutifs, pour (obtenir) la connaissance de l'hypoténuse on aura à examiner. Si l'un des deux côtés est pair, et l'autre impair, on multiplie le premier des trois nombres par lui-même, et on ajoute le produit au côté qui est pair; ou on prend la différence entre le premier et le troisième (nombre), et on l'ajoute au côté qui est impair. Il résultera l'hypoténuse. Nous avons mentionné dans ce qui précède la manière de connaître (l'hypoténuse) par la méthode générale.

OBSERVATIONS.

On trouve ci-dessus, dans les observations au N. 9 du fragment anonyme (voir pag. 224), quelques remarques concernant la formation des triangles rectangles en nombres entiers au moyen de trois nombres entiers consécutifs.

L'auteur du présent traité commet ici deux nouvelles erreurs. La première pourrait n'être qu'un simple *lapsus calami*. C'est lorsqu'il dit que le triangle sera primitif, si le premier des trois nombres est pair et le troisième impair, au lieu de dire: si le premier et le troisième nombre sont impairs.

La seconde erreur consiste en ce que l'auteur paraît croire que, lorsque des trois nombres $m-1$, m , $m+1$ on a déduit un triangle non primitif, m étant impair, les côtés de ce triangle sont doubles de ceux du triangle que l'on déduit par la même opération des trois nombres $m-2$, $m-1$, m . Non seulement on vérifie immédiatement que cette assertion est fautive pour les triangles déduits des nombres 4, 5, 6 et 6, 7, 8 dont les côtés seraient, d'après l'auteur, doubles de ceux des triangles déduits des nombres 3, 4, 5 et 5, 6, 7 respectivement; mais on voit même qu'il n'existe qu'un seul triangle déduit de la manière ci-dessus de trois nombres consécutifs, dont les côtés soient doubles d'un autre triangle déduit de trois nombres consécutifs.

En effet, les deux cathètes du triangle rectangle déduit des nombres $m-1$, m , $m+1$ sont m^2-1 , $2m$; et si le triangle est non primitif parce que m est impair, de sorte que

$m = 2\mu + 1$, ces deux cathètes s'expriment par $2(2\mu^2 + 2\mu)$, $2(2\mu + 1)$. Si les moitiés de ces cathètes sont égales aux cathètes d'un triangle déduit des trois nombres consécutifs $m' - 1$, m' , $m' + 1$, on aura

$$m'^2 - 1 = 2\mu + 1, \quad 2m' = 2\mu(\mu + 1)$$

d'où

$$m'\mu = 2;$$

et, comme $m' > \mu$, il n'existe qu'une seule solution en nombres entiers: $\mu = 1$, $m' = 2$; c'est à dire que les côtés du triangle déduit des nombres 2, 3, 4 sont doubles des côtés du triangle déduit des nombres 1, 2, 3.

Les côtés des triangles rectangles déduits des nombres 2, 3, 4; 4, 5, 6; 6, 7, 8; 8, 9, 10; 11, 12; 12, 13, 14; etc. sont doubles des côtés des triangles rectangles formés au moyen des nombres 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5; 5, 6; 6, 7; etc. respectivement. C'est peut-être ce que l'auteur a voulu dire, mais ce que, en tout cas, il n'a pas dit.

Du reste le copiste du morceau (probablement le géomètre Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjall Alsidzi) a hésité à l'endroit où l'auteur dit que le triangle déduit des nombres 4, 5, 6 a les cathètes doubles de celui déduit des nombres 3, 4, 5; il a commencé par rayer, dans 3, 4, 5, le nombre 4; mais s'apercevant probablement que c'était une erreur de l'auteur lui-même, il n'a pas fait d'autre changement.

Je fais observer aussi que déjà dans la phrase: « et s'ils sont tous les deux pairs, le triangle qui est produit, est dérivé d'un triangle qui précède », le texte porte littéralement: « est dérivé du triangle qui précède. » Mais l'article arabe n'ayant pas toujours la même force déterminante que notre article déterminé, il y avait lieu de traduire de manière à ne pas faire énoncer à l'auteur une erreur, tant qu'il n'était pas évident qu'il s'était trompé.

On a vu déjà à une occasion précédente que l'auteur du présent traité est bien inférieur, comme géomètre, à l'auteur du fragment anonyme. Aussi ce n'est pas sa valeur comme mathématicien qui m'engage à donner la présente traduction de son écrit, mais la circonstance que ce traité sert à compléter à divers égards le fragment anonyme; qu'il montre, par l'identité des objets discutés dans les deux ouvrages quelle était la manière dont cette partie des mathématiques fut traitée généralement par les géomètres arabes du X.^e siècle; et surtout que la théorie des nombres congruents, qui nous intéresse ici principalement, occupe dans le présent traité la même place importante que dans le fragment anonyme.

Les observations de l'auteur sur la manière de trouver l'hypoténuse $m^2 - 1$ du triangle rectangle déduit des trois nombres consécutifs $m - 1$, m , $m + 1$ sont exactes; on a en effet

$$(m - 1)^2 + 2m = m^2 + 1$$

$$[(m + 1) - (m - 1)] + (m^2 - 1) = m^2 + 1.$$

(Continuera).

MATEMATICA. — *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés Par. M. le prince BALTHASAR BONCOMPAGNI et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des Arabes. Par M. F. ВОСРЕКЪ (1).*

(Étant proposés les quatre nombres) 1, 2, 3, 4; si l'on en additionne les deux extrêmes, il résulte l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du second triangle, à savoir de celui dont l'hypoténuse est 13; et le produit de l'un des deux (nombres) moyens par l'autre (pris) deux fois, est le second côté. Il existe par conséquent une troisième méthode pour (arriver à) la connaissance de ce (triangle). L'opération (faite) d'après cette méthode produit des triangles à côtés rationnels qui sont tous primitifs.

Par exemple, (soient proposés) 2, 3, 4, 5. La somme des deux extrêmes de ces (nombres) est l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle dont l'hypoténuse est 25; et le produit de 3 par 4 (pris) deux fois, est le second côté. Pareillement (soient proposés) 3, 4, 5, 6. Si l'on en additionne les deux extrêmes, il résulte l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle dont l'hypoténuse est 41; et si on multiplie 4 par 5 (pris) deux fois, il provient le second côté. Et si on opère de la même manière

(1) Continuazione e fine vedi pag. 324.

sur tous les (groupes de) quatre nombres consécutifs, les uns après les autres, suivant cet ordre, il résulte des triangles primitifs dont les plus petits côtés sont les (nombres) impairs suivant l'ordre à partir du cinq.

Si les quatre nombres consécutifs, (ordonnés) de cette manière sont 3, 4, 5, 6, et que l'on y joigne ensuite deux nombres dont l'un les précède et dont l'autre les suive, à savoir 2, 7, de sorte que ce soient six nombres consécutifs (ordonnés) de la manière suivante 2, 3, 4, 5, 6, 7; alors, si l'on additionne les deux extrêmes des quatre (nombres) du premier arrangement, et si on multiplie l'un des deux moyens par l'autre (pris) deux fois, afin qu'il en résulte les deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un de ces triangles, les deux côtés du même triangle résulteront exactement aussi de l'addition des deux extrêmes des six nombres du second arrangement, et de la multiplication de l'un des deux moyens par l'autre (pris) deux fois. Car la somme des deux extrêmes est la même dans les deux arrangements, et les deux moyens ne sont pas changés.

De même, si l'on ajoute aux nombres du premier arrangement deux nombres qui les précèdent et deux nombres qui les suivent, de sorte que l'on ait huit nombres consécutifs (arrangés) de la manière suivante 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et que l'on exécute ensuite sur ces nombres ce que nous venons de dire en fait d'addition des deux extrêmes et de multiplication de l'un des deux moyens par l'autre (pris) deux fois, il en résulte les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle qui avait été produit au moyen de quatre nombres et au moyen de six nombres.

fol. 90 verso. Mais si l'on ajoute deux nombres au commencement des nombres 3, 4, 5, 6, de sorte que ce soient six nombres consécutifs (arrangés) de la manière suivante 1, 2, 3, 4, 5, 6; ou si on ajoute deux nombres à la fin, de sorte que (les six nombres) soient (arrangés) de la manière suivante 3, 4, 5, 6, 7, 8; le triangle est changé par suite du changement du premier (terme) extrême dans le premier arrangement, par suite du changement du dernier (terme) extrême dans le second arrangement, et par suite du changement des deux (termes) moyens dans tous les deux.

Si les deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un triangle sont connus au moyen de cette opération, (le moyen d'arriver à) la connaissance de son hypoténuse est de multiplier le plus petit des deux (nombres) moyens par lui-même, de doubler ce qui en provient, et d'ajouter (le résultat) au plus petit des deux côtés qui est toujours impair. Ce qui résulte est l'hypoténuse.

OBSERVATION.

Nous avons déjà vu ci-dessus, dans les observations au N.° 10 du fragment anonyme, que ces règles concernant la formation de triangles rectangles au moyen de quatre, six ou huit nombres consécutifs sont identiques à celle de Pythagore. Les triangles engendrés sont de la forme

$$(2m+1)^2 - [2m(m+1)]^2 = [2m(m+1) + 1]^2,$$

les plus petits côtés $(2m+1)$ sont les nombres impairs suivant l'ordre. La méthode indiquée par l'auteur pour trouver l'hypoténuse, et qui s'exprime par la formule

$$2m^2 + (2m+1) = 2m(m+1) + 1,$$

n'est autre chose que la 3.^e manière de trouver l'hypoténuse, qu'il a donnée à l'occasion des triangles rectangles formés au moyen de deux nombres consécutifs (voir ci-dessus, pag. 321, lig. 24 et pag. 322, lig. 7).

Pareillement, si nous posons des nombres impairs consécutifs à partir du premier impair, soient 3, 5, 7, 9, 11, 13, et si nous multiplions 3 par 7 et 5 par quatre, il en résulte les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle dont l'hypoténuse est 29, lesquels sont 20, 21, comme nous l'avons montré dans ce qui précède. Et si nous multiplions 5 par 9 et 7 par quatre, il en résulte les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle dont l'hypoténuse est 53, savoir 28, 45. Si nous exécutons la même opération sur les trois nombres 7, 9, 11, nous obtenons un triangle (rectangle) primitif; et pareillement si nous opérons sur les nombres 9, 11, 13, nous obtenons un autre triangle (rectangle) primitif.

Conséquemment, (si l'on prend) trois (nombres) impairs quelconques, consécutifs suivant l'ordre naturel, le produit du premier par le troisième est l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un des triangles primitifs, et le produit du moyen des (trois nombres) par quatre est le second côté.

(Le moyen d'arriver à la connaissance de l'hypoténuse (consiste en ce) que nous multiplions le premier de trois (nombres) par lui-même, et que (le produit) est ajouté au plus petit des deux côtés qui est toujours pair. Ce qui résulte est l'hypoténuse.

Pareillement (si l'on prend) quatre nombres impairs consécutifs quelconques, la somme des deux extrêmes est un des deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un triangle primitif, et le produit de l'un des deux moyens par l'autre est le second côté. (Soient proposés) par exemple, 3, 5, 7, 9. La somme

de 3, 9 est douze, et le produit de 5 par 7 est trente cinq. Ces deux (nombres) sont les deux (autres) côtés du triangle dont l'hypoténuse est 37. Et l'excédant de cette hypoténuse sur le plus petit des deux (autres) côtés, est le carré du premier des deux (nombres) moyens.

OBSERVATIONS.

Les mêmes règles sur la formation des triangles rectangles au moyen de trois ou quatre impairs consécutifs se trouvent dans le N. 11 du fragment anonyme (voir ci-dessus pag. 241, 242). Quant aux règles données ici relativement à la formation de l'hypoténuse; on a en effet (puisque $m > 1$), pour le premier cas

$$(2m-1)(2m+3) > 4(2m+1) \quad \text{et} \quad (2m-1)^2 + 4(2m+1) = (2m+1)^2 + 4,$$

pour le second cas

$$(2m-1)(2m+1) > 4m \quad \text{et} \quad (2m-1)^2 + 4m = (2m)^2 + 1.$$

Le passage auquel l'auteur fait allusion pour la formation du triangle $20^2 + 21^2 = 29^2$, se trouve ci-dessus pag. 318, lig. 35 à 37.

Comme le premier nombre impair se divise seulement en un et deux; que le second impair, à savoir 5, se divise en un et quatre, et en deux et trois; que le troisième impair, à savoir 7, se divise en un et six, en deux et cinq, et en trois et quatre; que 9 se divise en un et huit, en deux et sept, en trois et six, et en quatre et cinq; et comme il est résulté de chaque couple de ces parties un triangle (rectangle), ainsi que nous l'avons montré par des exemples dans ce qui précède, lorsque nous avons multiplié la somme des deux parties par leur différence, et lorsque nous avons multiplié l'une des deux (parties) par l'autre (prise) deux fois: (il s'ensuit que) le produit de la somme de deux nombres différents quelconques dont la somme est impaire, par leur différence est l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un des triangles primitifs; et le produit de l'un des deux (nombres) par l'autre (pris) deux fois est le second côté, à cela près que pour tous les couples de ces parties | qui ont un diviseur commun, le triangle qui en résulte, est dérivé d'un triangle primitif qui précède.

fol. 91 recto.

Nous trouvons, par exemple, parmi les parties dans lesquelles se divise le neuf, trois et six qui ont un diviseur commun. Les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle qui en résulte sont vingt sept et trente six, et son hypoténuse est quarante cinq. Ce (triangle) est de l'espèce du triangle

dont les deux côtés (comprenant l'angle droit) sont trois et quatre, et dont l'hypoténuse est cinq. Nous ne trouvons pas cela parmi les parties du 11, ni parmi les parties du 13. Mais quant à 15, il se divise en un et quatorze, en deux et treize, en trois et douze qui ont un diviseur commun, en quatre et onze, en cinq et dix qui ont un diviseur commun, en six et neuf qui ont un diviseur commun, et en sept et huit. L'opération (appliquée) à chacun des couples de ces parties qui ont un diviseur commun produit un triangle qui est de l'espèce d'un triangle précédent. D'une manière semblable chacun des nombres impairs jusqu'à l'infini se divise dans les parties dans lesquelles il est décomposable, et on opérera sur chaque couple de ces (parties de la manière) que nous venons de décrire.

OBSERVATIONS.

La même règle concernant la formation des triangles rectangles au moyen de deux nombres quelconques premiers entre eux, se trouve dans les numéros 6 et 7 du fragment anonyme (voir ci-dessus pag. 220 à 229; comparer aussi les observations au N. 3, pag. 214 et suiv.)

Le passage du présent traité auquel l'auteur fait allusion comme contenant des exemples de cette manière de former des triangles rectangles, se trouve ci-dessus pag. 318, lig. 9 et suiv.)

De ce qui précède il résulte un certain nombre de manières de trouver ces triangles. Telles sont :

l'opération au moyen du nombre impair dont le carré se divise en deux nombres carrés ;

l'opération au moyen des racines des deux parties dans lesquelles se divise chacun des (nombres) impairs ;

l'opération au moyen de deux nombres consécutifs quelconques ;

l'opération au moyen de trois nombres consécutifs quelconques ;

l'opération au moyen de quatre, de six, ou de huit nombres consécutifs quelconques, ou d'un plus grand nombre, en augmentant de deux en deux nombres ;

l'opération au moyen de trois nombres impairs consécutifs quelconques ;

l'opération au moyen de quatre nombres impairs consécutifs quelconques ;

l'opération au moyen de deux nombres différents quelconques dont la somme est impaire.

Ces manières tiendront lieu des autres, s' il plaît à Dieu.

OBSERVATION.

Voici les endroits du présent traité où se trouvent exposées les méthodes énumérées dans la récapitulation ci-dessus : la première, pag. 303, lig. 13 et suiv. ; la seconde, qui n'est pas essentiellement différente de la première, pag. 307, lig. 28 et suiv. et pag. 318, lig. 6 et suiv. ; la troisième, pag. 320, lig. 19 et suiv. ; la quatrième, pag. 322, lig. 11 et suiv. ; la cinquième, pag. 343, lig. 11 et suiv. la sixième, pag. 345, lig. 13 et suiv. la septième, pag. 345, lig. 32 et suiv. ; la huitième, pag. 346, lig. 15 et suiv.

(Si nous examinons) les triangles (rectangles) qui sont produits au moyen de deux nombres consécutifs quelconques à partir de l'unité, (nous trouvons que) l'aire du premier de ces (triangles) est égale à la moitié de la somme de ses côtés, que l'aire du second est égale à la somme de ses côtés, l'aire du troisième égale à la somme de ses côtés une fois et demie, et l'aire du quatrième égale à deux fois la somme de ses côtés ; et de cette manière (le rapport de) l'aire de chacun de ces (triangles à la somme de ses côtés) dépasse (le rapport de) l'aire du triangle précédent (à la somme de ses côtés) de la moitié d'une fois. La même relation a lieu aussi entre les aires des triangles qui sont produits au moyen de trois nombres consécutifs quelconques à partir de l'unité, (considérés) les uns par rapport aux autres.

(Pour) les triangles produits au moyen de quatre nombres consécutifs quelconques à partir de l'unité, l'aire du premier de ces (triangles) est égale à une fois et demie la somme de ses côtés, l'aire du second est égale à trois fois la somme de ses côtés, l'aire du troisième est égale à quatre fois et demie la somme de ses côtés, et de la même manière (le rapport de) l'aire de chacun de ces (triangles à la somme de ses côtés) dépasse (le rapport de) l'aire du triangle précédent (à la somme de ses côtés) d'une fois et demie.

(Pour) les triangles produits au moyen de six nombres consécutifs quelconques à partir de l'unité, l'aire du premier de ces (triangles) est égale à deux fois et demie la somme de ses côtés, l'aire du second est égale à cinq fois la somme de ses côtés ; et pareillement (le rapport de) l'aire de chacun de ces (triangles à la somme de ses côtés) dépasse (le rapport de) l'aire du triangle précédent (à la somme de ses côtés) de deux fois et demie.

(Pour) les triangles produits au moyen de huit nombres consécutifs quelconques à partir de l'unité, l'aire du premier de ces (triangles) est égale à trois fois et demie la somme de ses côtés, l'aire du second est égale à sept fois la somme de ses côtés, et pareillement (le rapport de) l'aire de chacun

de ces (triangles à la somme de ses côtés) dépasse (le rapport de) l'aire du triangle précédent (à la somme de ses côtés) de trois fois et demie.

Et de cette manière, toutes les fois qu'on ajoute deux nombres aux nombres consécutifs, l'aire du triangle qui en résulte, augmente, relativement à l'aire du triangle précédent, d'une fois le nombre des multiples (de la somme de ses côtés).

Si nous multiplions les côtés d'un des triangles primitifs par un certain nombre (exprimant) des multiples ou des parties, il en résulte des triangles dérivés de ce triangle.

OBSERVATIONS.

Les théorèmes énoncés ici par l'auteur sont, à partir du second, distincts de ceux que nous avons trouvés ci-dessus dans le N.° 12 du fragment anonyme. Malheureusement les théorèmes du présent traité, à l'exception des deux premiers, concernant les triangles produits au moyen de deux et de trois nombres consécutifs, sont faux.

En effet, désignons par A l'aire et par P le périmètre du triangle. Le triangle rectangle formé au moyen des deux nombres consécutifs $m, m+1$ a pour côtés

$$m+(m+1), \quad 2m(m+1), \quad m^2+(m+1)^2$$

donc

$$A = m(m+1)(2m+1), \quad P = 2(m+1)(2m+1), \quad \frac{A}{P} = \frac{m}{2}.$$

Le triangle rectangle produit au moyen des trois nombres consécutifs $m, m+1, m+2$ (voir ci-dessus pag. 322, lig. 11 et suiv.) a pour côtés

$$m(m+2), \quad 2(m+1), \quad (m+1)^2+1$$

donc

$$A = m(m+1)(m+2), \quad P = 2(m+2), \quad \frac{A}{P} = \frac{m}{2}.$$

Mais quant aux triangles rectangles produits au moyen de quatre, de six, de huit nombres consécutifs, et ainsi de suite (voir ci-dessus pag. 343, lig. 11 et suiv.), le triangle rectangle produit au moyen des $2(n+1)$ nombres consécutifs $m, m+1, m+2, \dots, m+2n+1$ a pour côtés

$$(m+n)+(m+n+1), \quad 2(m+n)(m+n+1), \quad (m+n)^2+(m+n+1)^2$$

donc

$$A = (m+n)(m+n+1)(2m+2n+1), \quad P = 2(m+n+1)(2m+2n+1), \quad \frac{A}{P} = \frac{m+n}{2}.$$

Le rapport $\frac{A}{P}$ prend donc successivement les valeurs :

pour les triangles rectangles produits au moyen de quatre nombres consécutifs

$$1, \quad 1\frac{1}{2}, \quad 2, \quad 2\frac{1}{2}, \quad 3, \quad \dots$$

pour les triangles rectangles produits au moyen de six nombres consécutifs

$$1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, \dots$$

pour les triangles rectangles produits au moyen de huit nombres consécutifs

$$2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, \dots$$

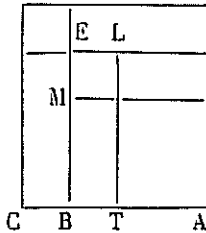
et ainsi de suite.

On dirait que l'auteur a reçu par quelque communication orale une connaissance imparfaite de théorèmes énoncés ailleurs, et qu'il se croit en état de les reproduire sans même se donner la peine de les vérifier. On a déjà remarqué ci-dessus un fait semblable (voir pag. 317, lig. 2), lorsque l'auteur ne réussit pas à trouver la véritable nature de la suite qui renferme les hypoténuses des triangles rectangles primitifs, tout en paraissant posséder d'avance sur la loi de cette suite certaines notions justes, mais incomplètes ou confuses. Je répète d'ailleurs que je ne publie pas la traduction du présent traité à cause de sa valeur mathématique, mais parce qu'il complète à certains égards, et notamment en ce qui concerne les nombres congruents, le fragment anonyme ci-dessus, et parce que, joint à ce fragment, il nous donne une idée assez précise des points qu'embrassait la théorie arabe des triangles rectangles en nombres entiers vers la fin du X. siècle de notre ère.

Les dernières lignes du texte ci-dessus comprennent ce que l'auteur a à dire sur la formation des triangles rectangles en nombres rationnels. On voit du reste aisément que tout triangle rectangle en nombres rationnels est ou bien un triangle rectangle primitif en nombres entiers, ou dérivé d'un triangle rectangle primitif en nombres entiers.

Quant au but de la connaissance de ces triangles, c'est de trouver un nombre qui a une racine, (et tel que) si on y ajoute un (certain) nombre, la somme a une racine, et si on en retranche le même nombre, le reste a une racine.

H Z *Explication.* Nous posons AB, BC (égaux aux) deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un des triangles à côtés D rationnels; nous construisons sur AB, AC deux carrés AE, AH; nous prolongeons DE jusqu'à CH, et BE jusqu'à ZH; nous coupons TB égal à BC, et KD égal à ZD, et nous menons les deux lignes TL, KM parallèles à AD, AB; alors le produit du côté AB par lui-même est le carré AE, et le produit du côté BC par lui-même est le carré EH; conséquemment la racine de la somme de ces deux (carrés) est rationnelle, parce que c'est l'hypoténuse du triangle. Nous ajoutons à ces deux (carrés) le produit de l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois, à savoir les deux (rectangles) complémentaires ZE, EC; alors il résulte comme somme le carré AH; donc la



racine de la (somme), à savoir AC, est rationnelle, parce que chacune des deux (parties) AB, BC est rationnelle. Mais (d'un autre côté) le produit de AB par lui-même et (le produit) de TB, c'est à dire de BC, par lui-même sont égaux au produit de AB par TB (pris) deux fois, avec le produit de AT par lui-même, qui est le carré KT, en vertu de ce qui est exposé dans la septième proposition du second livre du Traité des Éléments; et le produit de AB par TB (pris) deux fois est égal à (la somme des) deux (rectangles) complémentaires ZE, EC; par conséquent les deux carrés AE, LM dont la somme est égale au carré de l'hypoténuse, sont égaux aux deux (rectangles) complémentaires ZE, EC avec le carré TK; (si) donc nous retranchons du carré de l'hypoténuse les deux (rectangles) complémentaires ZE, EC, il reste le carré TK dont la racine est AT; et AT est rationnel parce que c'est la différence des deux côtés AB, TB qui sont rationnels.

Alors donc le carré de l'hypoténuse du triangle est un nombre [qui a une racine], (et tel que) si on y ajoute un (certain) nombre, à savoir (la somme des) deux (rectangles) complémentaires ZE, EC qui résultait de la multiplication de l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) par l'autre (pris) deux fois, il résulte le carré AH qui est un nombre qui a une racine, et dont la racine est la somme des deux côtés; et si on retranche du carré de l'hypoténuse le même nombre, à savoir les deux (rectangles) complémentaires, il reste le carré TK qui est un nombre qui a une racine, et dont la racine est la différence des deux côtés. Il est clair aussi d'après cela que le nombre ajouté et retranché est ce qui résulte de la multiplication de l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois.

(fol. 92 recto

OBSERVATIONS.

Ce qu'il importe surtout de remarquer dans la texte ci-dessus, c'est que l'auteur déclare en termes clairs et précis que le but de la théorie des triangles rectangles en nombres rationnels est la résolution du problème des nombres congruents (comparer ci-dessus pag. 253, fig. 12; pag. 302, fig. 32).

L'auteur démontre par une figure géométrique le principe de cette résolution, savoir que si on a satisfait par des nombres rationnels à l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

on aura

$$z^2 + 2xy = (x+y)^2 \quad \text{et} \quad z^2 - 2xy = (x-y)^2$$

où $x+y$ et $x-y$ seront pareillement des nombres rationnels. Dans la figure ci-dessus AB correspond à x , BC à y , AC à $x+y$, AT à $x-y$.

Cette démonstration géométrique présente d'ailleurs un caractère qui mérite d'être remarqué; c'est qu'elle est fondée sur des considérations de juxtaposition (*), méthode que les géomètres indiens semblent avoir employée avec prédilection. Cette circonstance serait-elle un indice que le problème des nombres congruents sous la forme où nous la voyons traité par les Arabes, leur est venu des Indiens? On sait bien que Diophante a résolu en nombres rationnels divers cas des équations simultanées $x^2 + y = z^2$, $x^2 - y = t^2$ (voir ci dessus pag. 252, lig. 21) mais il paraît d'un autre côté que l'analyse indéterminée de Diophante n'est pas restée inconnue aux géomètres indiens et qu'elle a été développée par eux. Je fais observer, en outre, que la résolution arabe du problème des nombres congruents est intimement liée à la construction d'une figure géométrique en nombres rationnels, et que de semblables constructions de figures géométriques en nombres rationnels sont un des sujets les plus remarquables traités par Brahmagupta (Voir *Colebrooke, Algebra etc. from the sanscrit*, London 1817 pag. 295 à 311; et *Chasles, Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles 1837, pag. 420 à 447). Je rappelle enfin que rien ne prouve jusqu'à présent que les Arabes aient connu Diophante antérieurement à la traduction qu'en fit Aboul Wafâ (mort en 998 de notre ère), tandis qu'on place Brahmagupta environ au milieu du VII.^e siècle, et que les communications scientifiques des Arabes avec les Indiens remontent à la seconde moitié du VIII.^e siècle.

Si notre but est seulement de trouver un nombre qui a une racine, (et tel que) si on y ajoute un certain nombre, ce qui résulte a une racine, et (que) si on en retranche le même nombre, ce qui reste a une racine, nous prenons deux nombres quels qu'ils soient, consécutifs ou non consécutifs, nous multiplions l'un par l'autre, nous multiplions ensuite le produit par la somme des deux nombres, et nous divisons ce qui en résulte par leur différence. Ce qu'on obtient est le nombre ajouté et retranché. Ensuite nous multiplions chacun des deux nombres par lui-même, nous prenons la moitié de la somme des deux (produits), puis nous divisons par la différence des deux nombres. Ce que l'on trouve est la racine du nombre qui (est tel que) si on y ajoute le nombre ajouté et retranché, ce qui résulte a une racine, et (que) si on en retranche le même nombre, le reste a une racine.

Il arrive quelquefois que cette opération est en défaut dans (le cas de) deux nombres non consécutifs. Cela (a lieu) lorsque le nombre qui résulte de la racine trouvée est plus petit que le nombre ajouté et retranché. La démonstration de tout cela se trouve (comprise) dans ce que nous avons décrit.

Nous avons donc démontré qu'au moyen de deux nombres différents quel-

(*) La citation d'Euclide est inutile; on voit par juxtaposition que

$$AE + LM = KE + ET + KT = ZE + EC + ET.$$

conques nous construisons un triangle rectangle ayant les deux côtés (de l'angle droit) et l'hypoténuse rationnels. C'est que nous multiplions la somme des deux (nombres) par leur différence, (d'où) résultera l'un des deux côtés; que nous multiplions l'un des deux (nombres) par l'autre (pris) deux fois, (d'où) résultera l'autre côté; que nous multiplions le plus petit des deux nombres par lui-même, que nous doublons le (produit), et que nous réservons ce qui en résulte; que nous multiplions la différence des deux (nombres) par elle-même, et que nous réservons ce qui en résulte; que nous ajoutons ensuite le plus petit des deux résultats (réservés) au plus grand des deux côtés, ou que nous ajoutons le plus grand des deux résultats (réservés) au plus petit des deux côtés, (d'où) résultera l'hypoténuse. Après cela nous multiplions l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois, et il résultera le nombre ajouté et retranché. Ceci est l'opération la plus courte qui existe pour trouver cette espèce de triangles.

OBSERVATIONS.

Le nombre congruent formé par l'auteur dans le premier alinéa du texte ci-dessus, et le carré auquel ce nombre est congruent, sont ceux du fragment anonyme divisés par $4(a-b)^2$. On a en effet

$$\left[\frac{a^2 + b^2}{2(a-b)} \right]^2 + \frac{ab(a+b)}{a-b} = \left[\frac{a+b}{2} + \frac{ab}{a-b} \right]^2$$

$$\left[\frac{a^2 + b^2}{2(a-b)} \right]^2 - \frac{ab(a+b)}{a-b} = \left[\frac{a+b}{2} - \frac{ab}{a-b} \right]^2$$

On ne voit pas bien quelle est la difficulté dont l'auteur veut parler dans le second alinéa. Il paraîtrait qu'il a pensé que l'on pourrait avoir quelquefois

$$\left[\frac{a^2 + b^2}{2(a-b)} \right]^2 < \frac{ab(a+b)}{a-b}.$$

Mais ce serait une erreur, car on a toujours

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 > 2(a^2 - b^2)(2ab)$$

donc

$$\left[\frac{a^2 + b^2}{2(a-b)} \right]^2 > \frac{ab(a+b)}{a-b}.$$

Dans le troisième alinéa l'auteur résume ainsi la formation des quantités principales dont il a été question dans son traité:

les deux cathètes du triangle rectangle	$(a+b)(a-b)$, $2ab$
l'hypoténuse	$(a+b)(a-b)+2b^2$ ou $2ab+(a-b)^2$
le nombre congruent	$2(a+b)(a-b)(2ab)$.

Quant à la formation de l'hypoténuse $a^2 + b^2$, on a en effet

$$2b^2 < (a-b)^2 \text{ si } a^2 - b^2 > 2ab, \text{ et } 2b^2 > (a-b)^2 \text{ si } a^2 - b^2 < 2ab.$$

Nous avons maintenant dressé deux tables dans la première desquelles nous avons inscrit les triangles (rectangles) qui sont produits au moyen de deux nombres consécutifs, pris deux à deux parmi les nombres suivant l'ordre à partir de l'unité. Ce sont les triangles dont les plus petits côtés sont les (nombres) impairs suivant l'ordre à partir du trois, et qui sont nommés, à cause de cela, les triangles impairs. Or, il est évident que les nombres impairs suivant l'ordre se dépassent l'un l'autre continuellement de deux. Les (plus) grands (des deux) côtés (comprenant l'angle droit) de ces (triangles) sont continuellement plus petits d'une unité que les hypoténuses.

Dans la seconde table nous avons inscrit les triangles (rectangles) qui sont produits au moyen de tous les groupes de trois nombres consécutifs pris parmi les nombres suivant l'ordre à partir de l'unité en passant tour à tour un nombre, par ce que, s'il arrive que les deux extrêmes des trois (nombres) soient pairs, le triangle est dérivé du triangle qui précède, ainsi que nous l'avons expliqué dans un autre endroit. Les plus petits côtés de ces triangles sont pairs en commençant par la huit et en se dépassant l'un l'autre continuellement de quatre; car on en a passé de deux en deux à cause des triangles qui sont dérivés. C'est pourquoi (ces triangles) sont nommés les triangles pairs. Les (plus) grands (des deux) côtés (comprenant l'angle droit) de ces (triangles) sont continuellement plus petits de deux que les hypoténuses.

Nous avons laissé de côté les autres triangles (rectangles) qui sont engendrés au moyen des autres méthodes que nous avons expliquées, afin que celui qui voudra puisse les déterminer. Leurs plus petits côtés ne se dépassent pas les uns les autres d'après une règle et un ordre, et les (plus) grands (des deux) côtés (comprenant l'angle droit) de ces (triangles) (ne présentent pas) non plus (de la régularité) dans (la quantité) dont ils sont plus petits que les hypoténuses.

Nous avons terminé la première table au triangle dont le plus petit côté est 31, et la seconde table au triangle dont le plus petit côté est 64.

Voici la table : |

Les triangles pairs		
Les hypoténuses	Les grands côtés	Les petits côtés
17	15	8
37	35	12
65	63	16
101	99	20
145	143	24
197	195	28
257	255	32
325	323	36
401	399	40
485	483	44
577	575	48
677	675	52
785	783	56
901	899	60
1025	1023	64
1157	1155	68
1297	1295	72

Les triangles impairs		
Les hypoténuses	Les grands côtés	Les petits côtés
5	4	3
13	12	5
25	24	7
41	40	9
61	60	11
85	84	13
113	112	15
145	144	17
181	180	19
221	220	21
265	264	23
313	312	25
365	364	27
421	420	29
481	480	31
545	544	33
613	612	35

OBSERVATIONS.

Quant aux triangles rectangles produits au moyen de trois nombres consécutifs dont les deux extrêmes sont pairs, et qui seraient, d'après l'auteur, dérivés chacun du triangle qui le précède, voy. ci-dessus pag. 322, lig. 28^e et suiv.

Les deux tables du texte manuscrit contiennent chacune, comme on voit, deux triangles de plus que n'en annonce l'auteur dans les dernières lignes du texte ci-dessus.

Les chiffres des deux tables sont exprimés dans le manuscrit au moyen des lettres de l'alphabet arabe; et comme il y a lieu de croire que la page du manuscrit qu'occupent ces deux tables, a été écrite dans l'espace de temps compris entre les années 969 et 972 de notre ère (voir ci-dessus pag. 219), il s'ensuit qu'à cette époque on se servait déjà des six lettres *tsd*, *khd*, *d=dl*, *dhdd*, *zhd*, et *ghayn*, pour exprimer respectivement les nombres 500, 600, 700, 800, 900, 1000. D'un examen des livres de Hamza, législateur des Druzes, M. de Sacy avait tiré la conjecture que cet emploi des six lettres que je viens de dire, ne pouvait être antérieur au premières années du cinquième siècle de l'hégire, qui commence en 1010 de notre ère (voir *Grammaire arabe*, seconde édition, Paris 1831. T. I, pag. 90, note 2); mais on voit par le fait que je viens de signaler, que l'usage dont il s'agit est plus ancien, selon toutes les probabilités, d'un demi-siècle au moins et peut-être davantage.

Ce que l'auteur dit de la formation des tables est exact. Il ne fait pas remarquer que la suite des hypoténuses se forme aussi très-facilement au moyen des différences; ce sont les différences deuxièmes qui sont constantes. On voit d'ailleurs que les petits côtés des triangles pairs sont précisément les différences des hypoténuses des triangles impairs suivant l'ordre.

C'est à tort que l'auteur prétend que les autres méthodes pour construire les triangles rectangles n'offrent aucune régularité dans la succession de leurs côtés. Prenons, en effet, la plus générale des formules qu'il a proposées, savoir $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$, $2ab$, et construisons une table à double entrée des valeurs de ces expressions, dont voici le commencement:

$a =$		1	2	3	4	5	6
$b =$	1	2, 0, 2	5, 3, 4	10, 8, 6	17, 15, 8	26, 24, 10	37, 35, 12
	2		8, 0, 8	13, 5, 12	20, 12, 16	29, 21, 20	40, 32, 24
	3			18, 0, 18	25, 7, 24	34, 16, 30	45, 27, 36
	4				32, 0, 32	41, 9, 40	52, 20, 48
	5					50, 0, 50	61, 11, 60
	6						72, 0, 72

Un coup d'oeil jeté sur ce tableau suffit pour nous montrer qu'il se construit très-aisément au moyen des différences premières et deuxièmes prises suivant la longueur, ou la largeur, ou même suivant les diagonales. On peut en outre, si l'on veut, y découvrir une foule de propriétés qui n'auraient pas manqué de paraître fort belles à Nicomaques, mais sur lesquelles il est inutile d'insister ici.

Au bas de la page fol. 92 v.° du manuscrit, au-dessous des deux tables, se trouvent les mots '*odridha bi-l-aqli*' collationné avec le manuscrit autographe. »

σn à $\iota\gamma$. Le point n où cette parallèle coupe l'asymptote $\eta\gamma$ est le point cherché. En effet, joignons $n\theta$; d'après la 12^{ème} proposition du Livre II des *Coniques*, $\sigma n = \iota\varphi$. Donc $\iota\sigma$ est parallèle et égal à φn ; d'où l'on déduit $\varphi n = \gamma\theta$.

ABOU DJAFAR achève de démontrer la solution d'après la méthode d'EUTOCIUS (c'est-à-dire de NICOMÈDE¹).

Remarque. La proposition 12 du Livre II, citée par l'auteur arabe, n'est pas ici d'une application immédiate. Il faut restituer un raisonnement tel que celui-ci:

La proposition d'APOLLONIUS fournit l'égalité:

$$\sigma n \cdot n\eta = \iota\gamma \cdot \gamma\eta.$$

En développant l'on a

$$\begin{aligned} \sigma n (n\gamma + \gamma\eta) &= (\iota\varphi + \varphi\gamma) \gamma\eta \\ \text{ou} \quad (\sigma n - \iota\varphi) \gamma\eta &= \varphi\gamma \cdot \gamma\eta - \sigma n \cdot n\gamma \end{aligned}$$

or la similitude des triangles $\varphi n\gamma$, $\varphi\theta\eta$, donne la proportion

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \varphi\gamma : n\gamma &= \iota\varphi : \theta\eta = \iota\varphi : \gamma\eta \\ \varphi\gamma \cdot \gamma\eta &= \iota\varphi \cdot n\gamma. \end{aligned}$$

Remplaçant, l'égalité devient

$$(\sigma n - \iota\varphi) \gamma\eta = (\iota\varphi - \sigma n) n\gamma$$

qui ne peut être justifiée que par $\sigma n - \iota\varphi = 0$.

¹ V. ARCHIMEDIS *Opera omnia cum commentariis* EUTOCHII, ed. HEIBERG, III, p. 125.

Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. V¹⁾.

Auszüge aus arabischen Enzyklopädien und Anderes²⁾.

Von Eilhard Wiedemann.

Bereits früher³⁾ habe ich darauf hingewiesen, daß sich in arabischen Enzyklopädien eine Reihe von Artikeln über Mathematik, Physik und andere Naturwissenschaften findet, die uns ein Bild von dem Umfang des Wissens der Araber oder von dem, was sie besonders interessiert hat, geben. Im folgenden sollen einige derselben in der Übersetzung mitgeteilt werden, und zwar zunächst solche aus *al Anṣārī*, denen eventuelle Erweiterungen von *Hāǧī Chalfā*⁴⁾ beigefügt sind, ferner aus *Ibn Sīnā's* Schrift

¹⁾ Die Inhaltsübersicht findet sich am Ende der Abhandlung.

²⁾ Ich möchte nicht unterlassen, auch an dieser Stelle allen den Herren Kollegen, die mich durch Mitteilungen unterstützt haben, bestens zu danken und ganz besonders Herrn Professor Jacob in Erlangen und Herrn Professor Heiberg in Kopenhagen, die beide so freundlich waren eine Korrektur zu lesen.

Zu den früher erwähnten bibliographischen Nachweisen möchte ich noch beifügen *M. Steinschneider*, Die europäischen Übersetzungen aus dem Arabischen bis Mitte des 17. Jahrhunderts. Sitzungsber. d. Wiener Akad. Phil. Hist. Klasse, Bd. 149. 1904 und 151. 1905.

Durch die in den Anmerkungen in den verschiedenen Beiträgen gegebenen sachlichen und literarischen Nachrichten hoffe ich allmählich Material zu einer Geschichte der Naturwissenschaften und Technik bei den Arabern beschaffen zu können und Angaben in bisher nur arabisch publizierten und wenig zugänglichen Schriften allgemeiner bekannt zu machen. Daß in dem mitgeteilten noch manche Lücken vorhanden sind, dessen bin ich mir wohl bewußt.

³⁾ Beiträge III, S. 220 ff.

⁴⁾ Nach einer Mitteilung von Herrn Dr. Graf C. Landberg heißt der Gelehrte nach einem in seinem Besitz befindlichen Autographen *Chalifa*.

über die Teile der philosophischen Wissenschaften¹⁾. Berücksichtigt sind vor allem die Ausführungen über Geometrie, die aber große Teile der Mechanik und Physik umfassen.

1. Übersetzung und Besprechung der Abhandlung (*Qaul = Redo*) über die Geometrie aus *Al Anṣārī's Irschād al Qāsid*²⁾.

Die betreffende Stelle (S. 79) lautet:

Dies ist eine Wissenschaft, die behandelt die Eigenschaften

¹⁾ Auch von *al Fārābī* rührt eine solche Enzyklopädie her; vgl. dazu den Titel u. s. w. in Steinschneider, Hebräische Übersetzungen § 159, 4. Die lateinische Übersetzung von Camerarius ist nach gütiger Mitteilung von Herrn Prof. G. Lippmann in Paris in der Bibliothèque nationale vorhanden.

Hierher gehören auch die Schriften des *Iḥwān al Ṣafā* (vgl. Beiträge II, S. 313. Eine Einteilung der Wissenschaften enthält die Philosophie etc. 1. Teil. Leipzig 1879).

Ähnliche enzyklopädische Übersichten sind ferner von Juden verfaßt worden, so von *Ibn Akūn* (im XII. Jahrh.), einem Schüler des *Maimonides*, der z. B. das Werk der *Benū Schakir* (*Benū Mūsā*) erwähnt, und von *Abraham bar Chijja* (Anfang des XII. Jahrh.), der von den Werken vom Gewicht und der Wissenschaft der Last des *Heron* und *Archimedes*? oder *Benū Mūsā* spricht (vgl. dazu Steinschneider, Z. S. f. Math. Bd. 10, S. 465 u. 466. 1865 und Hebräische Bibliographie (1864), S. 92; diese Enzyklopädie konnte ich nicht benutzen).

Von Hammer-Purgstall (vgl. Beiträge III, S. 221) ist in seiner enzyklopädischen Übersicht der Wissenschaften des Orients S. 21 noch ein persisches Werk von *Muḥammad al Āmulī* (vgl. *Jaḡūt* Bd. 1, S. 68) ausgezogen worden, das jedenfalls viel Interessantes enthält; ich habe nicht gewagt, Hammers Angaben ohne weiteres zu verwenden.

Wenn die Stellen, die Hammer aus dem *Anṣārī* mitteilt, nicht von ihm mit Zusätzen versehen sind, so hat er einen etwas andern Text als den publizierten benutzt.

²⁾ Über die Geometrie als solche findet sich bei H. Ch. (Bd. 6, S. 504) nur folgende kurze Notiz, die mit der Angabe von *Anṣārī* nicht zusammenhängt. „Die Geometrie ist die Wissenschaft von den Regeln, aus denen man die Zustände (*Aḥwāl*) kennen lernt, welche die Quantität betreffen, solange sie Quantität ist (d. h. wohl unabhängig von dem Material etc.).“

In den *Mafātīḥ* S. 202 (vgl. Beitr. III, S. 221) wird die Geometrie eingeteilt in 4 Abschnitte: 1. Einleitende Bemerkungen, 2. über die Linien, 3. über die Flächen, 4. über die Körper. Das betreffende Kapitel denke ich ebenso wie dasjenige (*Fī'l Hījal*), in dem das Ziehen der Lasten (die Mechanik), die sich bewegenden und die pneumatischen Instrumente be-

der Größen (Dimensionen *Maqâdir*¹⁾ und was damit zusammenhängt, ferner die (relativen) Lagen einer von ihnen bei der andern und ihre Beziehungen und die Eigentümlichkeiten ihrer Figuren und die Wege zur Anwendung dessen, was nun einmal bei ihnen angewandt wird, und die Ableitung dessen, das man braucht, um es mit sichern Beweisen abzuleiten. Ihr Gegenstand sind die absoluten (*muṭlag*) Größen, nämlich der geometrische Körper, die Fläche und die Linie und was damit zusammenhängt, nämlich der Winkel, der Punkt und die Figur.

Ihre Grundteile (nämlich der Wissenschaft) sind zehn. Der erste Teil behandelt die Eigenschaften der geraden Linien, nämlich die Art, wie sie zusammenkommen und sich entfernen, und ihre Lagen. Der zweite Teil behandelt die Eigenschaften der Kreise und Bögen, die in Ebenen²⁾ liegen, und ihre Sehnen und Tangenten. Der dritte Teil behandelt die Eigenschaften der gekrümmten (*al munḥanija*) Linien, die Hyperbel, Ellipse und Parabel heißen, sowie ihre Eigentümlichkeiten und ihre Beziehungen zu der Geraden und dem Kreis und den Figuren, die aus ihnen entstehen. Der vierte Teil behandelt die Eigenschaft der geradlinigen Figuren, ihre Umschreibung durch Kreise und die Umschreibung der Kreise durch sie. Der fünfte Teil²⁾ behandelt die gesamten Ableitungen, nämlich die zusammenfassende (*al iymâlîja*) und die detaillierende (*al tafṣîlîja*). Im sechsten Teil werden Beweise für die numerischen Eigentümlichkeiten beigebracht. Der siebente Teil

handelt sind, zu veröffentlichen. — Das Kapitel über Astronomie enthält die folgenden Abschnitte: 1. Über die Namen der Planeten und der Fixsterne und deren Bilder. 2. Über die Anordnung der Sphären (*Falak*) und die Sterne auf ihnen und die Beschaffenheit der Erde und der Klimate. 3. Über die Prinzipien der Vorhersagungen aus den Sternen und die Festsetzungen ihrer Vertreter. 4. Über die astronomischen Instrumente.

¹⁾ In den *Maḥāṣin al-'Ulûm* S. 203 heißt es: Die *Maqâdir* sind das Wesentliche der Dimensionen (*al Ab'âd*), *al Ab'âd* sind die Länge, die Breite und Tiefe (*'Umg*). (Man sagt Tiefe oder Höhe (*Samk*), der Unterschied zwischen ihnen ist der, daß Höhe sich auf die Erhöhungen der Körper, Tiefe auf deren Vertiefungen bezieht.

²⁾ Kann nur die geometrische Algebra sein (Eukl. Elem. II und VI), s. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten, Kap. I. An Eukl. περί διαμέτρων (Stud. üb. Eukl., S. 13 ff.) ist wohl nicht zu denken. (Heiberg.)

³⁾ *Asṭiḥa* ist eine in den Lexicis fehlende Pluralform von *Saṭḥ*; vgl. Caspari, Grammatik, 5. Aufl., S. 144, Nr. 5c.

behandelt die Eigenschaft der Figuren, die durch auf der Kugel liegende Kreise entstehen. Der achte Teil behandelt die Eigenschaften der Körper mit ebenen Flächen. Der neunte Teil behandelt die Eigenschaften der Kugel, die Zylinder und der aus Kegelschnitten entstehenden Körper. Der zehnte Teil behandelt die Eigenschaft der sich bewegenden Kugel und ihre Eigentümlichkeiten.

Bis jetzt habe ich kein Werk gesehen, das diese zehn Teile umfaßt, wenn aber das Werk *al Istikmāl* (die Vervollkommnung) von *al Mutamin Ibn Hūd*¹⁾, Gott sei ihm gnädig²⁾, vollendet wäre, würde es alle anderen vollkommen ersetzen und von ihnen unabhängig machen.

Das Buch der Elemente (*Istūqisāt*)³⁾ von *Euklid* enthält das Wichtige des ersten, zweiten, vierten, sechsten und achten Teiles⁴⁾. Den vierten Teil behandelt für sich das Buch über die Kegelschnitte von *Apollonius*⁵⁾, den siebenten Teil behandelt für sich das Buch über die Figuren auf der Kugel (*al Aschkāl al kurrawija*) von *Menelaus*⁶⁾ (*Manāḍāwūs*). Der neunte Teil wird behandelt in den Elementen und einiges von ihm in dem Werk über die Kugel und den Zylinder von *Archimedes*⁷⁾. Über den zehnten Teil handelt das Werk über die sich bewegende Kugel (die Kugel in Bewegung) von *Autolykus*⁸⁾.

Der Nutzen beim Erfassen der Wissenschaft vermöge dieser Axiome besteht darin, daß der Geist Schärfe und Durchdringungsvermögen gewinnt, und in der Schulung des Verstandes.

¹⁾ *Jūsuf al Mutamin Ibn Hūd* war König von Zaragoza (1081 bis 1085); vgl. Suter (Mathematiker, S. 108, Nr. 249) und Steinschneider (Z. S. f. Mathem. u. Phys., Bd. 10, S. 465. 1865).

²⁾ Diese Eulogie wird nur auf Verstorbene angewendet, auch das irrenle „lau“ des Textes weist darauf hin, daß das Werk nicht zum Abschluß gekommen ist.

³⁾ Das Griechische στοιχειά. Die obige Vokalisierung hat Freytag. In den *Mafātīḥ* steht *Ustūquṣṣāt* (S. 202 u. 137), der Singular ist *Ustūquṣṣ*.

⁴⁾ Die Anordnung entspricht derjenigen in den Elementen I = Elem. I (II?), 2 = III, 4 = IV, 6 = VII—IX, 8 = XI—XIII.

⁵⁾ Steinschneider, Math. § 102.

⁶⁾ Steinschneider, Math. § 111.

⁷⁾ Steinschneider, Math. § 95.

⁸⁾ Steinschneider, Math. § 125.

Aus ihr [der Wissenschaft] zieht man Nutzen¹⁾, wenn man Pläne für das Erbauen der Burgen, Wohnungen, Gewölbe, Brücken und ähnlichem entwirft, und bei der Art des Verteilens von Flüssen in Kanäle und bei der Anlage von Kanälen und bei dem Herausholen des Wassers und der Übertragung desselben aus den Niederungen auf höher gelegene Terrains²⁾. Aus ihr lernt man das Vermessen der Größen³⁾ und den Gebrauch der Maße (Hohlmaße) und der Wagen⁴⁾. Es werden behandelt die Unterschiede in den Erscheinungen der Dinge und dem, was man von ihnen weiß⁵⁾, die Konstruktion der Brennspiegel, der astronomischen (*Palakija*), Kriegs-⁶⁾ und pneumatischen Instrumente und durch sie [diese Wissenschaft] wird man in den Stand gesetzt, große Lasten durch eine kleine Kraft zu ziehen und zu heben, wie sich dies deutlich ergibt aus einer Zerlegung jener [Wissenschaft], nämlich in die abgeleiteten Wissenschaften, die unter ihr stehen, und durch ihr Verhältnis zu der Astronomie und zu der Musik.

An von ihr [der Geometrie] abgeleiteten Wissenschaften gibt es zehn: die Wissenschaft vom Konstruieren der Gebäude, die Optik, (*Manâzir*) die Wissenschaft von den Brennspiegeln, den Schwerpunkten, vom Vermessen, vom Heraufbringen der Gewässer, vom Ziehen der Lasten, von den Uhren, von den Kriegswerkzeugen und von den pneumatischen Apparaten⁷⁾.

¹⁾ Für das seltsame *Miqdarât* (so!) steht weiter unten das gewöhnliche *Maqâdir*.

²⁾ Ganz ähnlich äußern sich die *Ichvân al Safâ* (F. Dieterici, Propädeutik, S. 92). Die Wissenschaft der Geometrie dringt in alle Werke, und besonders gilt das von der Meßkunst. Sie ist eine Kunst, deren sich die Arbeiter, Schreiber, Handwerker und Gutsbesitzer bei ihren Geschäften bedienen, sei es um die Steuern einzunehmen, Kanäle zu graben, Posten einzurichten und dergleichen mehr“ und ähnlich a. a. O., S. 44.

³⁾ Die Nivellierungen etc. werden in einem späteren Beitrag behandelt werden.

⁴⁾ Über die Wagen ist in Beitrag IV und in VI gehandelt.

⁵⁾ Man muß statt *‘Alimahâ* wohl lesen *‘Ilmahâ*, es würde sich, wie auch aus späterem hervorgeht, um optische Täuschungen handeln.

⁶⁾ Statt *ğarmija* (körperlich) ist wohl zu lesen *ğarbija* (Kriegs), wie aus dem späteren hervorgeht.

⁷⁾ Hieran schließt sich nun eine schematische Übersicht der Wissenschaften. Als erstes Prinzip für die Trennung gilt der Satz: Die Auffindung dessen, was bewiesen werden soll, wird gesucht entweder in den

Die Wissenschaft von dem Konstruieren (*'Uqūd*) der Bauten¹⁾ (Architektur) behandelt einmal die Anlage von

actu (*bi-l-Fi'l*) universellen Prinzipien (*al Uṣūl al kullija*) oder nicht. Zu der zweiten Gruppe gehört Architektur, Optik inkl. Brennspiegel. Bei der zweiten Gruppe unterscheidet man dann wieder, ob man quantitative Bestimmungen hat oder nicht, ob Apparate nötig sind oder nicht u. s. w. Die Einteilung geschieht also mehr nach formalen als sachlichen Gesichtspunkten.

¹⁾ Bei H. Ch. findet sich keine Ausführung über diese Wissenschaft, die von ihm Bd. 1, S. 35 und Bd. 4, S. 236 erwähnt ist.

Sehr ausführliche Ausführungen sind in *Ibn Chaldūn Proleg.* Bd. 2, S. 369 und 376 enthalten.

Hammer-Purgstall gibt (S. 330) an, das beste architektonische Werk ist: Das Werk der Bauten und der Gewölbe (*Kitāb al Abniyā wa al 'Uqūd*) von *Ibn 'Alī al Haiṭam*, vgl. S. 398, Anm. 3) und das Werk der Wago der Erde (*Kitāb Mizān al Arḍi*, Setzwage) von *al Karchi*.

Dafür, daß in den praktischen Künsten gründliche mathematische Kenntnisse für nötig gehalten wurden, zeigt das Beispiel von *Abū al Faḍl Ibn 'Abd al Karīm al Muhandis* (der Geometer, Ingenieur), † 1202/03 (*Ibn Abi Usaibi'a* Bd. 2, S. 190 und Suter, Math. 129). Es heißt von ihm etwa: Er war anfänglich ein Zimmermann (Tischler) und Steinmetz, dessen Arbeiten gesucht waren, er hatte die meisten Türen an dem großen Hospital von Damaskus, das *al Malik al 'Adil* gebaut hatte, angefertigt. Sein Freund *Schems al Din Ibn al Miṭwā'*, der Augenarzt, erzählt, daß seine erste wissenschaftliche Beschäftigung in dem Bestreben bestand, sich in dem Euklid zu unterrichten, um die Trefflichkeit in der Zimmermannskunst zu vermehren. (Bei der Konstruktion der Linienornamente war eine gründliche geometrische Durchbildung nötig; vgl. E. W., Naturwissenschaft bei den Arabern. Hamburg 1890, S. 15.)

Andererseits wird von einem hervorragenden Arzt und Mathematiker *Emin al Din Abū Zakariyā Jahjā Ibn Ismā'il al Andalusī al Bajāsī* (aus Baeza) erzählt, daß er in der Tischlerei geschickt war und für einen gewissen *Ibn al Naqqāsch al Baḡdādī* zur Geometrie gehörende Instrumente konstruiert habe (vgl. Suter, Math. S. 127); auch eine Orgel hat er konstruiert (*Ibn Abi Uṣ.* Bd. 2, S. 163).

Dieser *Ibn al Naqqāsch* ist es, der die Uhr, die der Vater von *al Riḍwan* konstruiert hatte, und die nach seinem Tode in Unordnung gekommen war, nicht wieder in Ordnung bringen konnte.

Daß Architektur und Geometrie bei den Arabern sehr eng zusammenhängen, zeigt schon, daß dasselbe Wort *Muhandis* den Geometer und den Baumeister bezw. Ingenieur bedeutet; so läßt bei der Errichtung von Bagdad durch *Mansūr der Chalīfe „Muhandis“* und Leute, die das Bauen verstanden, kommen. (*al Ja'qūbi* S. 238, Z. 5.) Später, S. 241, werden als Männer, die die Stadt errichteten (*handasa*) solche aufgeführt, die gleichzeitig Astronomen

Plänen der Bauten, ferner die Art und Weise, wie man aus Flüssen (*Nahr*)¹⁾ Kanäle ableitet (*schuqqa*), Kanäle (*Qandl*) baut²⁾ und Dämme gegen den Wasserdurchbruch³⁾ errichtet. Sie ist von sehr großem Nutzen bei der Anlage der Städte, der Festungen und dem Ackerbau. Über sie gibt es ein Werk von (*Ibn al Haiṭam*)³⁾ und eins von (*al Karchī*)⁴⁾.

oder Mathematiker waren, so *al Ṭabarī* (vgl. Suter, Math. S. 7), *al Fazārī* (S. 4) und andere (vgl. dazu Suter, Math. S. 3).

Ibn al Ġiṣab (im 6. Jahrh. d. H.) gab in seinem Werke (Registrierung der Ausmessung der Flächen) geometrische, architektonische Vorschriften (vgl. Suter, Math. S. 122); ferner beschäftigte sich *Muḥ. Ibn 'Abd al Raḥmān Ibn al Kātib* in Granada († ca. 1210) unter anderem mit Arithmetik und Geometrie und ließ als Aedile von Granada zahlreiche Bauten, so eine Brücke über den Xenil errichten (vgl. Suter, Math. S. 133).

a) Lies *taqnija* statt „*tanqija*“.

¹⁾ *Nahr* ist nach de Goeje (Bibliotheca Bd. 4, S. 368) sehr oft ein Kanal, der größer ist als die *Sāqija*, die selbst wieder größer ist als der *Ġadwāl*. Das Wort wird auch für eine Metallröhre (aber eine sehr weite) benutzt. Die Beschreibung einer solchen Wasserleitung in *Buḥāra* findet sich bei *Iṣṭahri* S. 316, Z. 12 und fast ebenso bei *Ibn Ḥauqal* 366. Es heißt von *Buḥārā*: Und fließendes Wasser tritt in die Stadt in einem Kanal (*Nahr*) aus Blei. Für den Kanal ist ein hoher Damm aus Steinen gebaut . . . , und die Seiten dieses Kanals sind ganz aus Blei. Später wird über die Wasserleitungen u. s. w. eingehend gehandelt werden.

²⁾ Schutzdämme und Stauvorrichtungen sind vielfach beschrieben. Einige Ausdrücke für dieselben finden sich in den *Mafātīḥ* (S. 68) bei der Behandlung der Wasserlütter. Den großen Steindamm in Süd-arabien bei *Mārib* bespricht E. Glaser (Mitteil. der vorderasiat. Gesellsch. 1897, Nr. 6). Eine große Wassersperre, die sich bei *Aḥwās* befand, ist z. B. bei *Muqaddasī* (S. 411) beschrieben. Sie heißt *Šaḥādūrwan*; ein Ausdruck, der nach den *Mafātīḥ*, S. 70 für die Fundamente benutzt wird, die die Brücken und ihre Umgebungen sichern. Einen Staudamm bei *Aswān* plante bekanntlich *Ibn al Haiṭam*.

³⁾ *Ibn al Haiṭam* erwähnt selbst unter seinen Werken (*Ibn Abī Uqaybia* Bd. 2, S. 94) „Abhandlung über die gute Ausführung des Grabens und Bauens; ich habe in diesem Werk alle Arten des Grabens und Bauens mit allen Figuren der Geometrie zusammengefügt, bis ich zu den drei Kegelschnitten gekommen bin, der Parabel, der Hyperbel und der Ellipse“. Es ist sehr zu beklagen, daß uns dies Werk nicht erhalten ist, da es uns sicher wichtige Aufschlüsse gegeben hätte.

Es sei gestattet, hier eine Bemerkung über die Herstellung von Zirkeln zur Konstruktion von Kegelschnitten beizufügen, und zwar im Anschluß an F. Wöpkes Schrift, *Le compas parfait* (Notices et Extraits Bd. 22, S. 23 und 123. 1874).

Die Wissenschaft von der Optik¹⁾ behandelt die Zustände der gesehenen Gegenstände nach Menge und Beschaffen-

Die drei bei Wöpke erwähnten Zirkel rühren her von *Wigān Ibn Rustem Abū Sahl al Kūhi* (ca. 988), *Kamāl al Din Ibn Jūnis* (1156—1242), *Muḥammad al Ḥusain Ibn Muḥammad ibn al Ḥusain* (etwa gleichzeitig mit *Kamāl al Din*). Nach *Ḥusain Ibn Muḥammad* hatten schon die Alten einen Zirkel zur Konstruktion der Kegelschnitte hergestellt; eine Nachricht darüber war aber nicht zu den Arabern gelangt, wie man ihn herstellen und benutzen solle, bei *Abū'l Raiḥān* habe er dann (in dem unten zitierten Werk) ein Werk von *al Kūhi* über diesen Gegenstand zitiert gefunden, es selbst aber nicht erhalten u. s. f.

Daß die Alten solche Zirkel kannten, geht aus folgender Stelle hervor (*Eutocius Comm. in lib. II de sphaera et cyl. in Archimedis opera omnia* Bd. III, S. 98/99): Es wird aber die Parabel mit dem Instrument *Diabotes* (das nach J. Regiomontanus einem griechischen λ gleicht) konstruiert. Dasselbe hat unser Lehrer, der Mechaniker *Isidorus* aus Milet erfunden und in seinem Kommentar beschrieben, den er zu Herons *Kamarika* (d. h. über die Konstruktion von Gewölben) verfaßte. (*Isidorus* von Milet war mit *Anthemius von Tralles* der Erbauer der Sophienkirche in Konstantinopel 537 n. Chr.).

Über die Konstruktion von Bauten (*stéréotomie*) und ihren Zusammenhang mit der Konstruktion von Kegelschnitten unter Hinweis auf Herons *κατακλιμά* hat gehandelt *Prou* (*Notices et extraits* Bd. 26, p. 11, 18).

Erwähnt sei, daß *Al Bérūnī* (973—1048) in seinem Werke „das Werk der gründlichen Behandlung (*Kitāb al Isti'āb*) aller möglichen Methoden für die Konstruktion des Astrolabs“ Verfahren zur Konstruktion von Ellipse, Hyperbel und Parabel mittelst des Astrolāb angegeben hat. Ferner bespricht er die Methode von *Abū Naṣr Maṣṣūr Ibn 'Alī Ibn Irāq* (Ende des 10. Jahrhunderts. *Suter, Math.* S. 81) die in dem Werk angegeben ist, um mit dem vollkommenen Zirkel (*al Birkār al tāmm*) die drei Kegelschnitte zu zeichnen, nachdem er vorher dessen Konstruktion und Bewegung behandelt hat. (*Ahlwardt Katalog* Bd. V, S. 231). In der Inhaltsübersicht wird aber *Kūhi* nicht erwähnt.

Mathematische Instrumente, die teils von ihm erprobt, teils erfunden waren, verbesserte *Muḥammad Ibn Ibrāhīm Ibn Aḥmad Ibn al Rakam* († 715/1315) (*Suter, Math.* S. 159).

¹⁾ Zu S. 398. Vgl. zu *al Karchī* *Suter, Math.* S. 84. — Die Arithmetik von *al Karchī* ist von A. Hochheim übersetzt. Halle 1878—80.

²⁾ Ist bei H. Ch. nur in der Übersicht erwähnt.

Sehr ausführlich behandelt die Enzyklopädie von *Abraham bar Chijsa* die Optik (vgl. M. Steinschneider in *Hebräische Bibliographie* Bd. 7, S. 84 u. flgde. 1864. Herr Prof. *Steinschneider* hat mir außerdem in lebenswürdigster Weise einige Mitteilungen persönlich zukommen lassen). Der Verfasser bemerkt, daß es zwei Anschauungen darüber gibt, wie die Gegenstände gesehen werden, entweder geht der Strahl vom Auge aus,

heit mit Rücksicht auf ihre Nähe und Entfernung von dem Beschauer, ferner behandelt sie, was zwischen dem Beschauer und dem Angeschauten liegt und die Ursachen hiervon. Ihr Nutzen besteht darin, daß man durch sie das kennen lernt, wodurch der Blick über die Zustände der angeschauten Gegenstände in die Irre geleitet wird, und daß man sie zu Hilfe nimmt, wenn man entfernte Gegenstände ausmessen will und endlich in der Kenntnis der Brennspiegel.

Zu den Kompendien über diesen Gegenstand gehört das Werk des *Euklid*, zu den mittelausführlichen das Werk von *‘Alī Ibn ‘Isā al Vezīr*¹⁾ und zu den ausführlichen das Werk von *Ibn al Haiṭam*²⁾.

oder das Weltlicht trägt die Form des Dinges und bringt sie dem Auge nahe. Man teilt die Wissenschaft weiter ein in die Wissenschaft des geraden Sehens und die Wissenschaft des gekrümmten Sehens.

In der Wissenschaft des geraden Sehens dürfte wohl das behandelt werden, was in der Optik des *Euklid* enthalten ist, also vor allem die Größe, in der Gegenstände unter verschiedenen Umständen erscheinen; unter gekrümmtem Sehen sind vor allem die Erscheinungen bei der Reflexion und vielleicht bei der Brechung erstanden.

¹⁾ So heißt ein *Vezīr* des Chalifen *al Muqtadīr* (908—932), von ihm sind aber keine mathematischen Werke angeführt. (Suter, Math. S. 42.)

²⁾ Gemeint ist die große bekannte Optik von *Ibn al Haiṭam*.

Merkwürdig ist, daß die Optik des *Ptolemäus* fehlt, die wir lateinisch nach dem Arabischen besitzen (s. unten). Der *Fihrist* und *al Qifṭī* erwähnen sie auch nicht, dagegen hat *Ibn al Haiṭam* sie bekanntlich in dem oben erwähnten Werk vielfach benutzt.

Im folgenden seien einige der den Arabern aus dem Altertum überkommenen bezw. von ihnen zitierten Schriften sowie eine Reihe der von ihnen verfaßten aufgeführt.

Euklid, Optik (Steinschneider, Math. § 92). Die Bearbeitung von *Naṣīr al Dīn* werde ich demnächst besprechen; in der Einleitung werden ähnliche Bemerkungen über die beiden Anschauungen über das Sehen gemacht wie die in Anm. 1 angeführten.

Ptolemäus, Optik (Steinschneider, Math. § 122). Diese ist unter dem Titel *L'ottica* die Claudio Tolomeo etc. von G. Govi. Torino 1885 nach der lateinischen Übersetzung des arabischen Textes italienisch publiziert. Bei Govi finden sich auch die älteren Bearbeiter erwähnt.

Diese Schrift muß noch spät im Orient geschätzt worden sein, denn *Gio. Battista Donato* erwähnt in seiner Schrift *Della letteratura de' Turchi* (Venedig 1688) die fünf Bücher der Optik des *Ptolemäus*.

Diokles, Über Brennspiegel (s. d. nächsten Abschnitt und Steinschneider, Math. § 122.).

Von *al Kindi* rührt eine noch in lateinischer Übersetzung vorhandene Optik (de aspectibus) her, (vgl. Björnbo, Bibl. math. [3] Bd. 3, S. 330. 1903). Andere Schriften *al Kindis* über Strahlenverfugung etc. dürften astrologischen Inhalt haben.

Von *al Kindi* erwähnt der *Fihrist* zwei optische Werke (S. 257 u. 258): Über den Unterschied in den betrachteten Gegenständen (bedeutet manchmal Parallaxen) und über den Unterschied in den betrachteten Gegenständen im Spiegel (vielleicht sind beide Werke identisch, vgl. Suter Übers. S. 13).

Unter dem Namen von *al Farābi* befindet sich eine Prospettiva im Vatikan in hebräischer Übersetzung; die mitgeteilte Einleitung ist philosophisch (M. Steinschneider, Mém. St. Petersb. [7] 13, Nr. 4, S. 73. 1869).

Oft wird zitiert eine Schrift „*Tidei*“ über optische Gegenstände; sie ist z. B. von *R. Baco* viel benutzt worden (vgl. dazu eine demnächst erscheinende Dissertation von Vogl).

Ibn al Haiṭam. Seine zahlreichen optischen Schriften sind aufgeführt und zum Teil besprochen bei E. Wiedemann, Wied. Ann. Bd. 39, S. 114 u. 115. 1890.

Aristoteles, Werk über den Spiegel übersetzt von *Ḥaǧǧāǧ Ibn Maṭar* (H. Ch. Bd. 5, S. 149, Steinschneider, Philos. § 67, S. 86).

Hippokrates, Werk über die Farben (H. Ch. Bd. 5, S. 50).

Makhlūl Ibn al Mufaddal al Nasafi († 318/930), Werk über die Strahlen (H. Ch. Bd. 5, S. 104).

Ibrāhīm Ibn Sīnā Ibn Ṭābit al Ġurǧānī (ca. 330/941), Werk über den Schatten (H. Ch. Bd. 5, S. 113).

Tāj al Din 'Alī Ibn Muḥammad Ibn Durāḥīm al Maṣṣilī († 762/1360), Nachricht des Betrachtenden über die Spiegel und die Optik (Aspekte *Manāḡir*) (H. Ch. Bd. 6, S. 293).

Naṣīr al Din al Ṭusi († 672/1274), Dissertation über die Strahlenreflexion und — ablenkung (nicht Brechung) (Berlin, Katalog Bd. 5, S. 355. Nr. 6020).

Manches Interessante, besonders über den Einfluß der Luft auf gesehene Gegenstände, enthält eine Abhandlung des Arztes *Hibat Allah Ibn Malkī al Jehūdī* aus *Bagdad* (ca. 550/1155) darüber, warum die Sterne bei Nacht erscheinen und bei Tag verschwinden (Berlin, Katalog Bd. 5, S. 157, Nr. 5671).

Ein späteres ausführliches Werk von *Ṭaǧī al Din* (1525/26—1585) ist *Kitāb Nūr Ḥadiǧat al Abṣār wa Nūr Ḥadiǧat al Anṣār*, das Buch des Lichtes der Gärten der Augen und der Blicke (Oxford I, 930). Es behandelt in drei Teilen den direkten, den reflektierten und den gebrochenen Strahl. In einer Einleitung wird die Sonne, das Gehirn und das Auge beschrieben.

Von *J. Hirschberg*, *J. Lippert* u. a. sind eine Reihe von Werken arabischer Augenärzte herausgegeben worden, die zum Teil auch Physikalisches enthalten, nämlich einmal die Augenheilkunde des *Ibn Sīnā* (Leipzig 1902), dann *'Alī Ibn 'Isā*, Erinnerungsbuch für Ärzte (Leipzig 1904). Ferner von

Sitzungsberichte der phys.-med. Soc. 37 (1905).

ibnen und E. Mittwoch in einem Band folgende Schriften: 'Ammār Ibn 'Alī al Maṣṣālī, Das Buch der Auswahl von den Augenkrankheiten. *Chalīfa al Ḥalabī*, Das Buch vom Genügenden in der Augenheilkunde. *Ṣalāḥ al Dīn*, Das Licht der Augen. (Leipzig 1905.) Für den Physiker sind besonders einzelne Teile des letzten Werkes wichtig.

Eine zusammenfassende Darstellung über die arabische Augenheilkunde gibt J. Hirschberg in „Die arabischen Lehrbücher der Augenheilkunde“ unter Mitwirkung von J. Lippert und E. Mittwoch. Anhang zu den Abhandlungen der Kgl. Akad. der Wissensch. Berlin 1905.

Eine Besprechung der Übersetzungen arabischer optischer Werke ins Lateinische u. s. w. wird die Dissertation von S. Vogl bringen.

Die Wissenschaft von den Brennspiegeln^{a)}¹⁾ behandelt das Verhalten der gebrochenen²⁾ Strahlenlinien, sowie den Ort, wo sie auftreffen, ihre Winkel und die Orte, zu denen sie zurückgeworfen werden. Ferner lehrt sie, wie man die Spiegel herstellt, die durch die Reflexion der Sonnenstrahlen an ihnen Feuer entzünden, und ihre Aufstellung und ihre Gegenüberstellung. Ihr Nutzen ist bei der Belagerung der Städte und Burgen bedeutend*. Die Alten³⁾ stellten die Spiegel aus ebenen Flächen her. Einige machten sie konkav (*muḥraqa*⁴⁾), bis *Diūklis*^{b)} (Diokles⁴⁾) bekannt machte und bewies, daß wenn

a) Statt *muḥriḥa* lies *muḥriḥa*.

b) Statt *Diūklis* lies *Diūklis*.

1) Vgl. hierzu H. Ch. Bd. 5, S. 490. Seine Ausführungen gehen bis*. Zu Brennspiegeln vgl. E. Wiedemann, Wied. Ann. 39, S. 110. 1890.

2) Für gebrochen bzw. abgelenkt sind drei Ausdrücke benutzt *mun'aṭifa*, *mun'akisa* und *munkasira*; *mun'akisa* ist unser reflektiert im gewöhnlichen Sinn und wird stets so benutzt, *mun'aṭifa* wird meist für die gebrochenen Strahlen verwendet, hier dient es bei wie bei *Naṣīr al Dīn al Ṭūsī* in einer Abhandlung über die Lage des Bildes im Spiegel zur Bezeichnung der nach rückwärts verlängerten reflektierten Strahlen, die spezielle Bedeutung von *munkasira* ist mir noch unbekannt.

3) Hierunter ist *Anthemius* verstanden; s. Heiberg, *Quaestiones Archimedeae* S. 40.

4) Wöpcke führt in seinem Werk *L'algèbre d'Omar al Chajjāmī* S. XIII einen *Diūklis* auf. Bei Steinschneider (Z. D. M. G. 50, § 110²⁾) ist angegeben, daß ein Stück aus einem Werk von Diokles *περί πυρρίων* genommen ist, der arabische Ausdruck ist *Marājā al muḥriḥa*, so daß also *πυρρίων* = Brennspiegel, wie schon Heiberg, *Revue critique* 1881, S. 381, angegeben, und zwar in einer Bemerkung zu Cantors Vorlesungen S. 306 (vgl. auch Heiberg Z. S. für Math. und Physik Bd. 28 Hist. Abt. S. 128 Anm.). Nach Heiberg stimmt obige Stelle zu einer von *Anthemius* in *περί παραδόξων μηχανημάτων* (ed. Westermann), der also wohl den Diokles

die Fläche dieser Spiegel entsprechend einer Parabel gekrümmt ist, sie die höchste Kraft besitzen und am stärksten brennen. Es gibt ein nach diesem Gesichtspunkte verfaßtes Werk von *Ibn al Haiṭam*¹⁾.

ausgeschrieben hat. Zur Konstruktion von Brennsiegeln durch *Anthemius* sei noch folgende Stelle mitgeteilt:

Da, wo davon die Rede ist, wie *Anthemius* seinen Nachbarn *Zenon* ärgert, heißt es bei *Agathias* etwa (*Historiarum libri quinque*. Bonn 1828, S. 293): Er fertigte aus einer Scheibe einen Spiegel, den er in der Mitte etwas vertiefte und erfüllte ihn, indem er ihn der Sonne gegenüberstellte, mit Glanz. Dann drehte er ihn nach einer andern Seite und schleuderte in das Haus (des Nachbarn) einen solchen Glanz, daß er allen, auf die er gelenkt wurde, den Blick blendete.

¹⁾ Gemeint sind wohl die Schriften von *Ibn al Haiṭam* über sphärische und parabolische Hohlspiegel; (vgl. E. Wiedemann, *Wied. Ann.* 39, S. 110. 1890).

Ein Werk über Brennspiegel wird von *ʿUṭārid Ibn Muḥammad*, der ein Rechner und Astronom war, im *Fihrist* (S. 278) erwähnt.

Von *al Kindī* stammen folgende Schriften über Brennspiegel (*Fihrist* S. 261): Über die Herstellung der Brennspiegel, über Brennspiegel, über die Glut (*Su'ār*) des Spiegels.

Eine andere Schrift über die Brennspiegel rührt ferner von *Qusṭā Ibn Lūqā* aus *Ba'albek* her (vgl. Suter, *Math.* S. 41).

Ein kleiner Traktat über Brennspiegel, der dem *Alexander* zugeschrieben wird, findet sich in dem Codex 1348 fol. 109^b in Gotha (vgl. Beiträge III, S. 231). Er heißt Kapitel über den Spiegel, der das, worauf seine Strahlen fallen, entzündet und zwar auf einen Abstand zwischen 100 und 1000 Ellen. Aus der nicht ganz klaren Beschreibung ist zu entnehmen, daß man es mit einem Hohlspiegel zu tun hat, der aus einer ganzen Anzahl (20) von Spiegeln zusammengesetzt ist (vgl. *Wied. Ann.* 39, S. 110. 1890). Als Metall dient bestes *Isfidruj sukkariā*.

a) Über das persische Wort *Isfidruj*, das wörtlich weißes Kupfer (Erz) heißt, gibt folgende Stelle aus *Dimeschqī* Aufschluß (arab. Text S. 56, franz. Übersetzung S. 60). Das *Chārṣinī* ist ein Metall aus China. Es gleicht dem *Isfahdrūh* (*Isfidrūj*) und heißt auch *Isbādārih* (das ist wohl dasselbe Wort in verstümmelter Form, die Vokale fehlen). Das erste ist vollkommener an Farbe, Härte und Ton. Die gelbe Farbe dieses Metalles ist mit Schwarz und Weiß gemischt. Die aus China eingeführten Spiegel, die Spiegel der Verzerrung heißen, sind aus diesem Metall gewonnen. (Entsprechend bemerkt *Qazwini* [Text Bd. 1, S. 208. Übers. S. 427] auch macht man einen Spiegel daraus, aus dem der mit Gesichtszuckungen behaftete großen Vorteil zieht, wenn er sich in ein finsternes Gemach stellt und lange darauf hinschaut). Kein Metall gibt einen Ton, der demjenigen

Die Spiegel werden zusammengesetzt, so abgedreht, daß zwischen ihnen keine Fuge vorhanden ist, und dann überpoliert. Endlich wird das ganze gehärtet, wie man Schwerter härtet. Betont wird noch, daß man sich davor hüten muß, daß den Spiegel Rauch oder anderes trifft, da sonst die Politur sich ändert. — Der Schluß lautet: Wenn du seiner im Kriege bedarfst, so Sorge dafür, daß dein Kampf mit dem Feinde sich vier Stunden des Tages hinzieht^β). Dann befiehlt einem der Männer, daß er ihn (den Spiegel) der Sonne gegenüberstellt und ihn bewegt, bis die Strahlen auf den Feind fallen. Fallen sie aber auch auf 1000 Menschen oder 1000 Lasttiere, so werden sie diese mit der Erlaubnis Gottes verbrennen.

Einige Brennspiegel sind in dem von C. de Vaux in der Übersetzung herausgegebenen *Livre des merveilles* (Paris, C. Klincksieck. 1898), (leider fehlt der arabische Text) erwähnt S. 234, 281, 282. Dort sind auch magische Spiegel angeführt. Dem ganzen Charakter des Werkes nach kann sich aber leider keine klare Darstellung finden. M. Berthelot hat im *J. des Savants* 1899, S. 248 ff. die Angaben diskutiert und mit denen der Alten zusammengestellt.

dieses Metalles ähnlich ist, und keines ist zum Verfertigen von großen und kleinen Glocken so geeignet. — Durch den Zusatz *sukkari* ist ein besonders weißes Metall bezeichnet.

Wir haben es bei *Charšini* und damit bei dem *Isfidruj* mit einer Bronze zu tun, wie sich ergibt aus der Verwendung und aus folgenden Angaben von St. Meunier (*C. R.* Bd. 24, p. 1069. 1847; auf diese und andere Quellen waren die Herren von Luschan und F. W. K. Müller so freundlich mich hinzuweisen), aus einem chinesischen Werk: Erst wenn man das rote Kupfer in gelbes Kupfer umgewandelt hat, schmilzt man es und stellt aus ihm verschiedene Gefäße her. Verbindet man es mit einer gewissen Menge Arsenik, so erhält man das Pétong- oder weißes Kupfer, das zweimal schwerer zu bearbeiten ist, und das nur die Reichen benutzen. (Ein wenig Arsen verleiht in der Tat Cu-Sn-Legierungen hohen Glanz und starke Polierfähigkeit) . . . Für Musikinstrumente muß man dem Kupfer eine Legierung von Zinn beimischen.

Zu *Charšini* (persisch *Charčini*) ist folgender Vers des *Abū al Ma'āni* (bei Vullers) zu vergleichen. „Einer, der den Freund zurückweist und ihn verschmäht, der macht dessen Herz von *Charšini* durchbohrt“. Nach Richardson machen die Chinesen aus diesem Metall Spiegel und Pfeilspitzen, von denen eine Wunde tödlich ist; *Qazwini* läßt aus ihm Lanzen spitzen und Harpunen anfertigen, die sehr wirksam sind.

Über das Wort (*I*)*sbiadār(i)* hat auch *Karabacek* gehandelt, es ist das persische *sepidrui*, im Aussehen weißlich. Von ihm kommt das deutsche Wort *Spiauter*, eine Bezeichnung für Zinn, das auch für Zink benutzt wird. (Mitteilungen des k. k. Österr. Museums für Kunst und Industrie, Neue Folge, I. Band, 1886, S. 49 ff.)

β) Die Erklärung dieser Stelle ergibt sich, wenn man beachtet, daß die Beduinen beim Morgengrauen angreifen, nachdem man sich bei Nacht dem Lager genähert hat. (Jacob, Beduinenleben. 2. Aufl., S. 124.)

Ein spanisch arabischer Dichter *Abū 'Abd Allāh Ibn al Chajjāj* (nicht *Channāt* wie Dozy angibt s. v. hind) aus dem 11. Jahrhundert erwähnt in einem Liebesgedicht den Brennspiegel mit folgenden Worten: Wenn du wüßtest, was für ein Feuer in meinem Herzen (brennt), wie du es nicht entflammst durch Brennspiegel und Pech (*Maqqari* Analectes Bd. 1, S. 330). Für Brennspiegel ist das Wort *Hindi* benutzt, das ursprünglich Stahl bedeutet.

Mirāt al Hind oder ähnlich heißt ein Spiegel, der das Bild von Objekten zurückwirft. Meist ist es ein konkaver Spiegel, der dazu dient, entweder Objekte, die man ihm gegenüberstellt, zu vergrößern oder um sie zu verbrennen (vgl. Dozy Suppl. Bd. 2, S. 765).

Eine arabische Schrift über Spiegel findet sich auch in London im British Museum Nr. 426.

Bemerkt sei noch, daß *Ibn al Faqih* (S. 205) von den Persern berichtet: „Sie sind das geschickteste Volk in der Herstellung von Spiegeln, von Kapseln (*Maġma'*) und anderen Geräten aus Eisen“.

Die Wissenschaft von den Schwerpunkten¹⁾ (den Mittelpunkten der Lasten, d. h. Gewichten) behandelt, wie man den Schwerpunkt (den Mittelpunkt der Last) eines getragenen (unterstützten) Körpers findet. Unter dem Schwerpunkt versteht man einen Grenzpunkt (*Ḥadd*) innerhalb des Körpers, bei dem er im Gleichgewicht ist, und zwar durch die Beziehung zum tragenden Körper. Der Nutzen dieser Wissenschaft beruht auf der Kenntnis, wie man das Gleichgewicht großer Körper mit kleineren herstellt dadurch, daß man den Abstand berücksichtigt²⁾ wie bei den *Qaras'ūn*³⁾).

Hierüber gibt es ein Werk von *Abū Sahl al Kūhī*⁴⁾ b), das in den beweisenden Prämissen elementar ist, und ein nützliches Werk von *Ibn al Haṭṭām*.

Die Wissenschaft des Vermessens⁵⁾ behandelt Größe der Linien, Flächen und Körper, und zwar, wie groß sie sind

¹⁾ Lies statt „li“ „bi“.

²⁾ Lies so statt *Abū Sil al Kūfi*.

³⁾ H. Ch. hat diesen Artikel bis zum * Bd. 5, S. 489.

⁴⁾ Vgl. Suter, Math. S. 75 u. 175. Eine Reihe von Sätzen über den Schwerpunkt von *al Kūhī* findet sich in *al Chazīnīs* Wage der Weisheit S. 26. Bei Suter ist kein Werk über die Schwerpunkte aufgeführt; vielleicht ist es das Werk über die Mittelpunkte der Kugeln (statt „der Kugeln“ haben andere Handschriften „der Instrumente“ und „der Erde“); vgl. auch Beiträge III, S. 249.

⁵⁾ Der *Qaras'ūn* ist eine Art Schnellwage (vgl. dazu Beitrag VI).

⁶⁾ Ist bei H. Ch. nur in der Übersicht erwähnt.

im Verhältnis zu der Linie, dem Quadrat und dem Kubus¹⁾. Ihr Nutzen ist sehr groß bei der Festlegung der Grundsteuer, der Teilung der Ländereien, der Vermessung der Ortschaften und bei anderem als diesen. Zu den kurzen Werken über diese Wissenschaft gehört das Werk von *Abū Muja'llā al Maṣṣilī*²⁾, zu denen von mittlerer Größe das von *Abū'l Muḥtār* und zu den ausführlichen das Werk von *Archimedes*³⁾.

¹⁾ Längen-, Flächen- und Volummaße (*Mikjāl*) aus verschiedenen Gegenden sind u. a. in den *Mafāṭih* S. 66 mitgeteilt, und zwar in einem Kapitel mit der Überschrift: „Über die Ausdrücke, die bei der Behörde der Äcker und der Naturalabgaben (oder Abgaben auf Naturalien *Nafaqa*) Verwendung finden, und zwar von den Ausdrücken, deren sich diejenigen, die die Ausmessung vorzunehmen haben (*māsīh*), bedienen“. Als Längenmaße werden angeführt *al Aschl* = 60 Ellen, *al Nāb* = 6 Ellen, *al Qabḍa* = $\frac{1}{6}$ Elle, *al Isba'* (Zoll) = $\frac{1}{24}$ Ellen. Flächenmaße sind *al Ġarib* = ein Aschl oder 60 Ellen im Quadrat, also 3600 *Dirā'* *mukassara* (Quadratellen, dasselbe Wort kommt S. 70 als Kubikelle vor), *al Qafiz* ist gleich $\frac{1}{10}$ *Ġarib*, also 360 Quadrattellen, *al' Aschir* ist gleich $\frac{1}{10}$ *Qafiz*. Daran schließen sich die Volumenmaße, *al Qafiz* und *al Ġarib* werden auch als Ausdrücke für Volumenmaße aufgeführt; die Volumenmaße sind in verschiedenen Gegenden verschieden. (Zu den Arbeiten von H. Sauvaire über Maße vgl. Beiträge II, S. 325.) — Ganz dieselben Längenmaße sind im 10. Jahrhundert nach den *Iḥwān al Ṣafā* in 'Irāq bei der Landvermessung üblich gewesen. Dieterici übersetzt *Aschl* = Seil, *Nāb* = Rohr, Ruthe, *Dirā'* = Elle, *Qabḍa* = Faust, *Isba'* = Zoll. Der Zoll bestand aus 6 fest aneinander gelegten Gerstenkörnern. Ihr Zoll war also $\frac{1}{24}$ Elle. (F. Dieterici, Z. D. M. G. Bd. 18, S. 695. 1864 u. Præpædèutik der Araber, S. 33. Berlin 1865.)

Schon früh gab es besondere Feldmesser. *Al Ja'qūbi* berichtet im *Kitāb al Buldān* S. 238 (Buch der Länder) gelegentlich der Gründung von *Bagdād* im Jahre 762 durch *al Maṣṣūr* (754—775 n. Chr.) folgendes: „Dann sandte er aus, um herbeizuholen die Techniker (*al Muhandis*) und Leute, die das Bauen verstanden und die mit der Elle umzugehen wußten und das Vermessen und die Teilung der Ländereien verstanden, damit sie ihm seine Stadt abgrenzten, die als die Stadt von *Abū Ġa'far* bekannt ist. Und er ließ Bauleute kommen und Werkleute und Handwerker, wie die Zimmerleute und Schmiede und Erdarbeiter“.

Weiter hat es schon von den Zeiten 'Omars (634—641) an eine Steuer gegeben, die auf eine regelmäßige Vermessung gegründet war (vgl. M. van Berchem, La propriété territoriale. Inaug.-Diss. Leipzig 1806, S. 45 u. 73).

²⁾ Nach einer gefälligen Mitteilung von Herrn H. Suter muß es wohl heißen *Ibn al Maḥallī al Maṣṣilī*. *Ḥaǧǧī Chalifa* führt von diesem (Bd. 2, S. 506, Bd. 5, S. 74, Bd. 6, S. 43) algebraische Schriften an.

³⁾ Vgl. Steinschneider, Mathem. § 97.

Die Wissenschaft vom Herausbringen der Gewässer¹⁾ behandelt wie man die in der Erde verborgenen Gewässer herausbringt und sichtbar macht. Ihr Nutzen liegt in der Belebung der öden Ländereien und deren Gedeihen. Von *al Karchi*²⁾ gibt es darüber ein kurzes Werk, und an Stellen des Werkes „Die nabatäische Landwirtschaft“³⁾ sind die Hauptfragen dieser Wissenschaft behandelt.

Die Wissenschaft von dem Ziehen (*Garr*) der Lasten⁴⁾ behandelt die Erfindung der schweren Instrumente⁵⁾. Ihr Nutzen besteht in dem Transportieren (*Naql*) einer großen Last mit einer kleinen Kraft. Schon *Heron*⁶⁾ hat in seinem Werk über die Wissenschaft triftige Beweise dafür beigebracht, daß man 100000 *Raṭl* mit 500 *Raṭl*⁷⁾ fortschaffen kann.

¹⁾ Nach H. Ch. muß es heißen „der Instrumente zum Ziehen der schweren Dinge“. Vielleicht entsprechen die Worte „schwere Instrumente“ dem griechischen *συνάψεις*, d. h. den fünf Potenzen (vgl. Pappus 1116).

²⁾ H. Ch. Bd. 1, S. 444; vgl. seinen Zusatz zu *al Anṣārī* Beiträge III, S. 232, dort finden sich auch weitere Angaben. — Über die Kenntnisse der Griechen in der Wissenschaft vom Herausziehen der unteren Gewässer vgl. Eugen Oder (Philologus Bd. 7, Supplbd. p. 231–233. 1899); die Arbeit handelt von den Quellensuchern, gibt aber auch nach anderen Richtungen viele Literaturnachweise.

Von Pappus (S. 1024) wird erwähnt die Kunst derer die speziell als Handwerker, die Maschinen machen (*μηχανοποιοί*) bezeichnet werden; denn mittels der Instrumente, welche sie zum Wassersichöpfen konstruierten, wird das Wasser leichter aus großer Tiefe in die Höhe gehoben.

³⁾ Zu *al Karchi* vgl. Suter, S. 84 nr. 193. Eine Schrift über den obigen Gegenstand ist nicht erwähnt.

⁴⁾ Zu *Ibn al Waḥschīja's* Nabatäischer Landwirtschaft vgl. Brockelmann Bd. 1, S. 242. A. v. Gutschmid, Z. D. M. G. Bd. 15, S. 1. 1861 und Kleine Schriften, herausg. v. F. Rühl Bd. 2, S. 568. 1890. Th. Nöldecke, Z. D. M. G. Bd. 29, S. 445. 1875 und unten.

⁵⁾ H. Ch. Bd. 2, S. 589 hat diesen Abschnitt und fügt bei, der „*Imām*“ hat am Ende seines Werkes Enzyklopädie der Wissenschaft Beweise für einige Fragen geliefert. Der Disputator (wörtlich der klare Untersucher) des *Miftāḥ al Sa'āda* erwähnt kein Werk über diesen Gegenstand.

⁶⁾ Hammer-Purgstall gibt (S. 334) an: Die vorzüglichsten Werke sind: Das Buch der Gewichte von *Euklides*, das von *Ibn al Haiṭam*, dann zwei Werke von *Jaḥjā Ibn Rustem* und *Abū Sahl*.

⁷⁾ Eine ganze Reihe von Angaben über die Lasten, die durch gegebene Kräfte bewegt werden, enthält Herons Mechanik (ed. L. Nix und W. Schmidt, lib. I cap. 1, lib. II, cap. 12 und folgende), dort ist aber nicht vom *Raṭl*, das manchmal einem Pfund entspricht, sondern vom *Qinṭār*, dem

Die Wissenschaft von den Uhren¹⁾ (*Bikamit*)²⁾ behandelt, wie man die Instrumente konstruiert, durch welche die Zeit gemessen wird. Ihr Nutzen besteht in der Kenntnis der Stunden des Gottesdienstes und in der Ableitung des Aufganges der Sterne und der Teile des Tierkreises. Die Alten haben sich statt anderer Apparate mit solchen begnügt, die durch den Anfluß des Wassers aus ihnen bewegt werden, weil sie den Positionen der Himmelskörper auf dem Bilde entsprechen. Weiter nützen sie dem Verstand bei der Schulung durch ihre Theorie (*'Ihm*) und ihre Anwendung. Das Buch des *Archimedes* über sie ist der Stützpfeiler (der zuverlässige Berater).

Zentner, dem Talent, die Rede. An der ersten Stelle ist vom Bewegen von 1000 Talenten durch 5 Talente die Rede; ganz analog wie in der obigen Stelle ist das Verhältnis 5:1000; vgl. auch Pappus S. 107.

Das oben erwähnte Werk ist die Mechanik des Heron, über die gelegentlich noch ausführlich zu handeln sein wird. Es muß arabisch im Mittelalter weit verbreitet gewesen sein.

Bei der Besprechung der Quecksilberuhr von Alfons X. von Castilien (vgl. Beiträge IV, S. 390) ist es zweimal erwähnt, bzw. Heron in der arabischen Form „Iran“ (*Iran*).

Einmal heißt es S. 65: „Deshalb gaben wir dem genannten Rabiçag (nach A. Wegener *Ibn Sid*) den Auftrag, ein Werk darüber zu schreiben, wie man diese Uhr mittelst des Werkes herstellen könne, das Iran der Philosoph geschrieben hat und in dem er berichtet, wie man schwere Gegenstände heben kann.“ Das andere Mal (S. 70): so daß das Verhältnis des Kreises der Mutter (dem Kreisring, in dem sich das Quecksilber befindet) zu dem Durchmesser des bewegenden Kreises (an dem das treibende Bleigewicht wirkt) so groß ist wie das Verhältnis des Bleigewichts zu dem Gewicht des Quecksilbers, und alles dieses wirst du finden, indem du es versuchst, wie es Iran der Philosoph in seinem Werke gesagt hat, in dem er davon handelt, wie man leicht schwere Gegenstände heben kann.

Diese Schrift ist wohl auch unter dem Werk *De ponderibus von Iran* gemeint, das G. B. Donado (vgl. S. 400) erwähnt; sie ist also noch im 17. Jahrhundert im Orient bekannt gewesen.

¹⁾ Vgl. hierzu Beiträge III, S. 255.

²⁾ Das arabische Wort *Binkâm* entstammt dem persischen *Pingân*, das auch in *Pingân* übergegangen ist; vgl. Beiträge III, S. 259.

Oft wird für Uhr der Pluralis von *Sâ'a* die Stunde, *Sâ'ât* benutzt, so bei *Ridwân*, aber auch der Singular kommt in dieser Bedeutung vor. Über die verschiedenen Bezeichnungen für die Uhr vgl. w. u.

In den Beiträgen Nr. III habe ich eine Reihe von Angaben über Kenntnis der Uhren bei den Alten und bei den Arabern gegeben. Im

folgenden sollen dieselben ergänzt werden. Eine Reihe von wichtigen Hinweisen verdanke ich der großen Güte von H. Prof. *Nallino* in Palermo.

a) Auf eine sehr interessante Stelle bei *Eusebius*) über eine Uhr, die mit einem Planetarium verbunden ist, hat mich Herr Professor Dr. *Schöne* in Königsberg auf das liebenswürdigste aufmerksam gemacht.

Die Stelle lautet:

Er (der Mensch) allein von den (Wesen) auf Erden bildete auf der Erde, auf der er wandelt, das Gewölbe des Himmels nach, grub das Bild eben des Himmels in die *σλη* des Erzes, befestigte daran ein Abbild der Planeten und Fixsterne, ordnete die Fristen der Perioden und Zeiten durch die bildende Kunst, umgab es außen rings mit Tierfiguren und bildete (so) das Himmelsgewölbe durch die Größe des Wissens nach Art der geschauten Dinge. (Dies) ließ er (dann), wie der Gott des Himmels, auf der Erde seine Drehung mit dem All vollziehen. (So) kreist es sich in unendlichem Wunder und mit den (wirklichen Dingen) am Himmel kreisen sich die auf Erden (befindlichen) irdisch-hylischen Abbilder. Mit lauter Stimme ruft der Engel der Horen, allzumal werden sie in Einem Augenblick bewegt, die Türen öffnen sich von selbst beim Kommen der Horen, die seelenlosen Bilder der Vögel, die rings umher angebracht sind, rufen zirpend; der Mond, auf Erden (abgebildet), läuft mit dem am Himmel, das Erz wandelt von selbst eben seine Gestalten nach Art des Mondes, und zeigt das von ihm (ausgehende) Licht bald halb, bald abnehmend, bald voll, und die Bilder der Horen entsprechen den Horen der Natur, und so wetteifert die (durch) menschliche (Kunst konstruierte) Welt mit der Schöpfertätigkeit des göttlichen Logos.

Bei Vitruv lib. IX, cap. 8 heißt es, die Drehscheiben (bei der Wasseruhr) bewirken durch ihre Drehung die verschiedenen Bewegungen Kügelchen oder Eier fallen, Blasinstrumente tönen etc.

Dem rufenden Engel entspricht ferner der intermittierend einen Ton gebende Mann an der von C. de Vaux publizierten Uhr des *Archimedes* (s. v. u.). Auf der von *al Ġazari* gegebenen Abbildung derselben finden sich Gestalten mit Musikinstrumenten, ebenso wie die Zeichen des Tierkreises; eine besondere Zeichnung gibt die Mondphasen. Von der Stellung der Sonne in dem Tierkreis und dem Auf- und Untergang mit dem Tierkreis handelt ausführlich *Riḍwān*. Das Öffnen und Schließen der Türen kommt vielfach vor. Zu dem Zirpen der Vögel vgl. w. u.

Mag auch *Eusebius'* Beschreibung etwas poetisch vergrößert sein, so dürfte sie doch Vorrichtungen, die wirklich existiert haben, entsprechen.

Ein solches Planetarium, das wahrscheinlich durch ein Räderwerk bewegt wurde, dem selbst als Treibkraft eine Wasseruhr bzw. deren Schwimmer diente, soll Archimedes nach *Cicero* (*Tusculanen* lib. I cap. 25) konstruiert haben. *Cicero* sagt, „als *Archimedes* die Bewegungen des Mondes, der Sonne und der fünf Planeten an einer [Himmels-]Kugel anbrachte, erreichte er, daß er die an Langsamkeit und Schnelligkeit so verschiedenen Bewegungen durch eine einzige Umdrehung leitete“.

a) *Eusebius Theophanie*, hrsg. von H. Greßmann, S. 68. Leipzig 1904.

Auch *Posidonius* hat eine Vorrichtung hergestellt, deren einzelne Umdrehungen dasselbe an der Sonne, am Mond und an den fünf Planeten hervorbringen, was am Himmel während der einzelnen Tage und Nächte hervorgebracht wird (Cicero, *De Natura Deorum* lib. II cap. 34).

Bei *Pappus* S. 1027 heißt es: „Mechaniker nennt man endlich diejenigen, welche es verstehen Kugeln herzustellen und die ein Abbild des Himmels durch die gleichförmige und kreisförmige Bewegung des Wassers zu konstruieren“, wobei *Archimedes* erwähnt wird. An dieser Stelle kommen auch *Heron's sūgeia*, Wasseruhren vor.

Eine Zusammenstellung von Stellen, an denen von der Vorrichtung des *Archimedes* die Rede ist, findet sich bei *Fabricius* in *Sext. Empiricus* S. 577; ferner *Pappus* Bd. 3, S. 1027.

b) Der Bericht von *Ibn Ġubaira* (der 1185 und nicht, wie Beiträge III, S. 259 angegeben 1175 n. Chr. in Damaskus war) über die Uhr von *Damaskus* lautet folgendermaßen:

Auf der rechten Seite dessen, der durch das Tor *Gairin* herausgeht, befindet sich an der Mauer des Palastes, welche vor ihm ist, eine Gallerie (*Ġurfa*, *Loggia*); sie hat die Gestalt eines großen kreisrunden Bogens. In ihm befinden sich wieder [kleinere] Bögen aus Messing^β), die sich in Türen öffnen, deren Zahl der Zahl der Stunden des Tages entspricht. Sie sind auf Grund mechanischer Anordnungen so eingerichtet, daß bei dem Ablauf einer Tagesstunde zwei Gewichte (*Sanja*) aus den Schnäbeln zweier Falken (*Dāz*) fallen; die Falken sind aus Messing hergestellt und stehen über zwei Becken (*Tassa*)^γ) aus Messing, von denen je eines sich unter einem von ihnen befindet. Das eine befindet sich unter der ersten jener Türen und das zweite unter der letzten. Die beiden Becken sind durchlöchert. Wenn die beiden Kugeln (*Bundug*) in sie gefallen sind, kehren sie innerhalb der Mauer (in der ein Kanal sich befindet) zurück zu der Gallerie. Und du siehst durch eine wunderbare Einrichtung^δ) die

a) The Travels of *Ibn Ġubair* ed. W. Wright S. 271. 1852. Eine Übersetzung der Stelle findet sich bei M. Amari, *Le epigrafi arabiche di Sicilia*. Parte I, S. 23, Palermo 1875. Die kleinen Abweichungen meiner Übersetzung dürften durch unsere neueren Kenntnisse von solchen Uhren gerechtfertigt sein.

β) *Suṣṣr* muß mit Messing übersetzt werden, da nachher *Nuchis* = Kupfer vorkommt.

γ) Bei *Riḡwān* heißt es *Kas* Becher.

δ) Bei *Riḡwān* ist die Einrichtung genau geschildert und abgebildet, die Vögel drehen sich um eine horizontale, durch den Körper gehende Axe. Die von oben durch eine Rinne in den Kopf geleitete und zum Schnabel vorlaufende Kugel bedingt eine Neigung nach vorn; ein Gegengewicht, das durch einen gebogenen Stab mit dem Körper verbunden ist, und sich unterhalb der Drehungsaxe befindet, führt den Vogel in seine Lage zurück. Auf die Abgleichung des Gegengewichtes wird besondere Sorgfalt verwendet. Die Kugeln fallen auf eine vertikale Metallplatte

beiden Falken ihre Hälse mit den Kugeln zu den Becken ausstrecken und sie schnell herauswerfen und die Einbildungskraft konnte das für Zauberei halten. Bei dem Fallen der Kugeln in die Becken hörte man von ihnen ausgehend einen Lärm. Und die Türe, welche dieser Stunde entspricht, ist sogleich durch einen Türflügel aus Messing geschlossen. Dasselbe findet bei Ablauf einer jeden Tagesstunde statt, bis daß alle Türen geschlossen sind und alle Stunden abgelaufen sind; dann kehrt es in seinen ursprünglichen Zustand zurück (d. h. das Ganze ist so wie im Anfang).

Für die Nacht besitzt es eine andere Einrichtung. Sie besteht darin, daß in dem Bogen, der sich oberhalb der erwähnten Bögen wölbt, 12 Kreise aus Kupfer einziseliert sind, vor jedem Kreis liegt im Innern der Mauer ein Glas in der Gallerie^{a)}. All dieses ist hinter den erwähnten Bögen angebracht. Und hinter den Gläsern^{β)} befindet sich eine Lampe, welche durch Wasser herumgeführt wird, entsprechend dem Maß der Stunde. Und wenn diese verflossen ist, durchleuchtet das Licht der Lampe das Glas und seine Strahlen strömen auf den Kreis, der sich vor ihm befindet, und den Blicken erscheint der Kreis rot. Dann wandert jene [die Lampe] zu einem anderen [Glasfenster], bis die Stunden der Nacht verflossen sind und alle Kreise rot geleuchtet haben.

Und es wird einer zum Verwalter auf der Gallerie bestellt, der ihren Zustand zu prüfen hat, der geübt ist in ihrer Angelegenheit und in ihrer Umschaltung, der regelmäßig die Türen öffnet und das Gewicht an seinen Ort tut^{γ)}. Das ist, was die Menschen *al Manjāna*^{δ)} nennen.

Auch *Qazwini* (Bd. 2, S. 126) erwähnt die Uhr bei Damaskus. Es heißt „Und bei dem Ort, der jetzt unter dem Namen *Bāb al Sā'āt* (Tor der Uhr) bekannt ist bei der *Ġāmi'*. . . .“

und dann in einen Becher, sein Boden ist durchbohrt. Durch die Durchbohrung kommen sie in einen Kasten, „das Haus der Kugeln“. Die Einrichtung heißt *Manjāniq*, das Gegengewicht *Mutqila*.

a) Das soll wohl heißen, daß sich die Gläser nicht in oder vor der Mauerfläche befanden, sondern zurückliegen.

β) Wir würden sagen vor den Gläsern; von außen nach innen folgen aufeinander Lampe, Glas, Kupferscheibe. Nach der Beschreibung von *Riḍwān* war die Lampe fest und beleuchtete die 12 Kupferscheiben; im Lauf der Nacht wurden diese durch ein halbkreisförmiges Brett, das durch eine Wasseruhr bewegt wurde, allmählich verdeckt. Der Durchmesser des Brettes lag am Anfang der Nacht horizontal und seine Fläche unterhalb der Uhr.

γ) Diese Besorgung war anfangs ziemlich umständlich. *Riḍwān* rühmt sich f. 80b/81a, daß er erstrebt habe, daß irgend ein Diener oder eine Frau das Wasser einfüllen und die Sache in Gang setzen könne.

δ) Zu diesem Wort, das auch von *Pingān* kommt, vgl. Dozy Suppl. Bd. 2, S. 617; es hat verschiedene Formen, so *Manqāna*, von ihr heißt es „sie ist ein Instrument, mit dem man die Stunden bestimmt“, weiter heißt „die *Sā'a* (hier im Singular), die *Maḡribīner* nennen sie *Manjāna*.“ Auch die Form *Manqāla* findet sich.

In bezug auf die Geschichte der Uhr von Damaskus ist noch folgende Stelle von Interesse

Abu'l Faql Ibn 'Abd al Karim al Muhandis (der Geometer), ...
Er war es, der die Uhr an der *Gämi* (großen Moschee) in Damaskus in Ordnung brachte; für die Beobachtung und Besorgung derselben erhielt er ein beständiges Gehalt. (*Ibn Abi Uṣaibi'a* S. 190/191; Suter, Math. S. 129.)

c) Von einem in Konstantinopel aufgeführten Turm berichtet nach *al Herewi* (gest. 611/1214) (Brockelmann Bd. 1, S. 478) *al Qazwini* (Bd. 2, S. 407) folgendes:

Zu den Wunderdingen dieser Welt gehört das, was *al Herewi* erwähnt, und das ist der Leuchtturm von Konstantinopel. Es ist ein mit Blei und Eisen gefestigter Turm und er befindet sich auf den *Maidän* (Hippodrom). Wenn die Winde wehen, neigen sie ihn nach Süd und Nord, Ost und West von der Basis des Fundamentes. Die Leute stecken Scherben und Wallnüsse in die Spalten seines Baues, dann zermalmt er sie a). — An ihm befindet sich ein *Fingän al Sâ'ât* (eine Tasse der Stunden, d. h. eine Wasseruhr), an ihr sind 12 Türen angebracht, an jeder Tür, deren Zahl gleich derjenigen der Stunden ist, befindet sich ein Türflügel (*Misrâ'*), dessen Länge eine Spanne ist. So oft eine der Stunden der Nacht oder des Tages verflossen ist, öffnet sich eine Tür und aus ihr tritt eine Figur heraus, die stehen bleibt, bis die Stunde verflossen ist, dann tritt diese Figur hinein, die Tür wird geschlossen und die nächste Tür öffnet sich, aus der in derselben Weise eine Figur hervortritt. Und die Rumäer sagen, daß es ein Werk des *Balinäs* (wohl *Apollonius* von Tyana, da unmittelbar nachher von Talismanen die Rede ist) des Weisen sei.

Daß in den Palästen von Konstantinopel Uhren aufgestellt waren, wissen wir aus byzantinischen Quellen. Sie müssen zum Teil sehr groß gewesen sein; dafür spricht, daß ein Raum im kaiserlichen Palast in Byzanz das *Horologium* heißt, und angegeben wird, „die Offiziere hielten sich auf der Seite des Horologium“. (De cer. anl. Byz. Lib I cap. 21, p. 129. Labarte, Le palais impérial, S. 158.)

Auf die Ansichten über die Konstruktion der transportablen Uhren, wie sie *Constantinus Porphyrogenitus* (de cer. aulicis Byz. ed. Reiske S. 472, und im Kommentar S. 559) behandelt, kann hier nicht eingegangen werden.

d) In der Cappella Palatina zu Palermo befindet sich eine Inschrift, welche berichtet, daß König Roger [II] eine kunstreiche Uhr im Jahre 1142 herstellen ließ (vgl. über die Cappella z. B. M. G. Zimmermann, Palermo. Leipzig 1905).

Die Inschrift auf weißem Marmor befindet sich nicht mehr an ihrem ursprünglichen Ort, und es dürfte schwer sein, denselben zu bestimmen. Jetzt findet sie sich am Eingang in die Cappella Palatina eingemauert,

a) Bis hierher ist die Übersetzung Jacob, Berichterstatter S. 75 entnommen.

doch ist dies erst zu einer Zeit nach der normannischen geschehen. Ihre Dimensionen sind 37 cm lang und 49 cm breit. Publiziert ist sie mehrfach bei R. Gregorio, *Rerum arabicarum etc.* p. 176. Palermo 1790. N. Dusemi, *Notizie della Biblioteca di San Pietro etc.* Palermo 1840, tav. V. M. Amari, *Le epigrafi arabiche. Parte 1*, S. 17. Palermo 1875.

Wir teilen im Anschluß an die Übersetzung von Amari die drei Inschriften mit.

Die lateinische lautet: Diese Uhr befahl der Herr und herrliche König Roger herzustellen im Jahre der Menschwerdung Christi 1142, im Monat März in der Indictio 5a), im wahren 13. Jahre seiner Regierung. Glückliche!

Die griechische Inschrift lautet: Neues Wunder! Der mächtige Fürst Roger, der König, dem Gott das Szepter verliehen hat, zügelt den Lauf des flüssigen Elementes, indem er unfehlbare Kenntnisse der Stunden der Zeit verleiht. Im 12. Jahr seiner Regierung im Monat März, in der Indictio 5 im Jahre 6650 [Konstantinopolitanische Zeitrechnung nach Erschaffung der Welt].

Die arabische lautet: Die königliche Majestät, verehrt und erhaben, von Roger, dessen Tage Gott verlängere und dessen Feldzeichen er unterstütze, hat veranlaßt die Herstellung des Instrumentes (*Ala*), um die Stunden zu beobachten in der Hauptstadt von Sizilien, die bewacht wird [von Gott] im Jahre 536 [d. H.].

e) Bei Besprechung der Insel Malta bemerkt *Qazwini* β) folgendes: Auf *Malta* führt *Ibn Samanī* der Dichter, der Malteser seinen Ursprung zurück; er war ein Wunder im Improvisieren in gebundener poetischer Rede. *Abu'l Qāsim Ibn Ramaḍān* aus Malta berichtet: Einer der Geometer (Mechaniker) in Malta hatte seinem König ein Bild hergestellt, durch das man die Zeit der Stunden des Tages kennen lernte. Es warf Kugeln auf die *Ṣanġ*. Da sagte ich [als ich diese Vorrichtung sah] zu 'Abd Allāh *Ibn al Samanī*: Vervollständige diesen Halbvers!

Ein Mädchen wirft nach den *Ṣanġ y*).

und er erwidert:

Über sie sind die Herzen erfreut

als ob der, der sie sinnreich verfertigte, in den Himmel gestiegen war

und die Sphären erforschte und das Geheimnis der Tierzeichen und

Grade lichtete

[er sagt dies] als ob er diese Halbverse aus dem Gedächtnis rezitierte.

a) Indictio ist eine besondere Periode, die bei mittelalterlichen Angaben des Datums zur sichereren Bestimmung angegeben wird.

β) *Qazwini* Bd. 2, S. 374. Amari, *Biblioth. arabo sicula* p. 143, wobei die Berichtigungen von Fleischer S. 45 der Einleitung zu diesem Werk zu beachten sind. Eine ziemlich freie Übersetzung findet sich bei Amari, *Le epigrafi arabiche di Sicilia. Parte 1*, S. 22, *Iscrizioni Edili*. Palermo 1875.

γ) *Ṣanġ* ist die Zimbel, bei der von Carra de Vaux beschriebenen Uhr heißt sie *Mirāt*, ebenso bei *Ridwān* fol. 74b/75a. Sie hängt an einem Stabe, der über das Becken, in das die Kugeln fallen, gelegt ist, senkrecht herab.

Abweichend von den sonst beschriebenen Uhren ist es hier ein Mädchen, das nach den Cymbeln wirft, und nicht ein Vogel.

Nach einer Stelle, die in der Bibliotheca arabo sicula mitgeteilt ist, schrieb *Ibn Ramaḍān* zum Lobe von König Roger; daraus schließt *Amari*, daß der besungene Mechaniker für König Roger eine Uhr konstruiert habe und daß es sehr wahrscheinlich sei, daß dies diejenige war, auf die sich die Inschrift in der Cappella bezieht.

γ) Eine andere offenbar höchst kunstvolle Uhr ist mehrfach beschrieben worden. Sie befand sich in *Tlemcen*, das eine Zeit lang im 13. und 14. Jahrhundert eine große Rolle gespielt hat. Die Stadt liegt bekanntlich in der algerischen Provinz *Oran*, ca. 40 km vom Meer entfernt.

Eine kurze Beschreibung^{a)} hat zunächst *Dozy* mitgeteilt.

In der Nähe des Sultans befindet sich der Kasten (*Chizāna*) der Klesphydra (*Manjāna*); er war verziert, als ob es ein Gewand aus Jemen wäre. Er hat vertiefte Türen, deren Zahl den zeitlichen Stunden der Nacht entspricht. Jedesmal, wenn eine Stunde vergangen ist, wird ein Schlagen ausgelöst, entsprechend ihrer Rechnung (d. h. entsprechend der Nummer der Stunde), und es öffnet sich dabei eine dieser Türen, und aus ihr tritt hervor ein wunderschön gebildetes Mädchen. In ihrer rechten Hand hat sie ein Stück Papier, das Poesie enthält, in der diese Stunde namhaft gemacht ist, und ihre linke Hand hat sie auf dem Munde, als ob sie dem Chalifen die gebührende Huldigung darbringt.

Eine genauere Schilderung der obigen Uhr gibt der *Imām Sīdī Abū 'Abd Allāh Muḥammad Ibn 'Abd al Galīl al Tenesī*β):

Was besonders die Bewunderung der Beschauer erregte, war die wunderbare Uhr (*Chizānat al Manjāna*), die den Palast des Königs von *Tlemcen* schmückte. Dieses mechanische Werk war mit mehreren Figuren aus Silber von sehr sinnreicher Arbeit und solider Konstruktion geschmückt. Oberhalb des Kastens erhob sich ein Busch und auf diesem Busch saß ein Vogel, der seine beiden Jungen mit seinen Flügeln bedeckte. Eine Schlange, die aus ihrem Versteck kam, das am Boden des Gestrüches sich befand, kroch langsam gegen die beiden Jungen, die sie überraschen und verschlingen wollte. Auf der vorderen Seite der Uhr waren 10 (10!) Türen, so viele, als man Stunden in der Nacht zählt, und zu jeder Stunde erzitterte eine dieser Türen, indem sie knirschte. Zwei Türen, die höher

a) Diese Stelle stammt aus einem Werke: Die mittlere Perle (der Beihelf?) der Könige, über die Regierung der Könige (*Wāsiṭ al Mulūk fī Sijāsat al Mulūk*) von dem König *Abū Hammū II Mūsā Ibn Jūsuf* (1352 bis 1396), der selbst die Uhr bauen ließ; es ist in Tunis 1279 (1862) gedruckt; die betreffende Uhr ist nicht besprochen bei *Hoest*, Nachrichten von Marokos. Kopenhagen 1781; vgl. *Dozy* bei *Manjāna* Suppl. Bd. 2, S. 617.

β) J. J. L. *Bargès*, Histoire des Benī Zīyan Rois de Tlemcen par L'Imam etc. et Tenessy, S. 73. Paris 1852. J. J. L. *Bargès*, Souvenir d'un voyage à Tlemcen. Paris 1859, S. 368 ff.

und breiter als die anderen waren, bildeten die seitlichen Enden des Stückes. Oberhalb all dieser Türen und nahe an der Nische sah man die Kugel des Mondes, die sich in dem Sinne der Äquatoriallinie drehte und genau dem Gang, den dieses Gestirn damals aus der Himmelskugel einschlug, folgte. Bei Beginn jeder Stunde, in dem Moment, wo die Türen, die ihr entsprach, ihr Knirschen hören ließ, kamen zwei Adler plötzlich aus der Tiefe der beiden großen Türen heraus, bogen sich über ein Kupferbecken und ließen in dieses ein Kupfergewicht fallen, das sie in ihren Schnäbeln hielten: dies Gewicht trat in eine Öffnung in der Mitte des Beckens und rollte in das Innere der Uhr. Dann stieß die Schlange^{a)}, die bis zu der Höhe des Busches gekommen war, ein scharfes Zischen aus und biß eines der Jungen, trotz der verdoppelten Schreie des Vaters, der sie zu verteidigen suchte. In diesem Moment öffnete sich die Tür, welche der Stunde entsprach, von selbst, eine junge Sklavin trat heraus, die einen Gürtel von gestreifter Seide trug. In ihrer rechten Hand reichte sie ein offenes Heft dar, in dem man die Namen der Stunde in einem kleinen Stück in Versen las^{β)}; die linke Hand hielt sie auf den Mund, wie wenn man einen Chalfen grüßt.

Über den Erbauer dieser Uhr *Ibn al Faḥḥām* erfahren wir in der Geschichte der *Banū 'Abd al Wādī*, der Könige von Tlemcen, von *Abū Zakarijā Jahjā Ibn Chaldūn*^{γ)} folgendes: Der Schüler des Vorbergehenden (nämlich von *Abū 'Abd Allāh Muḥammad Ibn Jahjā Ibn al Faḥḥār*, einem hervorragenden Juristen und Mathematiker), der Jurist *Abū 'l Ḥasan 'Alī Ibn Aḥmad*, der unter dem Namen *Ibn al Faḥḥām* (Sohn des Köhlers) in den mathematischen Wissenschaften bekannt ist, war der gelehrteste unserer Zeit. Er gehörte zu einer tugendhaften Familie. Von ihm rührt von mechanischen Werken *al Manḡāna* her, die in *Maḡrib* (Nordwestafrika) bekannt ist. Dafür belohnten ihn seine Könige mit einer Rente von 1000 Goldinaren, welche die Gouverneure der Provinzen zu liefern hatten. [Die *Manḡāna* funktionierte zum erstenmal am Geburtsfest (des

a) Diese ganze Anordnung entspricht einer von *Philon* beschriebenen (Pn. S. 177) und lehrt, wie lange sich die Tradition aufrecht erhalten hat.

β) Eine Serie von 10 recht schwülstigen Versen, bzw. von 10 Gedichten, einige hatten einen ziemlichen Umfang, hat *Jahjā Ibn Chaldūn* (s. w. u.) auf Befehl des Königs *Abū Ḥammū* für das Geburtsfest des Propheten 770 d. H. (1368/69 n. Chr.) gedichtet (vgl. *Bargès*, *Souvenir* S. 371 ff. und *Complément de l'histoire des Reins-Zeiyan*. Paris 1887, S. 206); dort ist auch angegeben, daß *Maḡḡarī* solche Verse zitiert; das betreffende Stück fehlt aber in der Krehlschen Ausgabe. Den arabischen Text von *Ibn Chaldūn* wird wohl Bd. 2 des Werkes von Bel (s. unten) enthalten.

γ) *Histoire des Beni 'Abd al Wād Rois de Tlemcen etc.* par A. Bel. Bd. 1. Alger 1904. Die Stelle steht im Text S. 56, in der Übersetzung S. 69. Das Werk ist stark benutzt in J. J. L. *Bargès*, *Complément etc.* S. 217.

δ) Der Mann ist ein Bruder des berühmten Historikers.

Propheten) des Jahres 760 (1358/9) unter der Regierung des Königs *Abū Hammū Mūsā* in dem Palast des Audienzsaales (*Maschwar*) a).]

Aus der Gewährung der Rente schließt *Bargès* (*Souvenirs* S. 376), daß *Ibn al Fahhām* noch andere ebensolche Uhren hergestellt habe. Die von uns erwähnte war noch im Jahre 814 d. H. (1412 n. Chr.) in Gebrauch, sie wird gelegentlich des ersten Geburtsfestes des Propheten nach dem Regierungsantritt von *Sa'id*, dem Sohn *Abū Hammū's* erwähnt.

g) Eine andere Stelle β), über die Wasseruhr, in der auch eine Reihe anderer technischer Angaben sich findet, ist folgende:

Und zu ihren Erzählungen über den Scharfsinn und das Herausbringen und die Entdeckung der Wissenschaften gehört, daß *Abu'l Qāsim 'Abbās Ibn Firnās* γ), der Weise von Spanien, der erste war, der in Spanien die Herstellung des Glases aus Steinen erfand, und der erste war, der durch sie (die Wissenschaften) die Schwierigkeiten im Werk über Metrik von *Chalil* löste, und der erste war, der die Schwierigkeiten in der Musik löste, und der die unter dem Namen *Mingāla* bekannten Instrumente (Uhren) herstellte, um die Zeiten kennen zu lernen ohne Strich und Abbild (d. h. nicht mit Sonnenuhren). Er ersann eine Vorrichtung, um seinen Körper zum Fliegen zu bringen; er machte sich Flügel, bekleidete sich mit Federn und flog eine große Strecke durch die Luft. Da er aber die Sache beim Niederfallen nicht wohl erwogen hatte, so nahm er an seinem Hinterteil Schaden; er wußte nämlich nicht, daß der Vogel nur auf den Steiß fällt und hatte sich keinen Schwanz gemacht.

Er verfertigte in seinem Hause ein Abbild des Himmels und spiegelte auf ihm dem Beschauer die Gestirne, die Wolken, die Blitze und die Donner vor.

Von den verschiedenen Arten des Fliegens von Menschen wird vielfach in der arabischen Literatur gehandelt, so in Tausend und eine Nacht, (vgl. dazu de Goeje in te Gids 1889, Nr. 8, S. 31) in muhammedanischen Heiligenlegenden (vgl. Goldziher, Muhammedanische Studien, Bd. 2, S. 294. Halle a/S. 1890). Einige Angaben seien im folgenden gegeben.

Der von *Firdōsi* in der *Schāhnāme* besungene *Schāh Kei Kāōs* fliegt gegen Himmel, indem er seinen Thron von vier Adlern hinaufziehen läßt; diese wollen Fleisch, das an hohen über dem Thron befestigten Stangen befestigt ist, fressen (vgl. *Firdōsi* übersetzt von Rückert S. 403 u. P. Horn, Geschichte der persischen Literatur S. 87).

Ibn al Faqīh † 902 berichtet eine Legende von einem fliegenden Baumeister, der auf der Zinne eines Turmes, den er selbst erbaut hatte, durch Verhungern sein Leben enden sollte, damit er keinen ähnlichen errichte und der sich dadurch rettete, daß er sich einen Flugapparat her-

a) Das [] steht nicht in dem von A. Bel mitgeteilten Text.

β) *Maqqari* Bd. 2, S. 254, s. auch Lerchundi u. s. w. *Crestomatin* S. 66; vgl. auch H. Suter, *Bibl. math.* (2), Bd. 11, S. 85. 1897.

γ) Nach Suter hat *Ibn Firnās* in der zweiten Hälfte des 9. Jahrhunderts gelebt.

stellte. Bei *Ibn al Faqih* ist auch das Bild eines Baumeisters *Futtis* erwähnt, der zwei Flügel eines Vogels an seinem Kopf hat. *Futtis* hatte das berühmte Wunderpferd *Schebdir* hergestellt (*Goldziher*, *Globus* Bd. 86, S. 95. 1904).

Wie verbreitet der Glaube an die Möglichkeit des Fliegens war, zeigt die Leichtigkeit, mit der der Pseudomessias *David Alru* in *Bagdad* den Juden in *Bagdad* einbilden konnte, sie würden von *Bagdad* nach Jerusalem fliegen können (*Grätz*, *Geschichte des Judentums*, Bd. 6, S. 293. Leipzig 1861).

h) In Tausend und eine Nacht überreicht ein griechischer Weiser dem König ein silbernes Becken, in dessen Mitte ein goldener Pfau sitzt, umgeben von 24 Jungen. Der Pfau pickt nach Ablauf jeder Stunde eines seiner Jungen und zeigt so die Tageszeit an. Nach dem Verlauf jedes Monats öffnet er den Schnabel, und in ihm erscheint der Mond (*Übersetzung* von G. Weil, Bd. 1 S. 339. Stuttgart 1872).

i) Wasseruhren freilich primitivster Form waren noch in der Mitte des vorigen Jahrhunderts in der Oase *Gadames* der Sabara gebräuchlich. J. Richardson¹⁾ berichtet, daß er ging, um die Wasseruhr (*Munqila* oder *Sâ'at al Mâ*) zu sehen. Sie ist in derselben Weise konstruiert wie ein Stundenglas (d. h. eine Sanduhr). Sie besteht aus einem kleinen irdenen Topf mit einer Öffnung am Boden. Wird sie 24mal mit Wasser gefüllt und fließt sie aus, so entspricht dies einer Stunde. Diese Uhr dient, um die Dauer der Bewässerung von Grundstücken festzustellen, die je nach deren Größe und dem Abstand von der Quelle verschieden ist. Danach wird eine Steuer erhoben, manche Eigentümer haben aber auch bestimmte Wasserrechte. In der Oase *Laghout* in Ostalgie bestanden entsprechende Vorschriften; die Zeit wird dort von einem Beamten, der das Wasser verteilt, mittelst einer Sanduhr bestimmt; danach öffnet und schließt er die Bewässerungskanäle. Solche Vorschriften gab es schon im Altertum.

Diese einfachen Formen der *Klepsychra*, bei denen Wasser aus einem Gefäß aus Glas oder Ton durch eine oder mehrere kleine Öffnungen am Boden ausfließt, gehen weit in das Altertum zurück. (Ihre Dimensionen waren sehr verschieden, die größten faßten eine Amphora = 39 Liter.) Sie standen auf einem Dreifuß, und ein anderer Rezipient unter ihnen nahm die Flüssigkeit auf; vgl. w. u. bei *Tarjahâra*.

Die Öffnungen waren jedenfalls sehr eng, da sich der Temperaturunterschied zwischen Winter und Sommer geltend machte, in letzterem floß das Wasser schneller aus; das kann nur von der kleineren inneren Reibung herrühren (vgl. zu diesen Uhren *Daremberg* und *Saglio*, Bd. 3 (1), S. 260 und J. Marquardt, *Das Privatleben u. s. w.* 2. Aufl., Teil 2, S. 788).

An ein solches Gefäß, bei dem dann wohl die untere Öffnung verstopft war und das unter Wasser umgekehrt wurde, denkt wohl *Aristoteles* in der unten angeführten Stelle.

¹⁾ J. Richardson, *Travels in the Sahara* Bd. I, S. 185. London 1848.
Sitzungsberichte der phys.-med. Soc. 37 (1905).

Vielleicht ist die Notiz von Interesse, daß *Newton* in seiner Jugend eine Wasseruhr mit einem Schwimmer konstruiert hat. Später bemerkte *Newton*, daß der Hauptnachteil der Wasseruhren darin bestand, daß die kleine Öffnung, aus der das Wasser ausfloß, sich durch dessen Unreinigkeiten verstopfte; während bei Sanduhren das entgegengesetzte eintritt, deren Öffnung durch den durchfließenden Sand erweitert sind.

In dem Werke von *Abū Jūsuf* († 795. Brockelmann Bd. 1, S. 171) über die Grundsteuer (*Kitāb al Charāj*), das in einem Kapitel (S. 53 des Bülāqer Druckes) über die Wasserleitungen (*Qunijj*), die Brunnen, die Kanäle (*Anhār*) und das Tränken handelt, finden sich an dieser Stelle keine Angaben über Wasseruhren (zu diesem bedeutenden Werke vgl. von Kremer, Kulturgeschichte, Bd. 1, S. 492 u. 498).

Sehr ausführlich wird ferner von *Abū Jūsuf* (S. 29 ff. und auch sonst) sowie von anderen die Besteuerung der Grundstücke behandelt, die eine verschiedene ist, je nachdem sie von Wasser an der Oberfläche ohne künstliche Hilfsmittel geschieht (solcher Boden heißt z. B. *al Saiḥ*) oder vom Himmel aus, durch Regen oder mittelst künstlicher Hilfsmittel, wie durch die hydraulische Maschine (*Ġarb*) oder durch den Schöpfseimer (*Sānijā*) oder durch das Wasserrad (*Dālīja*). Auch von der Bewässerung durch den Strick (*Rischā*), d. h. mit Eimern wird gesprochen, weiter von der aus einem aufgestauten Teich (*Ġil*)^β.

Auch wird ein zweimaliges Bewässern erwähnt. Indes habe ich keine Angabe über die Zeitdauer des Bewässerns und eine Wasseruhr gefunden.

Von ganz entsprechenden Steuern handelt sehr eingehend *Iṣṭachri* S. 157 bei *Šīrās*, *Iṣṭachr*, *Arrāḡān* u. s. w.; dort kommt das Wort *Rasm* als Steuer (*Taxe*) (s. w. u.) vor, aber auch hier ist nicht eine Wasseruhr erwähnt^γ.

Ob in dem Werke über die Traditionen von *al Buchārī* († 879. Brockelmann Bd. 1 S. 157) sich entsprechende Vorschriften finden, muß später untersucht werden.

j) Bei der Stadt *Antākija* (*Antiochia* in Syrien) (*Jāqūt* Bd. 1, S. 383, 13) ist von einer Kirche (*Kanisa*) die Rede; über ihrem einen Tor befindet sich ein *Fingān lil Sā'āt* (eine Wasseruhr), sie ist Tag und Nacht fort-dauernd zwölf Stunden in Gang, und sie gehört zu den Wundern der Welt.

a) *Newton* by Sir David Brewster, herausgeg. von E. Schenck und L. Bahlson, S. 5. Berlin 1885.

β) Die auf diese Gegenstände bezüglichen technischen Ausdrücke sind in den *Mafātīḥ* S. 98 ff. behandelt.

γ) Vgl. hierzu auch *M. van Berghem*, La propriété territoriale etc. Étude sur l'impôt du *Charāj*. Inaug.-Diss. Leipzig 1886. Auf S. 63 finden sich nach dem Glossar zu *al Balāḡari*, den de Goeje herausgegeben, zahlreiche technische Ausdrücke für die verschiedenen Arten von bewässertem Land.

k) In einem kleinen Buch über die Taschenspielerkunst in Leyden von *Muhammad Ibn Abi Bakr al Zarchûrî al Miṣrî* (vgl. Beiträge IV, S. 390) ist eine Kerze beschrieben, die die Stunden der Nacht anzeigt (*muwaqqitat Si'ât al Lail*), und bei der am Ende jeder Stunde ein Kügelchen in ein kupfernes Becken niederfällt (De Goeje, Z. D. M. G. Bd. 20, S. 107. 1886).

l) Im folgenden sollen noch eine Reihe von Namen für die Uhr besprochen werden; inbezug auf *Binkâm* und *Manġāna* sei im wesentlichen auf das vorhergehende verwiesen.

Vollers (Bd. I, S. 378) gibt für *Pinkân* an, daß es u. a. ein eherner Becher (*Tās-i-Mis*) ist, in dessen Boden eine enge Öffnung sich befindet, so daß, wenn man ihn in Wasser setzt, das Wasser allmählich durch jene in ihn eindringen kann, also eine Klepsydra, deren sich die Landleute bedienen, um die Wassermenge zu bestimmen, durch die die Saaten bewässert werden (vgl. w. u.), und die Indier, um die Teile der Tages- und Nachtzeit angeben zu können.

In den *Mafâtiḥ* S. 235 findet sich eine Zusammenstellung der Uhren, von denen ein Teil, und zwar jedenfalls die ersten, Wasseruhren sind. Es heißt dort:

Zu den Instrumenten der Stunden gehört das Trinkgefäß (*al Tarġahāra*), der Kasten der Stunden (*Ṣundûq al Sâ'ât*)^a, der Schwimmer ^β) (*Dabba*), die Sonnenuhr (*al Ruchāma* ist der Marmor und bedeutet die Platte, auf die die Schatten projiziert werden), *al Mukḥala*^γ) und *al Lauḥ* (Brett).

Dozy gibt (Suppl. Bd. 2, S. 30) als Bedeutung für *Tarġahāra* (vom persischen Wort *Tarkihâr*), an, „Platte, auf der man geronnene Milch zerschneidet, ferner Flasche“, doch weist de Goeje (Geogr. arab. Bd. 4, S. 287) nach, daß es an der zitierten Stelle einem Becher (*Qadah*) oder auch einem Becher (*Kas*) entspricht. Letztere haben nach den Zeichnungen bei *Riḍwân* etwa die Form eines Rheinweinrömers, mit etwas weiterem Glase und kürzerem Stiel; auch als eine Tasse (*Tās*) wird das Gefäß bezeichnet.

Das Wort *Tarġahāra* wird in einer Dioskoridesübersetzung durch *Hunain Ibn Ishâq* und *Stephanus*, den Sohn des *Basilus* (Leydener Katalog Nr. 1031, Bd. 3, S. 227), auf S. 230 durch *Qar'a* = Gurke, d. h. den unteren Teil des Destillationsgefäßes, auf den der *Ambîq* aufgesetzt wird, definiert (vgl. E. W., Z. D. M. G. Bd. 32, S. 576. 1878).

a) *Ṣundûq* als Uhr wird auch bei H. Chalfn erwähnt; vgl. Beiträge III, S. 256. Ferner kommt das Wort bei *Riḍwân* in der Einleitung f. 4a vor und bedeutet dort den Kasten, in dem sich die Türen befinden:

β) Zu *Dabba* vgl. Beiträge VI.

γ) *al Mukḥala* bedeutet eine Kriegsmaschine, eine Art Balliste, ferner auch eine Büchse zum Aufbewahren von Gegenständen. Vielleicht ist die erste Bedeutung die hier zu benutzende und ein schräg gestelltes Brett gemeint, dem eventuell verschiedene Neigungen gegeben werden.

Die Bedeutung von *Ṭarǧahāra* als Uhr (Wasseruhr) ergibt sich aus mehreren Stellen, so heißt es bei *Muqaddasi* S. 357 von den Bewohnern einer Gegend von *Churasin* bei *Bijār*:

Und es ist Wassermangel für die Erde und den Obstgarten; durch *al Ṭarǧahār* wird es verteilt auf Grund der Taxe (*Rasm*) in *Arrajān* Und die Mühlen (*Rahā*) sind unter der Erde und das Wasser läuft im Kreise herum (statt *miḥdār* wird *madār* zu lesen sein). Sie existieren in einer Wüste u. s. w.

In der Enzyklopädie des *Nowairi* († 1332, vgl. Brockelmann, Bd. 2, S. 139) findet sich eine Stelle über die *Ṭarǧahāra* (de Goeje, Geogr. Bd. 4, S. 287. Herr Dr. *Juynboll* war so sehr gültig, mir die betreffende Stelle abzuschreiben). Es heißt dort: Und darüber, was man von der *Ṭarǧahāra* sagt: *Abu'l Faṭḥ Kuschūjīm* beschreibt sie:

Geist von Wasser in dem Körper von Messing vereinigt durch die Feinheit des Gefühles und des Gedankens; er hat auf den Rücken versteinerte Augenlider und eine Pupille, deren Träne stetig rinnt über einem Kessel. In seinem (des Körpers) unteren Teil entstehen Bewegungen, wie wenn es Bewegungen des Wassers im Gaumen wären, und auf dem oberen Teil ist eine Teilung (Rechnung) eingeteilt für die, die ohne Verstand und Überlegung hinblicken.

Dann wird in poetischer Form der Nutzen der *Ṭarǧahāra* geschildert, wie man mit ihr die Teile der Stunden der Nacht und des Tages erkennt u. s. w.

Man hat hier offenbar die einfachste Form der KlepsHYdra, ein ausfließendes Messinggefäß, das aber eine vertikale Teilung besitzt; die Augenlider dürften seitlich angebrachte, mit einer durchsichtigen Substanz bekleidete Spalte sein, neben denen sich die Teilung befindet, die Pupille ist die untere Öffnung.

Nach einem arabischen Schriftsteller (vgl. de Goeje a. a. O.) ist der Unterschied zwischen *Ṭarǧahāra* und *Binkām*, daß die erstere durch Wasser (*maija*), letztere durch Sand bewegt werde (*ramlija*), eine Unterscheidung, die aber nicht überall zutreffend ist.

Selten kommt als Bezeichnung für Wasseruhr vor *Surraqāt al Mā*, (die Diöbin des Wassers) es ist dies die Übersetzung des Wortes KlepsHYdra und *Surraqa*, so in dem *Kitāb al Masāila* (S. 42). Bei der Behandlung der Frage nach der Existenz eines leeren Raumes heißt es: Eine mit Wasser gefüllte Wasseruhr wird oben geschlossen, dann fließt das Wasser, trotzdem dies seiner Natur entsprechen würde, nicht aus der Öffnung derselben heraus, weil nichts an seine Stelle treten könnte und dann ein leerer Raum entstehen müßte u. s. w. In einer arabischen Übersetzung von Aristoteles Physik (Aristoteles Opera omnia, Pariser Ausgabe, Bd. 2, S. 292, Physik Kap. VI [VIII]), wo es sich um das Auffangen der aus

a) *Kitāb al Masāil* etc. von *Sa'id Ibn Muḥammad al Naisābūrī* (lebte zwischen 952 und 1068) (die atomistische Substanzlehre aus dem Buch der Streitfragen zwischen Basrensern und Bagdadensern, ediert von A. Bīram. Leyden 1902. Inaug.-Diss. Leipzig 1901/02).

einem Schlauch durch Zusammendrehen ausgetriebenen Luft in einer Klops-hydra handelt, heißt es, „dadurch daß sie es auffangen in den Apparaten, welche als *Surraqūt* beschrieben werden“. — *Sāriqūt al Mā* bedeutet nach den *Maḥāṭib* (S. 251) auch den Heber.

In demselben Werk (S. 43) wird im nächsten Abschnitt als der von einer philosophischen Partei angegebene Grund für das Zerspringen eines Kruges, in dem Wasser gefriert, angegeben, daß das Wasser sich beim Gefrieren zusammenzieht und dadurch ein leerer Raum entsteht, da beim Gefrieren keine Luft an die Stelle des Wassers tritt. Da dies nicht möglich ist, so muß das Glas zerbrechen.

Die Philosophen gehen hier von der vorgefaßten Meinung aus, daß die festen Körper einen kleineren Raum als die flüssigen einnehmen, trotzdem das Schwimmen des Eises auf Grund der Betrachtungen in den den Arabern bekannten Arbeiten des Archimedes sie eines Besseren hätte belehren müssen; ganz abgesehen davon, daß wohl schon damals spez. Gewichtsbestimmungen vorgelegen haben, die dann von *Al Chazīnī* (zwischen 1117 und 1157) zusammengefaßt wurden; er gibt für das Eis ein spez. Gewicht von 0,965 an.

Von persischen Ausdrücken für die Uhr kommen noch vor *Schische-i-Sā'at*, das Stundenglas, es ist eine Sanduhr gerade wie die unsrige, die in einer Stunde abläuft, sie besteht aus zwei übereinander befindlichen Gläsern. Weiter findet sich *Tās-i-Sā'at*, das als *Paimāne-i-Sā'at*, d. h. Maßkrug der Stunde definiert wird.

m) Im folgenden sind einige kleinere Nachträge zu den früheren Ausführungen im Beitrag III enthalten.

Zu S. 255. Die auch von E. Bassermann-Jordan erwähnten Uhren von Alfons X. von Castilien haben eine sehr eingehende Besprechung von Wegener (Die astronomischen Werke Alfons X. Bibl. Math. Bd. 6, S. 162. 1905) erfahren. Es sind fünf Uhren, eine Schattensteinuhr, Wasseruhr, Quecksilberuhr (vgl. S. 390 und S. 408), Kerzenuhr (eine abbrennende Kerze wird nach oben gegen ein festes Widerlager gepreßt und setzt bei der Bewegung andere Mechanismen in Gang), eine Uhr des Stundentempels (s. u.). Die erste und letzte Uhr sind Sonnenuhren. Soweit ich sehen kann, hat mit den mir bekannten arabischen Wasseruhren keine der Alfonsinischen Ähnlichkeit.

Zu S. 256. Das Werk von *Taqī al Dīn*, Die leuchtenden Sterne u. s. w., ist in Oxford noch erhalten (Kat. von Uri Bd. 1, S. 211, Nr. 968), der Kodex hat 60 Blätter. In drei Teilen ist gehandelt 1. Über die Sanduhren, 2. Über verschiedene Wasseruhren (clepsychra aquaria), 3. Über die Klopshyden, die mit Rädern, seien es eisernen, seien es bronzanen, versehen sind. Als Name des Autors ist angegeben *Al Qādī Taqī al Dīn* bekannt als *Efendī Damiāt* u. s. f.

S. 257. Suter hatte früher *Banādiq* als „Schleudersteine schleudern“ übersetzt. Schlömilch, Z. S. Bd. 36, S. 126. 1893, übersetzt es jetzt mit „Kugeln werfen“. Bei *Ridwan* sind die Vögel Falken, bei C. de Vaux

Raben. S. 320 heißt der Vogel (*Ġuráb*) a. n. O. *Riḍwan* betont, daß die Kugeln glatt, poliert und rund sein müßten.

S. 257. Auch die Sonnenuhren werden für die zeitlichen und gleichen Stunden eingerichtet. *Al Bērānī* bespricht in seinem Werk *Kitāb al Isti'āb* (Werk der gründlichen Behandlung der möglichen Arten der Konstruktion des Astrolab) das Zeichnen der zeitlichen und gleichen Stunden auf dem Rücken des Astrolab (Ahlwardt Katalog Bd. 5, S. 230).

Zu S. 259. Die Beschreibung einer Uhr in Damaskus von *Benjamin von Tudela*), der dort Mitte der sechziger Jahre des 12. Jahrhunderts war, lautet in der Ausgabe von *Asher* S. 84: Damaskus hat eine muhammedanische Synagoge, die die Synagoge von Damaskus heißt, sie ist unerreicht auf Erden. Man sagt, daß dies der Palast des *Ben Hadad* β) war. Eine der Wände war aus Glas durch Zauberkraft gebaut (so glaubt wenigstens der Verfasser). Diese Wand enthielt so viel Öffnungen, als Tage im Sonnenjahr sind, und die Sonne wirft nacheinander ihr Licht in die Öffnungen. Diese sind in zwölf Grade geteilt, gleich der Zahl der Stunden des Tages, und durch diese Anordnung kann ein jeder erfahren, welche Zeit es ist. Offenbar ist dies eine ganz andere Uhr, wie die von *Ibn Ġubair* beschriebene.

Benjamin von Tudela hat wohl die Beschreibung etwas ausgeschmückt. Zu vergleichen hierzu ist die Uhr des Studententempels von *Alfons* (a. o.), diese ist ein Tempel mit 12 Fenstern, die auf der Südseite im Halbkreis angeordnet sind, und zwar so, daß die Sonnenstrahlen immer nur durch eines derselben in das Innere gelangen. Dort fallen sie auf einen mit Teilungen versehenen Fußboden und bilden den Zeiger einer Sonnenuhr.

Der von B. von Tudela gegebenen Schilderung entspricht ziemlich eine Stelle in *Qaswini* (Bd. 2, S. 130).

Bei *Dendera* heißt es von einem Tempel (*Barbā*) γ), daß er 180 Fenster hatte. Die Sonne tritt (scheint) an jedem Tage in ein neues, bis sie zum letzten gelangt ist, dann kehrt sie zu dem Orte zurück, von dem sie ausgegangen ist.

Diese von *Qaswini* für *Dendera* gemachte Angabe ist wahrscheinlich entweder erfunden oder von einem anderen Orte auf *Dendera* übertragen. Wir kennen in *Dendera* keinen Rundtempel, solche widersprechen auch dem ägyptischen Tempelstyl, wo die Form des Grundplanes rechteckig zu sein hat. Ferner hat der ägyptische Tempel nur ganz wenige Fenster oder richtiger Lichtschachte im Dach oder an der Außenwand. Der erhaltene Tempel von *Dendera* macht davon keine Ausnahme. Daß je ein bisher unbekannter großer römischer Rundtempel in *Dendera* existierte,

a) The Itinerary of Benjamin of Tudela, ed. by A. Asher. London u. Berlin 1840 u. 1841.

β) Zu *Ben Hadad*, König von Damaskus, vgl. *Protest. Realenzyklopädie*, Bd. 7, S. 283. 3. Auflage.

γ) Über die den *Barbā* zugeordneten Geister vgl. C. de Vaux, *Livre des merveilles*. Paris 1898.

auf den die Stelle paßte, erscheint im höchsten Grade unwahrscheinlich. (Mitteilung meines Bruders Prof. A. Wiedemann in Bonn.) Möglich wäre freilich, daß in nachklassischer Zeit dort eine solche Anlage sich fand.

S. 262. Die bei *Maqqari* beschriebene Anordnung ist dem Werk eines älteren anonymen Geographen entnommen und ist von R. Basset publiziert (*Estudios de erudicion oriental*. Festschrift für D. F. Codera p. 629).

Zu beachten ist, daß in *Uzain*, das unter dem Äquator liegt, die Einrichtung viel leichter herzustellen ist als in Toledo, wo die Tageslänge wechselt.

S. 262. Über *Qubbat Uzain* (bezw. *Asin*, woraus infolge des Fortfallens des diakritischen Punktes *Arin* wurde, vgl. Nallino, *Al Battāni* S. 166). Durch diesen Ort, den die Indier *Ujjayini* (ὀξυνη des *Ptolemaeus*) nannten, und der 75° 15' 45" E. Gr. 23° 11' 10" lat. N. liegt, ging der Meridian von *Lanka* (Ceylon), von dem die Indier annahmen, daß er den mittleren Erdmeridian darstellte. Der Schnittpunkt dieses Meridians und des Äquator hieß *Qubbat al Arā*; diese wird als Mitte der Erde auch in den *Mafātih* S. 218 bezeichnet.

Zu *Qubba al Arin* vgl. auch Dozy Suppl. Bd. 2, S. 297b.

Die Wissenschaft der Kriegswerkzeuge¹⁾ behandelt, wie man die Kriegswerkzeuge, wie den *Maġānīq*²⁾ und andere als diesen, konstruiert. Ihr Nutzen ist sehr widerwärtig beim Zurücktreiben der Feinde³⁾ und bei dem Schutz des Körpers. Von *Mūsā Ibn Schākir*⁴⁾ gibt es ein nützliches Buch darüber.

¹⁾ Da H. Ch. etwas ausführlicher (Bd. 1, S. 394) berichtet, so setzen wir seine Erörterung hierher:

Die Wissenschaft von den Kriegsmaschinen (Werkzeugen) behandelt die Art, wie die Kriegswerkzeuge zu konstruieren sind, wie der *Maġānīq* und andere. Sie gehört zu den speziellen Teilen der Geometrie. Ihr Nutzen ist offenkundig. Diese Wissenschaft ist einer der Eckpfeiler, auf die die Sache des heiligen Krieges gegründet ist. Von den *Benū Mūsā Ibn Schākir* ist ein nützliches Buch über diese Wissenschaft verfaßt, wie wenigstens in den *Mafātih al Sa'āda* steht. Es ist angemessen, dieser Wissenschaft diejenige des Bogenschießens und der Wurfgeschosse (*Bunduq*) beizufügen und darauf aufmerksam zu machen, daß das zu dieser Wissenschaft Gehörige in zwei Teile zerfällt, nämlich die Wissenschaft der Erfindung und Herstellung der Kriegsmaschinen und die Wissenschaft von ihrer Anwendung, und auch über diese gibt es Bücher. (Eine Wissenschaft vom Geschosseschleudern erwähnt H. Ch. ohne weitere Angabe Bd. 3, S. 481.)

²⁾ Über den *Maġānīq*, *Balliste*, wird später zu handeln sein; das Wort entspricht wohl dem Griechischen *μηχανή* nach Schramm und nicht *μάγανον*.

³⁾ Gemeint ist wohl, daß, wenn die Feinde mit dem *Maġānīq* eine Festung angreifen, es sehr schwer ist, sie zurückzutreiben.

⁴⁾ Es soll wohl heißen von den *Benū Mūsā Ibn Schākir* vgl. Anm. 1.

Die Wissenschaft von den pneumatischen Maschinen¹⁾ behandelt, wie man die Apparate herstellt, die auf den Satz gegründet sind, daß das Vakuum nicht existiert, ferner das Dahingehörige von den Trinkgeräten (Instrumenten) und von anderen als ihnen. Ihr Nutzen besteht in der Schulung²⁾ der Seele durch die wunderbare Konstruktion von diesen Geräten, wie von den Bechern (*Qadah*) des rechten Maßes (*ʿAdl*) und des Übermaßes (*Ġaur*) und von dem Freilassen (*Sarḥ*) des Tropfers (*Qattāra*) und ähnlichem wie diesem. Das berühmteste Werk über diese Wissenschaft ist das berühmte Werk über die sinnreichen Anordnungen (*Hijal*) der *Benū Mūsā*. Darüber gibt es ein Kompendium von *Philon*³⁾ und ein ausführliches Werk von *Badiʿ al Ġazarī*.

Und das sind die geometrischen Zweige⁴⁾.

¹⁾ Die Stelle aus H. Ch. ist in Anmerkung 5 mitgeteilt. Eine Reihe von Angaben findet sich Beiträge III, S. 231, 233, 260. Über die einzelnen Gefäße etc. wird in einem späteren Beitrag, der einen Kommentar zu dem entsprechenden Kapitel der *Mafātīḥ al ʿUlūm* enthält, gehandelt werden.

²⁾ *Irtijāʿ* H. Ch. hat fälschlich *Irtijāḥ* Vergnügen.

³⁾ Lies „*Filun*“ statt „*Fikun*“.

⁴⁾ Dies bezieht sich auf die Einteilung unseres Buches.

⁵⁾ Da der Artikel in H. Ch. Bd. 1, S. 400 ausführlicher ist, so teilen wir ihn ganz mit.

Wissenschaft von den pneumatischen Instrumenten. Ihre Konstruktion beruht auf dem Satz, daß ein leerer Raum nicht existiert. Zu ihnen gehört der Becher des richtigen Maßes und der Becher des Übermaßes. Der erste ist ein Gefäß mit der Eigenschaft, daß in ihm das Getränk bleibt, wenn man eine bestimmte Menge einfüllt. Gießt man aber ein ganz klein wenig mehr ein, so fließt das Wasser aus, und das Gefäß entleert sich, so daß kein Tropfen darin bleibt. Auch bei dem zweiten ist ein bestimmtes Maß festgelegt; wird das Wasser bis zu ihm, das klein ist, eingefüllt, so bleibt es in dem Gefäß und wenn es vollgefüllt wird, so bleibt es auch. Ist aber eine Menge Wassers, die zwischen diesen beiden Mengen gelegen ist, in dem Gefäß, so fließt das ganze Gefäß aus, da die Existenz eines Vakuums unmöglich ist^{a)}. *Abuʿl Chair* sagt, daß derartige zu einem Spezialgebiete der Geometrie gehört, falls es sich um die Bestimmung des Inhaltes des Gefäßes handelt, sonst aber zu den Spezialgebieten der Physik. Zu diesem Gegenstand gehört auch das Instrument *Dawarān al Sāʿāt* (das Rad der Stunden).

(Das folgende im H. Ch. entspricht fast ganz den Ausführungen *Ansārī*'s, auch werden dieselben Werke genannt.)

^{a)} Dies Gefäß ist Heron Pn. S. 247 beschrieben, indes sind dort drei Röhren verwendet, während hier nur zwei in Betracht kommen.

2. Auszüge aus *Ibn Sinā's* Teile der philosophischen Wissenschaften (mathematische Wissenschaften).

Wie schon Beiträge III, S. 221 erwähnt, gehen die Ausführungen von *Anṣārī* zum Teil auf ältere Darstellungen zurück, so findet sich in einer Sammlung von sieben Traktaten *Ibn Sinā's* über die Wissenschaft und die Dinge der Natur ein Traktat (S. 71)¹⁾ über die Teile der philosophischen Wissenschaft; ihm sind die folgenden Ausführungen entnommen.

Die Grundteile der mathematischen Wissenschaft (*al Hikma al riḡāḡiḡa*). Es sind deren vier: Die Lehre (*Ilm*) von der Zahl, die Geometrie, die Astronomie (*Haia*), die Musik.

Die Lehre von der Zahl behandelt die Arten der Zahl und die Eigentümlichkeiten einer jeden Art für sich und den Zustand der Ableitung der einen aus der anderen.

Die Geometrie behandelt die Lagen(beziehungen) der Linien, die Gestalten der Flächen und der Körper^{a)}, ferner die Verhältnisse aller von ihnen zu den Dimensionen (im Sinne von Länge, Breite und Höhe) von allen, aber nur insofern als es sich nur um Dimensionen handelt, sowie ihre Verhältnisse, die sie besitzen, insofern als sie Eigenschaften der Gestalten und Figuren sind²⁾. Dies umfassen die Elemente des Werkes von *Euklid*.

Im Anschluß an die oben erwähnte Anschauung, daß es keinen leeren Raum gebe, ist von Interesse der folgende Satz über die Begründung der Methode der spez. Gewichtsbestimmung nach *Abu'l Raiḡān*. „Die theoretische Grundlage bildet nach *Jahjā al Bāzī* die Ansicht, daß es keinen leeren Raum gebe; da aber dieser Ansicht die strenggläubigen Sunniten widersprechen, soll man lieber die Versuche auf anderem nicht den Glaubenssätzen widerstrebendem Wege erklären.“ (Vgl. E. W., Wied. Ann. 20, S. 541. 1883.) Hierher gehörige eingehende Diskussionen sind in den oben S. 420 erwähnten *Kitāb al Masāil* enthalten.

a) Die 5. Form von *Saḡaḡa* fehlt im Lexikon, nach dem Zusammenhang kann es nur die von Flächen begrenzten Gegenstände, d. h. die geometrischen Körper heißen.

1) Vgl. hierzu auch C. de Vaux, Notices et Extraits des manuscrits etc. Bd. 38, S. 37. Paris 1903.

2) Die letzten recht umständlichen Ausführungen sollen die Geometrie als eine allgemeine, von dem materiellen Substrat unabhängige Wissenschaft charakterisieren.

Die Astronomie¹⁾ behandelt die Beschaffenheit der Teile der Welt in ihren Gestalten und Stellungen, des einen neben dem anderen und ihre Größen und die Abstände zwischen ihnen und die Bewegungen, die den Sphären und die den Sternen zukommen, und die Ausmessung (*Tuqdir*) der Kugeln und der Schnitte (*Qutû*) und der Kreise, auf denen die Bewegungen vollendet werden. Dies umfaßt das Buch des *Almagest*.

Die Musik behandelt die Beschaffenheit der Melodien und die Ursache für ihre Harmonie und Disharmonie ²⁾, bis zur Kenntnis der Musikinstrumente, und zwar alles mit Beweisen.

Die Musik wird in den *Mafâtiḥ al 'Ulûm* (S. 235) in 3 Abschnitten behandelt:

1. Über die Namen der Instrumente dieser Kunst und das, was sich daran anschließt.
2. Über die musikalischen Begriffe (*Ġâmi'a*), die in den Werken der Gelehrten erwähnt werden.
3. Über die gebräuchlichen Rhythmen (*Îqâ*).

Anṣârî hat über die Musik (S. 92) einen ausführlichen Artikel, auf den nur verwiesen sei; sehr ausführlich ist sie, außer in den Spezialwerken auch von den *Iḥwân al Ṣafâ* behandelt (vgl. Dieterici, Die Propädeutik der Araber im 10. Jahrh. S. 100 ff. Berlin 1865).

Die Zweigwissenschaften der mathematischen Wissenschaften. Zu den Zweigen der Zahl (Arithmetik) gehört die Anwendung der Addition und Subtraktion nach indischer Art³⁾; die Anwendung von *al Ġabr wa'l Muqâbala*⁴⁾. Zu den Zweigen der Geometrie gehört die Lehre von der Ver-

¹⁾ Der ausführliche Artikel von *al Anṣârî* über Astronomie wird an anderer Stelle veröffentlicht werden.

²⁾ Den Punkten entsprechen eine Reihe musiktechnischer Ausdrücke, deren Besprechung hier zu weit führen würde.

³⁾ Es sind das Rechenmethoden der Inder, die auf den Prinzipien des Positionssystems beruhen (allgemeiner heißen sie *al Ḥisâb al hindî*, indischer Kalkül) (vgl. H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik, S. 256).

⁴⁾ *al Ġabr* (von *ġabara* = herstellen, einrichten) bedeutet „das Ergänzen einer Negation“ d. h. das Versetzen eines negativen Gliedes einer Gleichung auf die andere Seite; *al Muqâbala* (= oppositio Vergleichung) bedeutet die Vereinigung gleichartiger Glieder beider Seiten miteinander. Aus $x^2 + 3x - 3 = 5x$ z. B. geht durch *al Ġabr* $x^2 + 3x = 5x + 3$, durch *al Muqâbala* hieraus $x^2 = 2x + 3$ hervor. (H. Hankel, a. a. O., S. 260.)

messung, den sich bewegenden Vorrichtungen¹⁾, dem Bewegen der Lasten, den Gewichten und Wagen²⁾, sowie den Teilinstrumenten³⁾, ferner von der Optik und den Spiegeln⁴⁾ und die Lehre vom Fortführen (*Naql*) der Gewässer⁵⁾.

Zu den Zweigen der Astronomie gehört die Herstellung der Tafeln (*Ziğ*) und Ephemeriden (*Taqwim*)⁶⁾.

Zu den Zweigen der Musik gehört die Herstellung der wunderbaren, fremden Instrumente wie der Orgel⁷⁾ und was ihr ähnlich ist.

Bei den fremden wunderbaren Musikinstrumenten denkt *Ibn Sînâ* wohl an solche, wie sie von *Heron* und *Philon* mehrfach beschrieben sind, an die ewige Flöte (Beiträge III, S. 261) ferner an Figuren, die nur in bestimmten Intervallen Töne geben, wie eine solche in der Schrift über die Uhr, die von *Archimedes* herrühren soll, behandelt ist (C. de Vaux, J. asiatique 8 ser. Bd. 17, S. 305. 1891) (vgl. auch oben S. 409).

Vielleicht schweben *Ibn Sînâ* auch Bäume mit singenden Vögeln vor,

¹⁾ Dies entspricht der Lehre von den Automaten, wie sich aus den *Mafâtih* ergibt. *Al Anşârî* erwähnt sie nicht.

²⁾ H. Chalfa (Bd. 1, S. 493) hat einen Abschnitt, „Lehre von den Gewichten und Maßen, die in der Medizin angewandt werden, z. B. die Drachme und die Unze und das *Rağl* und andere. Darüber gibt es lange und kurze Bücher, welche die, die sie brauchen, kennen“

Eine Liste solcher Gewichte enthalten z. B. die *Mafâtih* S. 14 und 178; ferner findet sich eine Zusammenstellung am Schluß des Kanon von *Ibn Sînâ*, die J. Hirschberg und J. Lippert mitteilen. (Die Augenheilkunde des *Ibn Sînâ* S. 173; vgl. auch Beiträge II S. 325.) Bei den Alchemisten gebräuchliche finden sich bei M. Berthelot La Chimie au Moyen Âge, Bd. 2, S. 153. Weitere zahlreiche Angaben teilen die arabischen Geographen mit.

³⁾ *‘Ilm Âlât al Ğuzija*. C. de Vaux übersetzt die Wissenschaft der Instrumente der Teilung mit Metrologie.

⁴⁾ Nicht der Fernrohre, wie C. de Vaux will.

⁵⁾ Von einem *Naql* der Gewässer ist S. 396 die Rede, ob diese mit der *‘Ilm Inbât al Mijâh* S. 407 identisch ist, ist nicht zu sehen. Zu der Frage vgl. z. B. Beiträge III, S. 230 ff. Ob der in einzelnen Handschriften für das Werk *Philons de ingeniis spiritualibus* vorkommende Titel *de conductibus aquarum* etc. auf Wasserleitungen etc. hinweist, muß dahingestellt bleiben. (Vgl. V. Rose, *Anecdota*, Bd. 2, S. 297.) Bei den Arabern spielten diese jedenfalls eine außerordentlich große Rolle.

⁶⁾ *Taqwim* sind auch geographische Tabellen mit Ortsbestimmungen, wie der Titel des Werkes von *Abu’l Fidâ* lehrt.

⁷⁾ Im Text steht *Urgul*, ist wohl nur verschrieben statt *Urgun* = Orgel. Über die Orgel vgl. Beitrag VI, S. 3.

wie ein solcher sich in *Konstantinopel* und in *Bagdad* befand, wobei der letztere wohl dem ersteren nachgebildet ist.

Von letzterem handelt *al Chaṭīb al Baḡdādī* ^{a)} (Brockelmann Bd. 1, S. 329) gelegentlich der Besprechung der Audienz, die den Gesandten des Kaisers *Constantin Porphyrogenitus* (912—959 n. Chr.) von *al Muqtadir* (908—932) im Jahre 305 d. H. (917 n. Chr.) gewährt wurde. Er sagt:

Unter den berühmtesten Gebäuden, die *al Muqtadir* errichtet hatte, war der Palast des Baumes (*Dār al Schaḡara*), genannt nach einem Silberbaume, der sich in der Mitte befand, umgeben von einem großen kreisförmigen, mit Wasser gefüllten Becken. Der Baum hatte 18 Äste, jeder Ast zahlreiche Zweige, auf denen mannigfaltige Arten mechanischer Vögel aus Gold und Silber, groß und klein saßen. Die meisten Zweige waren aus Silber, aber einige aus Gold, die Blätter von verschiedener Farbe hatten, sie breiteten sich in der Luft aus; blies der Wind, so bewegten sich die Blätter, während die Vögel durch einen verborgenen Mechanismus pfliffen und sangen.

Abū'l Fidā (*Annales muslimici* ed. Reiske Bd. 2, S. 333) berichtet ebenfalls von dem Baume und sagt, die Zweige neigten sich nach festgesetzten Bewegungen und die Vögel pfliffen (sangen) nach geregelten Bewegungen (Rhythmen).

Eine andere Beschreibung ¹⁾, die aber ganz ähnlich lautet, ist folgende: Palast des Baumes. Ein Palast in dem großen Chalifenquartier in *Bagdad*, gebaut von *al Muqtadir billāhī*. Es war ein geräumiger Palast mit prächtigen Gärten, und man nannte ihn so wegen eines aus Gold und Silber gearbeiteten Baumes, der dort in der Mitte eines großen Beckens vor dem Balkon neben den übrigen Bäumen des Gartens stand. Er hatte zwölf Äste aus Gold und Silber; jeder hatte zahlreiche Zweige, die mit verschiedenartigen Edelsteinen in Gestalt von Früchten geschmückt waren. Auf den Ästen waren mancherlei goldene und silberne Vögel, die, wenn ein Lufthauch vorüberging (sie anblies), in wunderbarer Weise Pfeifen und Zwitschern ertönen ließen.

Über die Werke in Konstantinopel berichtet *Schnaase* ^{β)}. Zur Zeit des *Theophilus* (829—842) fanden sich in Byzanz Werke von hoher Vollendung, die zum Teil von einem Mathematiker Leo hergestellt waren. Dahin gehörten Feuertelegraphen, Uhren, die den Lauf der Zeit in den verschiedenen Gegenden des Reiches bestimmen sollten, Orgeln, deren Ton

a) G. Le Strange, *Bagdad*, S. 256. J. Roy. Asiat. Soc. 1897, S. 42.

β) Schnaase, Geschichte der bildenden Künste, 2. Aufl., Bd. 3, S. 173. 1869. Labarte, Palais impérial S. 85. Paris 1861. Constantinus Porphy., De ceremoniis etc. ed. Reiske Lib. II, cap. 15, S. 569 u. Reiske Commentar, S. 642. Bonn 1829 u. 1830.

¹⁾ *Jāqūt*, Bd. 2, S. 520 (ich bin im wesentlichen der Übersetzung von S. Fränkel bei A. Schultz, Das höfische Leben der Minnesänger. 2. Auflage, S. 99. Leipzig 1889 gefolgt; fast wörtlich ebenso hat *Qazwini* Bd. 1, S. 210 die Beschreibung; nach von Kremer, Kulturgeschichte Bd. 2, S. 83 findet sich bei *Taḡribardī* Bd. 2, S. 202 eine solche.

die Schriftsteller rühmen. Auf einer goldenen Platane sangen durch die Wirkung eines geistreichen Mechanismus Vögel, an seinem Fuß brillten Löwen, und der Sessel des Kaisers konnte durch Federn gehoben werden. Ebenso ließen einzeln aufgestellte Vögel einen Gesang ertönen. —

Der Sohn von Theophilus, *Michael*, ließ den Baum mit den Vögeln, die heiden Löwen und die Orgeln einschmelzen; sein Nachfolger stellte sie aber wieder her und von dieser zweiten Ausführung berichtet der oben erwähnte Kaiser Konstantin, ohne aber etwas über die Konstruktion anzugeben.

Solche Bäume werden dann oft beschrieben und kommen in Märcen und Sagen vor.

Von einem blasenden Engel auf einem Baum in *Caracorum* 1253 berichtet *G. de Rubruquis* (vgl. A. Schultz, S. 98).

Von allerlei singenden Vögeln zur Zeit der Minnesänger handelt A. Schultz a. a. O. S. 96 ff. Die Luft wurde aber nicht durch Wasserdruk, sondern durch Blashölge bewegt. Eine Abbildung von 6 Vögeln auf Zweigen und entsprechenden Blashölgen, die aber nicht wie bei uns die Einsaugöffnung an der Seite, sondern am Ende haben, findet sich ebenda.

3. Anszüge aus dem Abschnitte über Naturwissenschaften¹⁾ von *Ibn Sînâ* und *al Anşârî*.

Ibn Sînâ und *Anşârî* behandeln in einem besonderen Abschnitt die Physik (bei *Ibn Sînâ* heißt sie *al Hikma al tabi'îja*, bei *Anşârî* *Ibn al Tabi'î*). Wir wollen einiges daraus mitteilen.

¹⁾ In den *Mafâtih* (S. 133) findet sich folgender Absatz über die Einteilung der Naturwissenschaften und der mathematischen Wissenschaften.

Die Naturwissenschaften. Zu ihren Teilen gehört die Medizin und die Lehre von den oberen Phänomenen (Zeichen in der Höhe), nämlich den Regenarten, den Winden, den Donnerachlägen, den Blitzen und ähnlichem und die Lehre von den Mineralien, den Pflanzen, den Tieren und der Natur von jedem Ding, das sich unterhalb der Mondsphäre befindet. Die Kunst der Chemie gehört zu ihren Teilen, da sie die mineralischen Substanzen untersucht.

Die mathematische und exakte Wissenschaft (*ta'limî* und *rijâdî*). Sie zerfällt in vier Teile. Der erste ist die Lehre von der Arithmetik, das ist die Lehre von der Zahl und der Rechnung, der zweite ist die Geometrie, das ist die Lehre von der *Handasa*, der dritte ist die Astronomie, das ist die Lehre von den Gestirnen, der vierte ist die Lehre von der Musik, das ist die Lehre von den Klängen.

Die Lehre von den *Hîjal* (Mechanik vgl. Beitrag VI), es ist dies eine Wissenschaft, die weder zu diesen vier Wissenschaften, noch zu einer anderen gehört.

Die Naturwissenschaft wird zunächst in acht Teile zerlegt, an die sich dann eine Reihe von Zweigwissenschaften anschließen.

Bei *al Anṣārī* heißt es: Abhandlung über die Physik. Sie ist eine Wissenschaft, in der man die Zustände des fühlbaren Körpers erforscht, insofern er einer Veränderung unterworfen ist oder nicht. In dieser Hinsicht ist der Körper ihr Objekt. Man hat sie in acht Teile geteilt: 1. Physik, 2. Himmel und Welt, 3. Entstehen und Vergehen, 4. die Phänomene in der Höhe (hier die Meteorologie), 5. die Mineralogie¹⁾, 6. die Pflanzen¹⁾, 7. die Tiere¹⁾, 8. der Empfindende und das Empfundene (Psychologie)²⁾.

Ganz dieselbe Einteilung gibt *Ibn Sinā*³⁾.

Von der Physik leitet sich eine Reihe von Zweigwissenschaften ab. Von solchen führt *Ibn Sinā* sieben auf: Medizin, Vorhersagung aus den Sternen (Astrologie), Physiognomik⁴⁾, Auslegungswissenschaft⁵⁾, Lehre von den Talismanen, diejenige von den Bezauberungen (Magie *Nīrangījāt*⁶⁾) und Chemie.

Anṣārī führt zehn abgeleitete Wissenschaften auf, nämlich außer den oben genannten Tierheilkunde (*Baiṭara*), Lehre von

¹⁾ Es stehen sich gegenüber die anorganischen harten Geschöpfe (*ġāmiḍ*), die Pflanzen (wachsende (*nāmi*) Geschöpfe ohne Empfindung), die Tiere (wachsende Geschöpfe mit Empfindung und Bewegung).

²⁾ An die Behandlung der Psychologie schließen sich bei *Anṣārī* zunächst allgemeine Betrachtungen an, so heißt es beim Nutzen dieser Wissenschaften, daß man kennen lernt die wundersamen Erscheinungen infolge der Mischung der Elemente, wie die Anziehung des Magnetsteines auf das Eisen.

³⁾ *Ibn Sinā* gibt an, daß er behandelt habe den vierten Teil in den ersten drei Büchern, die Pflanzen im vierten, die Mineralien im fünften Buch über die oberen Phänomene, die Tiere in dem Werk über die Naturen der Tiere, den 8. Teil in dem Werk über die Seele, den Sinn und das Empfundene.

⁴⁾ Sie ist sehr ausführlich bei H. Ch. Bd. 4, S. 388 besprochen. Nach dieser Stelle haben sich *Aristoteles* und *Rāzī* sehr eingehend mit ihr befaßt.

⁵⁾ H. Ch. Bd. 2, S. 310 hat auch einen ausführlichen, aber ganz anders gefaßten Artikel. (Dort heißt es *ʿIlm Taʿbir el Rūjā* Wissenschaft von der Deutung des Traumgesichtes.)

⁶⁾ Flügel übersetzt *ʿIlm al Nīrangījāt* (H. Ch. Bd. 6, S. 412) als Lehre von der gegenseitigen Verbindung der wirkenden und bewirkten Kräfte, durch die die Bezauberungen bewirkt werden.

der *Baizara*¹⁾ d. h. Lehre von der Heilkunde der wilden Jagdvögel. An Stelle der Auslegekunst und der Lehre von den *Nirangijāt* tritt die Lehre von der Magie (*Sahr*) und der natürlichen Magie (*Simjā*). Diese haben hier für uns kein Interesse, daher soll auch auf ihre Abgrenzung nicht eingegangen werden. Dagegen wäre wohl einmal zu untersuchen, wie sich die einzelnen großen Naturforscher zu diesen Fragen gestellt haben, von denen z. B. *Abu'l Raihān al Bērūnī*²⁾ sie behandelt hat.

Die drei ersten Teile der Naturwissenschaften, Physik (die im aristotelischen Sinn genommen ist) Himmel und Welt, Entstehen und Vergehen haben nur philosophisches Interesse³⁾.

Der vierte Teil. Über die oberen Phänomene⁴⁾. In ihm werden die Eigenschaften der Elemente vor ihrer Mischung auseinandergesetzt und das, was ihnen zustößt, falls sie erschüttert

¹⁾ Die Lehre von *al Baiṭara* und *al Baizara* sind von *Anṣārī* in einem Abschnitt zusammen behandelt (S. 70); aus ihm und aus H. Ch. Bd. 2, S. 83 u. 84 geht hervor, daß es sich um Tierheilkunde handelt, und zwar der Pferde (*Chail*) und der zur Jagd dienenden Raubvögel (*Ġārīḥa*, Raubtier). Als ein Werk über beide Gegenstände wird das von *Ibn al 'Auwām* bezeichnet; dort sind aber, wenigstens in der Ausgabe von Clement-Mullet, die Krankheiten der Pferde und des Hausgeflügels, aber nicht diejenigen wilder Tiere behandelt.

²⁾ Von *Abu'l Raihān al Bērūnī* (H. Ch. Bd. 4, S. 186) stammt ein Werk mit folgendem Titel: *Natürliche Wunder und künstliche Raritäten*, über die Beschwörungen, die *Nirangijāt* und die Talismane, durch die man das Sichere in den Herzen der Kenner ermittelt, und durch die aufgehört der Zweifel bei den Zweifelnden.

³⁾ In diesem Sinne dürften wohl auch die folgenden Abhandlungen *al Kindī* verfaßt sein: Über die fallenden (*ḥābiṭ*) Körper (Sut. Übers. S. 14, Flügel übersetzt untersinkenden) und Über die aus der Höhe herabfallenden Körper und die raschere Bewegung des einen vor dem anderen. (Fihrist S. 261).

⁴⁾ Zu diesem Abschnitt gehören folgende Artikel von *H. Chalfā*.

Die Lehre von den oberen und unteren Phänomenen (*Ātār*) (H. Ch. Bd. 1, S. 154) ist die Lehre, welche die zusammengesetzten Körper, die kein bestimmtes Temperament (*Misāj*) haben, behandelt und die Gründe ihrer Entstehung kennen lehrt. Es gibt drei Arten, denn sie entstehen entweder oberhalb der Erde, nämlich in der Luft, und dies sind die Akzidentien der Luft [die meteorologischen Erscheinungen], oder auf der Erdoberfläche, wie die Steine und die Berge, oder in der Erde, wie die Mineralien. Die Gelehrten haben darüber Werke verfaßt, zu ihnen gehört das Buch des Himmels und der Welt [von *Aristoteles*].

werden und sich verdichten und infolge verschiedener Arten von Bewegung unter dem Einfluß himmlischer Erscheinungen auf sie. Ferner die Erscheinungen (*Kāin*) in der Substanz (*Gauhar*) wie das Gewölk, der Donner, die Regenarten, der Blitz, der Halo, der Regenbogen, Unwetterkatastrophen (*Sā'iq*), die Sternschnuppen, [seltsame] Zeichen [am Himmel] (*Alāma*), ferner die Erscheinungen über der Erde, die aus ihnen hervorgehen, wie der Schnee, der Hagel, der Tau, der Blitzschlag (*Sā'iq* sol), die Winde, der Nebel und die Flut und Ebbe, weiter die Ereignisse unter der Erde, die aus ihnen hervorgehen, wie das Erdbeben, der Erdstoß und das Versinken (*Chasf*).

Der fünfte Teil. Die Mineralien. In ihm werden behandelt die Zustände der anorganischen Dinge (Geschöpfe) wie die Metalle, die kostbaren Steine (Edelsteine) u. s. w., wie die Vitriole, *al Tabīta*, die Salze, die Schwefel- und Auripigment (*Zarnich*)-arten und das Quecksilber und wie sie entstehen.

Von der Meteorologie¹⁾ im engeren Sinne des Wortes handelt bei H. Ch. folgender Abschnitt.

Diese Lehre untersucht die Natur des Regen, der Schneefälle und des Blitzes und des Donners und ähnlicher Erscheinungen, ferner untersucht sie, warum sie in einzelnen Ländern und nicht in anderen auftreten, warum sie zu gewissen Zeiten und nicht zu anderen beobachtet werden, und den Grund für den Nutzen einiger von ihnen und für den Schaden von anderen, sowie anderes, was hierher gehört.

Die Lehre von dem Regenbogen (*Qaus al Qusah*), (H. Ch. Bd. 4, S. 581) forscht nach der Art seines Entstehens und dem Grund für sein Entstehen und seine Kreisgestalt und seine verschiedenen Farben und sein Auftreten nach dem Regen und an den Enden des Tages (d. h. am Morgen und am Abend) und ferner, warum er bei Tage häufig, im Mondlicht in der Nacht aber nur hin und wieder sich zeigt, sie forscht ferner nach den Regeln für sein Auftreten in der Welt des Entstehens und Vergehens sowie nach anderem hierher gehörigen.

a) Statt *Tabūb* ist zu lesen *Schabūb*. Die Form *Schabūb* für den Alaun als eines Minerals von Spanien kommt auch bei *al Maqqari* (*Ierchundi y Simonet*, *Crestomatin* S. 20) vor und ebenso bei *Qazwini* Bd. 2, S. 338. Gewöhnlich heißt der Alaun *Schabb*.

¹⁾ Als Überschrift steht Lehre vom Entstehen (*Kaun*) und Verderben (*Fasād*). Dies wird irrtümlich sowohl Bd. 1, S. 34 als auch Bd. 5, S. 265, wo unsere Stelle her stammt, mit Meteorologie übersetzt. Wahrscheinlich ist etwas ausgefallen, da sich bei *Aristoteles* nach den Arabern (vgl. die Selbstbiographie *Ibn al Haiṭam*) die Meteorologie an die Schrift über das Entstehen und Vergehen angeschlossen.

Von ihr spricht *Abu'l Chair*, und er rechnet sie zu den Naturwissenschaften.

Eingehend behandelt *Qazwini* den Regenbogen und seine Theorie (arab. Text Bd. 1, S. 98 ff. und Übersetzung S. 201). Dort sind auch Regenbogen im Bade beschrieben sowie solche, die auf einer Wolke unterhalb des Beobachters, der auf einem Berge steht, erscheinen, und zwar nach Beobachtungen von *Ibn Sini* (*al Scheich al Rais*). *Qazwini* ersetzt bei seinen Betrachtungen die Regentropfen durch kleine Spiegel; viel richtiger ist die Entwicklung von *Ibn al Haiṭam* (vgl. E. Wiedemann, Wied. Ann. Bd. 39, S. 575. 1890), der eine einmalige bzw. zweimalige Reflexion des Lichtes in Kugeln annimmt.

Den Phänomenen in der Höhe ist eine ausführliche Abhandlung der *Ichwin al Safi* gewidmet (vgl. F. Dieterici, Die Naturanschauung etc. S. 66. Leipzig 1876).

Die Schriften der Araber über die Meteorologie u. s. f. schließen sich zum großen Teil an die entsprechenden Werke des *Aristoteles* an, sie bilden Kommentare und Ergänzungen desselben. In bezug auf diese sei auf Steinschneider, Phil. § 29, S. 55 ff. verwiesen. Die Titel einiger anderer sind:

al Abāhh, Über den Regen (Suter, Math. S. 9).

Sahl Ibn Bischr, Über Regen und Wind (Suter, Math. S. 15).

Almad Ibn al Taijib, Über die Altweiberkälte und das Wesen des Nebels. (Suter, Math. S. 33.)

Sehr zahlreich sind die Schriften von *al Kindi* über diese Gegenstände (vgl. Suter, Übersetzungen S. 14 und Math. S. 23 und Nachträge S. 161). Ihre Titel mögen zeigen, womit man sich alles beschäftigte:

Über die Ursache, weshalb die obere Luftschicht kalt, die näher an der Erde befindliche warm ist. Über die Luftercheinungen. Über die glänzende Erscheinung, welche sich in der Luft zeigt und Stern (bedeutet hier wohl Sternschnuppe oder Meteor) genannt wird. Über den Kometen. Über den Stern, welcher für einige Tage erschien und beobachtet wurde, bis er verschwand. Über die Ursache der Kälte, die man Altweiberkälte nennt. Über die Ursache des Entstehens des Nebels und der von ihm während seiner Dauer hervorgebrachten Erscheinungen. Über die Beobachtung des im Jahre 222 d. H. erfolgten großen Phänomen (vielleicht Komet oder Meteor). Über die beiden im (am) Wasser wachzunehmenden Phänomene (Ebbe und Flut). Über Ebbe und Flut (Oxford Katalog Bd. 1, Nr. 877). Über die Entstehung der Dünste im Innern der Erde, welche viele Erdbeben und Einstürze erzeugen. Über die Ursache des Donners, des Blitzes, des Schnees, des Hagels, der Donnerschläge und des Regens. Über die Ursache der lasurblauen (*azwardi* = von der Farbe des Lapis lazuli) Farbe, welche man in der Luft in der Oberfläche des Himmels sieht (Oxford Kat. Bd. 1, Nr. 877). (Im Fihrist heißt der Titel: Über das Wesen der Himmelskugel und der ihr eigenen lasurblauen Farbe, welche in der Oberfläche des Himmels wahrgenommen wird.) Über die Ursache der Hölle um Sonne, Mond und Sterne. Über Regen und Wind

und die Veränderungen der Luft (Oxford Bd. 2, P. 1, Nr. 6784; gedruckt Venedig 1507).

Ferner finden wir in den verschiedenen Kosmographien und in dem Werk der *Ichwān al Šafī* (Dieterici, Die Naturanschauungen etc.) zahlreiche Betrachtungen über diese Gegenstände.

Erwähnt wird *Epaphroditos* (*Atāfrūdītōs*), von *Jahjā Ibn 'Adī*, der ihm ein Werk über die Meteorologie zuschreibt, das einen Kommentar zu der Abhandlung des Aristoteles über den Regenbogen bildet. Es wurde übersetzt von *Tābit Ibn Qurra* (*Qifī* S. 59. Suter, Bibl. math. (3) Bd. 4, S. 294. 1903).

Ein Versuch, um künstlich einen Regenbogen herzustellen, ist in dem Beiträge IV, S. 389 besprochenen Zauberbüchlein S. 78 beschrieben: „Wie man etwas dem Regenbogen Ähnliches erscheinen läßt. Dazu füllst Du Deinen Mund mit Wasser und stellst Dich in die Türe oder in das Fenster eines Zimmers, durch die das Sonnenlicht in letzteres eindringt; dabei stellst Du Dich mit dem Rücken nach den Sonnenstrahlen. Dann bläst Du jenes Wasser in einem Spritzregen aus, so daß das Licht der Sonne darauf fällt. Dann erscheint dem Beschauer ein gekrümmter Bogen, ähnlich dem Bogen auf der Wolke.“

Sehr eingehend sind die Erscheinungen am Himmel und deren Beziehungen zu dem Wetter in der Schrift über Agrikultur von *Ibn al 'Awwām* (Übersetzung von Cl. Mullet Bd. 2, S. 435) besprochen. Dabei bezieht der Verfasser sich vielfach auf die nabatäische Landwirtschaft von *Ibn al Wahschija* (Brockelmann Bd. 1, 242, wo die weitere Litteratur zu finden), der etwa um 900 lebte. Wenn auch dessen Angabe, daß er sein Wissen altbabylonischen Quellen verdankt, eitel Schwindel ist, so haben doch seine Notizen selbst Wert, da sie Kenntnisse seiner Zeit darstellen; vgl. o. S. 407. Als Autoren zitiert *Ibn al 'Awwām* ferner *Costus* (Wenrich S. 291, Steinschneider, Phil. § 6 [30], S. 12,) ferner *Cassius* und *Cassianus* und von Arabern *Ibn Qutaiba*.

Über den Regenbogen in astronomischer und astrologischer Beziehung handeln zwei Texte in Berlin (Nr. 5906, 1 und 5915, 2). In dem ersten heißt es z. B. bei dem Zeichen des Widders, das im Osten steht, wenn dort ein Regenbogen erscheint, so weist er auf Pest, Krankheit und Tod. In der letzteren heißt es beim September: erscheint in ihm ein Regenbogen, so weist dies auf große Tyrannie und Unterdrückung.

Ganz besonders erregten die Fragen über die Erdbeben und über Flut und Ebbe das Interesse der Araber. Nach *Aristoteles* beruhen bekanntlich die Erdbeben auf Dämpfen, die im Erdinnern eingeschlossen sind. *Anthemius* vertrat z. B. diese Ansicht, und da er seinen redogewandten Nachbarn (*Zeno*) (n. Chr. 557) nicht mit Worten widerlegen konnte, so erschütterte er durch austretenden Dampf dessen Haus (*Agathias* hist. libri quinque S. 289. Bonn 1828).

Einen längeren Abschnitt über Erdbeben hat *al Dimaschi* (Text S. 57, Übers. S. 63); nach ihm sollen sie von Dämpfen herrühren, die sich im Erdinnern unter dem Einfluß der Sonne bilden; er vergleicht diese rätsel-

hafte Wirkung mit derjenigen des Mondes auf Flut und Ebbe. Durch die Bewegungen der Dämpfe entstehen die Erdbeben. Er fährt dann etwa fort: Sind die oberflächlichen Schichten dicht, so bleiben die Dämpfe kochend in der Erde. Ist die Substanz in dieser Gegend schwefelhaltig, so verwandelt sich jeder einzelne Teil in diesem Fall in Feuer und entzündet sie. Man sieht von ihnen Feuer, welches Tag und Nacht Funken sprüht, und man nennt dies einen Vulkan (*Burkân*). Solche gibt es an vielen Orten. — (Des Aetna wird von den arabischen Reisenden z. B. bei der Besprechung von Messina Erwähnung getan.)

Über die Liparischen Inseln und die dortigen vulkanischen Eruptionen berichtet *Ibn Gubair* (ed. Wright S. 331, *Amari J. asiat.* [4] Bd. 6, S. 513 u. 544. 1845). Ein ununterbrochenes Feuer tritt aus zweien dieser Inseln; denn wir beobachteten zunächst den Rauch, der aus ihnen hervortrat, und bei Einbruch der Nacht sahen wir eine in die Luft sich zungenförmig erhebende Flamme. Es ist dies die Wirkung des Vulkans, den alle Welt kennt, und wir erfuhren, daß die Flamme aus Luftlöchern (*Manfas*) dieser beiden Berge heraustritt, durch die sich mit großer Kraft ein feuriger Luftstrom (*Nafs*) erhebt, der die Flamme erzeugt. In der Mitte des Luftstromes steigt oft ein großer Stein empor, der durch die Gewalt des feurigen Luftstromes fortgeführt wird; dieser hindert in gleicher Weise, daß er an Ort und Stelle bleibt und daß er auf den Boden zu fällt.

Über die Ursache von Flut und Ebbe sind von den Arabern folgende Anschauungen entwickelt worden: Ein Engel setzt abwechselnd einen Fuß in das Meer und hebt ihn heraus, Fische oder andere Wesen schlürfen das Wasser ein und stoßen es aus (*al Ġāhiz* *Trin* opuscula ed. van Vloten S. 148 und *Ibn al Faqih* S. 9), oder es findet durch den Mond ein Anziehen und Loslassen statt (*al Ġāhiz* a. a. O.), oder die Strahlen des Mondes dringen in das Meer, werden an den Steinen reflektiert und erwärmen es dann (*Qazwini* Text S. 103, Übersetzung S. 212).

Die Stelle bei *al Ġāhiz* lautet folgendermaßen: Und [berichte mir] was Du sagst über Ebbe und Flut¹⁾, ob sie von einem Engel herrühren, der seinen Fuß niedersetzt und aufhebt, und wenn dies der Fall ist, so ist vielleicht auch der Leiter der Sphäre (d. h. derjenige, der die Bewegung der Gestirne bewirkt) ein Engel und vielleicht ist der Schall des Donners der Schall des Stöhns des Engels. Dann legen wir die Philosophen (d. h. deren Ansicht) beiseite und halten uns an das, was die große Menge sagt. Oder behaupten wir, daß die Flut und Ebbe von dem Atem der Einschlürfenden herrührt, wenn er herabgesogen und emporgehoben wird. Und [sage mir] was Du sagst über die Ansicht derer, die behaupten, daß der Mond wässerig ist und die Sterne ihrer Natur nach der Erde ähnlich sind, so daß die Flut und Ebbe nur dem Maß seiner (des Mondes) Anziehung und Abstoßung auf das Wasser entspricht. Dies

¹⁾ Ein Brief von *al Kindi* über Flut und Ebbe ist in Oxford (Bodl. Cod. 877) erhalten. Weiter hat diese Frage *Hunain* (Suter S. 43) behandelt.

ist an den Orten, von denen das Wasser herabfließt und zu denen es hinfließt, bekannt. Es kennen es die Leute, die bei der Ebbe und Flut wohnen.

Ibn al Faqih spricht sich folgendermaßen aus: *Ibn 'Abbās* (ein Vetter des Propheten *Muhammad*, auf den viele Traditionen zurückgehen), nach Flut und Ebbe gefragt, sagte, daß ein Engel über das Meer gesetzt sei; wenn er seinen Fuß hinein setzt, so strömt es über, und wenn er ihn aufhebt, so nimmt es ab. *Ka'b* (ein jüdischer Gelehrter der ältesten muhammedanischen Zeit) erzählt, es begegnete *al Chadir* (der ewig junge) einem Engel und frug ihn nach Ebbe und Flut, und der Engel sagte: Ein Fisch schöpft tief Atem und trinkt das Wasser und hebt es bis zu seinem Nasenloch, das ist die Ebbe, dann atmet er und läßt es aus seinem Nasenloch austreten, und das ist die Flut.

Die Erzählung vom Engel hat *Muhammad* in dem *Qurān* aufgenommen.

Von den Zweigwissenschaften seien nur einige etwas näher behandelt.

Von der Medizin sagt *Ibn Sinā*: Ihr Ziel ist die Erkenntnis der Prinzipien des menschlichen Körpers und seine Zustände in Gesundheit und Krankheit und deren Ursachen und Anzeichen, um die Krankheiten zu vertreiben und die Gesundheit zu bewirken. Weiter heißt es:

Die Wissenschaft *al Kimjā*¹⁾. Ihr Ziel ist den natürlichen (in den Gruben gefundenen) Edelsteinen (Mineralien, Metallen

¹⁾ Bei *Anṣārī* heißt es (S. 76): Die Chemie ist eine Wissenschaft, bei der man den natürlichen Edelsteinen ihre Eigenschaften nehmen will und ihnen Eigenschaften verleihen, die sie nicht hatten. Das Vertrauen zu ihr (d. h. auf ihre Ausführbarkeit) stützt sich auf die Überzeugung, daß alle Metalle (Erze *Filissāt*) nahe verwandt sind und daß der sichtbare Unterschied zwischen ihnen nur accidentelle Dinge betrifft. (Vgl. hierzu Beitrag I in diesen Berichten Bd. 34, S. 45. 1902 und Beitrag II, S. 345.) Den ziemlich ausführlichen Artikel bei *Anṣārī* werde ich gelegentlich mitteilen.

Sehr ausführlich ist von II. Ch. Bd. 5, S. 270 die Alchemie behandelt; in der Einleitung sind die Gründe, die für und gegen die Möglichkeit der Metallverwandlung angeführt sind, eingehend erörtert; dabei wird auch eine noch zu edierende Schrift von *al Fārābī* zitiert.

Die Definitionen der Wissenschaften von den Talismanen und den Bezauberungen, die sich an die der Chemie anschließen, lauten bei *Ibn Sinā*:

Diese Wissenschaft von den Talismanen hat als Ziel, die himmlische Kraft mit der Kraft irgendwelcher irdischer Körper zu ver-

(*Gawāhir*) ihre Eigenschaften zu rauben und ihnen diejenigen anderer mitzuteilen, und zwar einigen von ihnen die Eigenschaften von einigen, um zu der Erzielung von Gold und Silber und anderen Metallen zu gelangen.

Eigentümlich ist, daß *Ibn Sina*, der doch sonst ein Gegner der Alchemie ist, keine entsprechende einschränkende Bemerkung macht; die Astrologie bezeichnet er als eine mutmaßende Wissenschaft. Seine Polemik gegen die Alchemie findet sich in den Prolegomenen zu seinem Werk *al Schifā*.

Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. LXXII.

Einleitung zu dem astronomischen Teil des *Kitâb al Schifâ'*¹⁾ (Werk der Genesung) von *Ibn Sînâ*.

Von Eilhard Wiedemann.

Ibn Sînâ hat eine Reihe astronomischer Werke verfaßt, so das *Kitâb al Arşâd al kullija*, das Werk der gesamten Beobachtungen, und *Muchtaşar al Migisî*²⁾, Kompendium des *Almagestes*. Dieses Kompendium soll nach K. Lokotsch später den astronomischen Teil der *Schifâ'* ausgemacht haben.

Unter den arabischen Bearbeitungen des *Almagestes* ist diejenige in der *Schifâ'* eine hervorragende Leistung. Soweit ich bisher feststellen konnte, hat *Ibn Sînâ* wirklich, wie er in der Einleitung sagt, das Wesentliche und Grundsätzliche behandelt. Hier und da hat er freilich auch etwas hinzugefügt, so bei den Apparatbeschreibungen, bei der Lehre vom Transversalsensatz. Daß er auch selbständig astronomische Arbeiten unternommen und auf diese Wert gelegt hat, ergibt sich daraus,

1) Ein Teil des mathematischen Abschnittes der *Schifâ'* ist behandelt bei K. Lokotsch in Avicenna als Mathematiker, besonders die planimetrischen Bücher seiner Euklidübersetzung (Inaug.-Diss. Bonn 1912). — Lokotsch schickt den schönen Spruch von *Abu'l Fidâ* voraus: „Was man nicht ganz wissen kann, das soll man doch nicht ganz beiseite lassen; denn die Kenntnis eines Teiles ist besser als die Unkenntnis des Ganzen“. Mit den musikalischen Teilen beschäftigt sich Herr H. G. Farmer in Glasgow.

2) Während meist die Form *al Magisî* = *Almagest* angegeben wird, so wäre diese u. a. nach M. Steinschneider, Zeitschr. d. deutsch. morg. Gesellschaft Bd. 50, S. 200. 1896 „*al Migisî*“ (vgl. *H. Chalifa V*, S. 385). Daß in *μειστόν* das *i* statt *η* verwendet wird, entspricht der Aussprache, ein ähnlicher Übergang von *ε* in *i* ist nicht bekannt; es könnte aber eine Assimilation stattgefunden haben.

Sitzungsberichte der phys.-med. Soz. 58/59 (1926/27).

15

daß er in der Einleitung und bei der Besprechung der Quadranten auf seine *Lawāhiq*, „die Zusätze“ hinweist. In ihnen finden sich wohl die bei *al Qifti* erwähnten zehn Propositionen über die Parallaxe und über solche Dinge bei der Lehre von der Astronomie, auf die man früher nicht gekommen war. Ein Stück der *Lawāhiq* dürfte auch *Ibn Sinā's* Schrift über ein von ihm erfundenes Beobachtungsinstrument sein. (E. Wiedemann und Th. W. Juynboll, *Avicennas Schrift über ein von ihm erfundenes Beobachtungsinstrument*. *Acta orientalia* Bd. 5, S. 81—167. 1926).

Die höchst charakteristische Einleitung lautet:

Es ist für uns [jetzt nachdem wir die Geometrie behandelt haben] an der Zeit, daß wir eine Zusammenfassung, *Gawāmi'*, des großen Werkes von Ptolemäus geben, das in dem *Almagest* und der in ihm enthaltenen Astronomie besteht³⁾. Dabei wollen wir uns eng an seine Darstellung anschließen und keinen anderen Weg als den seinigen einschlagen, also keinen derjenigen, die sich den neueren Gelehrten darboten, außer in unwesentlichen Dingen. Die Untersuchung hierüber gehört zu demjenigen, was wir in dem Werk *al Lawāhiq* (der Zusätze) mitteilen. Unsere Absicht⁴⁾ ist das Wesentliche, Grundsätzliche nahezubringen und zwar so gut wie möglich. Die Rechnung bei den einzelnen Sätzen (*Schakl*) wollen wir fortlassen. Wir wollen aber die Methode der Auseinandersetzung bei jedem Satz klarlegen. Wer aber dazu Lust hat, der mag rechnen. Unser Streben geht nicht danach, genau anzugeben, zu welcher Zeit jede Beobachtung stattgefunden hat. Wir werden vielmehr nur angeben, wieviel Zeit zwischen jeder Beobachtung und der darauffolgenden verflossen ist. Was nun aber die

3) Wörtlich: als ein Werk, das geschrieben ist (verfaßt ist) über *al Migistā* und die Astronomie.

4) Hier sei noch die Beurteilung von *al Nasawi* in seinem Werk „Die volle Befriedigung in bezug auf die Erklärung des Transversalensatzes“ mitgeteilt: Alle kommentierten die Probleme dieses Buches (des *Almagestes*) außer *Abū 'Alī Ibn Sinā*. Dieser faßte den Inhalt dieses Buches kurz zusammen, wobei er die rätselhaften Stellen sowie die Widersprüche, die bei dessen Propositionen auftreten, erläuterte. Er machte es zu seinem Teil seiner *Schifā'* (vgl. O. Schirmer, *Studien zur Astronomie der Araber*, Sitzungsberichte der phys.-med. Soz. Erlangen Bd. 58, S. 81. 1926).

Tabellen betrifft, so mag jemand, der dazu Lust hat, sie in dieses unser Buch niederlegen (einfügen), und wenn er es zu kürzen wünscht, so mag er es tun.

Wir beabsichtigen nicht viele von den *Aschkäl* (Figuren mit den dazu gehörenden Erläuterungen) zu wiederholen (zu reproduzieren), in welchen für alle Sterne eine Art der Berechnung (*Hisib*) gültig ist, die sowohl in der Mathematik als auch in der Astronomie die gleiche ist. Nur wenn sie (die Berechnungsmethode) eine andere ist (als in der Mathematik), werden wir sie reproduzieren.

Wir bitten die wahren Vertreter der Astronomie, daß sie vergeben, wenn wir Fehler begangen haben, und daß sie Lücken ausfüllen.

Ich konnte durch das große Entgegenkommen der Bibliothek des India Office in London die dort befindliche wundervolle Handschrift der *Schifä'* (Katalog von Loth Nr. 477) in Erlangen benutzen. Ich erlaube mir dafür meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Zur Entstehung der Kugeldreiecksrechnung.

Von P. Ludeke in Tübingen.

I. Wer waren die „arabischen“ Mathematiker?

Vor Eintritt in den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung*) erscheint es mir nötig, etwas über die Urheber der sog. arabischen Mathematik, Physik, Astronomie und Philosophie zu sagen. Delambre¹⁾ bezeichnete die Verfasser arabisch geschriebener Werke als „Araber“ und diejenigen persisch geschriebener Werke als „Perser“, obwohl oft aus demselben Gelehrtenkreis, ja von demselben Verfasser arabisch sowohl wie persisch geschriebene Werke erschienen sind. Nach diesem Grundsatz kann man Kopernikus, Kepler und Gauß „Römer“ nennen. Noch von Braunmühl spricht von der Ausbreitung der Trigonometrie bei den „Ostakabern“ und (!) Persern. Auch Cantor, der es nicht versäumte, sich in der orientalistischen Literatur umzusehen, konnte naturgemäß den völkischen oder gar rassistischen Fragen nicht nachgehen, und, obschon in neuerer Zeit wieder von mathemathikhistorischer Seite auf den wahren Sachverhalt hingewiesen wurde²⁾, herrscht über denselben noch längst nicht genug Klarheit bei allen Mathematikern. Das Buch „Große Mathematiker“ spricht von den „Arabern“, wie man es zu Zeiten Delambres tat, und behandelt als solche „Araber“ den Verfasser der ältesten arabisch geschriebenen Algebra, nämlich den Chwārizmī Muhammad b. Mūsā, ferner den persischen Mathematiker, Philosophen und Dichter Omar al-Chayyām. Ich verstehe auch nicht, was der Verfasser der „Deutschen Physik“ meint, wenn er sagt: „In der Vergangenheit gab es eine Physik der Araber“. Eine dem Wesen des arabischen Volks eigene Physik hat meines Wissens niemand entdeckt. Auch wenn man neuerdings von „islamischen“ oder „muslimischen“ Mathematikern spricht, so kann das irreführen, da unter den Mathematikern im Bereich des Islam der Religion nach auch Juden, Christen und „Heiden“, wie die Zoroastrier und Sābier, waren. Und bekanntlich leisteten gerade solche Nichtmuslime z. T. Hervorragendes. Wer entdeckt ohne weiteres in dem Astrologen Mā-shā'-allāh (d. h. „Was Allah will“), den der Kalife al-Manṣūr zusammen mit dem Perser Naubahz zum Leiter der Vermessungen bei der Gründung von Bagdad machte, den geborenen Manasse?

Die echten Araber vor und zu der Zeit Muhammads hatten eine für ein armes, mit der Natur ringendes Beduinenvolk bemerkenswerte Poesie mit strengen Versmaßen — durch

*) Großen Dank schulde ich Herrn Geheimrat E. Littmann in Tübingen, der mir die richtige Lesung und das Verständnis mehrerer nicht-mathematischer Stellen der S. 423—433 übersehten Schrift von Abū Naṣr erschloß.

Da ich Ende August 1939 zum Heeresdienst einberufen wurde, konnte ich einige Einzelheiten nicht erledigen. Insbesondere ist die S. 414 berührte Untersuchung der Abfassungszeit der anonymen „Zusammenfassung“ nicht durchgeführt.

Hervlichen Dank sage ich Herrn Professor M. Krafft in Marburg, der die letzte Hand an die Arbeit legte und sich sehr sorgsam der Korrekturen annahm.

¹⁾ Delambre, Histoire de l'astronomie du moyen âge. Paris 1819.

²⁾ R. Vogel, Die mathematischen Leistungen der Semiten im Altertum und Mittelalter. 3. ges. Naturwiss. (1937), S. 88—91.

Rückert wurde sie weiteren Kreisen bekannt —; sie hatten, wenigstens in einzelnen ihrer Vertreter, ein stark ausgeprägtes religiöses Gefühl, aber sie besaßen keine Wissenschaft und keinen Trieb zur Wissenschaft, und auch die bildende Kunst fehlte. Zur Zeit, als in Indien Brahmagupta die Mathematik förderte, hatte in Arabien der Prophet Gottes Gesichte, infolge deren er seinen Volksgenossen Auferstehung, Höllenqualen und Paradiesesfreuden kündete, die Einheit Gottes einschärfte und sie später zum Kampf gegen die Ungläubigen entflammte. Die Araber kannten und benannten die Planeten und die Sternbilder, an die sie Mythen knüpften. Sie beobachteten bei ihren nächtlichen Reisen ihre Stellungen, aber es kam auch in einer städtischen Siedlung wie Mekka nicht zur Ausbildung einer Astronomie, wie bei den Babyloniern, von Griechen und Indern ganz zu schweigen. Der an die Beobachtung des Mondes anknüpfende Kalender trägt primitive Züge, und der Prophet machte einen unglücklichen Eingriff in diesen Kalender, indem er in der neunten Sure verbot, das aus zwölf Mondmonaten bestehende Jahr zu erweitern, sei es durch Schalttage, sei es alle zwei bis drei Jahre durch einen Schaltmonat^{2a)}. Als Muhammed anordnete, im Monat Ramadān, der infolge dieses Eingriffs in alle Jahreszeiten fallen kann, tagsüber zu fasten, während nachts das Schmausen und andere Genüsse erlaubt waren, hatte er keine Ahnung davon, wie sich diese Vorschrift für Bewohner nördlicher Gegenden oder gar der kalten Zone auswirken könne, und daß eine Zeit kommen würde, wo in Kasan muslimische Tataren täglich achtzehn Stunden fasten müssen, wenn der Ramadān in den Sommer, und nur sechs, wenn er in den Winter fällt. Ähnliches gilt für die Anordnungen über die täglichen Gebetszeiten. Auch hat sich kein echter Araber Gedanken darüber gemacht, daß die Dikla, die Gebetsrichtung nach Mekka, für einen Menschen, der sich auf der kugelförmig angenommenen Erde im Antipodenpunkt von Mekka befindet, lotrecht nach unten geht oder, als Tangente an den Großkreis, unendlichdeutig wird. Die klassische arabische Sprache besitzt keine Namen für die zur Messung der Zeit durch Rechnung, Wasser oder Sand dienenden Instrumente³⁾. Als die Araber die sie umgebenden Kulturländer eroberten, reichten ihre Zahlenbezeichnungen nicht für die zur finanziellen Verwaltung der eroberten Länder nötigen Rechnungen aus. Deshalb wurde in Syrien die griechische, in Ägypten die koptische Zahlenbezeichnung beibehalten. In einem Edikt vom Jahre 699 verbot der Kalife Walid zwar den Gebrauch der griechischen Sprache im öffentlichen Rechnungswesen, erlaubte aber den Gebrauch der griechischen Buchstaben als Zahlzeichen, da die arabische Sprache keine eigenen Zahlen(!) habe⁴⁾. Man halte dagegen das mächtig ausgebaute indische System der Zahlenbezeichnungen⁵⁾!

Nach einer hübschen Anekdote verkaufte bei der Einnahme und Plünderung von Ktesiphon ein Beduine einen unschätzbaren Edelstein für 1000 Drachmen. Auf die verwunderte Frage der anderen, wie er dies habe tun können, antwortete er, er hätte gern mehr verlangt, wenn er eine höhere Zahl als 1000 gekannt hätte⁶⁾.

^{2a)} Vgl. Enzykl. d. Islam, Artikel *Zamān*, IV, S. 1307—10.

²⁾ Vgl. das Wörterbuch von Lane unter *asfarlab* = Astrolabium.

³⁾ Vgl. Datta und Singh, *History of Hindu Mathematics I*, Lahore 1935, S. 88. Die Angabe ist nicht ganz in Ordnung, da Walid I erst 705 Kalife wurde.

⁴⁾ Der Untersuchung auf Alter und Herkunft wert erscheinen die arabischen Bruchbezeichnungen mit Hilfe von Stammbrüchen, z. B. $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, $\frac{8}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10}$. Vgl. W. Wright, *A Grammar of the Arabic Language*, 3. Aufl., I, Cambridge 1896, S. 264. Siehe auch M. Cantor, *Vorl. über Gesch. d. Math.* I, 3. Aufl. (1907), S. 718.

⁵⁾ S. z. B. Frantz Buhl, *Das Leben Muhammeds*. Deutsch von H. H. Schaeder, Leipzig 1930, S. 53. In diesem Buch findet man vieles über die Kultur der Araber vor und zu der Zeit Muhammeds.

Was später im Kalifenreiche und seinen Nachfolgestaaten in arabischer Sprache in Anknüpfung hauptsächlich an griechische, persische ⁷⁾ und indische Wissenschaft an Werken in arabischer Sprache geschrieben wurde, ist überwiegend die Leistung von Nichtarabern. Griechen und Syrer übersetzten die Werke der griechischen Wissenschaft z. T. unmittelbar aus dem Griechischen, z. T. über das Syrische in die arabische Sprache, die sich durch ihren Wort- und Formenschatz als bildungsfähig und zur Sprache der Wissenschaft geeignet erwies. Syrer waren auch produktive Forscher, insbesondere die Sābier von Harran ⁸⁾, wie Ṭābit b. Qurra (834–901) und al-Battānī (* vor 858, † 929). Um was für Menschen es sich rassistisch bei diesen „Syrern“ gehandelt hat, wird im einzelnen schwierig zu sagen sein. Harran z. B. hat in hellenistischer Zeit viel griechisches Blut aufgenommen. Als Ṭābit b. Qurras siebter und achter Vorfahr in der aufsteigenden Linie werden uns ein Marinus und dessen Vater Meleagros genannt. „In der Mitte des zehnten Jahrhunderts n. Chr. gab es noch in Harran eine syrische Familie, aus deren Mitte zwei Mitglieder das Oberpriesteramt verwalteten, und welche sich Bene-Heraqlisch, also Heracliden nannten“ ⁹⁾. Ehmolfsohn glaubt hieraus schließen zu dürfen, „daß sich bei manchen unter den Harranern noch im zehnten Jahrhundert das Bewußtsein ihrer griechischen Abstammung erhalten habe“. Der Schluß auf die Abstammung erscheint mir nicht zwingend, da in hellenistischer Zeit auch bei Nichtgriechen griechische Namen Mode werden konnten. Daß die Sābier griechische Werke der Philosophie und Mathematik, der Astronomie und der Medizin aus den Quellen studieren konnten, dürfte daran liegen, daß ihre geistige Oberschicht griechische Sprache und Wissenschaft seit der hellenistischen Zeit ununterbrochen gepflegt hat, ebenso wie die „heidnische“ Religion der Sābier, die sie in Konflikt mit dem Islam brachte, bei dieser Oberschicht starke Bestandteile hellenistischer Philosophie und Religion, wie den Monothéismus, aufweist. Ehmolfsohn nimmt für Harran semitische Urbevölkerung an, glaubt aber (I 312), „daß zugleich arische Stämme, die an der nördlichen und östlichen Grenze der Gegend von Harran ansässig waren und es z. T. noch jetzt sind, sehr frühzeitig einen religiösen Einfluß auf die Urbewohner Harrans ausgeübt haben.“ Alle diese Fragen bedürfen noch der Klärung im Lichte neuer Forschung und ihrer Methoden.

Daß der Philosoph und Mathematiker al-Kindī († nach 870) von arabischer Abstammung war, fiel bekanntlich seiner Zeit selbst auf, und man nannte ihn zum Unterschied von seinen vielen nichtarabischen Genossen den „arabischen Philosophen“ ^{10) 11)}.

⁷⁾ Die vorislamische persische Wissenschaft bedarf weiterer Erforschung. Es gab persische astronomische Tafelwerke, und es kommen z. B. die im Arabischen gebräuchlichen Wörter *ziğ* (= astronomisches Tafelwerk) und *auğ* (= Apogäum) aus dem Persischen. *auğ* ist nach al-Bīrūnī, *Taḥṭīm* S. 89 ursprünglich ein indisches Wort. In dem arabisch geschriebenen Werk des im Jahre 1938 verstorbenen vielseitigen italienischen Orientalisten und bekannten al-Battānī-Herausgebers E. Nallino, *ʿIlm al-falak* (Gesch. d. Astron. bei den Arabern im Mittelalter), Rom 1911, findet man viel Stoff über die „arabische“ Astronomie und ihre national-arabischen, persischen, indischen und griechischen Wurzeln. Vgl. die Besprechung durch Euter in *Bibl. Math.*, 3. Folge, 12 (1912), S. 277–282. — Siehe auch E. Nallino, *Tracce di opere greche giunte agli Arabi per trasila pehlevica*. A Volume of Oriental Studies presented to E. G. Browne, ed. by T. W. Arnold and R. A. Nicholson, Cambridge 1922, S. 345–383.

⁸⁾ D. Ehmolfsohn, *Die Sābier und der Sābismus*. I, II. Petersburg 1856.

⁹⁾ Ehmolfsohn I, S. 381.

¹⁰⁾ De Boer, *Gesch. d. Philos. im Islam*. Stuttgart 1901, S. 90.

¹¹⁾ Besonderer Untersuchung bedarf noch der Anteil der Juden an „arabischer“ Mathematik und Astronomie. Bei verschiedenen arabisch schreibenden Mathematikern und Astronomen ist ihre jüdische Herkunft bekannt. Auch die Rolle der jüdischen Mathematiker im Osten darf nicht unterschätzt werden. Saḥad (Euter: „Sind“) b. ʿAlī scheint unter den Astronomen al-Maʿmūn eine leitende Stellung eingenommen zu haben. Er machte als wissenschaftlicher Begleiter einen Heereszug dieses Kalifen gegen Byzanz mit und maß bei dieser

Der größte Teil der „arabischen“ Mathematiker, Physiker, Astronomen und Geographen waren Iranier, ebenso wie diese als Historiker, Grammatiker, Koranausleger, Mediziner und Philosophen hervorragende Werke in arabischer Sprache schufen. Sie knüpften in leidenschaftlichem Drang an die griechische Wissenschaft an, wie sie auch andererseits schon durch die Verwandtschaft ihrer Muttersprache die gegebenen Vermittler indischer Wissenschaft waren. „Wäre die Wissenschaft selbst an den Seiten des Himmels aufgehängt, wahrlich, Leute aus dem Perservolk würden sie doch erreichen.“ So lautet nach Ibn Haldūn berühmter Muqaddama¹²⁾ ein Hadīṭ, d. h. ein angeblicher Ausspruch des Propheten. Daß dieser Hadīṭ entstehen konnte, ist ein Beweis für die Erkenntnis, daß die Perser „gleichsam den Sauerteig des neuen großen Reiches in wissenschaftlicher Beziehung bildeten“. Bei der großen Zahl iranischer Wissenschaftler besteht kein Zweifel, daß das arische Blut den Hauptantrieb zur Liebe und Pflege der Wissenschaft gab¹³⁾, so schwierig auch hier in Einzelfällen die Entscheidung über die cassische Zugehörigkeit sein mag.

Iranier im engeren oder weiteren Sinne waren insbesondere die an der Ausbildung der sphärischen Trigonometrie beteiligten Astronomen. Von den für die Entdeckung des Sinusgesetzes in Frage kommenden Männern war Abu'l-Wafā'¹⁴⁾ (940—998) aus Būzurgān im Gebiete von Nisāpūr und wirkte in Bagdad, al-Hugandī¹⁵⁾ († um 1000) war aus Huganda in Transoxanien und wirkte in ar-Raiy, dem alten Rhaga.

Unser besonderes Interesse gilt dem Verfasser und dem Empfänger des weiter unten veröffentlichten „Sendeschreibens“. Der Fürst Abū Naṣr Maṣṣūr b. 'Alī b. 'Irāq¹⁶⁾ 17) (um 1000) entstammt dem alten Geschlecht der Herrscher von Chwārizm, einem Lande am Unterlauf des Amu-Darya (Oxus) südlich des Aralsees (jetzt Bezirk Choresm der Usbekischen Sowjetrepublik). Die Ahnenfolge dieser Herrscher dieses uralten arischen Staates, die uns der Empfänger des Sendeschreibens, nämlich der Landsmann und Schüler von Abū Naṣr, al-Bīrūnī¹⁸⁾ (973—1048), in seinem inhaltsreichen chronologischen Werk¹⁹⁾ über-

Gelegenheit den Depressionswinkel des Meereshorizonts von einem hohen Berge Kleinasiens aus, um daraus die Krümmung der Erdoberfläche zu berechnen. Dies erfahren wir aus al-Bīrūnīs Tahdīd²⁰⁾. — Der Astronom Hallen gibt in seiner Ausgabe der Sphärik des Menelaos Gründe dafür an, daß wahrscheinlich auch der nicht gerade bescheiden auftretende „Westaraber“ Ġābir b. Aflah, der Geber des Mittelalters, Hebräer war. (Menelaus Sphaera. libri III, Oxonii 1758, S. (V)—(VI).) Man vergleiche übrigens Delambres beißende Beurteilung des Geber mit Cantors rühmender.

¹²⁾ Ausgabe Beirut 1879, S. 498. Vgl. Nallino, 'Ilm al-falak', S. 181.

¹³⁾ H. Suter (Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, Leipzig 1900, S. 206) suchte die Erklärung noch hauptsächlich in der Verschiedenheit der Glaubensrichtung.

¹⁴⁾ Suter¹³⁾, S. 71. Außer bei Suter findet man über die in diesem Aufsatz vorkommenden Verfasser und Werke auch Auskünfte in der Geschichte der arabischen Literatur von R. Broekmann (I Weimar 1898, II Berlin 1902, Supplement I, Leiden 1937, Suppl. II, Leiden 1938), in der Enzyklopädie des Islām, in der Enciclopedia Italiana und in der Introduction to the History of Science von G. Sarton, T. 1, Washington 1927; T. 2, Washington 1931.

¹⁵⁾ Suter¹³⁾, S. 74.

¹⁶⁾ Suter¹³⁾, S. 81.

¹⁷⁾ M. Krause, Die Sphärik von Menelaos aus Alexandria in der Verbesserung von Abū Naṣr Maṣṣūr b. 'Alī b. 'Irāq = Abhandl. Ges. Wiss. Göttingen, phil.-hist. Kl., 3. Folge, Nr. 17, Berlin 1938, S. 109 bis 118.

¹⁸⁾ Suter¹³⁾, S. 98—100. — H. Suter und E. Wiedemann, Über al-Bīrūnī und seine Schriften. Beitr. z. Gesch. d. Naturwiss. 60 = S.-B. physik.-med. Soc. Erlangen 52, 53 (1920/21), S. 55—96. — E. Sachau, Chronologie¹⁹⁾, Einleitung und Chronology¹⁹⁾, Preface.

¹⁹⁾ Chronologie orientalischer Völker von Al-Bīrūnī, hrsg. von E. Sachau, Leipzig 1878, Neudruck Leipzig 1923. — Übersetzung: The Chronology of Ancient Nations, translated and edited . . . by E. Sachau, London 1879.

liefern zu können glaubt, zeigt eine Kette arischer Namen für die Zeit vor der arabischen Eroberung, die nach al-Birūnī die alte, selbständige Kultur des Staates grausam vernichtete²⁰⁾. Das Chwārizmische, noch al-Birūnīs Muttersprache, war eine dem Persischen verwandte arische Sprache²¹⁾. Die große Liebe al-Birūnīs zu griechischer Wissenschaft mag sein Lehrer, der Menelaosbearbeiter Abū Naṣr, in ihm geweckt haben. Al-Birūnī bekämpft die selbstsüchtigen Verächter und fanatischen Feinde griechischer Philosophie. Mit seinem Landsmann aus älterer Zeit Muḥammad b. Mūsā, dem Verfasser der Algebra, teilt er die Kenntnis indischer Wissenschaft²²⁾. Obwohl al-Birūnī dem Arabischen als Sprache der Wissenschaft vor dem Persischen den Vorzug gibt, ist er ein seines Volkstums bewußter Iranier²³⁾; er ragt hervor durch seinen kritischen Geist und sein Verständnis für andere Völker und ihre Kulturen, vor allem aber durch seinen leidenschaftlichen Forschungstrieb. Ihn beschäftigte die Frage, ob die Erde ruht oder sich bewegt, und er veranlaßte den Christen 'Isā b. Yahyā, den Lehrer Ibn Sinās, über dieses Problem eine Schrift abzufassen, die leider nicht erhalten zu sein scheint. Scharfe Kritik an den astronomischen Fähigkeiten der Nationalaraber kann man zwischen den Zeilen seiner Ausführungen über ihre Behandlung des Mondlaufs durch rein sinnliche Beobachtung herauslesen. Die Art, wie die Araber den Anfang des Monats Ramaḍān durch Beobachtung des Neumondes feststellen, ergibt für verschiedene Orte verschiedene Tage. Aber der Prophet Gottes selbst soll ja, wie al-Birūnī sagt, erklärt haben: „Wir sind ein ungebildetes Volk“ (vgl. Chronology¹⁹⁾, S. 78 u. S. 336).

Die wissenschaftliche Arbeit der Forscher vom Schläge eines Abū Naṣr oder eines Birūnī trägt griechische und moderne Züge. Wir sehen selbständige Forschungsarbeit, aufgebaut auf wertvolle Werke der Antike und der Vorgänger aus jüngerer Zeit. Diese Werke werden genau zitiert. Behauptungen werden bewiesen. Eigene und fremde Beobachtungen werden streng registriert und auf ihre erkannten und möglichen Fehlerquellen kritisch untersucht. Welch ein Gegensatz zu der Scheinwissenschaft von Koranglehrten mit ihrer Stützung oft tendenziös erfundener Prophetenworte durch lange, selbstfabrizierte Ketten mündlicher Überlieferer!

Als kleinen Zug, der al-Birūnīs Forschungsdrang auf dem Gebiet der mathematischen Geographie kennzeichnet, bringe ich eine Stelle aus seinem noch unveröffentlichten Werk über geographische Ortsbestimmung²⁴⁾. Auf S. 112 dieser Schrift sagt er:

Am Tage, an dem ich diesen Abschnitt schreibe, nämlich am Dienstag, dem Neumond des Ġumāda II des Jahres 409 der Hīġra (d. i. am 15. Oktober 1018) war ich in Ġaifūr, einer Ortschaft seitwärts Kābul, als mich eine heftige Begierde trieb, die Breiten dieser Örtler zu beobachten, der ich geprüft (angefochten) werde durch etwas, von dem ich glaube,

²⁰⁾ Vgl. E. Sachau, Zur Geschichte und Chronologie von Khwārizmī. S.-B. Kais. Akad., phil.-hist. Kl. 73, 74, Wien 1873. — Siehe auch Sachaus Einleitung zu seiner Ausgabe der Chronologie¹⁹⁾.

²¹⁾ Die Chwārizmer kann man nicht als „Perser“ bezeichnen. Al-Birūnī, den Schōn und andere einen „Perser“ nennen, mußte nach eigenem Bericht das Persische erst lernen.

²²⁾ Al-Birūnī, der das Sanskrit beherrschte, Werke aus dem Sanskrit ins Arabische übersehte und mit den indischen Gelehrten persönliche Fühlung aufnahm, schrieb ein hochbedeutendes Werk über Indien, das E. Sachau herausgab und ins Englische übersehte: Al-Birūnī, India. Ed. by E. Sachau, London 1887; Al-Birūnī, India. Engl. Ed. by E. C. Sachau, 1. 2., London 1888.

²³⁾ Äußerungen in seinem nicht von ihm selbst niedergeschriebenen Altertums, der Drogenkunde, wird man mit Vorsicht aufnehmen müssen. Maßgebend für uns ist doch der Birūnī, wie er sich uns in den selbstgeschriebenen Werken seiner Mannesblüte gibt.

²⁴⁾ Kitāb fi taḥdīd nihāyat al-amākin li-taḥḥīḥ masaḥāt al-masākin. Istanbul, Fatih 3386.

daß Noah und Loth — Segen über sie! — nicht durch etwas ihm Gleiches angefochten wurden, während ich doch hoffe, der Dritte von ihnen beiden zu sein in der Erlangung der Barmherzigkeit Gottes und des Beistandes durch seine Gnade. Dabei verfügte ich nicht über ein Instrument für die Höhe und ich fand auch nichts an Materialien, womit es hätte hergestellt werden können. Da zeichnete ich auf der Rückseite des Rechenbrettes (taht al-hisāb) einen Kreisbogen, dessen Teile (Grade) in 6 Teile zu je 10 Minuten geteilt waren, und brachte ihn (den Kreisbogen) im Aufhängen an den Bleiloten (šawāqil) in die Schwebe²⁵⁾. Da war die Höhe (nämlich der kulminierenden Sonne) von Süden her $45^{\circ} 0'$, während die nach dem Tafelwerk von al-Battānī in der Waage auf $26^{\circ} 36'$ stehende Sonne die südliche Deklination $10^{\circ} 19'$ ²⁶⁾ hatte. Diese addierte ich zu der durch Beobachtung gefundenen Höhe, so daß es zusammen $55^{\circ} 19'$ gab. Das ist das Komplement der Breite, und die Breite selbst beträgt $34^{\circ} 41'$.

Ich glaube, eine vorsichtige Ironie aus der frommen Anspielung auf die in der islamischen Theologie hochwichtigen Straßpropheten Noah und Loth herausklingen zu hören. Al-Birūnī Zeitgenosse, der berühmte Koranausleger Tu'labī aus Nisāpūr, zählt in seiner beliebten Prophetengeschichte fünfzehn Vorzüge auf, durch die sich Noah unter den Propheten auszeichnet. „Eure frommen Propheten“, so läßt, wie ich meine, Birūnī durchblicken, „mögen noch so hervorragende religiöse Tugenden besessen haben, aber von meinem Forschungstrieb und meinen Forscherleiden wurden sie nicht beglückt und geplagt.“

Al-Birūnī bewegtes Leben und die Art, in der er wiederholt von den Schwierigkeiten und Hemmungen beim Streben nach seinen wissenschaftlichen Zielen und von seinen Kämpfen gegen unwissenschaftliche Zeitgenossen zum Leser spricht, erinnert ein wenig an geistige Kämpfernaturen wie Kepler und Galilei.^{26a)}

2. Vom Bogensinus und Vierseit zum Winkelsinus und Dreieck.

In seinem Almagest führt Ptolemäus bekanntlich jede sphärisch-astronomische Berechnungsaufgabe, die wir durch sphärische Dreiecke lösen, auf ein aus Großkreisbögen gebildetes vollständiges Vierseit zurück und löst alle Aufgaben mit Hilfe einer einzigen für das Vierseit gültigen Formel, des sog. Sağes des Menelaos. Die in dieser Formel auftretenden sechs Stücke sind die Sehnen der doppelten Werte von Bögen der Figur. Bezeichnen wir einen Kreisbogen mit b , so ist also Chord $2b$, d. h. die Sehne des verdoppelten Bogens b , die einzige hierbei verwandte „trigonometrische“ Funktion. Daß sie abhängig vom Halbmesser r ist, tritt solange zurück, als es sich um Kreise vom selben Halbmesser handelt. Das am meisten kennzeichnende Merkmal dieser antiken Kugelrechnung sehe ich darin, daß nur Funktionen von Bögen, also von Seiten sphärischer Figuren benutzt werden, nicht aber von Winkeln. Wenn Ptolemäus einen Winkel berechnen will, z. B. den von der Ekliptik

²⁵⁾ Es handelt sich zweifellos um ein behelfsmäßig hergestelltes Instrument zur Messung der Sonnenhöhe im Meridian. Die Einrichtung im einzelnen ist mir allerdings nicht ganz deutlich. Zweifel erweckt die angegebene Genauigkeit der Teilung.

²⁶⁾ Ich habe die nötigen Tabellenrechnungen mit Interpolationen an Hand der al-Battānī-Ausgabe von E. Nallino ausgeführt und komme ebenfalls zu dem Ergebnis $10^{\circ} 19'$. Es kommen bei meiner Rechnung Angaben der Seiten 19, 20, 21, 22, 82, 57, 53, 23 von Bd. II der genannten Ausgabe zur Anwendung.

^{26a)} Inzwischen erschien der Aufsatz von M. Krause, „Al-Biruni“. Der Islam 26 (1940) S. 1—15.

mit dem Meridian gebildeten (*Almag.* Buch II, Kap. 10), so muß er sich für seine Lösungsfigur einen Bogen verschaffen, der den gesuchten Winkel mißt. Er beschreibt zu diesem Zwecke auf der Kugeloberfläche um den Scheitelpunkt des gesuchten Winkels als Mittelpunkt „einen Kreis, der die Seite des Quadrats“ (d. h. des einem Großkreis eingeschriebenen Quadrats) zum Halbmesser hat²⁷⁾. Auch für die über den Satz des Menelaos hinausgehenden Formeln der sphärischen Berechnungskunst der Griechen, so wie sie uns Menelaos im dritten Buch seiner *Sphärik* erhalten hat, bleibt es unumstößliches Gesetz, daß nur die Sehnen von Bögen von Kugelfreisfiguren, nicht aber Funktionen von Winkeln vorkommen. Alle Formeln sind Seitenformeln, und die Griechen hatten also zwar eine Geometrie, nicht aber eine Berechnungskunst des nackten sphärischen Dreiecks.

Es soll hier nicht ausgeführt werden, daß hinter dieser griechischen Rechnungsweise nach sphärischen Formeln eine ältere, primitivere Technik der Lösung von Aufgaben der sphärischen Astronomie stehen muß. Diese ältere Methode — ich nenne sie die direkte Methode — arbeitete ohne Formeln über sphärische Figuren. Sie konstruierte einfach die Sehnen der bekannten und unbekannten Bögen oder der doppelten Werte der bekannten und unbekannten Bögen und erhielt hierdurch eine geradlinige stereometrische Figur, an der sie nach geometrischen Sätzen die bekannten Strecken aus den unbekannten gewann. Voraussetzung für die rechnerische Handhabung dieser Methode war natürlich das Vorhandensein einer Tafel der Sehnen. Die Schrift des Ptolemäus „Über das Analemma“ ist ein sicherer Beleg dafür, daß diese direkte Methode noch in hellenistischer Zeit sowohl graphisch wie rechnerisch benutzt wurde. Übrigens blieb die direkte Methode ja auch nötig, um die Formeln der sphärischen Methode, also die Seitenlehrsätze, zu beweisen.

Die Art, wie die arabisch schreibenden Mathematiker und Astronomen des Mittelalters mit Begeisterung die „trigonometrischen“ Methoden der Indier und der Griechen pflegten und ausbauten, geht nach verschiedenen Richtungen. In der direkten Methode, die wir z. B. bei al-Kindī, al-Māhānī (etwa 825–880), bei al-Battānī und bei al-Bīrūnī gepflegt sehen, werden ebenso wie die Griechen auch die Indier die Lehrmeister gewesen sein. Während man von Letzteren neue Funktionen, insbesondere Sinus und Cosinus übernahm, gab andererseits das Studium des Ptolemäus und des Menelaos immer wieder den Anstoß, die Sehnenfunktion und den Satz des Menelaos anzuwenden. So löst Ibrāhīm b. Sinān b. Tābit († 946) nach der sphärischen Rechenmethode des Almagest Aufgaben über ebene Sonnenuhren, für die sein Großvater Tābit b. Qurra²⁸⁾ 29) Lösungsformeln aufgestellt hatte, die auf Benutzung der direkten Methode schließen lassen. Auch an neue Aufgaben, wie die Berechnung der Dikla (der Gebetsrichtung) für einen Ort von bekannter Länge und Breite bei zugleich gegebener Länge und Breite von Mekka, ging man auf die eine oder andere Weise heran.

Mögen nun die Mathematiker und Astronomen im Bereich des Islam in bezug auf Umfang, Mannigfaltigkeit und Genauigkeit noch so viel Fortschritte erzielt haben, so bleibt doch für uns in der „Trigonometrie“ die Hauptfrage: Haben diese sog. „Araber“ über die

²⁷⁾ Dieses auch den „Arabern“ geläufige Verfahren finden wir z. B. von Abū Naṣr angewandt in dem weiter unten vorgelegten „Sendeschreiben“ (428, 17–20, d. h. Seite 428 Zeile 17–20 meiner Übersetzung).

²⁸⁾ R. Garbers, Ein Werk Tābit b. Qurra's über ebene Sonnenuhren. Quell. u. Stud. 3. Gesch. d. Math., Astr. u. Physik, A, 4, Berlin 1936.

²⁹⁾ P. Luchey, Tābit b. Qurra's Buch über die ebenen Sonnenuhren. Quell. u. Stud. 3. Gesch. d. Math., Astr. u. Physik, B, 4, Berlin 1937, S. 95–148. — Gegenstände jener Arbeit führt der vorliegende Aufsatz weiter. Manchen Fragen konnte ich dort mehr nachgehen, auch findet man dort weitere Literaturangaben.

Rechnungsmethoden der Griechen hinaus wesentlich Neues gebracht? Daß die wichtigste Funktion jetzt der indische Sinus wurde, ist nichts Umrwälzendes. Der Sinus eines Bogens b — ich schreibe $\sin b$ — ist wie die Sehne eine vom Halbmesser r abhängige Linie, nämlich das Lot von einem Endpunkt des Bogens b auf den Halbmesser zu seinem anderen Endpunkt, oder, was dasselbe ist, der Sinus ist die halbe Sehne des doppelten Bogens: $\sin b = \frac{1}{2} \text{Chord } 2b$. Da wir die Griechen in sphärischen Rechnungen auch mit $\text{Chord } 2b$ arbeiten sehen, und der vor der Funktion stehende Zahlenfaktor sich z. B. im Menelaosatz weghebt, da auch eine Sehnentabelle durch Kopfrechnung als Sinustabelle verwendbar war, solange man den „ganzen“ oder „größten“ Sinus, den Sinus totus, d. h. den Radius r wie in der griechischen Sehnerechnung gleich 60 setzte, so war für die „Araber“ der Übergang von der Sehnerechnung zur Sinusrechnung und umgekehrt eine leichte und oft geübte Sache.

Viel bedeutsamer war es, daß man die längst bekannte, aber auf die gnomonische Praxis beschränkte Schattenfunktion *Tangens* zu einem analytischen Hilfsmittel für sphärische Rechnungen machte. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist bekanntlich Abu 'l-Wakā' der erste, der diesen Schritt durch Aufstellung der „Schattentregel“ tat. Aber auch diese Schattenfunktion wird zunächst als Funktion des Bogens betrachtet.

Eine wirklich umwälzende, selbständige Leistung der Mathematiker im Bereich des Islam ist es aber, daß man um das Jahr 1000 Formeln zwischen den Funktionen von Seiten und Winkeln des Kugeldreiecks aufstellte, insbesondere den sphärischen Sinusatz. An die Stelle des schwerfälligen vollständigen Vierseits des Menelaosatzes tritt jetzt das Dreieck und an die Stelle von 6 Stücken in der Menelaosformel treten nur 4. Hier haben wir die Geburts der eigentlichen sphärischen „Trigonometrie“ oder sphärischen Dreiecksrechnung. Das nackte sphärische Dreieck ist eine einfachere Figur als das vollständige Vierseit, und doch hat dieses nackte Dreieck 6 Stücke, die 3 Seiten und die 3 Winkel, und das Ziel kann werden, zwischen je vieren dieser Stücke eine Formel zu finden.

Hier eröffnen sich alle Ausichten auf die moderne sphärische Trigonometrie und zugleich Ausichten auf die modernen geometrischen Prinzipien der Dualität und der Reziprozität. Denn zum Polardreieck führt nun ein natürlicher Weg. Die von den Griechen noch nicht gestellte Aufgabe, aus den Winkeln eines sphärischen Dreiecks seine Seiten zu berechnen, legt es nahe, auf der Kugel in der oben gekennzeichneten griechischen Weise die Bögen zu konstruieren, die „vom Betrage“ der gegebenen Winkel sind. Diese Bögen aber, hinreichend verlängert, bilden das Polardreieck. Tatsächlich gelangten die „Araber“ durch diese Aufgabe zum Polardreieck. Das sieht man nicht erst bei al-Tūsī²⁰⁾ (S. 107–108 = S. 197–198) vollzogen, sondern schon vor ihm in der anonymen „Zusammenfassung“ (496–50a), von der weiter unten die Rede sein wird.

Man vergegenwärtige sich auch, daß nach Einführung des Winkelsinus das Doppelverhältnis der Sinusse der Abschnitte einer Punktreihe auf einem größten Kugelkreis sich als gleich dem Doppelverhältnis der Sinusse der entsprechenden Winkel am Scheitel eines zu der Punktreihe perspektiven Büschels erwies, eine für das Dualitätsprinzip grundlegende Wahrheit, die schon einer der Entdecker des sphärischen Sinusatzes, Abū Naṣr, angeregt durch die Sphäritik des Menelaos, für die Kugeloberfläche erkannte und anwandte²¹⁾. Erst Guder mann²²⁾

²⁰⁾ H. Carathéodory, *Traité du quadrilatère*. Constantinople 1891.

²¹⁾ Vgl. Luchten²³⁾, S. 140.

²²⁾ Siehe auch meine Besprechung der Menelaosausgabe von M. Krause im *Jb. über d. Fortschr. d. Math.* 63 I (1937), S. 9–11.

²³⁾ J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, V, 2. Aufl., S. 169.

benußte in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts diesen bequemen Satz erneut, um die schon den Griechen bekannte Invarianz des Doppelverhältnisses auf der Kugel zu beweisen.

Die Wandlung von der antiken zur modernen sphärischen Rechnung hat hiernach als erstes entscheidendes Kennzeichen den mehr oder weniger bewußten Entschluß, neben den Sinüssen der Bögen auch die Sinüsse der Winkel der sphärischen Figuren heranzuziehen und mit den Sinüssen dieser Winkel zu einer Arbeitsweise zu gelangen, die nicht mehr jedesmal mit Ptolemäus den Bogen beschreibt, der das Maß für diesen Winkel ist. Es erhebt sich also auf dem Gebiet der terminologischen Forschung die Frage: Wann und wo spricht man zum ersten Male in Sätzen über sphärische Figuren neben den Sinüssen von Bögen auch schlechtweg von den Sinüssen von Winkeln?

Im Zusammenhang damit ist das zweite entscheidende Kriterium für den Durchbruch der neuen sphärischen Rechnung die Frage: Arbeitet man mit Dreiecken?

Zunächst und vor allem erscheint es mir nützlich, daß untersucht werde, wie sich in bezug auf diese beiden Kriterien die Männer verhalten, die von einem sachkundigen Zeitgenossen als die Entdecker des sphärischen Sinussatzes bezeichnet wurden. Bekanntlich streifen nach dem Zeugnis von al-Birūnī die Astronomen Abu'l-Wakā', Abū Naṣr und al-Huḡandī um den Ruhm, diesen grundlegenden Satz entdeckt zu haben.

Der verehrte Forscher, dem diese kleine Arbeit in Dankbarkeit gewidmet ist, sagt in der zweiten Auflage des fünften Bandes seiner von uns so hoch geschätzten Geschichte der Elementarmathematik (S. 136), es werde kaum festgestellt werden können, wer der eigentliche Erfinder des sphärischen Sinussatzes war. Mag dies für die Zeit Eutera³⁴⁾ und 3. T. auch noch für die Jetztzeit zutreffen, so besteht doch die Hoffnung, daß noch viel neues Licht auf diese Frage fällt. Man bedenke, daß noch so manche arabische und persische mathematische und astronomische Handschriften in den Bibliotheken des Morgen- und Abendlandes schlummern, die teils erst ungenügend untersucht, teils nur dem Titel nach bekannt sind und teilweise — besonders was die Schätze der morgenländischen Bibliotheken betrifft — überhaupt noch nicht aufgefunden sind. Vor allem ist es natürlich wichtig, neben Schriften aus später Zeit, wie dem bekannten Werk von al-Tūsī³⁵⁾ über den Transversalsatz³⁶⁾, die Werke der oben genannten drei Entdecker selbst, ferner die Werke ihrer Zeitgenossen und etwaigen Vorläufer nicht nur auf die Formulierung und Herleitung, sondern auch auf die Anwendung des Sinussatzes hin zu untersuchen, und zwar so, daß möglichst die vollständigen Texte und ihre Übersetzungen vorgelegt werden. In neuerer und neuester Zeit sind wir hierin schon merklich weitergekommen. Abgesehen von der Veröffentlichung von Zeugnissen al-Birūnīs, zu denen sich hoffentlich bald Neues gesellen wird, insbesondere eine einwandfreie Ausgabe seines Mas'ūdischen Kanons, ist zu nennen die Übersetzung, die 1926 Schön³⁷⁾ aus einer Kairiner Sammelhandschrift: „Verschiedene geometrische Probleme“ (*masa'il handasiya mulafarriqa*) von einer kleinen Schrift des Huḡandī gab. Hieran reiht sich die von D. Schirmer 1927 bearbeitete Schrift von Huḡandī über die Bestimmung

³⁴⁾ H. Euter, Zur Trigonometrie der Araber. Bibl. Math., 3. Folge, 10, S. 157.

³⁵⁾ Ich gebrauche den schon von v. Braunnühl, Euter und anderen verwandten Ausdruck „Transversalsatz“, obwohl er, wie ich bereits an anderer Stelle²⁹⁾ (S. 110) bemerkte, den arabischen Ausdruck für den Satz des Menelaos schlecht wiedergibt. Obendrein findet man den Ausdruck „Transversalsatz“ in der modernen geometrischen Literatur für einen anderen Lehrsatz verwandt. Vgl. H. Liebmann, Der Transversalsatz usw. (S.-B. math.-nat. Abt. Bayer. Akad. Wiss., München 1937, Heft I, S. 59–62), wo unter „Transversalsatz“ der Satz verstanden wird, nach welchem sich die seitenhalbierenden Extraversalen eines Dreiecks in einem Punkte schneiden.

³⁶⁾ Jfis (Bruges) 8 (1926), S. 255–263.

der Elliptizität und der Ortsbreite auf Grund von Beobachtungen, die dieser Astronom in ar-Raiy mit seinem riesigen Meridianinstrument, dem *Fahr-Sextanten*³⁷⁾, machte. Vor allem aber ist die oben³⁷⁾ erwähnte Menelaosausgabe des Abū Naṣr von Krause zu nennen. Diese Ausgabe enthält eine große Zahl von Stellen, in denen der arabische Bearbeiter die Sätze des Menelaos mit Hilfe des Sinussatzes einfacher und schöner beweist³⁸⁾. Die genaue Aussonderung und Untersuchung dieser Stellen harret noch eines Bearbeiters.

Weitere Aufschlüsse gibt ein kompulatorisches Werk eines unbekannten Verfassers, das nach Inhalt und Aufbau als älteres Gegenstück zu at-Tūsī's Schrift über den Transversalsatz anzusprechen ist. Dieses bisher noch nicht bearbeitete Werk führt den Titel: „Zusammenfassung der Regeln der astronomischen Wissenschaft“³⁹⁾. Unter „Regeln“⁴⁰⁾ (*qawānīn*, Mehrzahl von *qānūn*, von dem griechischen κανών) der astronomischen Wissenschaft sind gebrauchsfertige Formeln für sphärische Berechnungen zu verstehen, wie z. B. der Transversalsatz, der Sinussatz, die Tangentenregel. Die Schrift, die ich im folgenden wiederholt heranziehen und dann kurz die „Zusammenfassung“ nennen werde, ist teilweise eine fast wörtliche Wiedergabe älterer Quellschriften.

Wichtig für die Geschichte der Trigonometrie ist die Frage, wann die „Zusammenfassung“ verfaßt wurde. Die einzige vorliegende Handschrift wurde, wie in ihren Schlußworten gesagt ist, im Jahre 1235 n. Chr. abgeschlossen. Damals war der vielseitige at-Tūsī erst 34 Jahre alt. Im Vorwort nennt der unbekannte Verfasser unter den Werken über sein Thema, die er nun alle zusammenfassen will, als jüngste die „Schlüssel der astronomischen Wissenschaft“⁴⁰⁾ von al-Birūnī und eine Schrift von al-Birūnīs Zeitgenossen Kūṣyār b. Labbān, also Werke von Männern, die in der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts starben, während at-Tūsī nach eigener Erklärung noch ein Werk seines eigenen Zeitgenossen as-Sālār für die Behandlung des Transversalsatzes weitgehend benutzt. Man darf also mit der Möglichkeit rechnen, daß die „Zusammenfassung“ schon im 11. Jahrhundert verfaßt wurde, oder wenigstens lauter Gegenstände enthält, die schon in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts bekannt waren. Das wäre bedeutsam, denn obwohl diese Schrift, wie wir noch sehen werden, primitivere Züge trägt, als diejenige von at-Tūsī, so leitet sie doch schon (46b—47a) für das rechtwinklige sphärische Dreieck neben Formeln aus 4 Stücken sämtliche 6 Fundamentalformeln mit 3 Stücken (vgl. Tropfke³²⁾ S. 131) ab. Auch alle Fälle der Berechnung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke aus 2 Stücken und schiefwinkliger sphärischer Dreiecke aus 3 Stücken erörtert und löst die „Zusammenfassung“.

In der Einleitung sagt der Verfasser, daß sein Werk für die Bibliothek „unseres allerhöchsten Schutzherrn, des gelehrten, des gerechten, des siegreichen, der Stütze des Reichs und der Religion, des Abū Naṣr Maṣṣūr b. Muḥammad, des Freigelassenen des Fürsten der Gläubigen“ bestimmt sei. Es ist zu untersuchen, ob mit jener Persönlichkeit etwa Abū Naṣr Maṣṣūr b. Muḥammad, 'Amīd al-Mulk (d. h. Stütze des Reichs) al-Kundurī,

³⁷⁾ S.-B. pḥḥṣṣ. med. Soc. Erlangen 58 u. 59 (1928), S. 33. — Vgl. Lüdén²⁹⁾, S. 135.

³⁸⁾ Vgl. Lüdén²⁹⁾, S. 140 und Lüdén³²⁾, S. 10.

³⁹⁾ *Ġamī' qawānīn 'ilm al-hai'a* (Seray 3342, I; 54 Blätter). Auf diese Schrift wies zuerst M. Krause hin (Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math., Astr. u. Physik, B, 3 (1938), S. 511). Seine Vermutung, das Werk sei wahrscheinlich von as-Sālār (13. Jahrhundert), widerrief er später (Islam 26 (1938), S. 89). Herrn Prof. H. Ritter in Istanbul bin ich zu großem Dank für Überlassung von Phototypen dieser Stambuler Handschrift verpflichtet.

⁴⁰⁾ Auch als „Schlüssel“ (*maṣāṭīḥ* oder *maqālīd*) bezeichnet das Werk in der Einleitung solche Formeln. Al-Birūnī gab bekanntlich einem Werke über diesen Gegenstand einen dahinlautenden, im übrigen verschieden überlieferten Titel. Vgl. Lüdén²⁹⁾, S. 128.

gemeint sein kann, der Wesir des im 11. Jahrhundert n. Chr. lebenden Seldschukenfürsten Tuğrilbeg⁴¹⁾. Der weitere Text der Einleitung und die historischen Quellenwerke können Anhaltspunkte geben.

Leider fehlt uns immer noch ein gründlicher Einblick in die Werke von Abu'l-Wafā'; vor allem wäre eine Ausgabe dessen erwünscht, was in Paris von seinem *Umagest*⁴²⁾ erhalten ist. Auch die Schriften von Kūsyār b. Labbān verdienen Beachtung.

Im folgenden (S. 423—433) lege ich nun als neue Quelle die Übersetzung eines kurzen Sendschreibens von Abū Naṣr an seinen Schüler al-Bīrūnī vor. Daß Abū Naṣr diese Schrift für al-Bīrūnī verfaßte, wissen wir aus dem eigenartigen Verzeichnis, das letzterer von seinen eigenen bis zum Ende des Jahres 1035, d. i. bis zu seinem 63. Lebensjahr erschienenen Werken aufstellte. Er fügt diesem Verzeichnis die Titel einer Reihe von Arbeiten bei, welche andere Gelehrte „in seinem Namen“ schrieben. An der Spitze dieser Liste stehen 12 Schriften seines Lehrers Abū Naṣr. Der erste dieser Titel lautet: „Sendschreiben über die Bestimmung der sphärischen Bögen nach einem Verfahren, das verschieden ist vom zusammengesetzten Verhältnis“⁴³⁾. Die einzige bisher bekannte Handschrift dieses Briefes, der im folgenden „Sendschreiben“ heißen soll, ist aus dem Jahre 631 der Hīgra (= 1233—34 n. Chr.) und befindet sich unter Nr. 2519,2 in der Orientalischen Öffentlichen Bibliothek zu Bankipore (Patna) in Indien⁴⁴⁾.

Dieser Brief von Abū Naṣr dürfte seine erste, dem sphärischen Sinusatz und dessen Anwendungen ausdrücklich gewidmete Schrift sein und gewinnt unser besonderes Interesse als eine Art Streitschrift gegen Abu'l-Wafā' in der Frage der Priorität der Entdeckung des sphärischen Sinusatzes. Abu'l-Wafā' hatte das leider bisher nicht aufgefundene Werk des Abū Naṣr „Über die Uzmute“ kritisiert und gesagt, Abū Naṣr arbeite darin noch mit dem alten Transversalenatz, wogegen seine eigenen Verfahren in seinem „Umagest“ geschickter, leichter, bequemer und schöner seien. Wir wissen, daß neben anderen Hilfsmitteln, insbesondere der Tangententregel, hier besonders an den sphärischen Sinusatz für das beliebige Dreieck zu denken ist, den Abu'l-Wafā' in seinem *Umagest* brachte. Bürger und Kohl⁴⁵⁾ haben

⁴¹⁾ Herr A. v. Bulmerincq in Tübingen macht mich freundlichst auf diese mit allem Vorbehalt ausgesprochene Möglichkeit aufmerksam. Ich konnte die Untersuchung bisher nicht durchführen.

⁴²⁾ Vgl. Carra de Vaux, *L'Almageste d'Abū'l-wafā' Albūzjāni*. J. asiatique, 8. sér., 19, Paris 1892, S. 408—471.

⁴³⁾ Vgl. E. Sachau, *Chronologie*¹²⁾, S. XXXVII. — Siehe auch Suter und Wiedemann¹⁸⁾, S. 79.

⁴⁴⁾ Das Vorhandensein dieser Handschrift wurde meines Wissens zuerst bekannt durch das von Herrn Hāsim an-Nadwī hergestellte Verzeichnis *Taḍkirat an-nawādir min al-ḥuṣūf al-'arabiya* (Merkschrift der Seltenheiten unter den arabischen Handschriften). Haiderabad 1350 H = 1931—32 n. Chr. Vgl. auch Bd. 22 des Handschriftenkatalogs von Bankipore, den ich bisher nicht einsehen konnte.

Die Übersetzung (weiter unten S. 423—433), die auch die genaue Überschrift des „Sendschreibens“ zeigt, machte ich auf Grund einer handschriftlichen Kopie, die mir Herr Muhammad 'Utmān von der Bibliothek in Bankipore anfertigte. Außer diesem Herrn gilt mein besonderer Dank Herrn Prof. D. Spies in Breslau und Herrn Bibliothekar Maas 'Ad 'Alam Nadwī in Bankipore für wiederholte Vermittlung und Auskünfte. Leider waren meine verschiedenen lebhaften Bemühungen, eine Photokopie der Handschrift zu erlangen, bisher erfolglos. Ich muß deshalb vorläufig auf Herstellung einer Textausgabe, auf eine getreue Wiedergabe des Figurenbesandes der Handschrift und Anlegung eines Verzeichnisses der Sachausdrücke verzichten, in der Hoffnung, daß in nicht allzu ferner Zeit Photokopien von dieser und anderen wertvollen Handschriften aus Bankipore zugänglich werden. Im vorliegenden Fall berücksichtigten sich Fehler und Mängel im mathematischen Text und in den Figuren aus dem Verständnis des Inhalts.

⁴⁵⁾ Abhandl. z. Gesch. d. Naturwiss. u. d. Med. 7, Erlangen 1924, S. 63—64. Die Vermutung von Bürger und Kohl (S. 64), es dürfte sich nicht um ein beliebiges, sondern um ein bei B (Fig. 21 von S. 63) recht-

uns den Inhalt, leider aber nicht den Wortlaut dieses Beweises nach der Pariser Handschrift wiedergegeben.

Abū Naṣr verteidigt sich nun im „Send schreiben“ damit, daß er im 17. Lehrsatze des 2. Abschnitts seiner Schrift über die Azimute den sphärischen Sinussatz gebracht habe, allerdings nur für ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, da er im Rahmen jener Schrift keinen Anlaß gehabt habe, weiterzugehen. Worauf er mit den nun folgenden Bemerkungen über seine Nachfragen wegen der Behandlung des Problems des Azimuts der Qibla durch andere Gelehrte hinaus will, wird vielleicht klarer werden, wenn erst untersucht ist, wie Abū'l-Wafā' dieses Problem in seinem *Almagest* behandelt hatte⁴⁶⁾. Jedenfalls bestreitet Abū Naṣr nicht, daß Abū'l-Wafā' vor ihm selbst den sphärischen Sinussatz für das beliebige Dreieck in einer veröffentlichten Schrift, nämlich seinem *Almagest*, bewies und wohl auch benutzte. Dazu paßt gut die von al-Tūsi überlieferte Erklärung al-Birūnis, dem Abū Naṣr sei deshalb die Priorität zuzuerkennen, weil er diese Regel auf alle Fälle anwandte. Es spricht für die Pietät des Schülers, wenn er seinem Lehrer vor anderen den Vorrang gibt. Kann es aber als Kriterium der Priorität der Entdeckung eines Lehrsatzes anerkannt werden, daß einer diesen Lehrsatz als erster auf alle Fälle anwandte? Liegt nicht vielmehr in dieser Äußerung al-Birūnis zwischen den Zeilen das Eingeständnis, daß sein Lehrer Abū Naṣr die eigentliche, nämlich die zeitliche Priorität der Entdeckung nicht beanspruchen kann? Der Verfasser der „Zusammenfassung“ zählt eine Reihe von Beweisen des „den Transversalsatz ersetzenden Satzes“ auf. Hierbei mit einem Verfahren von Abū'l-Wafā' beginnend, sagt er (39b): *Man berichtet, er sei der erste derjenigen gewesen, die zur Erfindung dieses Lehrsatzes voranschrritten, und er brachte ihn in seinem Almagest.*

Nun ist es aber für uns erforderlich, die Bedeutung des Ausdrucks „der den Transversalsatz ersetzende Satz“ (*al-ṣakl al-muḡnī 'an al-qat'a*), kürzer „das Ersatztheorem“ (*al-ṣakl al-muḡnī*), genau ins Auge zu fassen. Meinten zu allen Zeiten alle Gelehrten damit denselben Satz, etwa den sphärischen Sinussatz für das beliebige Dreieck? al-Tūsi läßt im fünften Kapitel des fünften Buches erkennen, daß er unter dem Ersatztheorem diese zwischen den Sinussen der Seiten und der ihnen gegenüberliegenden Winkel eines beliebigen Dreiecks bestehende Proportion versteht, und er führt logisch klar aus, wie man diesen Satz zunächst für das rechtwinklige sphärische Dreieck beweist, um ihn dann auf das beliebige Dreieck auszudehnen, das für den Beweis in offener oder versteckter Form in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird. Anders der primitivere Verfasser der „Zusammenfassung“! Was er im dritten Abschnitt über „den den Transversalsatz ersetzenden Satz“ bringt, ist eine anscheinend treu ausgeführte Sammlung verschiedener Theoreme, die zum Ersatz des Transversalsatzes dienen sollen. So ist das schon soeben genannte, als „Ersatztheorem“ des Abū'l-Wafā' von ihm an erster Stelle behandelte Verfahren nichts anderes als die Regel der vier Größen, nach welcher in der Abb. 1, die aus 4 Großkreisbögen besteht und bei h und g rechte Winkel hat⁴⁷⁾, die Proportion besteht:

$$\sin a d : \sin a b = \sin d h : \sin b g .$$

winkliges Dreieck handeln, ist unsinnig. Dann hätte Abū'l-Wafā' doch nur einmal die Regel der vier Größen anzuwenden brauchen. Er wäre sich auch darüber klar gewesen, daß vom Punkte A auf den Bogen BC nicht zwei verschiedene sphärische Lote AB und AI möglich sind.

⁴⁶⁾ Daß er es behandelte, wissen wir durch Carra de Vaur⁴²⁾, S. 425.

⁴⁷⁾ Der Einfachheit halber zeichne ich nur den Fall, in welchem dh und bg auf derselben Seite von a und die Scheitel g und h der rechten Winkel auf demselben Schenkel des Winkels a liegen.

Die „Zusammenfassung“ bringt außer von Abu'l-Wafā' noch von verschiedenen anderen Autoren, wie Kūsyār b. Labbān (etwa 971–1029 n. Chr.), al-Hugandī, Abū Naṣr, al-Birūnī, al-Hāzin⁴⁸⁾ († zwischen 961 und 971 n. Chr.), Ableitungen derselben Regel, die z. T. sehr nahe verwandt sind und alle das Gemeinsame haben, daß sie die behauptete Proportion nach Bildung der vorkommenden Sinusse durch direktes stereometrisch-geometrisches Verfahren beweisen. Meist läuft die Sache auf ähnliche Dreiecke hinaus. Manchmal — so bei dem ältesten der genannten Autoren, al-Hāzin — ist nur der Sonderfall $a b = a g = 90^\circ$ behandelt, durch dessen zweimalige Anwendung dann z. B. al-Hugandī in der Kaiserlichen Sammelhandschrift den allgemeinen Fall folgert.

Wir müssen Nachdruck darauf legen, daß dieses „Ersatztheorem“, die Regel der vier Größen, insofern noch in das Gebiet der antiken sphärischen Rechnung gehört, als es keine Winkelsinusse enthält und nicht ein Satz über das sphärische Dreieck ist. Bekanntlich tritt der Satz ja auch schon bei Menelaos (III, 2) in allgemeinerer Fassung auf. Nur daß Menelaos ihn aus dem Transversalen-satz deduzierte, während unsere „arabischen“ Autoren ihn direkt ableiten. Der ursprüngliche Sinn des Begriffes „Ersatztheorem“ wird also gewesen sein, daß zwar weiterhin mit Bogenfunktionen gearbeitet, aber der Satz des Menelaos mit seinen unangenehmen zusammengesetzten Verhältnissen vermieden werden sollte.

Zu den genannten Beweisen der Regel der vier Größen gesellen sich nun in demselben Abschnitt der „Zusammenfassung“ Beweise eines anderen „Ersatztheorems“, nämlich des „den Transversalen-satz vermittelst der Schatten ersetzenden Satzes“, kurz, des „Schatten-satzes“ oder der „Schattenregel“, nach welcher in Abb. 1 gilt:

$$\sin a h : \sin a g = \operatorname{Tg} d h : \operatorname{Tg} b g.$$

Auch diese Schattenregel, zu der die „Zusammenfassung“ Beweise von Abu'l-Wafā', Kūsyār und Abū Naṣr beibringt, gehört nach unserer Begriffsfestlegung in die alte sphärische Rechnung mit Bogenfunktionen und entspricht bekanntlich Menelaos III, 3. Freilich sind wiederum diese „arabischen“ Beweise solche nach der direkten geometrischen Methode und vermeiden also den Menelaos-satz; ferner ist, wie schon erwähnt, die aus der Onomonik altbekannte Schattenfunktion und ihre zugehörige Tabelle hier zum Hilfsmittel einer Formel sphärischer Rechnung erhoben worden.

⁴⁸⁾ Nach der „Zusammenfassung“ scheint es, daß al-Hāzin die Regel der vier Größen nicht nur bei der Lösung einer speziellen Aufgabe, sondern als allgemeine Regel besaß. Meine früheren Ausführungen über „jene ausgezeichneten“ (Puckner²⁰⁾, S. 130) stützten sich auf die unkritische Ausgabe von Carathéodory²⁰⁾. Man müßte auf die Handschriften zurückgehen und berücksichtigen, daß der arabische Text aus dem Persischen übersetzt ist. — Bei dieser Gelegenheit ergänze ich die Anm. 22 von S. 110 meiner genannten Arbeit²⁰⁾ dahin, daß insofern doch ein Unterschied zwischen an-Nairizi und Ptolemäus besteht, als Ptolemäus nur Zahlenrechnungen bringt, während nach Choŋqa Übersetzung die Oiblaschrift von an-Nairizi die Regel der vier Größen für die Bögen einer speziellen Figur in Buchstaben hat, indem aus der Menelaosformel $\sin TH$ gegen $\sin TU$ weggehoben wird, weil $TH = TU = 90^\circ$ ist.

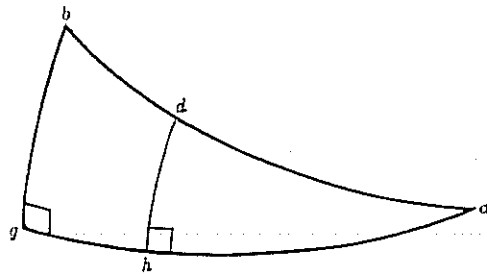


Abbildung 1.

At-Tūsi hat, wie gesagt, das Wort „Ersatztheorem“ dem sphärischen Sinussatz vorbehalten, während er für die Gesamtheit der neuen Theoreme, also für dieses Ersatztheorem, seine Anhängsel und die Tangententregel den zusammenfassenden Ausdruck „die an die Stelle des Transversalsinussatzes tretenden Elemente“ (*uṣūl taqṭiṣ . . . maqām as-sakl al-qattā'* C. A9 = C. 115) gebraucht.

Unter den eben genannten Verweisen, die die „Zusammenfassung“ zur Regel der vier Größen bringt, verdient unsere besondere Aufmerksamkeit ein Beweis von Abū Nasr und ein solcher seines Schülers al-Bīrūnī. Der Beweis von Abū Nasr hat folgenden Zusatz: *Und wenn $a b$ (Abb. 1) ein Viertelkreis ist, so ist $b g$ das Maß (qadr) des Winkels $b a g$, und der Sinus des Viertelkreises $a b$ ist der Halbmesser $b h$, der gleich dem Sinus des rechten Winkels $a h d$ ist⁴⁹⁾. Infolgedessen ist dann das Verhältnis des Sinus von $a d$ zu dem Sinus von $d h$ gleich dem Verhältnis des Sinus des Winkels $a h d$ {, der gleich dem Sinus von $a b$ ist,} zu dem Sinus des Winkels $h a d$ {, d. h. dem Sinus von $b g$. . .}. Wenn man das vom Verfasser zur Erläuterung Hinzugefügte, das ich in geschweifte Klammern einschließe, wegläßt, so sieht man den Sprung in die moderne Trigonometrie vollzogen. Es ist von den Sinussen von Winkeln die Rede, und der Satz ist ein Dreiecksatz, nämlich der Sinussatz*

$$\sin a d : \sin d h = \sin a h d : \sin h a d$$

für das bei h rechtwinklige Dreieck $a h d$. Noch knapper heißt es in der „Zusammenfassung“ am Schluß eines der Beweise von al-Bīrūnī in bezug auf ein bei n rechtwinkliges sphärisches Dreieck $b n z$:

Also ist das Verhältnis von { z , } dem Sinus des Bogens $b z$, zu { $z l$, } dem Sinus des Bogens $z n$, gleich dem Verhältnis von { $a d$, } dem Sinus des rechten Winkels n , zu dem Sinus des Winkels $z b n$. . .

Hier wird deutlich, wie die Regel der vier Größen das Sprungbrett zum Sinussatz für das rechtwinklige sphärische Dreieck wurde. Der Verfasser der „Zusammenfassung“ scheint seine Quellen getreuer wiederzugeben als at-Tūsi. Letzterer bringt bei jedem Gewährsmann, z. B. auch bei dem alten Hāzin (C. 110–111 = C. 150–151), den Beweis der Regel der vier Größen schließlich auf die Form des Sinussatzes für das rechtwinklige Dreieck. Diese bei at-Tūsi zu beobachtende Überführung der Regel der vier Größen in den speziellen Sinussatz halte ich für spätere angleichende und die historischen Unterschiede verwischende Überarbeitung. In der „Zusammenfassung“ hat der Beweis des Hāzin noch die schlichte Form der Regel der vier Größen mit Bogensinussen. Dasselbe gilt für den Beweis von al-Hugandī.

Was letzteren Astronomen und seine Ansprüche auf die Entdeckung des „Ersatztheorems“ betrifft, so ist mir überhaupt aus der eigentlichen Quellenliteratur kein Beweis von ihm für den wirklichen Sinussatz für das rechtwinklige, geschweige für das schiefwinklige sphärische Dreieck bekannt. Wie in der „Zusammenfassung“, so ist auch in der Kairiner Sammelhandschrift⁵⁰⁾ sein Beweis nicht ein solcher für den Sinussatz, sondern für die Regel der vier Größen. An anderer Stelle⁵¹⁾ habe ich (C. 135) gezeigt, wie al-Hugandī nach Ende des Jahres 994 bei einer praktischen Gelegenheit nicht daran denkt, den Sinussatz, ja nicht einmal die Regel der vier Größen anzuwenden, sondern eine direkte Lösung seiner Aufgabe bringt, in welcher ein Beweis der Regel der vier Größen steckt. Nach der Einleitung der „Zusammen-

⁴⁹⁾ Ich verbessere eine kleine Unstimmigkeit des Textes und passe die Buchstaben meiner Abb. 1 an. In dieser ist der Kugelhalbmesser $b h$ nicht gezeichnet.

fassung" soll al-Hugandi sein fragliches Erfsatztheorem in einem Werke mit dem Titel „Schrift über die in der Nacht verfloffenen Stunden“ gebracht haben. Dieses Werk scheint bisher unbekannt und verloren gegangen zu sein. Al-Hugandi war ein hervorragender praktischer Astronom. Daß er aber den echten sphärischen Sinussatz zuerst gefunden habe, erscheint mir unwahrscheinlich.

Nachträglich verhält sich der Verfasser der „Zusammenfassung“ in bezug auf den Sinussatz für das schiefwinklige Dreieck. Nachdem er die Regel der vier Größen, den ihr entsprechenden Sinussatz für das rechtwinklige Dreieck und die Tangentenregel gebracht hat, behandelt er den allgemeinen Sinussatz als „die andere Art des den Transversalenatz ersetzenden Satzes“. Dieser Kompilator scheint im Gegensatz zu at-Tūsī das logische Verhältnis zwischen seinen „Erfsatztheoremen“ nicht erfaßt zu haben.

At-Tūsī sagt (S. 160 = S. 163), daß nach Abū Naṣr's Zeugnis schon Tābit b. Qurra über ein den Transversalenatz ersetzendes Theorem geschrieben haben soll. Gegen al-Bīrūnī, der Kūsyār als Erfinder des Namens „Erfsatztheorem“ nenne, führt at-Tūsī aus, daß schon Abū Naṣr, an Tābit anknüpfend, diesen Ausdruck gebrauchte, und dies finden wir in M. Krause's Ausgabe¹⁷⁾ des Menelaoswerks (z. B. 65, 15; 65, 19) bestätigt. In unserem „Sendšreiben“ kommt der Ausdruck noch nicht vor. Vielleicht ist Abū Naṣr derjenige, der dem in der Bedeutung schwankenden Ausdruck „Erfsatztheorem“ den eindeutigen Sinn des Sinussatzes gegeben hat.

Wenn wir als entscheidendes Kriterium für die moderne Trigonometrie die Aufstellung einer wirklichen Dreiecksformel, nämlich des Sinussatzes, und damit im Zusammenhang den Gebrauch des Ausdrucks „Sinus eines Winkels“ hinstellen, und bei Abū Naṣr diese beiden Kriterien sowohl in dem hier vorgelegten Sendšreiben wie in seiner Menelaosausgabe offenkundig erfüllt sehen, so bleibt noch etwas darüber zu sagen, ob er diese Änderung der Sprache und Methode radikal durchführte, ganz zu schweigen von der Frage, ob er der Änderung dieselbe Bedeutung und Tragweite beimißt, wie wir. Wir finden bei ihm noch mancherlei Anklänge an die alte, keine Dreiecke benutzende Auffassung. Diese liegt vor, wenn er nach der „Zusammenfassung“ (41a, Z. 9) (Abb. 1) bg als die *Deklination (mail) des Bogens ab* und dh als die *Deklination des Bogens ad* bezeichnet, ganz wie das auch al-Hugandi tut, während Abū'l-Wafā' dh in Abb. 1 die erste Deklination von ad und die zweite Deklination von ah nennt⁵⁰⁾.

Mit dem Begriff „Deklination“ (*mail*) arbeitet Abū Naṣr auch in seinem „Sendšreiben“ bei der uns gerundeten erscheinenden Formulierung seines zweiten, aus dem Sinussatz gefolgerten Theorems

$$\cos a : \cos gb = \sin g : \sin b$$

für das bei b rechtwinklige Dreieck abg . Wir verweisen hierzu auf unsere Erläuterungen des Letzten. Schließlich arbeitet ja noch at-Tūsī mit dieser *mail*-Vorstellung.

Der alten Sprache gehört ferner die Überschrift des Sendšreibens (423, 2—8) an. Abū Naṣr sagt, er wolle sphärische Bögen berechnen, die einen aus den anderen. In Wirklichkeit berechnet er in der Schrift sowohl Bögen wie Winkel aus Bögen sowohl wie Winkeln.

Besonders reizvoll erscheint es mir, wie zögernd im Sendšreiben der Ausdruck „Sinus eines Winkels“ gewagt wird. In den beiden ersten Beweisen des Sinussatzes heißt es schwerfällig: *Sinus des Bogens, der vom Betrage (bimiqdār) des Winkels g ist*. In dem dar-

⁵⁰⁾ Vgl. Fußn. 23), S. 130—131, wo auch auf die entsprechende Terminologie bei al-Bīrūnī hingewiesen ist. Auch der Gebrauch von *mail* = Deklination in Abū Naṣr's Menelaosbearbeitung¹⁷⁾ ist zu beachten.

auf (S. 427, 10–39) dargebotenen anderen Beweise für das rechtwinklige Dreieck ist aber einfach vom Sinus des Winkels abd und vom Sinus des Winkels adb die Rede. Sollte dieser *aliter*-Beweis eine spätere Hinzufügung des Verfassers sein? S. 429, 21 steht vielleicht: Sinus des Komplements des Winkels. . . Im übrigen finden wir aber auch bei den Anwendungen immer die umständliche Ausdrucksweise. In seiner Ausgabe der Sphärik des Menelaos spricht Abū Naṣr in den nicht-griechischen Zusätzen auf Schritt und Tritt einfach vom Sinus eines Winkels.

Nach der Einleitung der „Zusammenfassung“ soll Abū Naṣr die „Regeln der Astronomie“ in einer Schrift „Die Reinigung der Mathematik“ (*taḥḍīb at-ta'ālīm*) behandelt haben. Es wäre anziehend, diese bisher nicht aufgefundene Schrift hinsichtlich der genauen Zeit ihrer Abfassung und hinsichtlich ihres Inhaltes²¹⁾ und terminologischen Verhaltens kennenzulernen²²⁾.

Die Redeweise Sinus des Bogens $= h$, der vom Betrage (*bimiqdār*) des Winkels a oder des Winkels b a g ist, begegnet uns auch in der „Zusammenfassung“ bei der Wiedergabe von Beweisen von al-Bīrūnī und Kūṣyār. Wie schon bemerkt, heißt es ebenda in einem Zusatz zu einem Beweise von Abū Naṣr: bg ist das Maß (*qadr*) des Winkels bag .

Aus dem, was Delambre, Garra de Vaug und Bürger und Kohl uns über das Vorkommen des eigentlichen sphärischen Sinusbegriffes bei Abū 'l-Wafā' berichten, vermag ich keinen sicheren Einblick zu gewinnen, wie dieser Forscher, dem wir die zeitliche Priorität der Entdeckung zuerkennen zu müssen glauben, sich hinsichtlich der terminologischen Formulierungen verhält, insbesondere ob er wie Abū Naṣr schlechtweg vom Sinus eines Winkels spricht. Der weiteren Forschung bleibt es vorbehalten, hier Klarheit zu bringen, ebenso wie man beim Studium der Schriften der vorhergehenden Zeit darauf achten müssen wird, ob der Terminus „Sinus eines Winkels“ etwa schon in früherer Zeit gewagt wurde. Es liegt nahe, daß dieser Ausdruck sich zunächst im mündlichen Gebrauch einschleichen konnte, als bequeme Vereinfachung des schwerfälligen „korrekten“ Ausdrucks Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels a ist.

Die schwere Frage, ob Abū Naṣr die Tragweite der von Abū 'l-Wafā' und ihm selbst eingeführten Neuerungen so übersehen oder ahnte, wie wir sie anschauen, wage ich nicht zu entscheiden. In seinem Sendschreiben scheint er es so darstellen zu wollen, als ob er wie sein Rivale in einem gewissen Sinne ja eigentlich nichts Neues bringe. Er gibt die Ehre den „Vorgängern“, nach deren Gedanken man zu dem gelange, was erreicht wird. Aber wir müssen bedenken, daß hier wohl ein wenig die polemische Absicht die Feder führt. Der ältere Mitbewerber soll sich nicht allzusehr brüsten. In der Menelaosausgabe weiß Abū Naṣr die großen Vorteile des Ersaßtheorems noch mehr als im Sendschreiben zu rühmen, und die zum Beweise von Menelaos III, 5 benutzte Zurückführung der Invarianz des Doppelverhältnisses perspektiver Punktreihen auf das Doppelverhältnis der Sinusse der Winkel am Scheitel

²¹⁾ Durch al-Bīrūnī wissen wir, daß sie sich auch mit einer Frage der Interpolation beim Tabellenrechnen befaßte. Vgl. Krause¹⁷⁾, S. 112.

²²⁾ Daß Abū Naṣr oder al-Bīrūnī es für notwendig hielt, den Begriff „Sinus eines beliebigen Winkels in einem geradlinigen Dreieck“ zu definieren, habe ich schon an anderer Stelle²⁰⁾ (S. 131) bemerkt. Auf den Sinusbegriff der Ebene, der im Interessentkreis der Mathematiker jener Zeit vor demjenigen auf der Kugel stark zurücktritt, gehe ich hier nicht ein. Al-Bīrūnī gibt bekanntlich in seinem Sendschreiben an as-Siğzī²⁴⁾ den Beweis von Abū Naṣr wieder und sagt von dem Satz, den er später auch im Mas'ūdīschen Kanon bringt, schon in seinem Jugendwerk, der im Jahre 1000 verfaßten Chronologie²²⁾ (Text S. 184, Übers. S. 160), daß demjenigen, der die Geometrie studiert, dieser Satz klar ist.

des Büschels zeigt, wie tief Abū Naṣr in den Nutzen der Einführung des Winkelsinus eingedrungen ist. (Vgl. oben S. 412.)

Vom Standpunkt der modernen Trigonometrie aus gesehen lösten sowohl die Griechen wie die „Araber“ ihre sphärisch-astronomischen Aufgaben mit beschränkten Hilfsmitteln. Beide mußten oft Hilfsgrößen berechnen, wo wir das Gesuchte durch eine direkte Formel aus dem Gegebenen finden können. Ptolemäus braucht nur den Menelaosatz, und eine weitere Beschränkung liegt für ihn darin, daß er es vermeidet, einen unbekannten Bogen b aus

$$\frac{\text{Chord } 2b}{\text{Chord } (2a - 2b)} = \frac{\sin b}{\sin(a-b)},$$

wenn a ein bekannter Bogen ist, zu berechnen, da diese Berechnung ihm zwar möglich, aber selbst in dem häufigen Falle $a = 90^\circ$ in Ermangelung der Tangensfunktion und ihrer Zahlentafel mühselig ist. Immerhin stecken bekanntlich in seinen Anwendungen des Menelaosatzes allein für das rechtwinklige Dreieck 4 unserer Dreigrößenformeln (vgl. *Tropfke*³³), S. 131). Demgegenüber konnten sich die „Araber“ zwar rühmen, den Ballast der zusammengesetzten Verhältnisse abgeworfen zu haben und an der Stelle einer Regel der 6 Größen eine solche von 4 Größen zu benutzen. Wenn aber, wie bei Abū Naṣr, das Bestreben war, mit einem einzigen „Ersatztheorem“, dem Sinusatz, und gewissen aus ihm zu folgernden Anhängeln auszukommen, so mußten sie am eigenen Leibe spüren, daß der Transversalsatz bei gewissen Aufgaben leistungsfähiger war und es möglich machte, eine unbekannte Größe unmittelbar aus zwei gegebenen Größen zu berechnen, während der Sinusatz dies nicht leisten konnte. Hierfür ist das „Sendeschreiben“ ein trefflicher Beweis. Abū Naṣr benutzt nur den Sinusatz und die beiden aus ihm gefolgerten Sätze

$$\text{(Formel I)} \quad \sin a g : \sin a b = \cos b g : \cos a,$$

$$\text{(Formel II)} \quad \cos a : \cos g b = \sin g : \sin b$$

für das bei b rechtwinklige Dreieck $a b g$.

Die *Formel II*, die Abū Naṣr allerdings sehr umständlich und altertümlich in Worte faßt, ist eine der 6 Beziehungen zwischen 3 von 90° verschiedenen Stücken des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, und zwar ist sie die Formel „*Tropfke 3*“. Mit dieser Bezeichnungsweise deute ich hier und später auf die Numerierung hin, die *Tropfke*³³) (S. 131) diesen Grundformeln gibt. Hierdurch, und weil ferner diese Formel bei Birūnī³²) und in der „Zusammenfassung“ in der normalen Fassung vorhanden ist, erscheint es nun so gut wie ausgeschlossen, daß dieser „Geberische Satz“, der nach Delambre die einzige selbständige Leistung des „Westarabers“ Gābir b. Aflah ist, wirklich auf dessen eigenem Boden gewachsen ist.

Die *Formel I* enthält 4 von 90° verschiedene Stücke und erweist sich als Ergebnis der Elimination eines Winkels aus den Formeln *Tropfke 3* und *Tropfke 5*. Sie soll auch bei Ibn Yūnus vorkommen (vgl. *Tropfke*³³) S. 133) und findet sich ebenfalls in der „Zusammenfassung“.

Abū Naṣr behauptet zwar am Schluß (S. 432, 3–4), daß er mit Hilfe dieser seiner Hilfsmittel alles das vollendet habe, bei dem Ptolemäus im *Almagest* den Transversalsatz und das zusammengesetzte Verhältnis anwandte. Bei genauem Zusehen — man vergleiche unsere Erläuterungen, in denen wir das Verfahren des Abū Naṣr dem des Ptolemäus gegenüberstellen — erkennt man aber, wie mühsam sich Abū Naṣr mit seinen beschränkten Hilfsmitteln manchmal durchwindet. Die Lösung der Aufgabe, die Breite φ aus der Azimutaldifferenz

d und der Aufgangswerte w zu berechnen, unterließ er, und bei anderen Aufgaben nahm er Umstellungen vor, um zunächst Hilfsgrößen zu berechnen. Er benötigte für manche Berechnungen drei gegebene Stücke, wo Ptolemäus mit nur zweien auskam. Auch die Formel aus *Almagest* Buch II, Kap. 7 (*Heiberg I*, S. 127, *Manitius I*, S. 88), in der der Satz *Menelaos III*, 3 und die Tangentenregel von Abu'l-Wafā' stecken, übergeht Abū Naṣr stillschweigend. Er rühmt sich — doch wohl gegenüber Abu'l-Wafā' — der Kürze seines Vorfahrens. Aber daß er die Tangentenregel und die schöne, nach Tarra de Bour⁴²⁾ (S. 423) bei Abu'l-Wafā' vorhandene Seitenformel⁴³⁾

$$\cos a c : \cos b c = \cos a b : \sin 90^\circ \quad (= \text{Tropfke I})$$

für das bei b rechtwinklige Dreieck meidet, muß wohl daran liegen, daß er den *Almagest* von Abu'l-Wafā' nicht auschreiben will. Die von ihm benutzte Vierstückeformel (*Formel I*) wird mit Recht bei at-Tūsī (S. 110 = S. 162) als nicht sehr nützlich bezeichnet, weil man hier drei von 90° verschiedene Stücke des rechtwinkligen Dreiecks kennen muß, um ein viertes zu berechnen.

Zu einer vollendeten sphärischen Dreiecksrechnung ist bekanntlich die „arabische“ Mathematik trotz der schönen, in der fruchtbaren Zeit von Abu'l-Wafā' und Abū Naṣr beginnenden Anfänge nie durchgedrungen. Den Kosinusatz fand sie nicht, die Tangens- und Kotangensfunktion nutzte sie nicht voll aus. Finden wir denn bei Gābir b. Aflah und at-Tūsī wesentliche, große Fortschritte? Und wenn man gar in ein kompulatorisches Werk später Zeit schaut, so findet man nur ersetzte Brocken und Trümmer dessen, wozu die schöpferische Zeit eines Abu'l-Wafā' und eines Abū Naṣr ansetzte. In einer 1745 geschriebenen Enzyklopädie von at-Thūnawī⁴⁴⁾ werden im Artikel über den Sinus (I, S. 191) in der alten Weise Sin, Cos, Sinvers usw. als Funktionen des Bogens behandelt und gegen Ende des Artikels heißt es: *Der Sinus des Winkels ist der Sinus eines Bogens, der der Betrag jenes Winkels ist.* Als „Ersatztheorem“ (I, S. 785) wird nur der Satz

$$\sin a b : \sin b c = \sin a c : \sin a$$

für ein Dreieck abc angegeben, in welchem $\angle c = 90^\circ$ und $\angle a < 90^\circ$ ist.

3. Übersetzung der arabischen Handschrift Banlipore 2519, 1.

In der nun folgenden Übersetzung ist alles in Klammern und in den Anmerkungen Stehende von mir zur Ergänzung oder zur Erläuterung hinzugefügt. Auch die Absätze rühren von mir her. In der mir vorliegenden Abschrift des Textes sind nur einige Absätze durch das Zeichen „:“ gemacht, das ich wiedergebe. Ferner sind einige Wörter wie „Eckthesis“, „Ich behaupte“, „Beweis hierzu“ rot überstrichen. Ich habe diese und außerdem einige andere Wörter, so auch die rot geschriebene Überschrift, durch Sperrdruck hervorgehoben.

Die 3. L. sehr mangelhaften Figuren meines modernen Kopisten getreu wiederzugeben, wäre wertlos gewesen. Ich ersetzte sie in möglichst enger Anlehnung an den Befund auf Grund des Textes durch die Abb. I bis VII, wobei ich bei Abb. VI wegen ihrer eigenartigen Ab-

⁴²⁾ Nach at-Tūsī⁴⁰⁾ (S. 117 = S. 168) wandten schon an-Nairizi und al-Hāzin diese Beziehung (in einem Einzelfall?) an.

⁴⁴⁾ A Dictionary of Technical Terms used in the Science of the Musalmans = Bibliotheca Indica 17; 1.2. Calcutta 1862.

weichung von der entsprechenden Figur des Ptolemäus meine Vorlage möglichst getreu kopierte. Die Abb. VIII gebe ich samt Erläuterung ihrer Stücke der Übersetzung bei, um deren Lesung zu erleichtern. Abū Naṣr hat diesen Gegenstand ohne Figur behandelt.

Die die Ecken der Figuren bezeichnenden arabischen Buchstaben gebe ich nach folgendem Schlüssel wieder, der die Zeichen zugleich in der bei den damaligen Mathematikern üblichen Reihenfolge des *Abjad* zeigt:

ا	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي	ك	ل	م	ن
a	b	g	d	h	w	z	h	t	i	k	l	m	n

س	ع	ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
s	c	f	p	q	r	š	t	ṭ	ḫ	ḏ	ḍ	ẓ	ġ

Dabei habe ich die bei den deutschen Arabisten gebräuchlichen Transliterationszeichen gewählt, jedoch mit folgenden drei Abänderungen:

Bei *ğ* lasse ich das diacritische Zeichen [˘] als für den vorliegenden Zweck überflüssig weg. Für *l* wähle ich *a* und für *ع* wähle ich *c*, weil die Zeichen [˘] und [˙] als mathematische Symbole ungeeignet sind.

Da die verschiedenen alten und modernen Übersetzer arabischer mathematischer Texte die arabischen Buchstaben in verschiedenster Weise wiedergeben und zwar fast immer, ohne den Schlüssel dazu mitzuteilen, so vermag man leider fast nie aus der bloßen Übersetzung zu ersehen, welcher arabische Buchstabe jemeilig zugrunde liegt. So mißlich für mathematische Zwecke die Transliterationsbuchstaben wegen der diacritischen Zeichen und der dem Unkundigen nicht geläufigen Reihenfolge des *Abjad* sind, so erscheint mir doch meine Anlehnung an die übliche Transcription das geringere Übel und ein Weg zur Vereinheitlichung zu sein⁵⁵⁾.

Im Namen Gottes des barmherzigen Erbarmers.

Bei ihm ist die Hilfe.

Sendschreiben

von Abū Naṣr Maṣṣūr b. 'Alī b. 'Irāq, dem Freigelassenen des Fürsten der Gläubigen⁵⁶⁾,

an Abu'r-Raiḥān Muḥammad b. Aḥmad al-Birūnī

5

darüber, wie man sphärische Bögen, die einen aus den anderen, nach einem Verfahren bestimmt, das verschieden ist von dem Verfahren ihrer Bestimmung durch den Transversalensatz⁵⁷⁾ und das zusammengesetzte Verhältnis.

Du, den Gott stärken möge, erwähnest, daß viele von denen, die nach der astronomischen Wissenschaft Begierde haben und es lieben, die Beweise dessen zu studieren, was die 10

⁵⁵⁾ Vgl. die Ausführungen von E. Sandz in Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math., Astr. u. Physik, B, 2, S. 81—97 und S. 101. Berlin 1932.

⁵⁶⁾ Nach Sachau, Chronologie⁵⁸⁾, S. XXXIII, Anm. 1, dürfte mit dem „Fürsten der Gläubigen“ der Samanidische Großkönig gemeint sein.

Tafelwerke³⁷⁾ an Hilfsmitteln der verzweigten Berechnungen enthalten, das von Ptolemäus angewandte (Verfahren), das meistens im Transversalsatz und im zusammengesetzten Verhältnis besteht, schwer finden, und daß du gern hättest, daß man dir zu allem, wobei er jenes (den Transversalsatz und das zusammengesetzte Verhältnis) anwandle, 5 Methoden der Beweise durch einen Lehrsatz zubereite, (der so beschaffen ist, daß), wer sie befolgt, nicht zu etwas gelangt, wovon und worin er Schwierigkeit findet. Da erschien nun die Schrift unseres Meisters Abu'l-Wafā' Muḥammad b. Muḥammad al-Būzajjānī für den Gelehrten Abū 'Alī al-Ḥubūbī³⁸⁾, in der er erwähnt, daß er über das meiste von meiner Schrift über die Azimute³⁹⁾ nachdachte und fand, daß ich darin das Ver- 10 fahren der Vorgänger befolge, darauf hinweisend, daß ich in den Beweisen dieser Schrift mit dem Transversalsatz arbeite, und darlegend, daß seine Verfahren, die er in dem von ihm verfaßten *Almagest* einschlug, geschickter, leichter, behender und schöner seien. Da beehrte ich denn infolgedessen noch eifriger, das zu erreichen, wozu du zu gelangen wünschest, und worüber du mich brieflich um meine Meinung fragtest. So machte ich es mir denn 15 zur Pflicht, dir deinen Wunsch zu erfüllen, und spende dir aus dem, was ich ergründet habe, etwas, von dem ich hoffe, daß es die Schuld dir gegenüber einlöst. Und jetzt ist es Zeit, daß ich hierüber anfangen.

Liegt auf der Fläche einer Kugel ein Dreieck, dessen Seiten (Stücke) von den größten der auf sie fallenden Kreise sind, so sind die Sinusse jener Seiten mit den Sinussen 20 der Bögen, die vom Betrage der von ihnen in dem Dreieck unterspannten Winkel sind, proportional.

*Ekthesis*⁴⁰⁾: Das Dreieck abg (Abb. I) liege auf der Fläche einer Kugel, und seine Seiten seien (Stücke) von den größten der auf sie fallenden Kreise.

Ich behaupte: Das Verhältnis des Sinus von ab zum Sinus von bg ist gleich dem Verhältnis des Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels g ist, zu dem Sinus des Bo- 25 gens, der vom Betrage des Winkels a ist.

Beweis: Wir stellen die Viertelkreise ad und gh her und ziehen vom Kugelmittelpunkt z nach den Punkten a, g, d, h die geraden Linien za, zg, zd, zh . Ferner ziehen wir vom Punkte b die beiden Sinusse bm und bl und vom Punkte h den Sinus des Bogens, der 30 vom Betrage des Winkels g ist. Dieser Sinus sei hh . Sind nun hh und bm parallel, so sind, da auch hz und bl parallel sind, die Flächen der beiden Dreiecke hzh und mbh parallel. Diese beiden schneidet die Fläche des Kreises ag . Also sind die beiden Dreiecke ähnlich. Also ist das Verhältnis von hh zu hz gleich dem Verhältnis von bm zu bl . hh steht senkrecht auf der Fläche des Kreises ag . Also steht auch bm auf ihr senkrecht. Nun

³⁷⁾ Das vom Schreiber falsch geschriebene Wort soll zweifellos *azyāḡ*, d. i. die Mehrzahl von *zāḡ* bedeuten. So bezeichnete man bekanntlich Werke wie das *Opus Astronomicum* von al-Battānī, das Tafelwerk des Ḥabāṣ und den *Almagest* von Abu'l-Wafā', Werke, die alle mehr oder weniger Um- und Weiterbildungen des *Almagest* von Ptolemäus sind.

³⁸⁾ Dieser Gelehrte ist mir in der mathematisch-astronomischen Literatur nicht begegnet. Nicht kann der im 12. Jahrhundert lebende Mathematiker al-Ḥubūbī (Suter¹³⁾ S. 197, Nr. 491, Brodelmann¹⁴⁾, Suppl. I, S. 857) gemeint sein.

³⁹⁾ Statt *fi's-sumūt* „über die Azimute“ hat meine Abschrift hier und an den späteren Stellen *fi's-samawāt* „über die Himmel“. Das ist sicher ein Schreiberfehler. In Zukunft übergehe ich offensichtliche Sinnlosigkeiten meines Textes wie z. B. 429, I, wo *miḡl* statt *maiḡl* steht und 430, 21, wo man statt *al-aḡṭār b al-arba'a* lesen muß *al-aḡṭāb al-arba'a*.

⁴⁰⁾ *miḡāl*. Die Bearbeiter des Codex Leidensis 399,1 (Kopenhagen 1893—1932) übersehen diesen Sachausdruck mit *exemplificatio*.

liegt aber $b m$ in der Fläche des Kreises $a d$. Also steht der Kreis $a d$ senkrecht auf dem Kreise $a g$, und der Winkel a ist ein rechter. Sein Sinus $d z$ ist gleich⁶¹⁾ $h z$. Also ist das Verhältnis des Sinus von $a b$ (nämlich $b m$) zu dem Sinus von $b g$ (nämlich $b l$) gleich dem Verhältnis des Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels g ist (nämlich $h h$), (zu dem Sinus des Bogens), der vom Betrage des Winkels a ist (nämlich $h z = d z$). ⁵

Ist $b m$ nicht parallel zu $h h$, so sind, da $b m$ auf dem Schnitt der beiden Kreise $a d$ und $a g$ senkrecht steht, diese beiden Kreise nicht aufeinander senkrecht. Auch ist dann der Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels a ist, nicht $d z$. Dieser Sinus sei $d s$. Ferner sei $b n$ die vom Punkte b parallel zu $h h$ nach der Fläche des Kreises $a g$ gehende

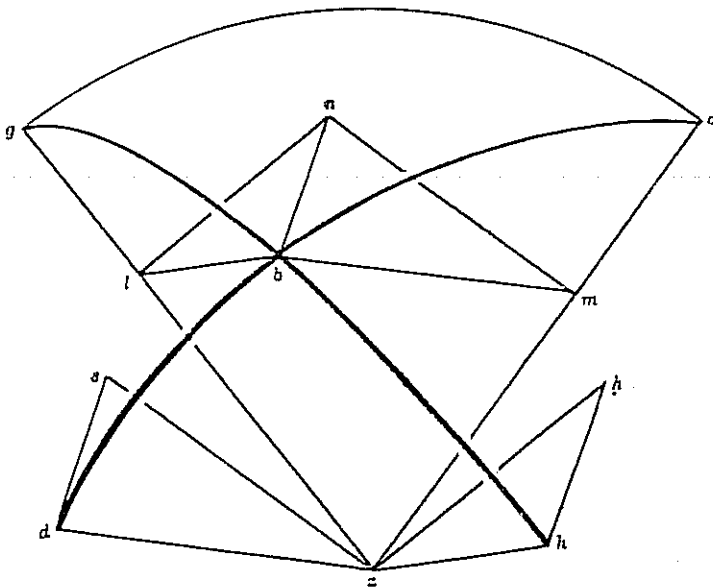


Abbildung I.

Linie. Da nun $b n$ zu dem auf der Fläche des Kreises $a g$ senkrecht stehenden $h h$ parallel¹⁰ ist, und $d s$ ebenfalls auf ihr senkrecht steht, so sind $b n$ und $d s$ einander parallel, und $d z$ und $b m$ einander parallel. Also sind die Flächen der beiden Dreiecke ($s d z$ und $n b m$) einander parallel. Diese beiden schneidet die Fläche des Kreises $a g$. Also sind die beiden Dreiecke einander ähnlich, und es ist das Verhältnis von $b m$ zu $b n$ gleich dem Verhältnis von $d z$ zu $d s$. Das Verhältnis von $h h$ zu $h z$ ist gleich dem Verhältnis von $b n$ zu $b l$,¹⁵ weil die beiden Dreiecke $h h z$ und $n b l$ bei dieser Sachlage parallel⁶²⁾ sind. Dabei sind $h z$ und $d z$ gleich. Also ist im Verhältnis der Gleichheit⁶³⁾ das Verhältnis von $b m$ zu $b l$ gleich dem Verhältnis von $h h$ zu $d s$. Und das wollten wir zeigen.:

Ebenso zeigt man, daß das Verhältnis des Sinus von $a b$ zum Sinus von $a g$ gleich ist dem Verhältnis des Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels g ist, zu dem Sinus 20

⁶¹⁾ Mein Text hat al-muṣārik statt muṣawīn.

⁶²⁾ mutawāziyain. Gemeint ist wohl mutawābiḥain = „ähnlich“.

⁶³⁾ Über den Ausdruck „im Verhältnis der Gleichheit“ siehe die Erläuterungen weiter unten S. 434.

des Bogens, der vom Betrage des Winkels b ist, und daß das Verhältnis des Sinus von a g zum Sinus von b g gleich ist dem Verhältnis des Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels b ist, zum Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels a ist.

Schon im zweiten Abschnitt der Schrift über die Azimute hatte ich einen Lehrsatz 5 gebracht, durch den dieses Theorem für ein Dreieck, von welchem (ein ⁶⁴⁾) Winkel ein rechter ist, bewiesen wird, obwohl ich das nicht erwähnte und die Behauptung darüber auch nicht in einer ihm entsprechenden Weise herausbrachte, weil dort das Ziel war, daß die Schrift dem Problem angepaßt wäre. Ich war aber davon ausgegangen, nach Be-
10 wiesen von Methoden der Berechnung für das Azimut der Qibla bei einer Anzahl von mir
erwähnter Gelehrten dieser Kunst (der Astronomie) nachzufragen. Dann stellte ich dadurch, daß ich nachfragte, fest, daß zu jenem das übrige hinzugefügt war (daß sich an jenes das

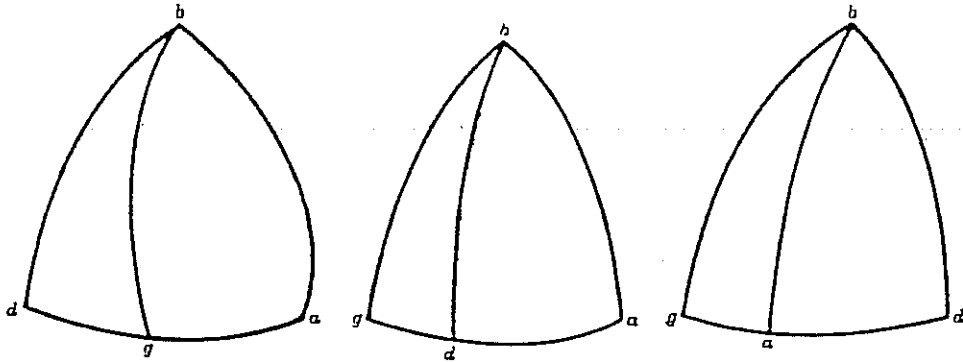


Abbildung II.

übrige anschoß?), was ich augenblicklich herausbringen (ableiten) kann von dem, was ähnlich den Methoden jener Gelehrten ist, von denen die meisten den Weg der Alten be-
schritten.

15 Wer jenen Lehrsatz studiert — ich glaube, es ist der siebzehnte Lehrsatz des zweiten Ab-
schnitts —, kann sich von der Aufrichtigkeit dessen, was ich jetzt sage und behaupte, überzeugen.

Nachdem dieses Theorem durch jene Figur (jenen Lehrsatz) in dem Dreieck bewiesen
ist, von welchem einer seiner Winkel ein rechter ist, beweisen wir es für alle übrigen
20 Dreiecke folgendermaßen:

Das Dreieck abg (Abb. II) (liege) auf der Fläche einer Kugel, und seine Seiten seien
(Stücke) von den größten der auf sie fallenden Kreise. Keiner seiner Winkel sei ein
rechter.

Ich behaupte: Das Verhältnis des Sinus von a b zu dem Sinus von b g ist gleich dem
25 Verhältnis des Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels g ist, zu dem Sinus des
Bogens, der vom Betrage des Winkels a ist.

Beweis: Wir ziehen durch den Punkt b und durch den Pol des Kreises a g einen Kreis,
der den Kreis a g im Punkte d trifft. Dann ist der Winkel d ein rechter, und aus dem,

⁶⁴⁾ Hier ergänze ich vor zawayahu das Wort ihda, wie es der Sinn verlangt und der Text zu 426, 19
auch hat.

was durch jenen Lehrsatz, auf den ich hinwies, klar ist, folgt also, daß das Verhältnis des Sinus von $a b$ zum Sinus von $b d$ gleich ist dem Verhältnis (des Sinus) des Bogens, der vom Betrage des Winkels (d) ist, zu dem Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels a ist, und daß das Verhältnis des Sinus von $b d$ zum (Sinus) von $b g$ gleich dem Verhältnis des Sinus des Bogens ist, der vom Betrage des Winkels g ist, zu dem Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels d ist. Also ist im Verhältnis der Gleichheit⁶⁵⁾ das Verhältnis des Sinus von $a b$ zum Sinus von $b g$ gleich dem Verhältnis des Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels g ist, zum Sinus des Bogens (,der) vom Betrage des Winkels a ist. Und das ist das, was wir (beweisen wollten⁶⁵⁾) .¹⁰

Ein anderes Beweisverfahren zu diesem Theorem für das rechtwinklige Dreieck ist leicht faßlich. Hierzu zeichnen wir wieder (Abb. III) das (beid rechtwinklige) Dreieck $a b d$.

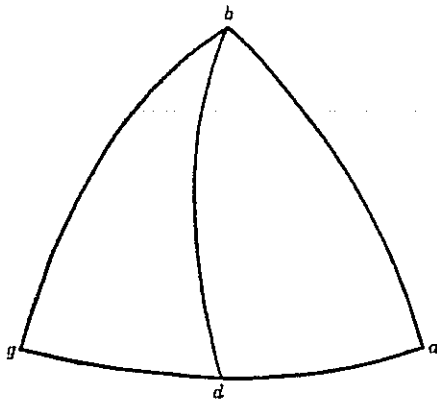


Abbildung III.

Wir machen (das Stück) $d g$ des Kreises $a d$ gleich $a d$ und ziehen durch die beiden Punkte b und g den Großkreis $b g$. Weil nun die beiden Winkel d einander gleich¹⁵ sind und $a d$ und $g d$ einander gleich sind und $b d$ gemeinsam ist, so ist $a b$ gleich $b g$ und der Winkel $a b g$ ist das Doppelte des Winkels $a b d$. Der Sinus von $a d$ ist die Hälfte der Sehne $a g$, und der Sinus des²⁰ Winkels $a b d$ ist die Hälfte der Sehne des Winkels $a b g$. Da aber $a b$ und $b g$ einander gleich sind, so ist die Sehne $a g$ das dem Winkel $a b g$ entsprechende (Stück) des Kreises, der auf der Kugel mit der²⁵ Sehne $a b$ als Abstand (um b als Mittelpunkt) gezogen wird, und das Verhältnis der Sehne des Großkreisbogens zu der

Sehne des entsprechenden Kleinkreisbogens ist gleich dem Verhältnis des Durchmessers zum Durchmesser. Der Durchmesser des Großkreises ist das Doppelte des größten Sinus,³⁰ und der Durchmesser des Kleinkreises ist das Doppelte des Sinus des Bogens, der den Kreis auf der Kugel mit seiner Sehne als Abstand beschreibt. So ist also auch . . .⁶⁶⁾ Also sind die Linien proportional, und es ist das Verhältnis des Sinus von $a b$ zum Sinus von $a d$ gleich dem Verhältnis des Sinus des Winkels $a d b$ zum Sinus des Winkels $a b d$. Verfügen wir bei diesem Lehrsatz das, was wir beim vorhergehenden Lehrsatz verfügten,³⁵ so wird im Verhältnis der Gleichheit⁶⁷⁾ gezeigt, daß das Verhältnis des Sinus des Bogens zum Sinus des Bogens in einem aus Groß(kreis)bögen bestehenden Dreieck gleich dem Verhältnis des Sinus des Winkels zum Sinus des Winkels ist, wie wir es vorher machten⁶⁷⁾. Und das wollten wir zeigen.⁴⁰

Folgendes sind auch zwei Mittel und Wege, obwohl man mit dem ersten (Hilfsmittel)⁴⁰ auskommt.

⁶⁵⁾ Die beiden letzten Wörter sind mir in meinem Text unverständlich.

⁶⁶⁾ Mein Text ist hier nicht in Ordnung.

⁶⁷⁾ Er meint, daß man wieder wie früher (427, I—9) den Satz für das allgemeine Dreieck durch zweimalige Anwendung des Sonderfalles für die rechtwinkligen Teildreiecke und nachfolgende Elimination beweisen kann.

Zur Vollendung unseres Ziels behaupten ⁶⁰⁾ wir dann: Liegt auf der Fläche einer Kugel ein Dreieck, dessen Seiten (Stücke) von den größten der auf sie fallenden Kreise sind, und ist einer seiner Winkel ein rechter, so ist das Verhältnis des Sinus der Seite, die den rechten Winkel unterspannt, zu dem Sinus jeder der beiden übrigen Seiten gleich dem Verhältnis des Sinus des Komplements der dritten Seite zu dem Sinus des Komplements des Bogens, der vom Betrage des Winkels ist, den die dritte Seite in dem Dreieck unterspannt.

Ekthesis ⁶⁰⁾: Das Dreieck abg (Abb. IV) liege auf der Fläche einer Kugel, und seine Seiten seien (Stücke) von auf sie fallenden Großkreisen. Der Winkel b sei ein rechter.

10 Ich behaupte: Das Verhältnis des Sinus von ag zu dem Sinus von ab ist gleich dem Verhältnis des Sinus des Komplements von bg zu dem Sinus des Komplements des Bogens, der vom Betrage des Winkels (a) ist.

Beweis: Wir machen den Punkt a zum Pol, beschreiben um ihn mit dem Abstand der Quadrat-
20 seite den Bogen dhh und ziehen bg zu ihm hin, bis es ihn im Punkte h trifft. Weil nun der auf dem Kreise ab liegende Punkt a der Pol des Kreises dhh ist, so
25 geht der Kreis dhh durch die beiden Pole des Kreises ab . Weil ferner der Winkel b ein rechter ist, so geht der Kreis $bggh$ ebenfalls durch die beiden Pole des Kreises ab .

30 Also ist der gemeinsame Punkt h der Pol des Kreises ad . Somit ist gh das Komplement von bg und hh das Komplement von dh , das vom Betrage des Winkels a ist. Die beiden einander gegenüberliegenden Winkel („Scheitelwinkel“) g sind einander gleich, und der Winkel h ist ebenso wie der Winkel b ein rechter. Also ist das Verhältnis des Sinus von ag zu dem Sinus
35 von ab gleich dem Verhältnis des Sinus von gh , das das Komplement von bg ist, zu dem Sinus von hh , das das Komplement von dh ist. Und das wollten wir beweisen. .

Ebenso zeigt man, daß das Verhältnis des Sinus von ag zu dem Sinus von bg gleich ist dem Verhältnis des Sinus des Komplements von ab zu dem Sinus des Komplements des Bogens, der vom Betrage des Winkels g ist.

40 Aus dieser Figur (Abb. IV) ersieht man auch folgendes: Liegt auf der Fläche einer Kugel ein Dreieck wie abg , so ist jeder seiner beiden spitzen ⁶⁰⁾ Winkel vom Betrage des Komplements der Deklination des Komplements der Seite, die ihn unterspannt, und zwar der Deklination, deren Höchstwert vom Betrage des zweiten spitzen ⁶⁰⁾ Winkels ist.

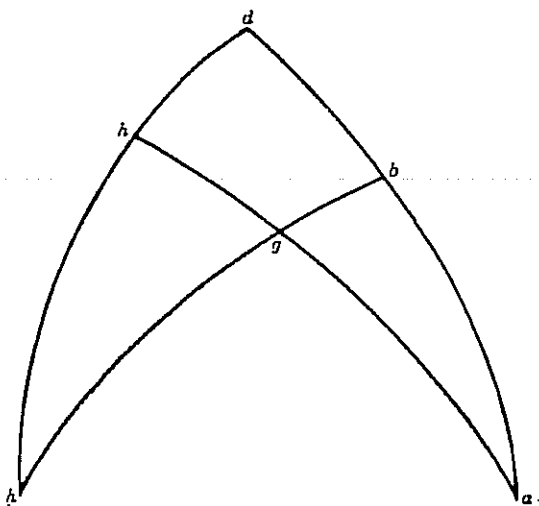


Abbildung IV.

⁶⁰⁾ Mein Lept hat statt „behaupten“ das Wort für „wiederholen“.

⁶⁰⁾ Er betrachtet also nur den Fall, daß der Hypotenuse zwei spitze Winkel anliegen.

Es ist nämlich $h h$ die Deklination von $g h$, welches seinerseits das Komplement von $b g$ ist, und zwar die Deklination, deren Höchstwert vom Betrage des Winkels g ist, und $d h$ ist das Komplement von $h h$; also ist der Winkel a vom Betrage des Komplements der Deklination des Komplements der Seite, die ihn unterspannt, und zwar der Deklination, deren Höchstwert vom Betrage des Winkels g ist. 5

Und wenn wir den Punkt g zum Pol machen und ebenso verfahren, wie bei dem Pol a , so zeigt sich das auch für den Winkel g . Das braucht man bei einigen Problemen.¹⁰

Da wir dies vorausgeschickt haben, nehmen wir wieder das Dreieck $a b g$ von dieser Figur (Abb. IV) und stellen uns vor, $a g$ sei (ein Stück) der Ekliptik und $a b$ (ein Stück) des Äquators. Dann ist $b g$ die Deklination von $a g$, weil der Winkel b ein rechter ist, und 10 es ist für uns klar, daß das Verhältnis des Sinus des Bogens von der Ekliptik zu dem Sinus seiner Deklination gleich ist dem Verhältnis des größten Sinus ($= \sin 90^\circ$) zu dem Sinus der größten Deklination⁷⁰). Es ist nämlich das Verhältnis des Sinus von $a g$ zum Sinus von $b g$ gleich dem Verhältnis des Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels b ist, zu dem Sinus des Bogens, der vom Betrage des Winkels a ist. 15

Auch ist klar, daß das Verhältnis des Sinus des Bogens von der Ekliptik zu dem Sinus seiner Rektaszension gleich ist dem Verhältnis des Sinus des Komplements seiner Deklination zum Sinus des Komplements der größten Deklination. Es ist nämlich (Abb. IV) das Verhältnis des Sinus von $a g$, das den rechten Winkel unterspannt, zu dem Sinus von $a b$ gleich dem Verhältnis des Sinus des Komplements der dritten Seite $b g$ zum 20 (Sinus des) Komplements des Winkels, den die dritte Seite unterspannt.

Stellen wir uns ferner (Abb. IV) vor, $a g$ sei (ein Stück) vom Horizont bei sphaera obliqua und der Punkt g sei der Aufgangspunkt eines beliebigen „Teils“⁷¹) von der Ekliptik, so wird ebenfalls offenbar sein, daß das Verhältnis des Sinus der Aufgangsweite des „Teiles“ von der Ekliptik zu dem Sinus seiner Deklination gleich ist dem 25 Verhältnis des größten Sinus zum Sinus des Komplements der Ortsbreite. Es ist nämlich das Verhältnis des Sinus von $a g$ zum Sinus von $b g$ so, wie wir zeigten.

Wenn (Abb. IV) $a g$ (ein Stück) des Horizontes und $a b$ (ein Stück) des Äquators ist, so ist der Winkel a vom Betrage des Komplements der Breite, und wenn das so ist, so ist $a b$ der halbe Unterschied zwischen dem Tag(bogen) des „Grades“⁷²) und dem 30 mittleren Tag(bogen)⁷³), und das Verhältnis des Sinus der Aufgangsweite $a g$ zum Sinus (von $a b$) ist gleich dem Verhältnis des Sinus des Komplements von $b g$, das vom Betrage der Deklination des „Teiles“ ist, zu dem Sinus der Breite, die das Komplement des Bogens ist, der bei dieser Annahme vom Betrage des Winkels a ist.

Wenn wir uns ferner bei der Bestimmung der Winkel vorstellen, $b g$ (Abb. IV) sei 35 (ein Stück) des Meridians und $a g$ (ein Stück) der Ekliptik und $a b$ (ein Stück) des Äquators, so ist, wenn $a g$ bekannt ist, auch $a b$ bekannt, weil es die Rektaszension von $a g$ ist. Der Winkel b ist bekannt, weil er ein rechter ist. Also wird der Winkel g bekannt sein.

Stellen wir uns (Abb. V) vor, $b g$ sei (ein Stück) des Horizonts bei sphaera obliqua, so wird auch $a b$ bekannt sein, wenn $a g$ und die Neigung der Sphäre bekannt sind. Aus der 40 Neigung der Sphäre wird der Winkel b bekannt sein, weil er vom Betrage des Komple-

⁷⁰) Die „größte Deklination“ ist die durch den zwischen Äquator und Ekliptik fallenden Polurbogen gemessene „Schiefe der Ekliptik“.

⁷¹) Ein „Teil“ (ḡuz) oder „Grad“ (daraḡa) der Ekliptik ist ein Punkt der Ekliptik. Der Name kommt daher, daß der Punkt durch die Zahl der „Grade“ oder „Teile“ gegeben ist.

⁷²) $a b$ ist also die „Ausgleichung des Tages (des Grades)“ und gleich der Azensiondifferenz.

ments ihrer Neigung ist. Also wird der Winkel g bekannt sein, und daraus wird die „Breite des Klimas des Anblicks“⁷³⁾ bekannt sein, weil der Winkel, unter dem sich die Ekliptik und der Horizont schneiden, vom Betrage des Komplements der Breite des Klimas des Anblicks ist . . .

- 5 Ebenfalls zeichnen wir wieder (Abb. VI) das Dreieck $a b g$ für die Bestimmung der Winkel, unter denen sich die Höhenkreise und die Ekliptik schneiden. Wir verlängern sie bis zu den beiden Punkten d und h des Horizonts. Ist g auf der Ekliptik bekannt, und ist die Neigung der Sphäre bekannt, so ist h auf der Ekliptik bekannt, und die beiden Winkel h und g sind nach dem, was wir vorausschickten, bekannt. Ist nun b auf der Ekliptik gegeben, so wird $b d$ bekannt sein aus dem bekannten Winkel h , dem rechten Winkel (d) und dem bekannten Bogen $b h$. Der Punkt a ist der Pol des Horizonts der Sphäre von bekannter

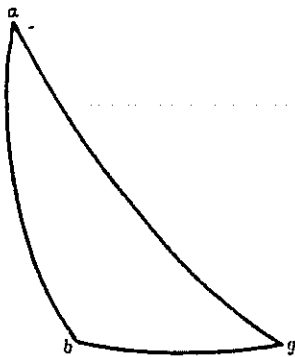


Abbildung V.

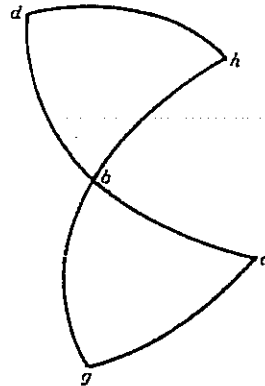


Abbildung VI.

Neigung, und die Deklination von g ist bekannt. Also ist der Bogen $a b$ bekannt. Der Winkel g ist bekannt, also wird der Winkel b bekannt sein. Und weil die Bögen $a b$ und $b g$ bekannt sind, (und) der Winkel g bekannt ist, so wird auch der Winkel a bekannt sein
15 im Betrage des Abstandes des Azimuts von der Mittagslinie. Also wird auch das Azimut bekannt sein . .

Von dem, wobei Ptolemäus mit dem Transversalensatz arbeitete, verbleibt nun noch die Bestimmung des Abstandes eines Sternes vom Äquator, wenn der Stern nach Länge und Breite bekannt ist, und die Bestimmung des „Grades seines Durchgangs“⁷⁴⁾. Hier-
20 zu zeichnen wir (Abb. VII) den Viertelkreis $a g$ der Ekliptik, den Viertelkreis $a b$ des Äqua-
tors und den Bogen $b g d h$ des Kreises, der durch die vier Pole geht⁷⁵⁾. Den Stern nehmen wir im Punkte z der Sphäre an und ziehen durch ihn und durch die beiden Pole (der

⁷³⁾ Die „Breite des Klimas des Anblicks“ ist, wie unser Text zeigt, der zwischen Zenit und Ekliptik fallende Bogen des durch die Pole des Horizonts und diejenigen der Ekliptik gehenden Kreises. Er ist gleich der Höhe des Pols der Ekliptik über dem Horizont. Derselbe Ausdruck für denselben Begriff kommt nach Carra de Bauß⁴²⁾ (S. 425 u. 428) im Umagest von Abu'l-Wa'iz⁴³⁾ vor.

⁷⁴⁾ Der „Grad des Durchgangs“ eines Sterns ist der Ekliptikpunkt m (Abb. VII), der zugleich mit dem Stern z durch den Meridian geht.

⁷⁵⁾ Nämlich des durch die Pole des Äquators und der Ekliptik gehenden Colstitialkolurs.

Ekliptik und des Äquators) auf der Seite der Breite die beiden Bögen $h z s$ und $d z m k$. Dann ist s der „Grad“ des Sterns in der Länge, und der Bogen $s z$ seine Breite und der Bogen $z k$ sein Abstand vom Äquator und m der „Grad seines Durchgangs“.

Weil nun $a s$ bekannt und der Winkel s ein rechter ist, so ist der Winkel h bekannt, weil er vom Betrage des Komplements der Deklination des Komplements von $a s$ ist, und zwar $\frac{1}{2}$ der Deklination, deren Höchstwert vom Betrage des bekannten Winkels a ist. Deshalb wird der Bogen $h s$ bekannt sein; also wird der ganze (Bogen) $h z$ bekannt sein. Der Winkel k ist ein rechter: also wird $k z$ bekannt sein aus der Kenntnis des ganzen (Bogens) $h z$ und der beiden Winkel h und k .

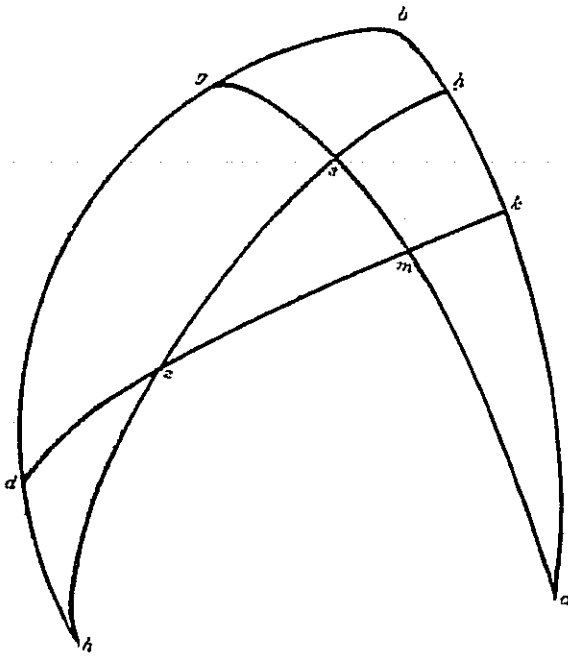


Abbildung VII.

Was nun die Bestimmung des 10 Grades des Durchgangs betrifft, so (gilt folgendes): Weil sowohl $z d$ wie $z h$ bekannt ist — $z h$ nämlich aus der Breite des Sterns und $z d$ aus der Bestimmung seines Abstandes vom Äquator — und auch der Winkel h bekannt ist, weil er vom Betrage des bekannten $g s$ ist, so wird der Winkel d bekannt 15 sein. Von seinem Betrage ist der Bogen $b k$. Also wird $a k$ als bekannt übrig bleiben. Nach dem, was wir vorausschickten, ist auch der Winkel m bekannt. 20 Also ist $a m$ bekannt, und das ist das, dessen Beweis wir wünschten. .

Was nun (Abb. VIII) die Bestimmung des „Grades (F) 30 des Aufgangs“ eines Sternes (A) betrifft, so wird seine Aufgangsweite (A C) durch seinen Abstand (A B) vom Äquator

bekannt sein. Ferner wird der Bogen (B C) des Äquators, der zwischen dem „Grad (B) 35 seines Durchgangs auf dem Äquator“ und dem Horizont liegt, bekannt sein, ebenso wie wir (es) bei der Ausgleichung des Tages des Grades ⁷²⁾ behandelten, und jener Bogen (B C) ist ebenfalls die Ausgleichung des Tages des Sterns. Wird sie zu der Rektaszension (D B) des Grades (B) des Durchgangs hinzugefügt oder von ihr abgezogen, je nach der Seite, auf welcher der Abstand des Sterns vom Äquator liegt, so kommt die Aszension (D C) des 40 „Teils“ (F) heraus, mit dem der Stern bei sphaera obliqua aufgeht. Also wird der „Grad (F) des Aufgangs“ bekannt sein. Ist der Grad des Aufgangs bekannt, so ist auch der Grad des Untergangs bekannt. Es erfolgt nämlich der Untergang des „Grades (B) des Durchgangs auf dem Äquator“ um denjenigen Bogen nach dem Untergang des Sterns, um den der Aufgang des Sterns nach dem Aufgang des „Grades“ erfolgt; und umgekehrt 45

wird die Sache liegen, wenn der Aufgang des Sterns vor dem Aufgang des Grades seines Durchgangs auf dem Äquator erfolgt .⁷⁶

So haben wir nun alles vollendet, bei dem Ptolemäus in seiner großen Schrift ($\mu\epsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda\eta$ $\sigma\iota\nu\tau\alpha\chi\iota\varsigma$) den Transversalensatz und das zusammengesetzte Verhältnis anwandte, haben es durch das Gegenteil seiner Methoden bewiesen und haben erreicht, es im höchsten Maße abzukürzen, trotzdem das, was wir darboten, unmittelbar verständlich wurde und frei von Unklarheit war. Was nun unsere Schrift über die Azimute anbelangt,

so haben wir es, wie man sieht, am (richtigen) Verfahren nicht fehlen lassen, und wir sind nicht davon abgegangen zu etwas, das deinem Wunsche⁷⁷ (?) widerspricht. Und was wir nur immer ge-

arbeitet haben, dort und hier, so haben wir nicht uns selbst eine Arbeit zugeschrieben, die wir durch einen anderen gemacht haben. Wenn wir Letz-
 20 teres aber getan haben, so haben die Vorgänger es uns festgelegt; nach ihren Gedanken gelangt man zu dem, was erreicht wird, und hat Zugang
 25 zu dem, was herausgebracht wird. Wir sehen zuweilen, wie viele von den Vertretern dieser Kunst (der Astronomie) auf ihren Vorgänger
 30 eifersüchtig sind und sich selbst Leistungen zuschreiben, in denen nichts ihr Eigen ist, außer Erklärungen und das Für-neu-halten von Grund-
 35 lagen (Bedeutungen? ⁷⁷), und manchmal sahen wir, wie einer von ihnen jemanden tadelte, der den Vorgängern anhing und ihnen auf ihren Pfaden nacheiferte, wobei er
 (der Tadelnde) ohne Ehrfurcht über sie herfiel.

40 Wenn aber du, den Gott stärken möge, über eine Entdeckung (Untersuchung) ⁷⁸, über die ⁷⁹ ich dir schreibe, nachdenkst, so wirst du sie für ausreichend halten trotz ihrer

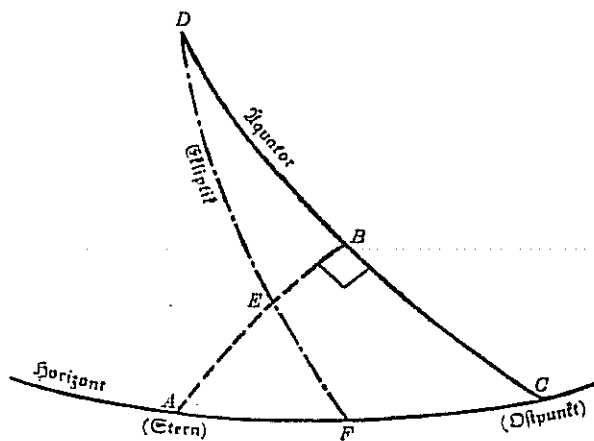


Abbildung VIII.

A aufgehender Stern.

F „Grad“ des Aufgangs des Sterns A, d. h. der Elliptikpunkt, der mit dem Stern zugleich aufgeht.

AC Aufgangsweite des Sterns.

AB Abstand des Sterns A vom Äquator (= Deklination des Sterns).

B „Grad“ des Durchgangs des Sterns auf dem Äquator, d. h. der Punkt des Äquators, der zugleich mit dem Stern durch den Meridian geht.

BC Bogen des Äquators, der zwischen dem „Grad“ B des Durchgangs des Sterns auf dem Äquator und dem Horizont liegt = Ausgleichung des Lages des Sterns = vierter Teil des Unterschieds zwischen Tag- und Nachtbogen = Azimutendifferenz ⁷²).

DB Rektaszension des „Grades“ B des Durchgangs auf dem Äquator.

DC Azimut des „Teils“ ⁷¹ F, mit dem der Stern A aufgeht.

⁷⁶) intiza'ik?

⁷⁷) Das mawadi'at meines Textes kann plur. plur. von mawdi' = „Bedeutung“ sein. Oder ist mawdi'at = „Grundlegungen“, „Axiome“ gemeint?

⁷⁸) nabdan?

⁷⁹) bihi.

Kürze in den Kapiteln die sie umfaßt gegenüber der Weitschweifigkeit anderer (oder „eines anderen als ich“) und wirst sie für ausreichend halten bei den übrigen Dingen ihr ähnlicher Art in den Problemen der Modernen, so Gott will.

Ende des Sendschreibens.

Lob sei Gott so wie es ihm gebührt und sein Segen über seinen Propheten Muhammad und seine Familie, die Reinen!

4. Erläuterungen zu dem Sendschreiben.

Erster Beweis des Sinusgesetzes (424, 18—426, 3).

Diesen Beweis finden wir mit geringfügigen Wortabweichungen auch in der „Zusammenfassung“ (45a 3, 2—22) als Beweis von Abū Naṣr wiedergegeben. Er zerfällt in zwei Fälle:

1) $h h \parallel b m$.

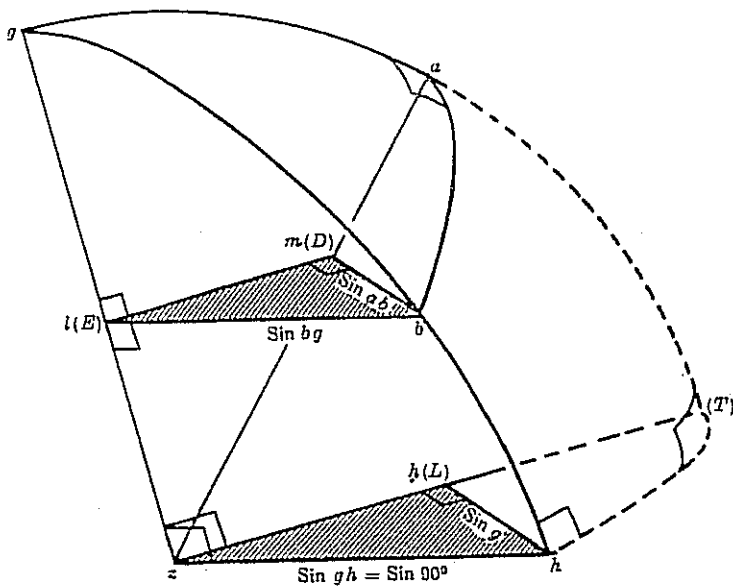


Abbildung 2.

Es wird gezeigt, daß in diesem Falle das gegebene Dreieck abg bei a rechtwinklig ist. In Abb. 2 habe ich das für diesen Fall Nötige aus der Abb. I von Abū Naṣr herausgeschält. Der Fall läuft hinaus auf den Nachweis der Ähnlichkeit zweier rechtwinkliger Dreiecke

$$\triangle z h h \sim \triangle l b m$$

und stimmt überein mit dem Beweis des Sinusgesetzes für das bei a rechtwinklige Dreieck, wie ihn al-Bīrūnī als Beweis von Abū Naṣr in seinem Schreiben an Abū Sa'īd as-Sigzī mit-

geteilt hat²⁴). Zum Vergleich habe ich in Klammern die Buchstaben der Figur in Suters Übersetzung beigelegt, soweit sie nicht mit denen von Abū Naṣr in der uns vorliegenden Figur des „Sendschreibens“ übereinstimmen. Auch andere Beweise der Regel der vier Größen oder des speziellen Sinussatzes in der „Zusammenfassung“ und bei at-Tūsī verlaufen mehr oder weniger ebenso.

2) $h h \nparallel b m$.

Dieser Beweis von Abū Naṣr für das beliebige Dreieck $a b g$ ist bei at-Tūsī (S. 171—172 = S. 157—158.) sorgfältiger durchgeführt, wobei die beiden Fälle unterschieden werden, daß das sphärische Dreieck entweder lauter spitze Winkel, oder zwei spitze und einen stumpfen Winkel hat. Der Abb. 3 habe ich zum Vergleich die Buchstaben von Caratheodorus Übersetzung (S. 157) in Klammern beigelegt, soweit sie von Abū Naṣrs Buchstaben im „Sendschreiben“ abweichen. Der Beweis läuft hinaus auf den Nachweis der Ähnlichkeit je zweier Paare rechtwinkliger Dreiecke:

$$\triangle s d z \sim \triangle n b m,$$

$$\triangle h h z \sim \triangle n b l.$$

Hieraus folgt

$$b m : b n = d z : d s,$$

$$h h : h z = b n : b l.$$

Die Elimination von $b n$ und $h z = d z$ (= Halbmesser der Kugel) ergibt dann

$$b m : b l = h h : d s,$$

d. h.

(S.-S.)

$$\sin a b : \sin b g = \sin g : \sin a,$$

w. j. b. w.

Die Elimination geschieht hier wie später 427, 6 und 427, 36 „im Verhältnis der Gleichheit“ (*fi nisbat al-musāwāt*). Die „Zusammenfassung“ sagt 44b, 3. 6 genauer: „durch die Gleichheit im verworfenen Verhältnis“ (*bi'l-musāwāt fi'n-nisbat al-muḍṭaraba*), d. i. *di' isov* in der *analogia kataqaymēn*²⁵). Derselbe Ausdruck lag Suter²⁴) (S. 159) vor.

Der Beweis von al-Bīrūnī in der „Zusammenfassung“ (45a, 3. 23; 45b, 3. 20) ist gegen denjenigen von Abū Naṣr dadurch geändert, daß das Dreieck $n b m$ in die Ebene des Dreiecks $s d z$ und das Dreieck $n b l$ in die Ebene des Dreiecks $h h z$ projiziert ist, so wie man es z. B. auch bei dem Beweis von al-Hugandī für die Regel der vier Größen ausgeführt sieht. Der erste Beweis des allgemeinen Sinussatzes in der „Zusammenfassung“ (43b, 3. 18—44a, 3. 23) ist nur in der Form verschieden von demjenigen des Abū Naṣr. Natürlicher als Abū Naṣr bringt dieser Beweis der „Zusammenfassung“ den Sonderfall so, daß $\angle a = 90^\circ$ nicht als Folgerung, sondern als Voraussetzung erscheint.

Zieht man (Abb. 3) in dem Dreieck $a b g$ die sphärische Höhe $b F$ von b auf $a g$, so ist $b n$ der Sinus dieser Höhe. Wie man dann sieht, beweist Abū Naṣr den allgemeinen Sinussatz dadurch, daß er für jede der beiden von dieser Höhe erzeugten Teilfiguren die Regel der vier Größen ableitet und dann aus den beiden Proportionen den Sinus der Höhe (und den Kugelhalmmesser) eliminiert. Der Verfasser der „Zusammenfassung“ bringt (44b, 3. 7—45a, 3. 2)

²⁴) Vgl. Tropicke, Gesch. d. Elementarmathematik III, 3. Aufl., S. 10; Euklid-Heiberg II, S. 6 = Buch 5 Definitionen 17 und 18; Codex Leidensis 399, 1^{oo}) Pars III Fasc. II, S. 24—25; Euklid-Ausgabe von at-Tūsī in dem römischen Druck von 1594, S. III; al-Bīrūnī, Elements of Astrology ed. R. R. Wright, London 1934, S. 14.

als seinen eigenen Beweis einen solchen, bei dem diese Höhe wirklich gezogen, sonst aber nichts Wesentliches geändert ist.

Warum hat Abū Naṣr die Höhe nicht gezogen? Wollte er es vielleicht nur in der Form anders machen als Abu'l-Wafā', der in seinem *Almagest* die Höhe zieht und einfach auf jede der Teilfiguren die von ihm vorher bewiesene Regel der vier Größen anwendet?

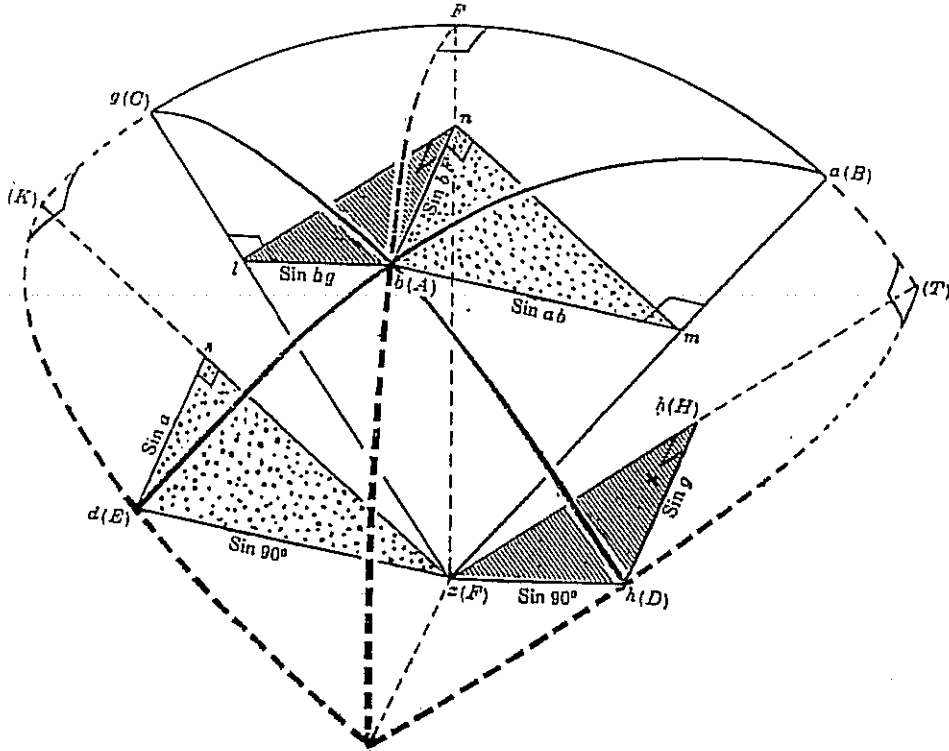


Abbildung 3 (I).

Zweiter Beweis des Sinusgesetzes (426, 4—427, 9).

Unter Berufung auf seine Schrift über die Azimute setzt Abū Naṣr voraus, daß für ein bei d rechtwinkliges Dreieck abd der spezielle Sinusatz

$$\sin a b : \sin b d = \sin d : \sin a$$

bewiesen ist. Für das durch die Höhe bd in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegte Dreieck abg (Abb. II) beweist unser Autor dann durch zweimalige Anwendung des speziellen Satzes und Elimination des Sinus der Höhe den allgemeinen Satz schöner als Abu'l-Wafā' und ganz in der Art der modernen Trigonometrie. Dieses Verfahren bezeugt auch al-Birūnī²⁴ als dasjenige von Abū Naṣr. Die „Zusammenfassung“ (44a, 3. 23—44b, 3. 6) und at-Tūsī (S. 17—171 = S. 155—156) bringen es ohne Nennung des Urhebers.

Anderer Beweis für das rechtwinklige Dreieck (427, 10—39).

Unser Kenner griechischer Sphärik geht von den Sinussen auf die Sehnen zurück. Er verlängert (Abb. 4) in dem bei d rechtwinkligen Dreieck bda die Kathete ad um sich selbst bis g und verbindet g mit b durch einen Großkreisbogen. Der Sphärik des Menelaos kundig, weiß er aus I, 4 dieses Werkes, daß nun in den beiden symmetrischen rechtwinkligen Dreiecken bda und bdg auch $ba = bg$ und $\angle dba = \angle dbg$ ist.

Bei der dann folgenden Ableitung ⁸¹⁾ muß inhaltlich folgendes gemeint sein: Die Sehne ag kann man auffassen

erstens als Sehne des durch a und g gehenden Großkreisbogens $\widehat{adg} = 2\widehat{ad}$ auf der Kugel mit dem Halbmesser r :

$$(1) \quad ag = \text{Chord } 2\widehat{ad} = 2 \sin \widehat{ad},$$

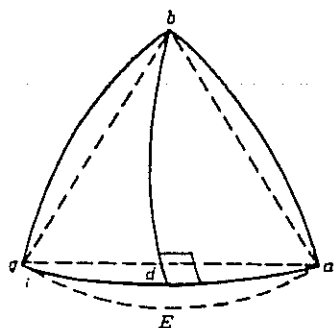


Abbildung 4 (III).

zweitens als Sehne des um b mit $ba = bg$ als Zirkelöffnung auf der Kugeloberfläche beschriebenen Kleinkreisbogens $\widehat{abg}$. Bei letzterer Betrachtungsweise ist der Zentriwinkel der Sehne gleich $\widehat{abg} = 2\widehat{abd}$, und der beschriebene Kleinkreis hat den Halbmesser

$$(2) \quad \varrho = \sin \widehat{ab}.$$

Also ist

$$(3) \quad ag = \overset{(1)}{\text{Chord } 2\widehat{ad}} = 2 \overset{(2)}{\sin \widehat{ad}}.$$

Nun verhält sich $\text{Chord } 2\widehat{abd} : \overset{(2)}{\text{Chord } 2\widehat{abd}} = r : \varrho$, oder

$$(4) \quad \varrho : \overset{(1)}{\text{Chord } 2\widehat{abd}} = r : \text{Chord } 2\widehat{abd}.$$

Ersetzt man in (4) auf Grund von (1) und (3) $\overset{(1)}{\text{Chord } 2\widehat{abd}}$ durch $2 \sin \widehat{ad}$, ferner nach (2) ϱ durch $\sin \widehat{ab}$, weiterhin r durch $\sin 90^\circ = \sin \widehat{adb}$ und endlich nach (3) $\text{Chord } 2\widehat{abd}$ durch $2 \sin \widehat{abd}$, so erhält man

$$(5) \quad \sin \widehat{ab} : \sin \widehat{ad} = \sin \widehat{adb} : \sin \widehat{abd} \quad (\text{Tropfke } \delta).$$

m. j. b. m.

Al-Birūnī hat diesen Beweis seines Lehrers in seinem Mas'ūdischen Kanon ⁸²⁾ deutlicher durchgeführt, indem er alle Stücke der Rechnung in der Abbildung sichtbar machte. Ebenso hat Abū Naṣr selbst diesen Beweis sorgfältig ausgeführt, und zwar unter Beschränkung auf die halbe Figur (Sinusse statt der Sehnen). Dies bezeugen die „Zusammenfassung“ (41a, 3. 7—41b, 3. 1) und at-Tūsī (S. 117—118 = S. 146—148).

⁸¹⁾ Unter $\widehat{ab}$ verstehe ich den durch a und b gehenden, unter $\widehat{abg}$ den durch a , b und g gehenden Bogen. $\widehat{abg}$ bedeutet den an der Ecke b liegenden Winkel des sphärischen Dreiecks abg . Über die Symbole Chord und Sin setze ich in Klammern den zugehörigen Radius nur dann, wenn er vom Kugelradius r verschieden ist.

Zwei für die Anwendungen nützliche Folgerungen aus dem Sinussatz
(427, 40 — 429, 7).

Zur Ableitung zweier Folgerungen für das rechtwinklige Dreieck vervollständigt Abū Naṣr das bei b rechtwinklige Dreieck abg (Abb. 5) zu einer Menelaosfigur, deren Bögen abd und agh Viertelkreise sind, so daß auch die Winkel d und h rechte und die Bögen hhd und hgb Viertelkreise sind.

Dann folgt durch Anwendung des Sinussatzes auf die Dreiecke gba und ghh

$$(\sin 90^\circ : \sin g =) \sin ag : \sin ab = \sin gh : \sin hh,$$

wie sich auch aus der Regel der vier Größen ergibt. Nun ist

$$\sin gh = \cos bg \text{ und } \sin hh = \cos hd = \cos a,$$

Also gilt für das bei b rechtwinklige Dreieck abg die Bierstückformel

$$(Formel I) \quad \sin ag : \sin ab = \cos bg : \cos a.$$

Ferner gilt für das bei h rechtwinklige Dreieck hgh

$$\sin hh : \sin hg = \sin g : \sin 90^\circ \quad (\text{Tropfke 5}).$$

Abū Naṣr drückt diesen Zusammenhang in der altertümlichen Weise aus:

hh ist die Deklination von gh , und zwar die Deklination, deren Höchstwert vom Betrage des Winkels g ist. (Ist gh ein Stück der Ekliptik, g h seine sphärische Projektion auf den Äquator, so ist hh die Deklination von gh . Der Winkel hgh ist die Schiefe der Ekliptik, und der sie messende Bogen des Kolurs heißt bekanntlich „größte Deklination“.)

Nun ist $\sin hh = \cos hd = \cos a$ und $\sin hg = \cos gb$. Also ergibt sich für das bei b rechtwinklige Dreieck abg die zweite Folgerung

$$(Formel II) \quad \cos a : \cos gb = \sin g : \sin 90^\circ \quad (= \text{Tropfke 3}),$$

eine Formel, die im Text eine so merkwürdig verwickelte und altertümliche Formulierung erhielt. Hier haben wir bei Abū Naṣr die Formel, die man später als Weberschen Satz bezeichnete. In den Fällen, wo g die Schiefe der Ekliptik ist, konnte diese Formel, jener altertümlichen Formulierung entsprechend, mit Hilfe der Tabelle der Deklinationen gelöst werden.

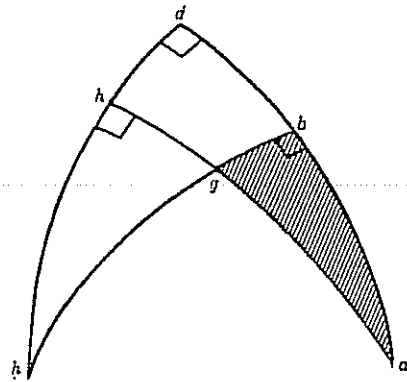


Abbildung 5 (IV).

Lösung der sphärischen Berechnungsaufgaben bei Ptolemäus und bei Abū Naṣr.

Abū Naṣr geht nun (von 429, 8 bis 432, 2) die sphärischen Berechnungsaufgaben des Almagest nacheinander durch, um zu zeigen, wie er sie durch alleinige Anwendung des Sinus-

²³) Vgl. Carl Schön, Die trig. Lehren des pers. Astr. al-Bīrūnī, Hannover 1927, S. 58 und Bürger und Rohl ²⁴), S. 64–65. — Meine Vermutung (Eudox ²⁵), S. 137), daß dieser Beweis al-Bīrūnīs auf eine Anregung durch al-Huḡandī zurückgehen könnte, ist also hinfällig.

Aufgabe 1b: Gesucht r .

Almagest I, 16

(Heib. I, 82–84; Man. I, 53–56).

Gegeben: ε, δ .Gegeben (Abb. 6a): $EA = 90^\circ$, $ZB = 90^\circ - \varepsilon, BA = \varepsilon, ZH = 90^\circ - \delta$, $H\Theta = \delta$,gesucht: $\Theta E = r$.

Auflösung:

$$\frac{\text{Chord } 2 ZB}{\text{Chord } 2 BA} = \frac{\text{Chord } 2 ZH}{\text{Chord } 2 H\Theta} \cdot \frac{\text{Chord } 2 \Theta E}{\text{Chord } 2 EA}$$

$$(\sin r = \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{ctg} \varepsilon, \quad \text{Tropfke 6}).$$

Ptolemäus braucht nur ε und δ als gegebene Stücke, benötigt aber zur Berechnung von Chord $2r$ außer dem Durchmesser vier in der Tabelle aufzuschlagende Sehnen. Die auf

$$\operatorname{tg} r = \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \delta \quad (\text{Tropfke 4})$$

führende Formel stellte er nicht auf, da die Berechnung von r aus $\frac{\text{Chord } 2r}{\text{Chord } (180^\circ - 2r)}$ lästig war.

Abū Naṣr

(429, 16–21).

Gegeben: ε, δ, l .Gegeben (Abb. 6b): $\Theta = 90^\circ, E = \varepsilon$, $HE = l, \Theta H = \delta$,gesucht: $\Theta E = r$.

Auflösung:

$$\frac{\sin HE}{\sin \Theta E} = \frac{\cos \Theta H}{\cos E} \quad (\text{Formel I})$$

$$\left(\sin r = \frac{\sin l \cdot \cos \varepsilon}{\cos \delta} \right).$$

Abū Naṣr braucht außer den von Ptolemäus benutzten Stücken ε und δ noch l als gegebenes Stück, findet aber $\sin r$ aus nur drei in der Tabelle aufzuschlagenden Sinussen.

Abu'l-Wafā' berechnet nach der Tangententafel r unmittelbar aus ε und l .

Aufgabe 2a: Gegeben ⁴⁴⁾ δ, φ ; gesucht w .

Almagest II, 3

(Heib. I, 95; Man. 63).

Gegeben (Abb. 7a): $ZA = 90^\circ, Z\Theta = 90^\circ$, $EB = 90^\circ, AB = 90^\circ - \varphi, \Theta H = \delta$,gesucht: $HE = w$.

Auflösung:

$$\frac{\text{Chord } 2 ZA}{\text{Chord } 2 AB} = \frac{\text{Chord } 2 Z\Theta}{\text{Chord } 2 \Theta H} \cdot \frac{\text{Chord } 2 HE}{\text{Chord } 2 EB}$$

$$\left(\sin w = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}, \quad \text{Tropfke 5} \right).$$

Abū Naṣr

(429, 22–27).

Gegeben (Abb. 7b): $\Theta = 90^\circ$, $E = 90^\circ - \varphi, \Theta H = \delta$,gesucht: $HE = w$.

Auflösung:

$$\frac{\sin EH}{\sin \Theta H} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin (90^\circ - \varphi)} \quad (S.-S.)$$

Aufgabe 2b: Gesucht d .

Almag. II, 3 (Heib. I, 94; Man. I, 62–63);

Almag. VIII, 5 (Heib. II, 196–197;

Man. II, 85–86 ⁴⁵⁾).Gegeben: φ, δ .Gegeben (Abb. 7a): $EA = 90^\circ, ZB = \varphi$, $BA = 90^\circ - \varphi, H\Theta = \delta, ZH = 90^\circ - \delta$,

Abū Naṣr

(429, 28–34).

Gegeben: φ, δ, w .Gegeben (Abb. 7b): $\Theta = 90^\circ$, $E = 90^\circ - \varphi, \Theta H = \delta, EH = w$,

⁴⁴⁾ Ptolemäus behandelt die Aufgaben 2a, 2b, 2c zunächst für den Sonderfall $\delta = \varepsilon$, spricht aber (Heib. I S. 95, Man. I, S. 63–64) aus, daß die Lösung ebenso für beliebige andere Werte von δ gilt.

⁴⁵⁾ Man. II, 86, 3. 6 sollte man statt I 49,31 lesen: I 63,2.

gesucht: $\Theta E = d$.

Auflösung:

$$\frac{\text{Chord } 2 ZB}{\text{Chord } 2 BA} = \frac{\text{Chord } 2 ZH}{\text{Chord } 2 H\Theta} \cdot \frac{\text{Chord } 2 \Theta E}{\text{Chord } 2 EA}$$

$$(\sin d = \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{Tropfke 6}).$$

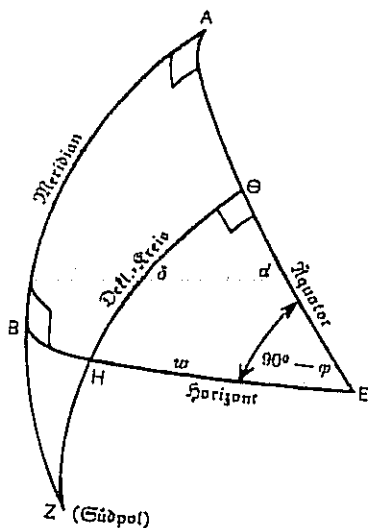


Abbildung 7a.

gesucht: $\Theta E = d$.

Auflösung:

$$\frac{\sin EH}{\sin \Theta E} = \frac{\cos \Theta H}{\cos E} \quad (\text{Formel I}).$$

$$\left(\sin d = \frac{\sin \varphi \cdot \sin w}{\cos \delta} \right).$$

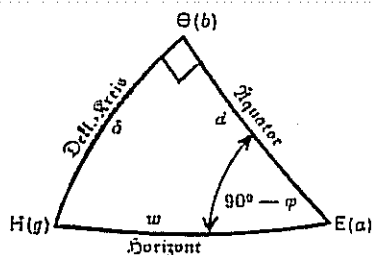


Abbildung 7b (IV).

Mathematisch sind die Lösungsformeln für die Aufgaben 2a und 2b bei Ptolemäus und Abū Naṣr jeweilig dieselben wie diejenigen für 1a und 1b.

Aufgabe 2a: Gegeben d, w ; gesucht φ .

Almagest II, 3

(Heib. I, 92–93; Man. I, 62).

Gegeben (Abb. 7a): $ZA = 90^\circ$, $E\Theta = d$,

$\Theta A = 90^\circ - d$, $EH = w$, $HB = 90^\circ - w$,

gesucht: $BZ = \varphi$.

Auflösung:

$$\frac{\text{Chord } 2 E\Theta}{\text{Chord } 2 \Theta A} = \frac{\text{Chord } 2 EH}{\text{Chord } 2 HB} \cdot \frac{\text{Chord } 2 BZ}{\text{Chord } 2 ZA}$$

$$(\sin \varphi = \operatorname{tg} d \cdot \operatorname{ctg} w, \quad \text{Tropfke 4}).$$

Während Ptolemäus die Aufgaben 2a, 2b, 2c unabhängig voneinander in beliebiger Reihenfolge lösen konnte, sah Abū Naṣr sich genötigt, die Reihenfolge 2a, 2b einzuhalten, und verzichtete auf die Lösung von 2c. Mit Abū'l-Wafā's Seitenformel (= Tropfke I) hätte er zu d und w die dritte Seite δ und dann mit dem S.-S. (= Tropfke 5) den Winkel $E = 90^\circ - \varphi$ finden können.

Aufgabe 3: Gesucht der Winkel B der Elliptik am Meridian.

Almagest II, 10

(Heib. I, 150—152; Man. I, 104—105).

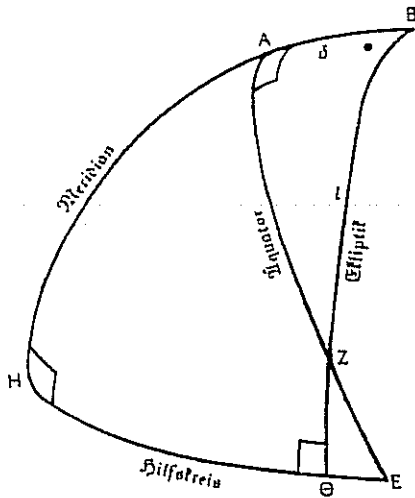
Gegeben: l und δ des kulminierenden Punktes.

Abbildung 8a.

Gegeben (Abb. 8a): $\angle H = 90^\circ$, $\angle BZ = l$,
 $\angle Z\Theta = 90^\circ - l$, $\angle BA = \delta$, $\angle AH = 90^\circ - \delta$,
 gesucht: $\angle B$, gemessen durch den Bogen
 $\angle H\Theta = 90^\circ - \Theta E$.

Auflösung:

$$\frac{\text{Chord } \angle BA}{\text{Chord } \angle AH} = \frac{\text{Chord } \angle BZ}{\text{Chord } \angle Z\Theta} \cdot \frac{\text{Chord } \angle \Theta E}{\text{Chord } \angle EH}$$

$$(\cos B = \cot g l \cdot \tan \delta, \text{ Tropfke } \delta).$$

Abū Naṣr

(429, 35—38).

Gegeben: l und r des kulminierenden Punktes.

Die von Abū Naṣr statt δ als gegeben angenommene Größe r kann man sich nach Aufgabe 1b bestimmen oder aus der hiernach angelegten Tafel der Aufgänge (z. B. Almagest II, 8) entnommen denken.

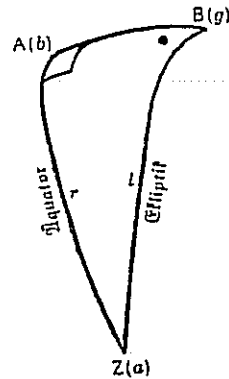


Abbildung 8b (IV).

Gegeben (Abb. 8b): $\angle A = 90^\circ$, $\angle BZ = l$,
 $\angle AZ = r$,
 gesucht: $\angle B$.

Auflösung:

$$\sin B : \sin A = \sin AZ : \sin BZ \quad (S.-S.)$$

$$\left(\sin B = \frac{\sin r}{\sin l}, \text{ Tropfke } \delta \right).$$

Aufgabe 4: Gegeben φ und die Länge l_1 des aufgehenden Elliptikpunktes; gesucht der Winkel E der Elliptik am Horizont.

Almagest II, 14

(Heib. I, 157—159; Man. I, 110—111).

Deutsche Mathematik. Jahrg. 5, Heft 5.

Abū Naṣr

(429, 39—430, 4).

30

Zu der Breite φ und der Länge l_1 des aufgehenden Ekliptikpunktes E liefert die Tafel der Aufgänge (Ulmagest II, 8) und die Tafel der Schiefe (Ulmagest I, 15)

die Länge l_2 und die Deklination δ_2 des in unterer Kulmination befindlichen Ekliptikpunktes Γ (Abb. 9a).

Gegeben (Abb. 9a): $\Delta Z = 90^\circ$, $EH = 90^\circ$,

$\Theta Z = 90^\circ$, $\Gamma\Delta = 90^\circ - \varphi - \delta_2$,

$\Gamma E = l_2 - l_1$,

gesucht: $\angle E$, gemessen durch den Bogen $H\Theta$.

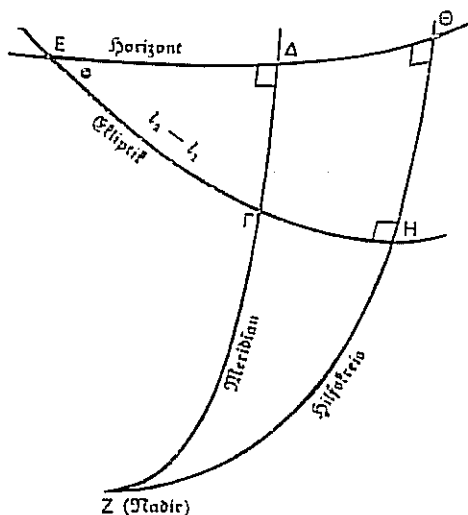


Abbildung 9a.

Auflösung:

$$\frac{\text{Chord } 2 \Gamma \Delta}{\text{Chord } 2 \Delta Z} = \frac{\text{Chord } 2 \Gamma E}{\text{Chord } 2 EH} \cdot \frac{\text{Chord } 2 H\Theta}{\text{Chord } 2 \Theta Z}$$

$$\left(\sin E = \frac{\sin (90^\circ - \varphi - \delta_2)}{\sin (l_2 - l_1)}, \text{ Tropfke } 5 \right).$$

die Obliquaßenktion s_1 des aufgehenden Ekliptikpunktes E (Abb. 9b).

Gegeben (Abb. 9b): $a E = l_1$, $a b = s_1$,

$\angle b = 90^\circ \pm \varphi$,

gesucht: $\angle E$.

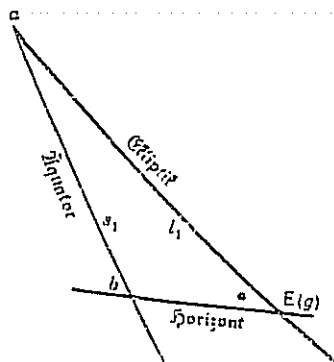


Abbildung 9b (V).

Auflösung:

$\sin \bar{E} : \sin b = \sin a b : \sin a E$ (allg. S.-S.)

$$\left(\sin E = \frac{\sin (90^\circ - \varphi) \sin s_1}{\sin l_1}, \text{ allg. S.-S.} \right).$$

Aufgaben 5a, 5b (und 5c nur bei Abū Naṣr).

Gegeben (Abb. 10): φ , die Länge l_1 des aufgehenden Ekliptikpunktes Θ , die Länge l_2 des kulminierenden Ekliptikpunktes Z⁸⁹⁾, die Länge l eines beliebigen Ekliptikpunktes H.

Gesucht: a) die Höhe $HE = h$ (oder die Zenitdistanz $HA = 90^\circ - h$) von H, b) der Winkel H, unter dem die Ekliptik den Höhenkreis schneidet.

Zu l_2 wird δ_2 nach Aufgabe 1a berechnet oder aus der Tafel der Schiefe (Ulmagest I, 15) entnommen.

⁸⁹⁾ Eigentlich werden l_1 und l_2 durch Tabellenrechnung aus der Sternzeit gefunden.

- gesucht: a) seine Deklination $\delta = \angle ON$,
 b) seine Rektaszension $r = \angle EN$,
 c) die Länge $l = \angle EM$ des mit dem Stern Θ kulminierenden Ekliptikpunktes M^{28}).

Almagest VIII, 5

(Heib. II, 193—196; Man. II, 83—85.)

Vorbereitung: Mit EK sind EA und AK bekannt: Man fasse EK als Rektaszension auf; dann ist die zugehörige Länge EA durch inverse Benutzung der Tafel der Aufgänge bei *sphaera recta* (Almag. II, 8) zu finden. Zu EA als Länge liefert dann die Tafel der Schiefe (Almag. I, 15) die zugehörige Deklination AK^{29} .

- a) Gegeben: $AZ = 90^\circ$, $NZ = 90^\circ$,
 $AH = 90^\circ + \varepsilon$, $HA = 90^\circ + KA$,
 $\angle O = KA + b$,
 gesucht: $\angle ON = \delta$.

Auflösung:

$$\frac{\text{Chord } 2HA}{\text{Chord } 2AZ} = \frac{\text{Chord } 2HA}{\text{Chord } 2AO} \cdot \frac{\text{Chord } 2ON}{\text{Chord } 2NZ}$$

(= Menelaos III, 2, da die Winkel bei A Supplementwinkel sind).

- b) Gegeben: $ZH = \varepsilon$, $HA = 90^\circ + \varepsilon$,
 $Z\Theta = 90^\circ - \delta$, $\angle N = \delta$,
 $\angle A = 90^\circ - EA$,
 gesucht: $AN = 90^\circ - r$.

Auflösung:

$$\frac{\text{Chord } 2ZH}{\text{Chord } 2HA} = \frac{\text{Chord } 2Z\Theta}{\text{Chord } 2ON} \cdot \frac{\text{Chord } 2NA}{\text{Chord } 2AA'}$$

$$(\sin NA = \tan \varepsilon \cdot \tan \delta \cdot \sin AA'),$$

$$NA = 90^\circ - r = AA' + NA.$$

Abū Naṣr

(430, 17—431, 28).

Vorbereitung: Im Dreieck EKA ist gegeben: $K = 90^\circ$, $EK = \lambda$, $E = \varepsilon$, gesucht: AK .

Auflösung:

$$1. \frac{\cos \lambda}{\cos EK} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin 90^\circ} \quad (\text{Formel II})$$

$$(\cos \lambda = \sin \varepsilon \cdot \cos \lambda, \text{ Tropfke 3}).$$

$$2. \frac{\sin AK}{\sin EK} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \lambda} \quad (S.-S.),$$

$$\left(\sin AK = \frac{\sin \varepsilon \cdot \sin \lambda}{\sin \lambda} \right).$$

Die Schritte 1. und 2. ersetzen die Formel Tropfke 6.

- a) Im Dreieck ΘAN ist gegeben: $N = 90^\circ$, $\angle O = AK + b$, $\angle A$.

gesucht: $\angle ON = \delta$.

Auflösung:

$$\frac{\sin \angle ON}{\sin \angle O} = \frac{\sin \lambda}{\sin N} \quad (S.-S.)$$

$$(\sin \delta = \sin \lambda \cdot \sin (AK + b), \text{ Tropfke 5}).$$

- b) Im Dreieck ΘZH ist gegeben: $\angle Z = 90^\circ - \delta$, $\angle H = 90^\circ - b$,
 $\angle H$ vom Betrage des Bogens
 $BK = 90^\circ - \lambda$,
 gesucht: $\angle Z$ vom Betrage des Bogens
 $180^\circ - AN = 90^\circ + r$.

Auflösung:

$$\frac{\sin \angle Z}{\sin H} = \frac{\sin \angle O}{\sin \angle Z} \quad (\text{allg. S.-S.}),$$

$$(\cos r \cdot \cos \delta = \cos \lambda \cdot \cos b \leftarrow \cos \widehat{EO}).$$

Durch die Lösungen der Aufgaben 6a und 6b haben Ptolemäus und Abū Naṣr in mühsamer Weise nach der sphärischen Methode die Koordinaten λ , b eines Sternes Θ in die Koordinaten r , δ transformiert. Das sphärische Koordinatensystem ist um die Schnitt-

²⁸⁾ Abū Naṣr nennt (430, 19) M den „Grad des Durchgangs“ des Sternes (durch den Meridian).

²⁹⁾ So läßt sich die von Manilius II, S. 84, Anm. c und S. 85, Anm. a angenommene „unwesentliche Verschiedenheit“ berichtigen.

linie von Ekliptik- und Äquatorebene um den Winkel ε gedreht worden. Man vergleiche damit, wie Ptolemäus die rein mathematisch identische Aufgabe (z. B. die Transformation des Systems Stundenwinkel-Deklination in das System Azimut-Höhe) im Analemma nach der direkten Methode durchführt und die entsprechende Lösung von Tābit b. Qurra (vgl. Luckey ²⁹). In der „arabischen“ Sphärik begegnen uns häufig Lösungen dieser Transformationsaufgabe.

c) Gegeben: $NA = 90^\circ - r$,
 gesucht: $MB = 90^\circ - EM = 90^\circ - l$.

Auflösung durch inverse Benutzung der
 Tabelle der Aufgänge bei *sphaera recta*.

c) Im Dreieck EMN ist

gegeben: $\angle N = 90^\circ$, $\angle E = \varepsilon$, $EN = r$,

gesucht: $EM = l$.

Auflösung:

$$1. \frac{\cos \bar{M}}{\cos EN} = \frac{\sin E}{\sin N} \quad (\text{Formel II}),$$

$$(\cos M = \sin \varepsilon \cdot \cos r, \text{ Tropicke 3}).$$

$$2. \frac{\sin \bar{EM}}{\sin EN} = \frac{\sin N}{\sin M} \quad (S.-S.)$$

$$\left(\sin l = \frac{\sin r}{\sin M}, \text{ Tropicke 5} \right),$$

Die Schritte 1. und 2. ersetzen die Formel Tropicke 4.

Für die Bestimmung des „Grades des Aufgangs“ eines in A (Abb. VIII) aufgehenden Sternes, d. h. der Länge DF des mit dem Stern zugleich aufgehenden Ekliptikpunktes F , braucht Abū Naṣr (431, 29—432, 2) ebensowenig wie Ptolemäus (Almagest VIII, 5; Heib. II, 196—198, *Man.* II, 85—87) neue sphärische Aufgaben zu lösen. Wie früher für die Sonne, so findet Abū Naṣr jetzt für den Stern durch Lösung der Aufgaben 2a und 2b die Azensionaldifferenz („Ausgleichung des Tages des Sterns“) BC . Die Rektaszension DB des Sterns, vermehrt oder vermindert um diese Azensionaldifferenz, liefert die Obliquusazension DC , und zu dieser kann aus der Tafel der Aufgänge der Ekliptikbogen DF , d. i. der „Grad des Aufgangs“ des Sterns A , entnommen werden.

Zur Geschichte der Mathematik.

(Siebeneckkonstruktion des Archimedes, Neuneckkonstruktion des Albirūnī.)

VON JOHANNES TROPFKE in Berlin.

Mit 3 Figuren im Text.

Die neuen preußischen Richtlinien fordern für den mathematischen Unterricht auch Darbietungen aus der Geschichte der Mathematik. Arbeitsmaterial hierzu habe ich in meiner „Geschichte der Elementarmathematik“¹⁾ in ausreichender Fülle gegeben. Mathematische Lesebücher sind erschienen, die besonders anregende Stellen mathematischer Klassiker wiedergeben, in der Originalsprache und in Übersetzungen. Von den älteren Autoren nenne ich A. Witting und M. Gebhard²⁾, von den neuesten A. Czwalina, der zu dem neubearbeiteten Unterrichtswerk von Kambly „Lesehefte zur Mathematik“³⁾ in der Ursprache und in Übertragung beigelegt hat. Sehr wertvolle unterrichtliche Hilfsmittel enthält die Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei des rührigen Verlages Otto Salle, so Band I Archimedes von F. Kliem und G. Wolff.⁴⁾ Ganz vortrefflich in Darstellung und Übertragung, in zweckentsprechender historischer und sachlicher Erläuterung sind in dieser Sammlung Band III und XI „Mathematische Quellenbücher“ von H. Wielaitner⁵⁾, dessen allgemeiner gehaltene Schriftchen „Die Geburt der modernen Mathematik“⁶⁾ für mathematische Arbeitsgemeinschaften in der Prima ebenfalls sehr zu empfehlen sind.

Alle diese Veröffentlichungen enthalten Stücke aus Werken bekannter Mathematiker aus den verschiedensten Perioden, die im Originaldruck allerdings oft schwer zugänglich sind. Die Zeit vom Beginn des 3. Jahrhunderts bis zum Ausgang des 1. Jahrtausend n. Chr. erscheint stets sehr vernachlässigt. Das ist nicht Schuld der Verfasser: hier versagt die Überlieferung und die Forschung. Die Völkerwirren dieser dunklen Jahrhunderte haben die Literatur dieser Zeit vernichtet und mit ihr so manchen alten Bestand.

Wie schwer ist es für den Historiker, die Fäden vom ausgehenden Hellenismus bis zur Zeit der Muslime wieder zu knüpfen! Dem Forscher drängt sich zwingend die innere Überzeugung auf, daß das, was die Inder, die Perser, die Araber geleistet haben, epigonenhaft ist: was in diesem Zeitraum wirklich

1) 2. Auflage, 7 Bände. Berlin und Leipzig 1921—1924.

2) Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Mathematische Bibliothek XV. Leipzig und Berlin 1913.

3) Breslau 1926.

4) Berlin 1921.

5) 1. Rechnen und Algebra, 2. Geometrie und Trigonometrie. Berlin 1927.

6) I. Analytische Geometrie, Karlsruhe 1924; II. Infinitesimalrechnung, Karlsruhe 1925.

geleistet wurde, scheint Ursprung in griechischem Geiste zu haben, so unser Positionssystem mit den neun Ziffern und der Null, der weitere Ausbau der Algebra, die vor ihrem uns allein bekannten Vertreter Diophant (3. Jahrh. n. Chr.) im Dunkel verschwimmt, der Fortschritt von quadratischen zu kubischen Gleichungen, die mit Kegelschnitten und einem sehr scharfen Näherungsverfahren gelöst werden, — aber diese gefühlsmäßigen Behauptungen lassen sich noch nicht streng wissenschaftlich beweisen. Die Neuplatonische Schule floh vor dem Bannstrahl Kaiser Justinians um die Mitte des 6. Jahrhunderts nach Persien. Aus Persien stammende arabische Gelehrte sind es gerade, die wir wenige Jahrhunderte später in der mathematischen Forschung an der Spitze sehen. Der Ursprung der indischen Zahlenschreibung scheint auch auf Persien zu weisen.

Mit Bienenfleiß sammeln, übersetzen, kommentieren die muslimischen Gelehrten die Scherben griechischer Wissenschaft, die sie irgend auftreiben können: erhebliche eigene Fortschritte — außer auf bestimmten Gebieten, wie in der Astronomie und Trigonometrie, in der Verfeinerung der Tafeln — dürften ihnen nicht zukommen.

Unserer gegenwärtigen historisch-mathematischen Wissenschaft fehlen Gelehrte, die die älteren orientalischen Sprachen beherrschen. Welch großer Bestand arabischer Manuskripte harret in den Bibliotheken der Bearbeitung! Irgendwo müssen sich noch Spuren finden lassen, die den kontinuierlichen Entwicklungsverlauf von der griechischen zur arabischen Wissenschaft aufhellen. Julius Ruska, der hervorragende Heidelberger Orientalist, versucht das Problem auf dem Gebiete der Chemie zu packen: er verfolgt die Fremdwörter und die chemischen Fachwörter in persischen und arabischen Handschriften und will mit ihrer Hilfe die Verbindung mit der vorangegangenen Periode herstellen. Der preußische Minister Becker hat ein Forschungsinstitut für Geschichte der Naturwissenschaften in Berlin ins Leben gerufen, an dessen Spitze J. Ruska gestellt wurde. Doch reichen die Mittel nicht aus, junge Gelehrte an das Institut heranzuziehen und sie für die neue Aufgabe vorzubilden. Es fehlt ein Mäcenat; in Amerika wären sofort Millionen da! So viele neue Papyrus- und Scherbenfunde aus Ägypten, gerade aus der Zeit vor dem Einbruch der Araber und aus ihrer ersten Herrschaftsperiode sind noch unbearbeitet. Der bisher bekannte älteste Fund einer Positionszahl mit Ziffern aus dem Jahre 873 stammt aus Ägypten, er weist gemischt ostarabische und westarabische Ziffernform auf. Der westarabische Typ ist danach bekanntlich in Spanien verbreitet und zur Urform unserer Ziffern geworden. Aber diese westarabische Form finden wir noch 970 in Schiras in Persien; die älteste Handschrift, die uns die Urform unserer modernen Ziffern mitteilt, ist 976 in einem spanischen Kloster entstanden. Der Entwicklungsverlauf liegt noch völlig im Dunkeln. Auch hier gibt es für das neue Institut ein reiches Arbeitsfeld, auch wir Mathematiker begrüßen seine Einrichtung als einen bedeutenden Fortschritt und wünschen es mit reicheren Mitteln bedacht zu sehen. Unsere hervorragenden mathematischen Orientalisten sind aus dem Leben und ihrem Wirken gerissen, H. Suter starb 1922 hochbetagt, C. Schoy 1925 im besten Mannesalter. Und kein Nachwuchs ist da!

C. Schoy wurde viel zu jung der Wissenschaft entrissen, die wenigsten wissen, was er der mathematischen Geschichtsforschung gewesen ist, besonders

in der arabischen Trigonometrie und Astronomie. Noch kurz vor seinem Tode machte er einen überaus wichtigen Fund; er hat die seit der Araberzeit verschollene Abhandlung des Archimedes über das Siebeneck wieder an das Tageslicht gebracht! Wir kannten bisher nur den Titel dieser Schrift aus arabischen Mitteilungen.¹⁾ Jetzt liegt sie uns dank Schoy in deutscher Übersetzung vor. Schoy war gewohnt, nicht die Arbeiten eines bestimmten arabischen Gelehrten in seiner persönlichen Entwicklung zu durchforschen, sondern er verfolgte bestimmte Probleme und sammelte die dazu irgendwie auftreibbare arabische Literatur, wie über die Sonnenuhr, über die Bestimmung der Himmelsrichtung von Mekka für jeden Ort usw. So brachte er Abhandlungen über das Siebeneck, mit dem man sich in der arabischen Mathematik stark beschäftigt hatte, zusammen: es gibt heute noch in Oxford ein umfangreiches Verzeichnis solcher Arbeiten, das von Ibn Jûnus (1156—1242) herrührt. Eine der ältesten der von Schoy gesammelten Handschriften, aus der Bibliothek zu Kairo, stammt von Tâbit ibn Qurra (826—901), und diese ist es, die sich selbst als „Buch des Archimedes, das davon handelt, den Kreis in sieben gleiche Teile zu teilen“ bezeichnet. Einleitend beklagt Tâbit die schlechte Verfassung des von ihm gefundenen griechischen Manuskriptes, dessen Wiederherstellung und Übersetzung ihm viel Mühe gemacht habe. Schoy gibt die deutsche Übersetzung im Anschluß an einen deutschen Auszug aus dem wichtigen trigonometrischen Hauptwerk des Persers Al-Birûni (973—1048), dem Qânûn al-Mas'ûdî.“ Die innere Verbindung dieser Schriften besteht darin, daß Al-Birûni ein großes Kapitel der Berechnung des regelmäßigen Neunecks widmet, die ganz vortrefflich ist und sein Eigentum zu sein scheint: das Neuneck mag Schoy auf das Siebeneck geführt haben. Das Schoysche Manuskript ist erst jetzt, zwei Jahre nach seinem Tode, mit Hilfe der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft durch J. Ruska und H. Wieleitner veröffentlicht worden. Das genaue Studium gibt wichtige Aufschlüsse über Archimedes' Leistungen in der Trigonometrie, über die ich an anderer Stelle gehandelt habe.²⁾

Da es sich um jüngste Forschungen handelt, die noch wenig bekannt sind, wird es die Fachgenossen interessieren, — in Ergänzung der eingangs angeführten Literatur — die Siebeneckkonstruktion des Archimedes und die Neuneckkonstruktion des Al-Birûni kennen zu lernen; sie bilden ein prächtiges Thema für den Primaunterricht und gestatten nach verschiedenen Richtungen historische Ausblicke. Die rein geometrische Darstellung beider wird im folgenden algebraisch modernisiert, um das Verständnis zu erleichtern.

Die Schrift des Archimedes, die Tâbit arabisch wiedergibt, ist eine Zusammenstellung von Sätzen, in denen die Seitensumme eines Dreiecks die Hauptrolle spielt; in den meisten Figuren werden die Nachbarseiten auf die Verlängerung der Grundseite umgeschlagen. So wird für das rechtwinklige Dreieck (Hypotenuse a) die Inhaltsbeziehung $J = s(s - a)$ und $J = (s - b)(s - c)$

1) I. L. Heiberg, *Quaestiones Archimedae*, Hauniae 1879. S. 29.

2) C. Schoy, Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abu'l-Raihan Muh. ibn Ahmad Al-Birûni, dargestellt nach Al-Qânûn al-Mas'ûdî. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von J. Ruska u. H. Wieleitner, Hannover 1927.

3) Archimedes und die Trigonometrie. Archiv für Geschichte der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik, 10. Band, Neue Folge 1, Heft 4, Leipzig 1927/28.

gezeigt, deren allgemeine Form $J^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, als Heronische Formel bekannt, nach dem Zeugnis des Al-Birûnî auch dem Archimedes angehört. Das letzte und wichtigste Beispiel solcher Seitenabtragungen gibt die Siebeneckkonstruktion, ohne irgendeine Bezugnahme auf die vorhergehenden

Sätze.

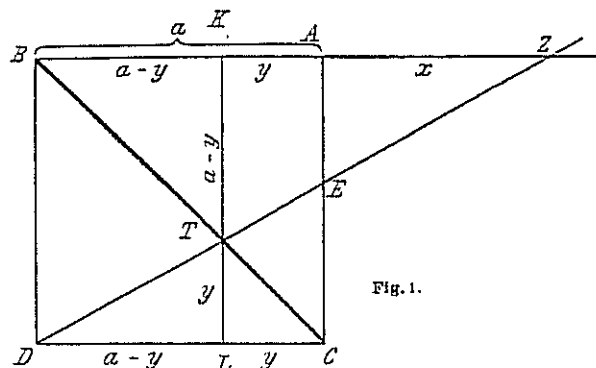


Fig. 1.

Archimedes legt ein Quadrat $ABDC$ — vgl. Fig. 1 — mit der Diagonale BC zugrunde und zerschneidet es durch Drehung einer Geraden $DTEZ$ um den Eckpunkt D so, daß $\triangle DTC$ gleich $\triangle AEZ$ wird.

Eine solche Lage ist offenbar immer möglich. Wandert beim Drehen der Geraden der Punkt Z von

A aus nach rechts, so sinkt der Inhalt des Dreieckes DTC von $\frac{1}{4}a^2$, wo a die Quadratseite ist, auf 0, während $\triangle AEZ$ von Null bis Unendlich wächst. Dazwischen muß irgendwo einmal die geforderte Gleichheit für einen bestimmten Punkt Z eintreten. Wie er diesen Punkt Z finden kann, gibt Archimedes nicht an; spätere arabische Abhandlungen benutzen eine Parabel und eine Hyperbel dazu (vgl. unten). Für diese Lage des Punktes Z beweist nun Archimedes die Beziehungen

$$(1) \quad AB \cdot KB = AZ^2, \text{ wo } AZ > AK \quad (3)$$

$$(2) \quad ZK \cdot AK = KB^2 \quad KB > AK, \quad (4)$$

oder, wenn wir $AB = a$, $AZ = x$, $AK = y$ setzen

$$(1a) \quad a(a-y) = x^2 \quad x > y \quad (3a)$$

$$(2a) \quad (x+y) \cdot y = (a-y)^2 \quad a-y > y. \quad (4a)$$

Nach der Voraussetzung ist $\triangle DTC = \triangle AEZ$, also

$$a \cdot y = x \cdot EA$$

oder

$$a : x = EA : y.$$

Da $\triangle ZAE \sim \triangle TLD$, so ist auch

$$EA : y = x : (a-y);$$

also erhält man durch Gleichsetzung sofort

$$a(a-y) = x^2.$$

Ferner ist $\triangle DTL \sim \triangle ZTK$, woraus $TL : DL = TK : KZ$ folgt, d. h. $y : (a-y) = (a-y) : (x+y)$

$$(x+y) \cdot y = (a-y)^2.$$

Auf den Beweis der Größenverhältnisse (3) und (4) geht Archimedes gar nicht ein; er ist aber leicht zu führen. Es war $a \cdot y = x \cdot EA$, also $x : y = a : EA$. Da $a > EA$, muß auch $x > y$ sein. Da ferner

$$TZ^2 = (a - y)^2 + (x + y)^2$$

$$DT^2 = (a - y)^2 + y^2,$$

so ist $TZ > DT$, also auch $BT > TC$ und $BK > KA$, d. h. $a - y > y$.

Nach diesen Vorbereitungen kommt die eigentliche Siebeneckzeichnung. Archimedes geht nicht von einem vorgelegten Kreis, sondern von einer beliebigen Strecke AB aus, die er durch die Punkte D und C in demselben Verhältnis teilt, wie in Fig. 1. BZ durch K und A geteilt ist. Setzen wir (Fig. 2) $AC = x$, $DC = y$, $DB = z$, so wird damit vorausgesetzt

$$(x + y) \cdot y = z^2 \quad x > y \quad \text{und} \quad z > y.$$

$$(y + z) \cdot z = x^2$$

Nunmehr schlägt Archimedes um D einen Kreis mit z und um C mit x (Fig. 2). Den Schnittpunkt H verbindet er mit A , C , D und B , konstruiert um ABH den umgeschriebenen Kreis und zieht darin noch HCZ , HDE , BTZ und CT . Jetzt wird gezeigt, daß BH die Siebeneckseite und B, H, A, Z, E Siebeneckpunkte sind.

Der Peripheriewinkel zu Bogen BH sei α , so daß $\angle A = \angle Z = \alpha$. Dann ist $\triangle DHC \sim \triangle DAH$ [S. W. S.: $\angle D$ gemeinsam; $z : y = (y + x) : z$ n. Vor.], also ist $\angle CHD = \alpha$. Da auch $\angle AHC = \alpha$ als Basiswinkel im gleichschenkeligen Dreieck ACH ist, sind schon die Bogen BH , AZ , ZE einander gleich. Daraus folgt weiter $HA \parallel BZ$ und $\angle ABZ = \alpha$.

Viereck $TCHB$ ist ein Sehnenviereck, da über TC zwei gleiche Winkel α stehen; insbesondere ist es ein gleichschenkliges Parallelogramm, da $\triangle BDT \cong \triangle HDC$ (W. S. W.), mithin $DT = y$. Das führt zur weiteren Ähnlichkeit

$$\triangle THC \sim \triangle CHD \text{ (S. W. S.: } \angle \alpha = \angle \alpha; (y + z) : x = x : z \text{ nach Vor.)},$$

aus der sich ergibt

$$\angle HTC = \angle HCD = 2\alpha \text{ (Außenwinkel zum gleichschkl. } \triangle HCA \text{)}.$$

Im Parallelogramm $TCHB$ ist nunmehr auch $\angle BHD$ und $\angle HBD$ je gleich 2α , die zugehörigen Kreisbögen BE und AH sind deshalb doppelt so groß wie Bogen BH : der große Kreis wird tatsächlich in sieben gleiche Bogenstücke zerlegt; BH ist die Siebeneckseite.

Damit schließt die Archimedische Abhandlung.

Von den anderen arabischen Schriften über das Siebeneck, die Schoy gesammelt hatte, übersetzte er nur noch eine, die des Ibn Al-Haitam (965—1039); sie ist hinter der Archimedischen Abhandlung abgedruckt. In ihr wird das

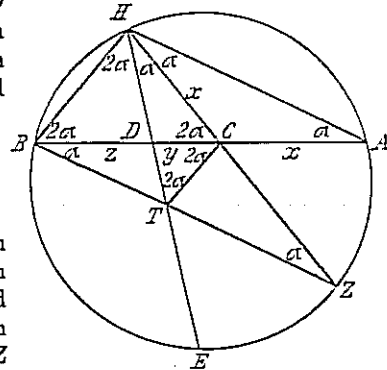


Fig. 2.

Archimedische Quadrat benutzt und dann eine Konstruktion mit Kegelschnitten durchgeführt. Zu einer solchen Lösung wäre übrigens Archimedes nach allem, was wir von ihm über derartige Lösungen kennen, auch instande gewesen. Die Flächenbeziehungen am Quadrat, Nr. 1 und 2, führen auf eine kubische Gleichung, wie wir uns heute ausdrücken. Setzt man diese Quadratseite wieder gleich a , also $y + z = a$, $z = a - y$, so kann aus $(x + y) \cdot y = (a - y)^2$ und $a \cdot (a - y) = x^2$ durch Elimination von y die Gleichung

$$x^3 + 2ax^2 - a^2x - a^3 = 0$$

abgeleitet werden. $a(a - y) = x^2$ stellt eine Parabel dar, $(x + y)y = (a - y)^2$ eine Hyperbel, wie die Umwandlung in $y(x + 2a) = a^2$ zeigt. Der Schnittpunkt beider Kurven liefert die Siebeneckseite x .

Der *Neuneckkonstruktion* widmet Al-Birûni in seinem Qânûn ein besonderes Kapitel. In der Grundlegung seiner Trigonometrie geht er bewußt altertümlich vor: er kennt den Ptolemäischen Lehrsatz vom Sehnenviereck, mit dem im *Almagest* des Ptolemaios (2. Jahrh. n. Chr.), wahrscheinlich aber schon von Hipparchos (um 150 v. Chr.), die Sehne der Summe zweier Zentriwinkel bzw. ihrer Differenz aus den Sehnen der Einzelwinkel (Additionstheorem) abgeleitet wird, sehr wohl und benutzt ihn gelegentlich, so auch beim Neuneck. An die Spitze seines Lehrbuches stellt er aber einen eigenartigen Satz, den er als *Prämisse des Archimedes* bezeichnet und der im Kern dasselbe leistet wie der Ptolemäische Satz¹⁾: Sind in einem Kreisbogen zwei anstoßende Sehnen ACD

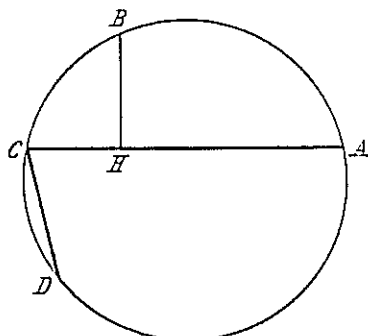


Fig. 3.

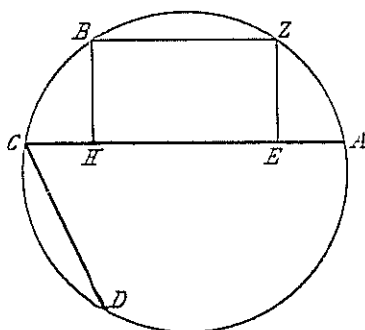


Fig. 4.

gezogen und ist B der Halbierungspunkt dieses Bogens, so halbiert der Fußpunkt H des von B auf die größere Sehne gefällten Lotes den „gebrochenen Linienzug“ ACD , d. h. $AH = HC + CD$. Für diesen Satz stellt Al-Birûni an anderer Stelle²⁾ 23 Beweise auf, von denen zwei unmittelbar von Archimedes stammen sollen. Der kürzeste Beweis ist der von Al-Sidschsi (972, Schiras) gegebene. Ist ACD der gebrochene Linienzug, B die Bogenmitte, so wird

1) Vgl. Archiv für Geschichte der Mathematik, der Naturwissenschaft und der Technik 10. Band, Neue Folge 1, Heft 4. Leipzig 1927/28.

2) H. Suter, Bibl. math. 11³. Leipzig 1910—11, S. 13 ff.

$DA = s$, so ergibt Prämisse II, Nr. (6), angewendet auf den gebrochenen Linienzug ADH , wo C die Mitte des Bogens AH und die nicht gezogene Sehne AC gleich x ist,

$$s \cdot y + y^2 = x^2. \quad (7)$$

Aus dem Ptolemäischen Lehrsatz im Sehnenviereck $ABDH$ folgt

$$(x + y) \cdot x + y^2 = s^2, \quad (8)$$

wo die nicht gezogene Diagonale HB gleich s ist. Die Seite des regelmäßigen Dreiecks ist bekannt, wenn der Radius des Kreises gegeben ist: $s = r \cdot \sqrt{3}$.

Bei der Lösung dieser beiden Gleichungen (7) und (8) mit zwei Unbekannten x und y geht Al-Birûni außerordentlich geschickt vor: er eliminiert nicht eine der beiden Unbekannten x oder y — das würde modern gerechnet die durch die Irrationalität von s unbequemen Gleichungen liefern

$$y^4 + sy^3 - s^2y^2 - \frac{2}{3}s^3y + \frac{1}{3}s^4 = 0,$$

bzw.

$$x^3 - s^2x + \frac{1}{3}s^3 = 0,$$

sondern er entfernt das s . Aus (7) folgt

$$s = \frac{x^2 - y^2}{y};$$

dadurch wird (8) zu

$$x^3 = y^3 + 3xy^2. \quad (9)$$

Auf die Wahl des Maßstabes, d. h. auf die Größe des Radius r , kommt es nicht an. Ist die Neunteilung für irgendeinen Kreis geleistet, so ist sie für jeden andern Kreis gefunden; man braucht ihn nur konzentrisch zu legen. Al-Birûni wählt nun den Maßstab so, daß die Neuneckseite y gleich 1 ist. Die diesem Maßstabe entsprechenden x und s seien mit $\underline{x}$ und $\underline{s}$ angedeutet. Die kubische Gleichung Nr. 9 wird nun einfach zu

$$\underline{x}^3 = 1 + 3\underline{x}. \quad (9a)$$

Für kubische Gleichungen besitzt Al-Birûni ein überraschend genaues Annäherungsverfahren, das uns für diese Zeit neu ist. Leider gibt uns Al-Birûni nicht das Verfahren, sondern nur das Resultat: es besitzt — in Sexagesimalbrüchen — eine Schürfe, die acht Dezimalstellen entspricht. Das berechnete $\underline{x}$ gibt ebenso genau

$$\underline{s} = \underline{x}^2 - 1.$$

Jetzt ändert Al-Birûni den Maßstab wieder so, daß der Radius der alte, also $s = r\sqrt{3}$ wird, und die Proportion besteht, wo y die Neuneckseite ist,

$$1 : y = \underline{s} : s$$

$$1 : y = \underline{x}^2 - 1 : r\sqrt{3},$$

woraus folgt

$$y = \frac{\sqrt{3}}{\underline{x}^2 - 1} \cdot r.$$

Die durchgeführte Berechnung liefert nach Umwandlung in die modernen Dezimalbrüche für $r = 1$

$$s_9 = 0,6840402740 \text{ statt genau } 0,6840402866.$$

Diese Berechnung der Neuneckseite überprüft Al-Birûnî auf zwei anderen Wegen: einmal, indem er auch eine Gleichung für s_{18} aufstellt und löst, zweitens, indem er mit trigonometrischen Sätzen durch fortgesetzte Annäherung $\sin 20^\circ$ und damit wiederum s_{18} berechnet. Aus s_{18} erhält er durch den Halbwinkelsatz s_9 .

Nehmen wir einen kleinen Winkel α an und tragen von dem Scheitelpunkt O an durch fortgesetztes Kreisschlagen mit der Zirkelspannung s gleichschenklige Dreiecke mit den Spitzen $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ usw. ein, so wird diese Konstruktion für gegebenes α und s bei einem Punkt A abbrechen. Jetzt soll α so bestimmt werden, daß nach dem letzten, dem n ten gleichschenkligen Dreieck $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ das Gesamtdreieck OA_nA_{n+1} ebenfalls gleichschenkelig

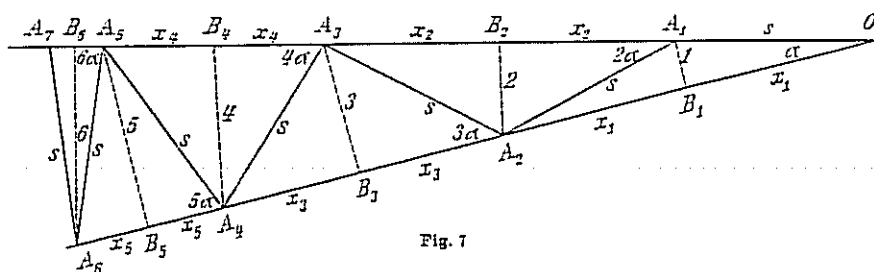


Fig. 7

ist, in der Figur Dreieck OA_6A_7 . Das letzte Dreieck, hier $A_5A_6A_7$, muß dem ganzen Dreieck, hier OA_6A_7 , ähnlich sein, da der Basiswinkel an dem letzten Punkt, hier A_7 , gemeinsam ist. Die Basiswinkel sind im ersten kleinen gleichschenkligen Dreieck, von O aus gerechnet, α , im zweiten, $n=2$, 2α , bei $n=3$, 3α , also im n ten Dreieck $A_{n-1}A_nA_{n+1}$, $n\alpha$. Der Winkel an der Spitze A_n des letzten Dreiecks wird also $180^\circ - 2n\alpha$. Dieser muß infolge der eben erwähnten Ähnlichkeit dem ursprünglichen Winkel α gleich sein. Der Prozeß bricht also in der geforderten Form nur ab, wenn

$$180^\circ - 2n\alpha = \alpha,$$

also

$$\alpha = \frac{180^\circ}{2n+1}$$

ist. Setzen wir $n=1, 2, 3, \dots$, so werden die s die Seiten regelmäßiger Vielecke

$n=1$	$\alpha_1 = 60^\circ$	$s = s_3$
$n=2$	$\alpha_2 = 36^\circ$	$s = s_{10}$
$n=3$	$\alpha_3 = \frac{180^\circ}{7}$	$s = s_{14}$
$n=4$	$\alpha_4 = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$	$s = s_{18}$
$n=5$	$\alpha_5 = \frac{180^\circ}{11}$	$s = s_{22}$ usw.

$n=2$ liefert die bekannte Zehneckskonstruktion, $n=4$ benutzt Al-Birûnî zur Berechnung des regelmäßigen Achtehnecks, natürlich ohne die obigen allgemeinen Betrachtungen, $n=3$ findet sich bei einem anonymen Araber aus der Zeit Al-Birûnîs (vgl. unten S. 204).

Nennen wir in der allgemeinen Figur die Mitten der Grundlinien $B_1, B_2, B_3, \dots$, die Grundlinien selbst $2x_1, 2x_2, 2x_3, \dots$, so sind die rechtwinkligen Dreiecke $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, \dots$ ähnlich, da sie im Winkel α übereinstimmen; also bestehen die Proportionen

$$\left. \begin{aligned} x_1 : s &= (s + x_2) : 2x_1 = (2x_1 + x_3) : (s + 2x_2) \\ &= (x_1 + 2x_2 + s) : (2x_3 + 2x_1) \\ &= (x_5 + 2x_3 + 2x_1) : (2x_4 + 2x_2 + s) = \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Ähnlichkeit zwischen dem Gesamtdreieck und dem letzten Dreieck $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ liefert, wenn $OA_n = OA_{n+1} = r$ gesetzt wird, $s : r = 2x_n : s$ oder

$$2x_n r = s^2. \quad (11)$$

Die Beziehungen (10) gestatten nacheinander die Ableitung der bekannten Formeln $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha, \dots$. Sie geben in Kombination mit (11) die Bestimmungsgleichung für s_{10} ,

$$s_{14}, s_{18}, \dots$$

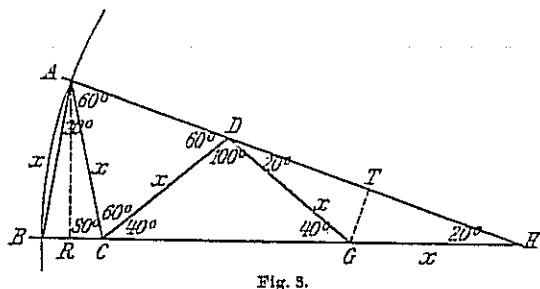


Fig. 3.

Wir betrachten die Figur Al-Birûnis, die auch sein Zeitgenosse Abu'l Dschûd an anderer Stelle¹⁾ nach ihm benutzt. Das erste gleichschenkelige Dreieck HGD hat die Basiswinkel 20° , das zweite GDC solche von 40° , das dritte ist gleichseitig mit Winkeln

von 60° , das vierte und letzte ABC hat die Basiswinkel 80° und den Spitzenwinkel 20° . Al-Birûni setzt den Radius $HA = HB$ gleich 1. Führen wir für $AB = s_{18}$ das Symbol x ein, so wird nach (11) $BC = x^2$ und die Hälfte BR gleich $\frac{1}{2}x^2$. AD ist als Seite im gleichseitigen Dreieck ACD gleich x . Fällt man jetzt $AR \perp BC$ und $GT \perp DH$, so sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ARR und GTH ähnlich; es verhält sich

$$\begin{aligned} AH : HR &= GH : TH \\ 1 : \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) &= x : \frac{1-x}{2}. \end{aligned}$$

Dies führt zur kubischen Gleichung

$$x^3 + 1 = 3x, \quad (12)$$

die Al-Birûni wiederum durch sein treffliches Näherungsverfahren löst; er findet

$$s_{18} = x = 0,3472963\overline{735} \text{ statt genau } 0,3472963\overline{553}.$$

Uns füllt die Ähnlichkeit der Gleichung (12) des Achtzehneckes mit der beim Neuneck gefundenen Gleichung (9a) auf. Beide unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen der Unbekannten voneinander.

1) F. Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî. Paris 1851, S. 125/126.

Lösen wir die Gleichung $x^3 - 3x = 1$ in bekannter Weise durch Einführung von $\cos \varphi = \frac{1}{2}$; $\varphi = 60^\circ$, so ergeben sich die drei Lösungen

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 \cdot \cos 20^\circ \\x_2 &= -2 \cdot \cos 40^\circ \\x_3 &= -2 \cdot \cos 80^\circ = -2 \cdot \sin 10^\circ.\end{aligned}$$

Aus dem Bestimmungsdreieck für s_{18} mit dem Zentriwinkel 20° findet man

$$s_{18} = 2r \sin 10^\circ.$$

Für $r = 1$ ist also tatsächlich $s_{18} = -x_3$. In Al-Birûnis erster Neuneckfigur (Fig. 6) gehört x zum Zentriwinkel von 80° , also ist $x = 2r \sin 40^\circ$. Die Neuneckseite selbst ist $s_9 = 2r \sin 20^\circ$. Wird der Maßstab, wie dort beliebt, so geändert, daß $s_9 = 1$, so ist

$$r = \frac{1}{2 \cdot \sin 20^\circ},$$

also das entsprechende x

$$x = \frac{2 \cdot \sin 40^\circ}{2 \cdot \sin 20^\circ} = 2 \cdot \cos 20^\circ,$$

in der Tat ein Wurzelwert derselben Gleichung.

Al-Birûni führt für seinen Wert von s_9

$$s_9 = \text{chord } 40^\circ = 2 \sin 20^\circ \quad r = 1$$

noch eine sehr interessante, wenn auch recht mühsame trigonometrische Kontrollrechnung durch.

Aus den bekannten Werten

$$s_{12} = \text{chord } 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \quad \text{und} \quad s_{30} = \text{chord } 12^\circ = 2 \sin 6^\circ$$

findet er mit dem Additionstheorem $\sin 21^\circ$. Durch zweimalige Anwendung des Halbwinkelsatzes kann er hieraus $\sin 5^\circ 15'$ finden. Jetzt kombiniert er $\sin 5^\circ 15'$ mit $\sin 15^\circ$ und errechnet $\sin 20^\circ 15'$ und mit Hilfe dieses Wertes durch Viertelung $\sin 5^\circ 3' 45''$. Erneute Kombination mit $\sin 15^\circ$ liefert $\sin 20^\circ 3' 45''$. Die Viertelung führt zu $\sin 5^\circ 0' 56'' 15'''$ und damit zu $\sin 20^\circ 0' 56'' 15'''$ usf. Die zehnte Viertelung gibt ihm $\sin 20^\circ$ mit einem Werte, der von dem vorher berechneten Wert von s_9 nur in einer halben Quarte abweicht.

Den Wert der Neuneckseite benutzt Al-Birûni zur Neubestimmung von $\text{chord } 2^\circ$ und $\text{chord } 1^\circ$, d. h. $\sin 1^\circ$ und $\sin \frac{1}{2}^\circ$, indem er aus $s_9 = \text{chord } 40^\circ$ und $s_{10} = \text{chord } 36^\circ$ $\text{chord } 4^\circ$ bildet. Durch Halbierungen ergibt sich schließlich $\text{chord } 1^\circ = 0^\circ 1' 2'' 49''' 51^{IV} 24^V$.

Nach dem Verfahren des Ptolemaios¹⁾, dessen Beweis Al-Birûni etwas vereinfacht, verbessert er den Ptolemäischen Wert

$$\text{chord } 1^\circ = 1^\circ 2' 50''$$

bis zu

$$\text{chord } 1^\circ = 1^\circ 2' 49'' 52''' 7''''.$$

1) Cf. Ptolemaei Opera quae exstant omnia. Vol. I. Syntaxis mathematica, ed. Heiberg. Leipzig 1898, S. 45—46. Übersetzung von Manitius, Handbuch der Astronomie. Leipzig 1912, S. 34—35.

Diese Verfeinerung gibt ihm nicht nur die Mittel für eine verschärfte Sinustafel an die Hand, deren Genauigkeit unsern siebenstelligen Tafeln entspricht, sondern auch für einen neuen π -Wert. Leider hat er hierbei Unglück, da er befremdlicher Weise nicht seine genauesten Werte für chord 2° , bzw. chord 1° und tang 1° einsetzt, und dadurch einen Wert 3,141747 ausrechnet, der nicht an den schon den Griechen und den Indern bekannten Wert 3,14166 in der Genauigkeit heranreicht.

Jedenfalls zeigt uns die ganze Darstellung, daß Al-Birûnî unter allen Muslimen eine ganz hervorragende Stellung einnimmt und daß die Araber auch selbständig Neubestimmungen von π , was wir bisher nicht wußten, vorgenommen haben.

Die von Al-Birûnî neu berechnete Sinustafel, die uns Schoy abdruckt, geht von $15'$ zu $15'$ und gibt die Werte bis auf Quartan, zumeist mit einer Genauigkeit von sieben Dezimalstellen; einige Werte sind nicht ganz so genau, wohl weil er verschiedene Rechner dabei beschäftigt hatte. Das Berechnen der Sinuswerte von $1'$ zu $1'$ wird durch Benutzung von zweiten Differenzen verschärft — erstmalig in der Geschichte der Mathematik!

Bei der Behandlung der Schattenfunktion, unsers heutigen $\operatorname{ctg} \alpha$, füllt die Bemerkung auf, daß schon die Inder diese Funktion kannten, was wir bisher nicht wußten: man glaubte sie erstmalig bei dem Araber Al-Habaš (starb 865/875?, 100 Jahr alt, Bagdad) behandelt zu sehen. Die von Al-Birûnî gegebene Tangententafel, die von 1° zu 1° fortschreitet, hat dieselbe Genauigkeit bis zu sieben Dezimalstellen wie die Sinustafel; auch hier wird bei der Interpolation von zweiten Differenzen Gebrauch gemacht.

Es wurde oben erwähnt, daß die Fig. 7 auch für $n = 3$ (Vierzehneck) bei den Arabern bekannt gewesen sei. Es verrät uns das eine anonyme Randbemerkung in einem arabischen Manuskript, die Woepcke¹⁾ mitteilt. Hier ist (mit anderen Buchstaben) nur das Hauptdreieck OA_3A_4 und das letzte Teildreieck $A_4A_3A_2$ gezeichnet und für $\alpha = \frac{180^\circ}{7}$, d. h. $A_3A_4 = s_{14}$, werden die Proportionen aufgestellt — ohne Beweis —

$$A_4A_3 : A_4A_2 = A_4A_3 : A_3O$$

$$A_4A_3 : A_2O = A_4O : (A_4O + A_2O),$$

$$\text{also} \quad 2x_3 : s = s : r \quad (12)$$

$$s : 2x_1 = r : (r + 2x_1). \quad (13)$$

Die anonyme Randbemerkung gibt übrigens dahinter auch zwei Proportionen für s_{18} , deren zweite aber einen Fehler zu enthalten scheint.

Setzen wir $A_4O = A_3O = r = 1$, so haben wir

$$2x_1 + 2x_3 = 1$$

$$s + 2x_2 = 1$$

1) F. Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkhayyâmi. Paris 1861, S. 127.

und gemäß (10) und (11)

$$x_1 : s = (s + x_1) : 2x_1 = (2x_1 + x_3) : (s + 2x_2) \quad (10a)$$

$$2x_3 = s^2. \quad (11a)$$

(11a) stimmt mit (12) überein. Kombiniert man das erste und das letzte Verhältnis von (10a) mit $2x_1 + 2x_3 = 1$, so erhält man, ebenso wie aus (13),

$$2x_1 = \frac{s}{1-s}.$$

Wird $2x_1 + 2x_3 = 1$ mit (11a) kombiniert, so ist

$$2x_1 = 1 - s^2.$$

Diese beiden Werte für $2x_1$ geben eine kubische Gleichung für s_{14}

$$s^3 - s^2 - 2s + 1 = 0 \quad (14)$$

mit den Lösungen $s' = 1,8019$; $s'' = -1,2470$; $s''' = 0,44504$, von denen, da s_{14} kleiner als $s_6 = r = 1$ ist, nur s''' zutrifft. Diese Gleichung finden wir bei den Arabern nicht; merkwürdigerweise tritt sie aber bei der Archimedischen Siebeneckteilung auf, wenn wir diese modern durchrechnen.

Nennt man dort nicht die Quadratseite a [(1a) und (2a)], sondern die ganze Strecke BZ in Fig. 1, setzt also in der folgenden Fig. 2 die über drei Siebeneckseiten gespannte Sehne AB gleich a , so lauten die Archimedischen Beziehungen

$$x + y + z = a \quad (15)$$

$$(x + y) \cdot y = z^2 \quad (16)$$

$$(y + z) \cdot z = x^2. \quad (17)$$

Eliminiert man z einmal aus (15) und (17), dann aus (15) und (16), so erhält man die beiden Ausdrücke für y

$$y = \frac{2ax - a^2}{x - a} = \frac{a^2 + x^2 - 2ax}{2a - x^2},$$

die auf die kubische Gleichung führen

$$x^3 - ax^2 - 2a^2x + a^3 = 0.$$

Nimmt man jetzt $a = 1$ und etwa $x = \underline{x}$, so stoßen wir genau auf die Gleichung (14)

$$\underline{x}^3 - \underline{x}^2 - 2\underline{x} + 1 = 0. \quad (14a)$$

Die numerische Auswertung und trigonometrische Kontrollrechnung ergibt sogar, daß nur derselbe Wurzelwert s''' in Betracht kommt, bei s_{14} für $r = 1$, bei $s_7 = \underline{x}$ für $AB = 1$.

Das läßt sich folgendermaßen beweisen. Bezeichnet man den Zentriwinkel des Siebenecks $\frac{360^\circ}{7}$ mit α , so ist

$$s_7 = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$s_{14} = 2r \sin \frac{\alpha}{4}$$

AB (Diagonale über drei Siebeneckseiten) =

$$a = 2r \sin \frac{3\alpha}{2}.$$

Dieses α gleich 1 gesetzt, wie es bei (14a) verlangt wird, bestimmt

$$r = \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{3\alpha}{2}},$$

also

$$s_7 = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{3\alpha}{2}}.$$

Nun soll s_7 dieselbe Wurzel von (14a) sein, wie s_{14} für $r = 1$. Demnach muß die Gleichung bestehen

$$2 \sin \frac{\alpha}{4} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{2}}.$$

Daraus leitet man ab

$$2 \sin \frac{\alpha}{4} = \frac{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{4}}{\sin \frac{3\alpha}{2}}.$$

$$\sin \frac{3\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{4}$$

$$\frac{3\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{4}$$

$$7\alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{7}.$$

α ist also in der Tat der Siebeneckswinkel und nur bei s_7 und s_{14} kann eine solche Wurzelgleichheit eintreten.

Bei s_9 und s_{18} sahen wir *auch* das Auftreten einer und derselben kubischen Gleichung; hier kamen aber zwei verschiedene Wurzeln in Betracht. Es bleibe dem modernen Mathematiker überlassen zu untersuchen, ob ähnliche Beziehungen bei s_{11} und s_{22} auftreten oder gar allgemein, bei s_n und s_{2n} .

Die arabische Überlieferung über das Siebeneck hat sich bis zum 15. Jahrhundert wach gehalten. Cardano bringt im *Opus novum*, Basilae 1570, S. 56 beide oben angeführten Gleichungen des Siebenecks: die eine $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ verdankt er seiner eigenen Angabe nach seinem Schüler Ferrari¹⁾, die andere $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ dem Pacioli (1494, *Summa*). Da diese zweite die aus dem Archimedisches Quadrat abgeleitete Form (S. 198) ist, dürfte bei Pacioli arabische Quelle anzunehmen sein.

1) E. Bortolotti, *Il Primo fra i Quesiti proposti dal Ferrari al Tartaglia nel suo 3° Cartello di matematica disfidata* . . . Nota 14. III. 1926. Acad. Bologna.

Über die Lösung einiger Aufgaben im „Tractatus de numeris datis“ des Jordanus Nemorarius.

Von

G. Wertheim in Frankfurt a. M.

Bekanntlich hat JORDANUS NEMORARIUS in seinem *Tractatus de numeris datis* von dem einfachen falschen Ansatz vielfach Gebrauch gemacht. Eine einfache Aufgabe, in der das geschieht, wird von CANTOR auf Seite 70 des II. Bandes seiner *Vorlesungen* besprochen. Bei zwei anderen Aufgaben (Nr. 56 u. 57 in der Ausgabe von P. TREUTLEIN¹⁾, Nr. 27 u. 28 des 2. Buches in der von M. CURTZE²⁾) sagt CANTOR, sei die Anwendung des falschen Ansatzes viel verwickelter. Das ist sie aber nur, wenn man sich, wie CANTOR es anscheinend thut, an die Lösungen hält, welche CURTZE aus dem etwas unklaren Text mit einer gewissen Willkür herausgelesen hat.

JORDANUS erklärt ausdrücklich, wie CANTOR auch hervorhebt, er bediene sich bei der Lösung einer arabischen Methode. In der That findet sich die erste der beiden Aufgaben (die zweite ist im wesentlichen dieselbe) in der Algebra des ALKARKHI³⁾, und dieser hat sie dem DIOPHANT⁴⁾ entnommen. ALKARKHI schlägt bei der Lösung auch denselben Weg wie DIOPHANT ein, und ihnen ist offenbar JORDANUS gefolgt.

Es sollen vier Zahlen I, II, III, IV gefunden werden, welche den Bedingungen

$$(1) \quad \begin{cases} I + \frac{II + III + IV}{2} = 37 \\ II + \frac{I + III + IV}{3} = 37 \\ III + \frac{I + II + IV}{4} = 37 \\ IV + \frac{I + II + III}{5} = 37 \end{cases}$$

genügen.

1) Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 2, 1879, S. 153.

2) Zeitachr. für Mathem. 36, 1891; Hist. Abt. S. 61.

3) F. WOPCKE, *Extrait du Fakhri* (Paris 1853), S. 97.

4) I, 28. Siehe Seite 34 meiner Übersetzung.

Man wählt eine Zahl, welche durch einige der vorkommenden Divisoren teilbar ist, etwa 12, und setzt

$$(2) \quad I = x, \quad II + III + IV = 12.$$

Dann wird die linke Seite der ersten der Gleichungen (1) gleich $x + 6$, und da alle linken Seiten gleich sind, so muß auch jede der übrigen gleich $x + 6$ sein. Es ist also zunächst

$$II + \frac{I + III + IV}{3} = x + 6,$$

und hieraus folgt der Reihe nach

$$3 \cdot II + I + III + IV = 3x + 18,$$

$$2 \cdot II + x + II + III + IV = 3x + 18,$$

$$2 II + x + 12 = 3x + 18,$$

$$(3) \quad II = x + 3.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich aus den beiden letzten der Gleichungen (1)

$$(4) \quad III = x + 4,$$

$$(5) \quad IV = x + 4\frac{1}{2}.$$

Die Addition von (3), (4) und (5) liefert bei Berücksichtigung von (2)

$$3x + 11\frac{1}{2} = 12,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{1}{6}.$$

Die gesuchten Zahlen wären danach

$$\frac{1}{6}, \quad 3\frac{1}{6}, \quad 4\frac{1}{6}, \quad 4\frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

Für diese Werte wäre aber die linke Seite jeder der Gleichungen (1) nur $6\frac{1}{6} [= x + 6]$, während sie gleich 37, also 6mal so groß sein soll. Die wirklichen Werte der gesuchten Zahlen sind somit

$$1, \quad 19, \quad 25, \quad 28.$$

Wie man sieht, ist diese ganz nach ALKARKHI oder DIOPHANT geführte Lösung nicht nur selbst äußerst einfach, sondern es ist bei ihr auch die Anwendung des falschen Ansatzes durchaus nicht verwickelt. Sie enthält zudem alle im Text des JORDANUS vorkommenden Hilfszahlen. Eine Übersetzung dieses möglicherweise recht verdorbenen Textes ist sie freilich nicht; das ist aber ebensowenig die von CURTZE gegebene schwer verständliche und auf einer durchaus willkürlichen Annahme beruhende Lösung.

Noch eine dritte Aufgabe, Nr. 24 desselben Buches, möge folgen. In CURTZE an der Lösung derselben, wie JORDANUS sie giebt, vollständig verzweifelt. Nachdem CURTZE die Gleichungen auf Grund des Textes aufgestellt hat, sagt er: „Der Text, wie er vorliegt, ist in seinen späteren

Teilen absolut unverständlich“. Er nimmt dann eine kleine Umformung der Gleichungen vor und führt fort: „Alles Übrige ist jedenfalls so verdorben, daß der weitere Sinn nicht zu enträtseln ist. Auch das Beispiel ... giebt für die Art der Lösung nicht genügende Fingerzeige“.

Ich gehe jetzt die Lösung nach dem Text des JORDANUS; die Gewandtheit dieses großen Mannes wird dann in hellem Licht erstrahlen.

Es sollen vier Zahlen gefunden werden, welche den Gleichungen

- (1) $I + 6 = \frac{1}{9} (II + III + IV),$
- (2) $II + 6 = \frac{1}{3} (I + III + IV),$
- (3) $III + 6 = \frac{2}{5} (I + II + IV),$
- (4) $IV + 6 = I + II + III$

genügen.

Wird (1) mit $\frac{1}{3}$ und (2) mit $\frac{1}{9}$ multipliziert, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} (I + 6) &= \frac{1}{27} (II + III + IV), \\ \frac{1}{9} (II + 6) &= \frac{1}{27} (I + III + IV),\end{aligned}$$

oder, wenn in jeder dieser Gleichungen beiderseits $\frac{6}{27}$ addiert wird,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} (I + 6) + \frac{6}{27} &= \frac{1}{27} (II + 6) + \frac{1}{27} (III + IV), \\ \frac{1}{9} (II + 6) + \frac{6}{27} &= \frac{1}{27} (I + 6) + \frac{1}{27} (III + IV).\end{aligned}$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten und Vereinigung der Glieder in $I + 6$ und derjenigen in $(II + 6)$ erhält man

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{27}\right) (I + 6) = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right) (II + 6),$$

und da $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{27}\right) : \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right) = 2\frac{1}{2}$ ist, so ergibt sich

$$(5) \quad II + 6 = 2\frac{1}{2} (I + 6).$$

Wird weiter (1) mit $\frac{2}{5}$ und (3) mit $\frac{1}{9}$ multipliziert und beiderseits $\frac{6}{15}$ addiert, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} (I + 6) + \frac{6}{15} &= \frac{1}{15} (III + 6) + \frac{1}{15} (II + IV), \\ \frac{1}{9} (III + 6) + \frac{6}{15} &= \frac{1}{15} (I + 6) + \frac{1}{15} (II + IV),\end{aligned}$$

woraus wie oben

$$\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{15}\right) (I + 6) = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{15}\right) (III + 6)$$

oder

$$(6) \quad III + 6 = 3\frac{3}{4} (I + 6)$$

folgt.

Endlich wird (1) mit 1 und (4) mit $\frac{1}{9}$ multipliziert und beiderseits $\frac{6}{9}$ addiert. Man erhält

$$\begin{aligned}(I + 6) + \frac{6}{9} &= \frac{1}{9} (IV + 6) + \frac{1}{9} (II + III), \\ \frac{1}{9} (IV + 6) + \frac{6}{9} &= \frac{1}{9} (I + 6) + \frac{1}{9} (II + III),\end{aligned}$$

420 G. WERTHEIM: Über d. Lösung einiger Aufg. im „Tractatus de numeris datis“.

und daraus weiter

$$(1 + \frac{1}{9})(I + 6) = (\frac{1}{9} + \frac{1}{9})(IV + 6)$$

oder, da $1\frac{1}{9} : \frac{2}{9} = 5$ ist,

$$(7) \quad IV + 6 = 5(I + 6).$$

Die Addition der Gleichungen (5), (6), (7) liefert

$$II + III + IV + 18 = 11\frac{1}{4}(I + 6),$$

und da nach (1)

$$II + III + IV = 9(I + 6)$$

ist, so muß

$$2\frac{1}{4}(I + 6) = 18,$$

also

$$I + 6 = 8,$$

$$I = 2$$

sein. Dann geben die Gleichungen (5), (6), (7) der Reihe nach

$$II = 14, \quad III = 24, \quad IV = 34.$$

EL MATEMÁTICO MADRILEÑO MASLAMA BENAHMED

NOTAS PARA UNA BIO-BIBLIOGRAFÍA

Madrid, castillo famoso

En el primer tercio del siglo x Madrid era un pueblo pequeño, pero bien murado, ante el temor de un nuevo ataque de los moros, y es fama que un profundo foso ceñía sus recias murallas de cal y canto y argamasa para hacer inexpugnable la hoy capital de la República española, cuyos diversos nombres, a través del tiempo, dejó consignados su noble y erudito regidor D. Juan Hurtado de Mendoza en un soneto:

•Antiguos griegos Mantua te pusieron,
y los romanos, que después fundaron,
Ursaria y Magerito te llamaron,
de aquí Madrid y Oxaria te dixerón.

Los que pronosticar en tí pudieron
de adivinanza, Mantua te nombraron;
pero los que tu cerca acrecentaron
el nombre Maioritum te añadieron.

Al natural pronóstico dispuesto
tu sitio, ilustre y señorial, arguye
señas de largo y ancho cielo y suelo.

Tu Maioritum a tu Mantua incluye
con siete tanto muro bien apuesto
si la verdad no se me va de vuelo.

En aquel tiempo sólo se podía penetrar en Madrid por los puentes levadizos que daban acceso a sus cinco puertas: Balnadú, Guadalajara, Cerrada, Moros y Vega.

Esta última —así llamada por la feraz llanura que se extendía ante ella, y en cuyo comienzo estaba la leprosería de San Lázaro— terminaba en un agujero donde tenían en secreto una gran pesa de hierro, que, en tiempo de guerra, con algún trabuco o torno dexauan caer con violencia, haziendo

a los que hallaua debaxo mil menuzos (1). Allí empezaba la muralla de doce pies de ancho; corría por la hoy calle de Segovia hasta el actual edificio del Consejo de Estado y terminaba este lienzo en el arco de Santa María, rematado por una torre de pedernal.

La puerta de Guadalajara, de veinte pies de luz por cuarenta de altura, estaba flanqueada por dos cubos de pedernal unidos por una bóveda de piedra de sillería, asiento de un oratorio, y era una de las más suntuosas de Castilla; la de los Moros —que tomó este nombre porque la utilizaban los mahometanos para ir a Toledo— miraba al mediodía, y en lo sumo de su arco abría los brazos generosos una cruz de piedra; la puerta Cerrada, también con orientación meridional, se llamaba así por ser la más estrecha de todas, y, finalmente, la puerta Bañadú era la única entrada que Madrid tenía al Norte, por donde, además de los trajinantes, se colaba el aire del Guadarrama,

que mata a un hombre
y no apaga un candil.

.....
Madrid, Madrid,
altas torres, villa gentil,

no sólo porque casi todas sus casas eran torreadas, sino por los ciento veintiocho cubos que adornaban sus murallas, siendo de notar el llamado castillo de Torre Narigues del Pozacho por su forma de nariz y su situación en la margen derecha de este arroyo.

Aparte de su cintura, poco tenía de notable la villa del oso y del madroño, cuya única importancia era su posición estratégica: un humilladero, cerca de Santo Domingo el Real; otro en el Atochar, cuyas aguas curaban el mal de piedra, y cuatro ermitas: San Juan Evangelista, Santa Polonia, Santa Coloma y Atochar, la más famosa de las cuales era esta última porque en ella se veneraba la imagen que los simples afirmaban haberla traído de Antioquía el propio San Pedro hacia mediados del primer siglo del cómputo cristiano y cuyos milagros atraían a gran número de peregrinos que hallaban mantención y reposo en el hospital de San Ginés de los Caballeros.

Vida sencilla, costumbres honestas y apacible ambiente caracterizaban a Madrid cuando, según Quintana, «entraron [los moros] en ella, assentaron sus cosas, y establecido sus leyes, aficionaronsele tanto que hizieron della siempre grande estima, fauorecieronla y trataronla benigne-
mente, fortificando y reedificando sus murallas, ampliaron sus arrabales, para q viniesen en el los Christianos que quedaron. A su Alcayde

(1) Quintana, *Historia de la Antigüedad, Nobleza y Grandeza de la villa de Madrid*, tomo 23 r., 1.ª col.

dierō en las Cortes la primera voz entre todos los del Reyno de Toledo, como consta de la historia de Santa Casilda, hija de Alimaymo, Rey de aquella Imperial ciudad. Y por ser los naturales deste lugar de ingenios sutiles, y entendimientos superiores, y de notable capacidad, aplicados a todo genero de letras pusierō en el sus escuelas, haziendola Academia y Vniuersidad, donde concurrían de todo el Reyno aprender las ciencias naturales de Astrologia y Auscultacion de los Astros, en que fueron eminētes, y sería possible ser los Arabes los que por esta razon le añadieron al escudo de armas las siete Estrellas q̄ tiene por orla. Desta opinion son todos los autores que siguen la interpretacion que dió Frāncisco Lopez de Tamarit, interprete del Santo Oficio de la ciudad de Granada, a este nombre Madrid, el qual dize, que en lengua Arabiga significa la madre del saber, por tener aquí las Escuelas que hemos dicho (2).

Pero la Astrologia que se estudiaba en estas escuelas era bien escasa. Limitábase a las nociones imprescindibles para orientar las mezquitas con su alquibla y a calcular las horas del día y de la noche en las distintas estaciones del año para saber el instante en que el almuédano tenía que subir al alminar a convocar a los fieles a la oración; alimento científico demasiado frugal para quien tuviese el alma abierta a todas las inquietudes espirituales.

Primeras noticias de Maslama

En una de estas academias trabó comercio con las Ciencias exactas uno de los más ilustres representantes de la Matemática árabe-española, Maslama Benahmed el Faradī el Hāsib el Cortobī el Machritī (Abulcāsīm), cuya fecha de nacimiento no consta en parte alguna, pero que puede fijarse en el primer tercio del siglo x.

Como estaba prohibido el estudio racional de la Astronomía, Maslama leía clandestinamente el *Almagesto*, de Ptolomeo, y en la magna obra del bibliotecario alejandrino encontró las sugerencias que orientaron su vocación para bien de la ciencia española y honra de Madrid, a cuya clara luz se abrieron por vez primera los ojos del sabio. Ante el códice ptolemaico Maslama debió de experimentar la misma emoción que cinco siglos después el Correggio al ver la *Victoria* de Mantegna. El *anch'io sonno pittore* del artista del renacimiento italiano, bien pudo tener un anticipo en un «también yo soy astrónomo» del matemático árabe-madrileño.

Pero las leyes eran inflexibles, y el dictado de hereje caía sobre la cabeza de quien se atreviese a salir de la categoría de estrellero para elevarse a la de investigador en la noble acepción del vocablo.

Aparte de la exégesis coránica y de los principios políticos, recopila-

(2) Loc. cit., fol. 84 v., 2.^a col.

dos después en la *Lucerna de los reyes*, de Abubéquer Mohamed Benalvalid, de tal cual libro de Medicina y de algún tratadito gramatical, Maslama no podía leer otra cosa que el pergamino en que se dieran reglas para averiguar el tiempo que duraban las lunaciones. Mas no es difícil imaginárselo junto a la puerta de los Moros, tomando el sol del mediodía en las mañanas templadas del invierno, sentado en una estera, sobre la cual se esparcían pergaminosos cuadernos entre la caja de los cálamos y el tintero, y por debajo de cuyos flecos asomaba un escondido folio de la obra de Ptolomeo que le obsesionaba. La excentricidad de las órbitas del sol y de la luna, la teoría geométrica de los movimientos de estos dos astros en complicados epiciclos, las circunferencias que definían su trayectoria con arreglo a las ideas de Hiparco, las hipótesis para hacer compatible la circularidad de los movimientos planetarios con la uniformidad, eran temas que, encuadrando en las bases que más tarde había de sentar Alfonso el Sabio —hincadas sus raíces en la tradición isidoriana—, enfocaban la Astrología desde un punto de vista que no era el condenable y condenado aspecto judicial, único bajo el cual podía tratarse en aquella época.

El vulgo aceptaba a los agoreros, adivinos y fabricantes de amuletos —tolerados también por la iglesia—, pero era inflexible con la serena mirada al alto cielo donde los astros escriben las más bellas leyes naturales, como no fuera para leer en su página azul el sino de los hombres.

Y Maslama, al mágico conjuro del *Almagesto*, soñaba... Soñaba acaso con las inmortales palabras platónicas: «No quiero hablar de la Sibila, ni de todos aquellos que habiendo recibido de los dioses el don de la profecía han inspirado a los hombres sabios pensamientos, anunciándoles el porvenir, porque sería extenderme inútilmente sobre una cosa que nadie ignora. Por otra parte puedo invocar el testimonio de los sentidos que han creado el lenguaje; no han considerado el delirio, *μανία*, como indigno y deshonoroso, porque no hubieran aplicado este nombre a la más noble de todas las artes, la que nos da a conocer el porvenir, y no la hubiesen llamado *μαντική*, y si le dieron este nombre fué porque pensaron que el delirio es un don magnífico cuando nos viene de los dioses. La actual generación, introduciendo debidamente una *τ* en esta palabra, ha creado la de *μαντική*. Por el contrario, la indagación del porvenir hecha por hombres sin inspiración, que observaban el vuelo de los pájaros y otros signos, se la llamó *οἰσμομαντική* porque estos adivinos buscaban, con el auxilio del razonamiento, dar al pensamiento humano la inteligencia y el conocimiento; y los modernos, mudando la antigua *ο* en la enfática *μ*, han llamado a este arte *οἰμωμαντική*. Por lo tanto, todo lo que la profecía tiene de perfección y de dignidad sobre el arte augural, tanto respecto del hombre como respecto de la cosa, otro tanto el delirio, que viene de los dioses, es más noble que la sabiduría que viene de los hombres. Y los antiguos nos lo atestiguan» (3).

(3) *Fedro*, XXII, 243 E.

El exodo

El primer tercio del siglo toca a su fin. Maslama es un joven que ya ha llamado la atención entre los musulmanes cultos, quienes están muy inquietos porque adivinan que, ante las noticias que llegan de Toledo, van a tener que dejar las letras por las armas. Los toledanos se han rebelado contra Abderrahman III, y Ramiro II, el más belicoso monarca de la dinastía leonesa, ha enviado un ejército en socorro de los cristianos que luchan en Zocodover contra la morisma.

El hermano de Alfonso IV no consiguió su objetivo; pero luego de reunir a todos los magnates de su reino —según un cronista coetáneo— les consultó la manera de entrar en tierra de moros, y juntando su ejército, encaminóse hacia Madrid, en donde entró un domingo, dismanteló sus muros e hizo horrorosos estragos, protegido —¡naturalmente!— por la clemencia divina, que sólo podía ver con buenos ojos a los cristianos, los cuales siempre han hecho intervenir en sus victorias al dios de las batallas (4).

Espantosa fué la carnicería que hizo Ramiro II entre los musulmanes madrileños. Los que pudieron escapar de la matanza se refugiaron en apartada aljama (5) y otros se corrieron a los dominios de Fernán González —el famoso conde en quien Castilla había de encontrar un vengador—, mientras Ramiro, «viendo lo mucho q̄ le auia costado [la conquista de Madrid] pareciole no passar por entonces adelante con su intento, y assi dio la buelta a Leō, victorioso y rico de despojos» (6) a gozar pacíficamente de su triunfo (7) en los brazos de Teresa Florentina.

Pero el excelente conde —*egregius comes*— le declaró la guerra, y aunque Ramiro lo hizo prisionero encerrándole en un calabozo de León, tuvo que ponerlo en libertad, intimidado por la llegada de los castellanos dispuestos a rescatarle, como bellamente relata un viejo romance:

«Juramento llevan hecho,
todos juntos a una voz,
de no volver a Castilla
sin el conde, su señor.
La imagen suya de piedra
llevan en un carretón,

(4) «*Ramirus securus regnum, consilium inivit cum omnibus Magnatibus Regni sui, qualiter Chaldaeorum Ingredetur terram, & condonato exercitu, pergens ad Civitatem, quae dicitur Magerit, confregit muros ejus, & maximas fecit strages dominica die, adjuvante clementia Dei.*» Sampedro, *Chronicon*, núm. 23.

(5) La actual calle de la Morería.

(6) Quintana, loc. cit., fol. 85 r., 2.^a col., y 85 v., 1.^a col.

(7) «*Reversus est in domum suam cum victoria in pace*», dice Sampedro, loc. cit.

resueltos, si atrás no vuelve,
de no volver ellos, non,
y el que paso atrás volviere
que quedase por traidor.
Alzaron todos las manos
en señal que se juró.
Acabado el homenaje
pudiéronle su pendón
y besáronle la mano
desde el chico hasta el mayor.
Y, como buenos vasallos,
caminan para Arlanzón
al paso que andan los bueyes
y a las vueltas que da el sol.
Desiertas dejan a Burgos
y pueblos alrededor;
solas quedan las mujeres
y aquellos que niños son;
tratando van del concierto,
del caballo y del azor,
si ha de hacer libre a Castilla
del feudo que da a León;
y antes de entrar en Navarra
toparon, junto al mojón,
al conde Fernán González
en cuya demanda son,
con su esposa, Doña Sancha,
que con astucia y valor
le sacó de Castroviejo
con el engaño que usó.
Con sus hierros y prisiones
venían juntos los dos
en la mula que tomaron
a aquel preste cazador.
Al estruendo de las armas
el conde se alborotó;
mas conociendo a los suyos,
d'esta manera habló:
—¿Do venís, mis castellanos?
Digádesmelo, por Dios.
¿Cómo dejáis mis castillos
a peligro de Almanzor?
Allí habló Nuño Lafnez:
— Ibamos, señor, por vos
a quedar presos o muertos
o sacuros de prisión. »

Y mientras los cristianos se mataban bajo las murallas de León, los generales de Abderrahman triunfaban en todas las fronteras.

Maslama y los suyos, en tanto, con un pequeño grupo de musulmanes, emprendía el éxodo por las pardas llanuras castellanas con el pensamiento puesto en Alah y el deseo en llegar pronto a la corte de los califas.

Córdoba la sultana

«Ornato del mundo» llamó a Córdoba bajo Abderrahman III la religiosa sajona Hroswitha, que alcanzó justa fama al finalizar el siglo x por sus poemas y sus dramas latinos. Y en verdad que tenía razón para ello. El nieto de Abdallah, que había encontrado dividida a la España musulmana a causa de las guerras civiles, de las amenazas del califa fatimita del Africa y del pujante desarrollo del reino cristiano de León, consiguió hacer de su capital la ciudad que sólo cedía en esplendor a Bagdad. Con casi un millón de habitantes; más de tres mil mezquitas, novecientos trece baños, ciento trece mil casas para los súbditos y gentes del pueblo, veintiocho arrabales y seis mil trescientos palacios para los magnates, la Córdoba del siglo x era la ciudad fastuosa por antonomasia, y la corte de Abderrahman III causó la admiración de las embajadas de Italia, Constantinopla, Francia y Alemania que en varias ocasiones acudieron a rendir pleitesía al poderoso califa, cuyo absolutismo le empujó a abandonar el título de emir —el viernes 16 de enero de 929— y ordenar que en la oración pública y en los actos de ceremonia le diesen los de *En-Nāṣir lidīnalah* —Defensor de la fe— y *Amir al-mu'minin* —Príncipe de los creyentes— que en 932, a los tres años de poner fin al emirato, prescindió de *hachib* —ministro— para asumir todas las funciones de gobierno, permitiéndole sus fabulosas riquezas (8) caprichos como el de construir una ciudad, a la que dió el nombre de una de sus favoritas (9), en cuyo palacio reunió todas las maravillas de Oriente y Occidente.

El atuendo de Córdoba corría parejas con su intelectualidad. No obstante la organización privada de la enseñanza, la mayor parte de los musulmanes españoles sabían leer y escribir —lo que no ocurría en el resto de Europa—, y a ella acudían los maestros más sabios —que daban conferencias sin carácter oficial—, los estudiantes de todos los países, los amanuenses más hábiles y los libreros y mercaderes más ricos, que hacían de Córdoba el cerebro de las comarcas de Occidente.

Y cuando en 961 muere Abderrahman III, su hijo Alháquem II (10)

(8) En 951 tenía en el Tesoro veinte millones de monedas de oro, que ahora representarían cerca de trescientos millones de pesetas.

(9) Zahra, a una legua al norte de Córdoba. En noviembre de 936 comenzó la construcción de la ciudad, en la que trabajaron diez mil obreros durante veinticinco años, y bien pronto se pobló gracias a las fuertes primas que ofrecía el califa a todo el que se fuera a vivir a ella. Sólo en el harén de Zahra había seis mil mujeres.

(10) Abulhusi Alháquem (II) Almostánsir bil-lah Benabderrahman (III) Abenmohámed.

hereda el poderoso califato. Luego de algunas guerras con León, Navarra y Castilla, ajustó la paz, y después de recibir las embajadas de los emperadores de Alemania y Constantinopla, de doña Elvira de León, de Borrell I de Barcelona y de Sancho García, señor de los vascones, a quienes asombró con el lujo de su corte, se dedicó a proteger la cultura.

«Nunca había reinado en España un príncipe tan sabio—dice Dozy—y aunque todos sus predecesores habían sido hombres cultos y aficionados a enriquecer sus bibliotecas, ninguno había buscado con tanto afán libros raros y preciosos. En El Cairo, en Bagdad, en Damasco y en Alejandría tenía agentes encargados de copiarle o comprarle a cualquier precio libros antiguos y modernos. Su palacio estaba lleno de ellos; era un taller donde no se encontraban más que copistas, encuadernadores y miniaturistas. Sólo el catálogo de su biblioteca constaba de cuarenta y cuatro cuadernos, cada uno de veinte hojas, según unos; de cincuenta, según otros, y no contenían más que el título de los libros, y no su descripción. Relieren algunos escritores que el número de volúmenes ascendía a cuatrocientos mil. Y Alháquem los había leído todos; y lo que es más: había anotado la mayor parte. Escribía al principio o al fin de cada libro el sobrenombre, el nombre patronímico del autor, su familia, su tribu, el año de su nacimiento y de su muerte y las anécdotas referentes a él. Estas noticias eran preciosas. Alháquem conocía mejor que nadie la historia literaria; así que sus notas han constituido siempre una autoridad entre los sabios andaluces. Libros escritos en Persia o en Siria a menudo le eran conocidos antes que nadie los hubiera leído en Oriente. Informado de que un sabio del Irak, Abu el Farach Isfahaní, se ocupaba en reunir noticias de los poetas y cantores árabes, le envió mil monedas de oro, rogándole que le enviara un ejemplar de su obra apenas la hubiese terminado. Lleno de reconocimiento, Abu el Farach se apresuró a satisfacer este deseo, y antes de publicar su magnífica colección, que aún hoy es la admiración de los sabios, envió al califa de España un ejemplar corregido, acompañado de un poema en su honor y de una obra sobre genealogía de los omníadas. Un nuevo presente le recompensó. En general, la liberalidad de Alháquem para con los sabios españoles y extranjeros no reconocía límites; así alluían ellos a su corte. El monarca los alentaba y protegía a todos, hasta a los filósofos que, al fin, pudieron entregarse a sus estudios sin temor de que los matasen los mogigatos» (11).

La magnanimidad de Alháquem II, su afición a las ciencias y a las letras y su amplio espíritu de tolerancia—en tremendo contraste con el sectarismo del clero musulmán malequí que quería monopolizar la enseñanza—convencido de que la más noble ocupación del hombre es el cultivo de la inteligencia, se encontraba, además, favorecida por la gran celeridad de la escritura árabe, cuyo carácter cursivo, comparable a la taquigrafía moderna, la convierte en una línea de suaves inflexiones que

(11) *Historia de los musulmanes de España*, tomo III, págs. 99-101.

permite a un mediano escriba copiar tripe que a un hábil amanuense griego, romano o hebreo, por cuya razón los libros se multiplicaron enormemente, subviniendo con facilidad a las necesidades de la cultura general y abaratando la producción que, por esta causa, hizo que el libro se pusiera al alcance de las fortunas más modestas.

Otro factor que intervino en el abaratamiento del coste de los manuscritos, fué el uso del papel de pasta, cuya fabricación, industrializada en Oriente desde el siglo vii, inundaba los mercados cordobeses, que no tardaron en desterrar el antiguo papiro egipcio y reducir el uso de las vitelas, que quedaron casi exclusivamente para las copias de lujo y para las *ichasas*: documentos de autoridad que los maestros expedían en favor de sus discípulos.

Maslama en Córdoba

Cuando Maslama llegó a la capital del califato, palidecían en Oriente los focos intelectuales de Pombeidath y de Sora, impotentes los doctores del judaísmo para evitar su ruina, a causa de la rivalidad entre ambas, que acabó en un mutuo descrédito. Los magnates del Cairo y de Bagdad --para quienes era un depósito sagrado la tradición talmúdica-- consiguieron sostener la Academia de Pombeidath hasta mediados del siglo x; pero la de Sora se hundió definitivamente con la muerte de Saadía, príncipe de los talmudistas del siglo ix y parte del x, y los rabinos orientales se trasladaron a Occidente buscando la protección de los sultanes de España. «No fué la raza hebrea la última en lisonjear la omnipotencia de los califas cordobeses; ya por respeto al principio de autoridad, personificado constantemente en sus *guonim*, ya por consejo del propio interés, que hacía más eficaz la perspectiva de mayor prosperidad y fortuna, había saludado el pueblo judío con no encubierto júbilo el advenimiento de Abd-er-Rahman; y confiando, sin duda, en que la grandeza y poderío del naciente Imperio abriría a su actividad y a su inteligencia nuevos veneros de riqueza, había consagrado su actividad al servicio del califato. Ni eran por cierto menospreciados sus oficios, que parecía recomendar en la estimación de los Amires la conducta observada por los judíos en el momento de la conquista» (12).

Aparte de profesar judíos y mahometanos el dogma de la unidad absoluta de Dios, había una poderosa razón para su mutua simpatía, y era el odio común al cristiano; aumentado en los hebreos por las injurias recibidas durante el período visigodo, lo que inspiró a los árabes gran confianza en los israelitas hasta el punto de que cuando conquistaban una comarca

(12) Amador de los Ríos, *Historia social, política y religiosa de los judíos de España y Portugal*, tomo I, pág. 124.

•reunían todos los judíos de la capital y dejaban con ellos un destacamento de musulmanes, continuando su marcha el grueso de las tropas» (13) y •cuando no encontraban judíos, dejaban el número suficiente de musulmanes para mantener lo conquistado» (14), tanto más cuanto que los judíos habían pronosticado el advenimiento de Abderrahman al trono de los califas, según se desprende del siguiente documento:

•Era por aquel tiempo gobernador de esta provincia Abdo-r-Rahmen ben Habib, con el cual estaba un judío que había sido amigo de Maqlama ben Abdo-l-Aziz, y solía decir que había de hacerse dueño de España un individuo de regia estirpe, llamado Abdo-r-Rahmen, el cual tendría dos rizos de pelo sobre la frente. Ebn Habib, deseando que en él se cumpliera la profecía, se había dejado crecer los dos rizos; más el judío le dijo: •Tú no eres de estirpe de reyes». •Es cierto, vive Dios», contestó. Cuando se le presentó Abdo-r-Rahmen (ben Moawiya), observó que tenía los dos rizos, y llamando al judío, le dijo: •Este es; pero yo le mataré». El judío le replicó: •Si le matas, ciertamente que no será él el predestinado; y si le dejas, puede que sea» (15).

Y el año 948, cuando ya Maslama había consolidado su fama entre árabes y judíos, llegó a Córdoba Rabbí Moseh Abenhanoch, hecho prisionero en el Mediterráneo por Abenromahís, almirante de la armada de Miramamolín, que lo condujo a la sede del califato, exhibiéndolo en el mercado de esclavos, en donde lo rescataron sus hermanos de raza, y, por sus propios merecimientos, sucedió a Nathán en la cátedra de Filosofía.

Y la Academia de Córdoba quedó ya establecida de hecho con Abenhanoch y Maslama, y cuando en 961 el omnipotente Almanzor inició su política de intolerancia, que le condujo hasta el extremo de ordenar la quema de todos los libros de Astronomía que se hallaran, la obra de Maslama había dado ya sus mejores frutos, gracias a la decidida protección que le dispensó Alhakem II, quien le concedió libertad para enseñar públicamente la Matemática y la Medicina.

Obras matemáticas de Maslama

La obra más importante del matemático madrileno, •el primer grande hombre de la España sabia», como le llama Léclerc (16), es un *Tratado del astrolabio* que Casiri describe así: •CMLXVII. 3.^o Tractatus mutilus *De Astrolabii descriptione & usu*, auctore MOSLAMA BAN ADMAD, viro sane clarissimo, Hispano, vulgo *Almageriti*, dicto cujus meminimus» (17), ejem-

(13) *Ajbar Machmud*, pág. 25.

(14) *Ibidem*, pág. 183.

(15) *Ibidem*, pág. 61.

(16) *Histoire de la Médecine arabe*, tomo I, pág. 423.

(17) *Bibliotheca arabico-hispano-escurialensis*, tomo I, pág. 399, col. 2.^a.

plar mutilado que tradujeron al latín Rodolfo de Brujas y Juan Hispalense, pero ninguno de estos dos puntos está en claro.

El código 967, no contiene la obra de Maslama (18) y la traducción de Rodolfo de Brujas es posible que se refiera a las *Tablas* de Albatenio, según la refundición hecha por Maslama.

La versión de Juan Hispalense, en cambio, la he visto en la Biblioteca Nacional de Madrid, manuscrito 10.053, procedente de la catedral de Toledo, cajón 98, número 21. Ocupa treinta y cinco folios a dos columnas, de cincuenta y dos líneas cada una y está dividido en cuarenta capítulos. Es un tratado didáctico, escrito con gran claridad, en el que determina la ecuación del sol, la manera de calcular la altura de las estrellas, las horas temporales y su conversión en iguales, los arcos del día y de la noche, la alquibla, la declinación de cualquier punto del Zodíaco respecto del Ecuador, la altura del sol por la sombra proyectada, el azimut, etc. Esta obra está sin duda inspirada en otra de Massala (770-820), célebre astrónomo judío.

Otra de las producciones de Maslama es el resumen antes aludido de las *Tablas* de Albatenio sobre las ecuaciones de los planetas, que debió traer a España alguno de los sabios emigrados de la academia de Sora, y que Maslama conocería en Córdoba, ya que el famoso «Ptolomeo árabe» murió el año 929.

También hay que citar la edición mejorada de las *Tablas* de Mohámed Abenmusa el Joarizmi, reduciendo los años persas a árabes y viceversa y determinando las posiciones medias de los planetas para el primer día de la Hégira. Esta edición fué traducida por Rodolfo de Brujas, Hermann el Dálmata y Adelard de Bath, la última de las cuales publicó Suter en Copenhague, 1914: *Die astronomischen Tafeln des Muhammed Ibn Musa Al-Khwarizmi in der Bearbeitung des Maslama Ibn Ahmed Al-Madjriti und der latein. Uebers. des Athelhard von Bath.*

Finalmente, Maslama hizo una edición comentada del *Planisferio* de Ptolomeo, que se publicó primero en Basilea, 1536, y después en Venecia, 1558: *Sphaerae atque astrorum coelestium ratio, natura et motus; ad totius mundi fabricationis cognitionem fundamenta*. Esta obra fué traducida por Hermann el Dálmata—código 7.277 B, 5 de la Biblioteca Nacional de París—, probablemente en colaboración con su discípulo Roberto de Brujas, Tolosa, 1144, que la dedicó a Teodorico Platónico.

Otras obras

Aparte de las obras citadas, Maslama escribió un *Libro sobre la generación de los animales*, código 895 del Escorial: «Codex nitide exaratus, omissa anni nota, Historiam Animaliam complectens, hoc titulo: *Anima-*

(18) Cf. Millás, *Assaig.*, pág. 20.

lium generatio, auctore ALMAGERITH, id est *Matritensi*, cujus supra facta est mentio. Ibi de Animalium generatione, natura, usu, atque utilitate, quae ex iis percipi potest, differitur (19).

También se cita de él un *Fin del saber*, manuscrito 942, de Casiri: «Tractatus de Arte Chymica, in partes IV distributus, titulum prae se ferens *Sapientis Scopus*, in Codice autem Arabico CMLXXIII. Reg. Bibliothecae Parisiensis, *Gradus Sapientis*: auctore MOSLEMA MAGRITENSIS, sorte *Matritensi*, qui ut ipse in Praefatione testatur, ultimam Tractatui nanum imposuit anno Egirae 348.

Eo in opere agitur de Philosophorum Lapide, seu Magisterio magno, quomodo videlicet Metalla imperfectiora in Aurum. Argentumve transmutavi queant; ubi etiam de Ponderibus & Mensuris, de Gradationibus ignis, Coloribusque & aliis ad opificia hujusmodi Chymica pertinentibus. Dolendum tamen est, Characteres & Signa Chymica, quibus diligens & peritus Auctor usus est, non explicari; adeoque nonnisi a Magistris ea in Arte versatissimus, quippe allegoriarum, & aenigmatum plena, intelligi posse (20).

Del *Fin del saber* (Ghayat al-hakim) dice Sarton (21) que fué traducido al latín en 1232 por orden del rey Alfonso X con el título de «Picatrix». El mismo erudito norteamericano le atribuye otra obra: *Rutbat al-hakim* (Camino de los sabios), que no he podido identificar.

Algunos historiadores, siguiendo a Casiri, sostienen que Maslama fué el introductor en España de la famosa enciclopedia de los *Hermanos de la pureza* (22), pues que en su *Bibliotheca arabico-hispano-escurialensis* (23) describe así el códice 923: «Codex literis Cuphiceis exaratus die 3 mensis Dilhagia, anno Egira 862, quo continentur Tomus I. Operis longe celeberrime, cui titulus *Literatorum Societas*: ubi Tractatus de multiplici disciplinarum genere occurrit. Auctor est MOSLEMA BEN AHMAD BEN CASSEN BEN ABDALA *Matritensis*, qui omnium Philosophorum placita in unum collecta Hispanorum Scholis proponit»; pero J. de Goeje demostró, en 1884, que este libro no es de Maslama.

Los discípulos de Maslama

Maslama enseñó a una pléyade de discípulos, los más famosos de los cuales fueron:

El Carmaní (Abuláquem Omar Benabderrahman Benahmed Benalí, cordobés, que fué quien debió importar de Oriente la enciclopedia de los

(19) Casiri, loc. cit., tomo I, pág. 323, col. 2.^a, y 321, col. 1.^a.

(20) Ibídem, pág. 378.

(21) *Introduction to the History of Science*, tomo I, pág. 658.

(22) *Rasail ijuun assafu*.

(23) Tomo I, pág. 341, col. 1.^a.

Hermanos de la pureza. El Carmani fijó su residencia en Zaragoza, donde murió el año 1065, a los noventa de edad. Destacó por sus conocimientos médicos y quirúrgicos y por sus estudios de Geometría;

El Zahrauí (Abulhasan Alí Abensuleimán), de Medina-Azzahra, donde vivía el año 1008. Como el anterior, fué un notable médico y matemático. Escribió un libro de contratos mercantiles;

El Garnatí (Abulcásim Asbag Abenmohámed), también conocido por el Muhandís (el Geómetra), profundo matemático de Granada, en donde abrió una academia y donde murió el año 1034. Entre sus obras matemáticas se citan: unas tablas astronómicas construidas al uso Sindhind, muy elogiadas por Azarquiel, dos libros sobre el astrolabio, unos comentarios al libro de Euclides, otro sobre la naturaleza de los guarismos y un tratado de los planetas, escrito hacia 1026, que mandó arreglar Alfonso X de Castilla;

El Galiquí (Abulcásim Ahmed Benabdala Benomar), también conocido por el apodo de Benalsoffar (el hijo del calderero), cordobés, cuyo hermano Mohámed fué el mejor constructor de astrolabios que hubo en España. El Galiquí enseñó la Matemática en Denia, donde murió el año 1034. Compuso unas tablas astronómicas y un tratado del astrolabio a base, como su maestro, del de Massala;

El Hadramí (Abuhamed Chafar Abenmofarech Benabdala), sevillano, que cultivó la Filosofía, la Matemática y la Medicina. Murió el año 1140.

Muerte de Maslama

No se sabe a punto fijo cuándo murió Maslama. Casiri y Léclerc dicen que fué el año 1007; Sarton afirma que ocurrió antes de esta fecha, pero no la fija, y Sánchez Pérez da como más probable la de 1004.

Bibliografía

Abenalcoitia el Cordobés, *Historia de la conquista de España*. Tomo II de la *Colección de obras arábigas de Historia y Geografía*, publicada por la Academia de la Historia. Traducción de Julián Ribera. Madrid, Tipografía de la *Revista de Archivos*, 1926.

Almakkarí, *Annales sur l'histoire et la littérature des Arabes d'Espagne*. Edición de R. Dozy, G. Dugat, L. Krehl y W. Wright. Cinco tomos. Leyde, E. J. Brill, 1855-60.

Amador de los Ríos, José, *Historia social, política y religiosa de los judíos de España y Portugal*. Tres tomos. Madrid, Fortanet, 1875-76.

Anónimo, *Ajbar Muchmudá*. (Colección de tradiciones). Crónica del

siglo xi, traducida y anotada por Emilio Lafuente Alcántara y publicada por la Academia de la Historia. Tomo I de la *Colección de obras arábicas de Historia y Geografía*. Madrid, Rivadeneyra, 1867.

Antonio, Nicolás, *Bibliotheca hispana vetus*, aumentada por Francisco Pérez Beyer. Dos tomos. Madrid, Viuda y herederos de Joaquín Ibarra, año 1788.

Azcona, Agustín, *Historia de Madrid desde sus tiempos más antiguos hasta nuestros días*. Tomo I (incompleto el ejemplar de la Biblioteca Nacional de Madrid). Madrid, Sociedad Poligráfica, 1843.

Bonilla San Martín, Adolfo, *Historia de la Filosofía española*. Dos tomos. Madrid, Victoriano Suárez, 1908-11.

Casiri, Miguel, *Bibliotheca arabico-hispana-escurialensis*. Dos tomos. Madrid, Antonio Pérez de Soto, 1760-70.

Catálogo de los manuscritos árabes existentes en la Biblioteca Nacional de Madrid. Madrid, Manuel Tello, 1889.

Codera, Francisco, *Bibliotheca arabico-hispana*. Diez tomos. Madrid-Zaragoza, José de Rojas y Miguel Romero, 1883-89.

Dozy, R., *Historia de los musulmanes de España hasta la conquista de los almorávides*. Cuatro tomos. Traducción de Magdalena Fuentes. Barcelona, Calpe, 1920.

González Palencia, Angel, *Historia de la Literatura árabe española*. Segunda edición. Barcelona, Labor, 1928.

Gonzalvo, Luis, *Apunte sobre algunos musulmanes madrileños*. En «Homenaje a D. Francisco Codera». Zaragoza, Mariano Escar, 1904.

Holmyard, E. J., *Mashuma al-Majriti and the Rutbatu 'l-Hakim*. «Isis», vol. VI, 1924, págs. 293-305.

Huart, Clemente, *Littérature arabe*. Cuarta edición. París, Armand Colin, 1923.

Hurtado de Mendoza, Juan, *El buen placer*. Alcalá, Juan Brocar, 1550.

Léclerc, Luciano, *Histoire de la médecine arabe*. Dos tomos. París, A. Daix, 1876.

Morales, Ambrosio de, *Las antigüedades de las ciudades de España*. Alcalá, Juan Iñiguez de Lequerica, 1575-77.

Menéndez y Pelayo, Marcelino, *La ciencia española*. Tres tomos. Cuarta edición. Madrid, Tipografía de la Revista de Archivos, Bibliotecas y Museos, 1915-18.

Millás Vallicrosa, J., *Assaig d'història de les idees físiques i matemàtiques a la Catalunya medieval*. Tomo I (único publicado). Barcelona, Patxot, 1931.

Pellicer, Juan Antonio, *Disertación histórico-geográfica sobre el origen, nombre y población de Madrid, así en tiempo de moros como de cristianos*. Madrid, Imprenta de la Administración del Real arbitrio de Beneficencia, 1803.

Quintana, Jerónimo de la, *Historia de la Antigüedad, Nobleza y Grandeza de la villa de Madrid*. Madrid, Imprenta del Reyno, 1629.

Ribera y Tarragó, Julián, *La enseñanza entre los musulmanes españoles. Bibliófilos y bibliotecas en la España musulmana*. Tercera edición. Córdoba, La Comercial, 1925.

Rodríguez de Castro, José, *Biblioteca española*. Dos tomos. Madrid, Imprenta Real de la *Gazeta*, 1781-86.

Said de Toledo, *Tabacat alomani*. (Clase de los pueblos.) Beyrouth, Imprenta Católica, 1912.

Sampiro, *Chronicon*. En «Ferrerías convencido, con nítido desengaño en el Tribunal de los Doctos, con los Chronicones corregidos, que escribieron el Rey Don Alonso III, dicho el Magno; Sampiro, Obispo de Astorga; Pelagio, Obispo de Toledo; Isidoro, Obispo pacense, y el anónimo Iriense», por el P. M. Fr. Francisco de Berganza, págs. 390-415. Madrid, Francisco del Hierro, 1729.

Sánchez Pérez, José A., *Biografías de matemáticos árabes que florecieron en España*. Madrid, Estanislao Maestre, 1921.

Sarton, Jorge, *Introduction to the History of Science*. Tomo I. Baltimore, Williams and Wilkins, 1927.

Steinschneider, M., *Vite di matematiche arabi*. Tomada de una obra inédita de Bernardino Baldi. Con notas. *Bull. de Boncompagni*. Roma, año 1872, tomo V., págs. 427-534.

FRANCISCO VERA

REVISTA

DE LA

SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Sección biográfica

Chéber Benaflah.

De Sevilla.

[V 1, 2]

El objeto de este artículo es contribuir á la labor de investigación é información que la *Sección 1.ª de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias* acordó verificar en vista de la proposición que presentó el distinguido arabista granadino Sr. Almagro Cárdenas al último Congreso celebrado en Granada en el presente año y que textualmente dice así:

El que suscribe, socio numerario de este Congreso, tiene el honor de manifestar á la Sección de que V. S. es digno Presidente, lo que sigue:

Entre los más ilustres sabios de la España Árabe figura el famoso matemático Geber Aben Aflag, digno de la inmortalidad como inventor del Álgebra.

Además de matemático fué Aben Aflag notable arquitecto, habiéndose levantado bajo su dirección varios edificios, entre ellos la Giralda de Sevilla y la torre de la mezquita llamada Kutubia en Fez.

Este socio, siendo catedrático de Árabe en la Universidad Hispalense, dedicó á dicho matemático honorífica mención, en el discurso de apertura del año académico de 1894 á 95. Hoy, al dirigirse á la Sección 1.ª de este Congreso, se permite proponerle la adopción del siguiente acuerdo:

Colocar una inscripción conmemorativa al pie de la Giralda, que perpetúe la memoria del inventor del Álgebra Geber Abul Aflag, del inspirado artista sevillano cuya pericia arquitectónica acreditan á través de los siglos notables construcciones que, imponentes y majestuosas, desafían la injuria de los tiempos á uno y otro lado del Estrecho de Gibraltar.

Granada, 22 de Junio de 1911.

ANTONIO ALMAGRO CÁRDENAS.

Sr. Presidente de la Sección 1.ª del III Congreso organizado por la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias.

El astrónomo árabe, conocido vulgarmente por *Geber*, ha pasado á la Historia únicamente por las obras que dejó escritas, no porque se tengan datos precisos de su vida, ni de la época en que floreció.

Como en la lengua árabe existen letras que corresponden á sonidos que no existen en las lenguas vivas y muertas de Europa, se transcribe el nombre de *Geber* de distintos modos; así se le conoce por:

<i>Geber ben Aflah</i>	Bossut, Histoire générale des Mathématiques, Paris, 1810. Rouse Ball, Histoire des Mathématiques, Paris, 1906.
<i>Abu Muhamad Dschahir ibn Aflah</i>	Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig, 1880.
<i>Abi Mohamed Giaber Ben Aflah Hispalensi</i> .	Casiri, Catálogo de los manuscritos de El Escorial.
<i>Gebrii filii Aflah Hispalensis</i>	Delambre, Histoire de l'Astronomie, Paris, 1817.
<i>Geber Mohammed ben Aflah</i>	Marie, Histoire des Sciences Mathématiques, Paris, 1883.
<i>Geber</i>	Montucla, Histoire des Mathématiques, Paris, 1758.
<i>Abo Maemad Giavar figlio di Afla</i>	Sallustj, Storia dell' origine e di progressi delle Matematiche, Roma, 1846.
<i>Djaber ben Aflah</i>	Sedillot, Histoire générale des Arabes, Paris, 1877. Leclerc, Histoire de la médecine arabe, Paris, 1876.
<i>Djabir ibn Aflah</i>	Zeuthen, Histoire des Mathématiques, Paris, 1902.

La transcripción española pudiera ser por el valor fónico de las letras:

ABU MOHÁMED CHÉBER BENAFLAH EL INBILÍ (*El Sevillano*).

Como se ve, todos los historiadores están conformes en que *Chéber* fué hijo de Aflah, y de modo explícito añaden algunos que su cuna fué Sevilla. Otros, como Marie, Montucla, Zeuthen, Sedillot y Cantor, hacen la misma afirmación en la biografía de este matemático. Rouse Ball es el único de los historiadores citados que, además de decir que nació en Sevilla, añade que murió en Córdoba.

Con relación á la fecha de su nacimiento no existe ya la misma unanimidad; como dije al principio, la vida de este astrónomo es casi desconocida, y por esto Sedillot, Montucla y Delambre, confiesan que

se ignora la época en que vivió; Marie dice que es del principio del siglo XI; Cantor que vivió en el siglo XI, porque un hijo de *Chéber* vivía en el año 1100; Bossut y Zeuthen también afirman que es del siglo XI; Rouse Ball lo considera en la segunda mitad del mismo siglo; Leclerc, según datos tomados de Ben Abi Osseibia, dice que se le puede admitir entre los astrónomos de mediados del siglo XII, porque el hijo de *Chéber* vivía en 1160 (no en 1100 que afirma Cantor), y Sallustj traslada la época de *Chéber* al año 1150.

Estos últimos parecen los mejor informados, pues me merece crédito especial el libro de *El Quifti (Tarij al-hocama. Historia de los hombres de ciencia)*, edición Müller y Lippert, Leipzig, 1903, en cuya página 343 dice que era *Chéber* contemporáneo del médico judío Abulbaracat, que vivía á mediados del siglo VI de la Hégira. (El año 550 corresponde al año 1155 de la Era Cristiana.) Se explica que tantos historiadores supongan á *Chéber* como matemático del siglo XI, porque á falta de datos sobre su vida acudirían, sin duda, á copiar la fecha en un historiador anterior, Bossut ó Delambre, por ejemplo.

La labor científica de este sabio le hace acreedor á los mayores elogios, pues es autor de un tratado de Astronomía, del que se encuentra un rápido análisis en Delambre, que Gerardo de Cremona (1114-1187) tradujo al latín con el título: *Gebrii filii affla Hispalensis, de Astronomia libri IX, in quibus Ptolomæum, alio qui doctissimum, emendavit, alicubi etiam industria superavit. Omnibus Astronomiæ studiosis hand dubie utilissimi futuri*, y que fué publicada en Nuremberga en 1534. Esta obra debe ser la que aparece en Hagi Khalfa, 14435. *Heiat ibn Aflah*, astronomía. Se conserva un comentario de *Chéber Benafлах* sobre Ptolomeo (Bossut). Su gran obra de Astronomía, dividida en IX partes, va precedida de un tratado de Trigonometría en el que critica mucho el método complicado de Ptolomeo y Menelao; demuestra varias fórmulas, dos de ellas muy importantes bajo el punto de vista histórico, pues eran desconocidas por Ptolomeo, Albatenio y Abenyunus, apareciendo por primera vez en su obra; la primera de estas fórmulas es la que hoy se conoce con el nombre de relación ó teorema de *Chéber*: $\cos B = \cos b \operatorname{sen} C$ aplicada á los triángulos esféricos rectángulos, y la segunda es la $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$, que se deduce fácilmente de las fórmulas de Ptolomeo, pero que fué *Chéber* quien las dedujo (Marie). Modificó también en su libro todas las demostraciones de Ptolomeo, debiéndole, por tanto, la Trigonometría útiles descubrimientos (Montucla, Delambre, Zeuthen, Rouse Ball, Sedillot). Autor, además, de un *Quitab el isticmal* de Astronomía, co-

rregido más tarde por Maimónides á instancia de Yúsuf bensimón, que al huir á su país por la persecución de los almohades contra los judíos y cristianos, se llevó la Astronomía de *Benaflah*, y una vez en Egipto rogó á Maimónides, cuyas enseñanzas siguió, la corrección de la obra citada, colaborando Iusuf (El Quiftí). Bajo el nombre de *Chéber* se encuentra un tratado de triángulos esféricos en la Bibliothéque Nationale de París, manuscritos números 7397 y 7406; la traducción de este último se titula: *Geber in libro 30 figurarum* (Leclerc). En la Bibl. Bodleyana de Oxford, II, 7074, existe el *Liber radicum Geberi*, y en la lista bibliográfica de Gerardo de Cremona hay una obra titulada: *Liber tabularum iaberi cum regulis suis*, pero no se sabe si son unas tablas astronómicas comentadas por *Chéber* ó si son originales (Leclerc). Un tratado sobre la figura *Kaltá* (sector) de Menelao, por Benaflah, se encuentra también en la Bib. Bodl. (Delambre). Y también se le atribuye un instrumento astronómico (Delambre pág. 182). Por último, hago constar que en la Biblioteca del Monasterio de El Escorial, y con los números CMV y CMXXV del Catalogo de Casiri se encuentran dos manuscritos árabes de *Chéber*, titulados:

Ms. CMV. *Elementa astronomica*. en IX partes.

Ms. CMXXV. . . *Liber de sphaeris* (con observaciones astronómicas de Sevilla y Córdoba) (1).

La biografía de Gerardo de Cremona, que está claramente documentada, señala, como ya he indicado, las fechas 1114 y 1187 para la vida de este astrónomo, y el hecho de traducir á *Chéber* es un dato para afirmar que la fecha en que éste vivió no puede ser posterior á la señalada por *El Quiftí*.

Algunos historiadores y bibliógrafos han confundido á *Chéber Benaflah* con otro mal llamado *Chéber*, cuyo verdadero nombre es *Abumusa Cháfar El Sufi*, que nació hacia el año 780 y murió en 840. De este *Chéber* dice Roger Bacon que era maestro de maestros, y Cardán le coloca entre los doce mayores genios del mundo (Marie). Era alquimista y, por lo tanto, creía en la transmutación de los metales; parte de sus obras se imprimieron en Leyden con el título: *Gebri Arabis chimia*, etc. En la Bibliothéque Nationale de París existen los siguientes manuscritos atribuidos á este *Chéber*: 1. *Complementi secre-*

(1) Tanto de estos manuscritos como de los otros matemáticos árabe-españoles: Abulcasim Maslama, de Madrid; Azarquiel, de Córdoba; Ibrahim el Andalúz, Almaridini, etcétera, pienso dar noticia en un folleto que tengo en preparación.

torum naturæ summa perfectionis.—2. *Compendium.*—3. *Testamentum.*—4. *Fragmentum de triangulis sphæricis.*—5. *Libri de rebus ad astronomiam pertinentibus.*

Del mismo modo que á *Chéber Benaflah* lo confunden con *Chéber el Sufi*, pueden confundir á éste con aquél, y habiéndose distinguido *Benaflah* en Astronomía y Trigonometría, y *El Sufi* en Alquimia, sería conveniente cerciorarse de si efectivamente son de *Chéber el Sufi* los dos últimos manuscritos. Obsérvese, no sólo que Leclerc atribuye á *Benaflah* el núm. 4, sino que además *Chéber el Sufi* es de los años 780-840, y que de ser suyas las referidas obras, son anteriores á las de Tabit Bencorra (836-901), Albatenio (877-929) y Abulguafa (940-998), que son de las más antiguas que se conocen.

Por la misma analogía de nombres y por la falta de datos sobre *Chéber* también le han confundido con *Gerbert*, que por los años 970 á 980 exportó á Francia los conocimientos adquiridos en España entre los musulmanes, y que unos años después, en 999, fué elegido Papa, tomando el nombre de Silvestre II (Sedillot, Marie, F. Hoefer, *Histoire des Mathématiques*, París, 1874).

Y, finalmente, como el Álgebra se conocía entre los árabes con el nombre de *alchéber gualmocábala* (núm. 1 de esta REVISTA, pág. 34), y más tarde con el nombre de *alchéber*, no ha faltado (véase Montucla) quien creyera que *Chéber* fué quien inventó el Álgebra; cosa bastante extraña, pues los árabes en los años 754 á 775 conocían ya una ó dos obras de Álgebra de los indios, siendo *Abuchafar Mohamed Benmusa El Joarismi* (nótese que también éste es *Chafar* como *El Sufi*) el primer árabe que hacia el año 830 escribió un Álgebra, publicada por F. Rosen, con traducción inglesa, en Londres, 1831, titulada *Al-gebr wal mocábala* (Sedillot, Montucla, Cantor, Brockelman, El Quiftí, etcétera), si bien es verdad que como este matemático era bibliotecario del califa *Almamun* y encargado por éste de traducciones, su *Al-gebr wal mocábala* no viene á ser otra cosa que la introducción en el Islam del Álgebra de los indios (Zeuthen, El Quiftí).

Pasando ahora á la historia de la magnífica torre morisca, orgullo de los sevillanos y admiración de los turistas, cuya construcción se atribuye á *Heber* ó *Gever* (*Chéber*), es de observar que ningún historiador se atreve á decir quién construyó la Giralda, ni con qué objeto, pues no existe ningún documento respecto á este particular. La autoridad no discutida, en cuestiones hispalenses, del erudito Sr. Gestoso, dice al

describir la Giralda: «..... Comenzó á construirse en 13 de Safar del año 580 de la Hégira (1184 de J. C.) y se terminó en 1196. Opinan algunos que se hizo para servir de Observatorio Astronómico, pero la opinión más general estima que no fué más que la *assumua* (1) ó alminar de mezquita..... Ignórase el nombre del arquitecto que hizo esta torre, á pesar de que desde muy antiguo se señala á *Hever* ó *Geber*, que floreció en los últimos años del califato de Córdoba, pero tal noticia no merece entero crédito..... El artífice que fabricó la manzana llamábase Abul Layth el Sikili, ó el Siciliano..... Á causa de un terremoto en el año 1395 vinieron á tierra las manzanas de oro y pusieron el *Giraldillo* representando la Fe.....»

En la historia de *Almakari*, edición Leyden, texto árabe, tomo I, pág. 128, dice que Iacub Almansur mandó construir la torre de la mezquita de Sevilla, la mayor del mundo musulmán. Y en la misma obra, tomo II, pág. 510, afirma que Almansur, cuando quiso construir la torre de la mezquita de Sevilla, solicitó de los *alarifes* y artífices que le presentaran presupuestos, pero no cita nunca nombres propios. También es del tiempo de Iacub Almansur la torre de la Kutubía que existe en Marrakex, no en Fez.

En la historia, también en árabe, *Cartás*, edición Tornberg, página 151, dice: Almansur vuelve á Sevilla en 593 (año 1196 de J. C.), dando fin á la construcción del templo y erección de la torre, haciendo para ella unas manzanas de oro muy grandes y hermosas, que construyó y subió á lo más alto el maestro Abulaits el siciliano. En el mismo pasaje habla el historiador de los arquitectos y gerentes de las obras, pero tampoco menciona sus nombres.

Mr. Steinschneider, al traducir y anotar una *Crónica de B. Baldi* en el *Bulletino di bibliografia e di historia da B. Boncompagni*, Roma, 1877, tomo V, pág. 524, afirma que Nicolao Antonio, en su *Bibliotheca hispana vetus*, Madrid, 1788, confunde á *Chéber Benaflah* con el alquimista y con Albatenio que se llamaba Mohamed Abenchábir, lo que hace suponer que Nicolás Antonio no estuvo bien documentado. También observa Steinschneider, que en la Crónica de Baldi aparece Avo Macmad Giavar ben Afla como del año 1150 y Gebro de Sevilla como del año 1160. Pero lo más importante es que dice Steinschnei-

(1) Torre de las mezquitas desde cuya altura convoca el *almuédano* á los mahometanos en las horas de la oración diciendo: Dios es grande, no hay más Dios que Alá y Mahoma es su profeta, venid á la oración. Se instituyó esta práctica para diferenciarla de la de los judíos, que llamaban á la oración con una trompeta, y de la de los cristianos, que lo hacían con una matraca.

der: «Si Geber edificó una torre en Sevilla y otra parte, como asegura Nicolás Antonio (*Bibl. hisp. vetus*, tomo II, páginas 403 y 404), decídanlo los anticuarios españoles (1).»

Por último, he consultado el discurso inaugural del Sr. Almagro y veo que no cita ningún texto que dé autoridad á sus afirmaciones sobre *Chéber Benaflah*.

De la fecha de la construcción de la Giralda y de la época en que vivieron Gerardo de Cremona, Yusuf bensimón y Maimónides, se deduce que, aunque no imposible, es poco probable que fuese *Chéber* su arquitecto. Historias tan bien documentadas como El Quifti, Almakari y Cartás, no citan más nombre que el de Abulaits; Gestoso dice que la noticia de *Chéber* no merece entero crédito y Steinschneider no se hace solidario de la afirmación de Nicolás Antonio.

Resumiendo todo lo expuesto respecto á *Chéber Benaflah* y á la construcción de la Giralda, pueden presentarse las siguientes conclusiones:

- 1.^a *Chéber Benaflah* vivió á mediados del siglo XII, conforme con Sallustj, Leclerc, El Quifti y Baldi.
- 2.^a El Álgebra fué introducida en el Islam en el siglo IX por El Joarizmi, de manera que *no fué Chéber el inventor del Álgebra*, en lo que están de acuerdo todos los historiadores.
- 3.^a Mientras no existan documentos que prueben plenamente quién fué su arquitecto, *no debe admitirse que Chéber construyera ó dirigiese la Torre de la Giralda de Sevilla*. Así es que la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias no puede consagrar con su autoridad un acuerdo que implicaría dar por históricamente cierto un hecho en el que hay tantas dudas.
- 4.^a Que en El Escorial existe, además del manuscrito de la obra de Astronomía traducida por Gerardo, otro manuscrito: *Liber de spheris*, del que ignoro que se haya traducido.
- 5.^a Que convendría estudiar las dos obras de Astronomía atribuí-

(1) El texto en Nicolás Antonio es el que sigue: *Hispalensibus quidem meis persuasum est fabricasse cum in hac urbe altissimam & pulcerrimam turrim....*

Y en la página 404 ya refuta el error de atribuir á *Benaflah* la invención del Álgebra. En el año 1788 se habla ya deshecho en parte la fábula con que se envuelve el nombre de *Chéber*.

das á *Chéber el Sufi*, que se distinguió únicamente como alquimista, pues debe observarse que si son de *El Sufi* pertenecen al siglo VIII ó IX y si son de *Chéber Benaflah*, se corrige el error histórico bibliográfico.

JOSÉ A. SÁNCHEZ PÉREZ.

Catedrático de Matemáticas.

Octubre, 1911.

NOTA DE LA REDACCIÓN. Entendiendo que el asunto tratado en este artículo es de sumo interés para la historia de la Matemática española, esta redacción tiene el gusto de poner á disposición del Sr. Almagro Cárdenas y de todos los que se dedican á estudios históricos las páginas de esta REVISTA, por si desean aducir nuevos datos á la biografía de *Chéber Benaflah*.

Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. LXX.

Einleitung zu Werken von *al Charaḡī*.

Von Eilhard Wiedemann und Karl Kohl.

Wir teilen die Einleitungen zu zwei Werken von einem Gelehrten *al Charaḡī* mit, da diese für die Fortentwicklung der Anschauungen über den Aufbau der Welt eine große Rolle gespielt haben.

Über das Leben von *al Charaḡī* wissen wir wenig. Er lebte in Merw und starb dort 533 d. H. [1138/39], ferner hatte er, wie die Einleitung zu seiner *Tabṣira* ergibt, Beziehungen zu einem Vezier *Schems al Dīn 'Alī*, der in Diensten von *al Singar* (1117—1157) stand. Nach *H. Chalfa* war er ein Schüler von *al Sam'ānī* (1113—1167); doch nennt ihn dieser, soweit wir sehen konnten, nicht in seinem *Kitāb al Ansāb* (Erklärung der Nisben) unter *al Charaḡī*. — Die Lesung der Nisba schwankt zwischen *Chiraḡī* und *Charaḡī*, doch dürfte die erstere, da sie *al Sam'ānī* ausdrücklich angibt, an sich die richtigere sein. Sie soll sich auf eine Reihe von Orten, so bei *Bagdād*, bei *Isfahān* beziehen. Ob freilich der Ort insbesondere bei Merw *Charaḡ* ausgesprochen wurde, darüber findet sich bei ihm keine Angabe. *Ibn al Athīr* weist dagegen unserem Verfasser ausdrücklich die Nisba *Charaḡī* zu, die wir, da sie sich eingebürgert hat, beibehalten (vgl. hierzu *H. Chalfa*, Bd. II, Nr. 2379. W. Pertsch, Katalog der arab. Handschriften, Gotha, Bd. 3, S. 45, Anm. 2).

Auch sonst wird der Name von unseren Gelehrten verschieden angegeben: *Schems al Dīn Abū Bekr Muḥ. b. Ahmed b. Abi Bischr al Marwazī* (nach *H. Ch.* Nr. 2379, 4489 und

13133). C. Brockelmann gibt als Namen an *Behā al Dīn Abū Muḥ. 'Abd al Gabbār b. Muḥ. al Charaḡī*. Die Berliner arabischen Handschriften Nr. 5669 u. 5670 haben *Abū Muḥ. 'Abd al Gabbār b. 'Abd al Gabbār b. Muḥ. al Ṭābiḡ al Charaḡī*.

Einige Angaben finden sich bei *al Baiḡaḡī* (Beiträge XXX): Er, ein Philosoph, gehörte zu den Gelehrten von Merw. Der *Chwārixmshāḡ* (d. h. der mehr oder weniger selbständige Fürst von *Chwārixm* d. h. *Chiwa*; es handelt sich um *Kuṭb al Dīn Muḡammed* 1097—1127 und *Atziz* (1127—1156)) führte ihn nach Merw, um sich von ihm unterrichten zu lassen. Er soll auch Werke über Geschichte verfaßt haben. Angeführt werden einige Aussprüche des Gelehrten, die entweder die mathematischen Wissenschaften selbst betreffen oder auf sie Bezug nehmen.

Von Werken von *al Charaḡī* kennen wir von zweien nur den Titel, nämlich von *al Risāla al schāmīla* (die umfassende Abhandlung) und *Risāla al maghribīja* (die nordafrikanische Abhandlung). Für uns kommen die folgenden zwei Werke in Frage¹⁾:

1. *Muntahā al Idrāk fi Taqāsīm al Aflāk*; das höchste, was man in dem Verständnis der Teilung der Sphären erreichen kann (wir zitieren es kurz als *al Muntahā*).

2. *Al Tabṡira fi 'Ilm al Hajja*. Das Werk, das in die Astronomie Einsicht verschafft (wir zitieren es als *al Tabṡira*). Dieses hat *Aḡmed b. 'Oḡmān b. Sabīḡ* († 744 = 1343/44) kommentiert (s. H. Suter Nr. 401).

Beide Schriften haben z. T. dadurch schon eine besondere Bedeutung, daß sie die Lehre von den massiven Kugeln in übersichtlicher Form darstellen; vgl. K. Kohl, Über den Aufbau der Welt nach *Ibn al Haiṡam*. Sitzungsberichte der phys.-med. Sozietät Erlangen, Bd. 54/55, S. 140. 1922/23.

Für die Bedeutung beider Werke spricht die besonders bei letzterem noch erhaltene große Anzahl von Handschriften und deren ausführliche Besprechung durch *Ḥ. Chalfā*.

1) Den meist wenig beachteten Werken von *al Charaḡī* hat C. Nallino in seiner *al Battānī*-Ausgabe den ganzen Abschnitt über die Meere (I, 167—176) entnommen und sie auch sonst an verschiedenen Stellen benutzt (I, 17, 18, 19). Ferner hat er aus ihnen Angaben über das Apogaeum bezw. die Präzession (I, XXXII, 240, 272 und II, XXI) geschöpft.

Zu *al Charaḡī* ist zu vergleichen H. Suter, Mathematiker usw. Nr. 276 (dort sind auch die Handschriften aufgeführt) und der Nachtrag dazu; C. Brockelmann, Gesch. der arab. Lit. Bd. 1, S. 473 (nicht ganz richtig), und Enzyklopädie des Islam.

A. Einleitung zu *al Muntahā*.

Das umfangreichere Werk (*al Muntahā*) (Berlin Nr. 5669) zerfällt in drei *Maqālas*, wie folgt:

Maqāla I. Auseinandersetzung über die Art der Zusammensetzung der Sphären (*Tarkīb al Aflāk*)¹⁾, die Eigenschaften (*Ni'āt*) ihrer Bewegungen, und was damit an einleitenden Bemerkungen zu diesem Gegenstand zusammenhängt, sowie über das, was sich auf den Sphären im Verhalten der Gestirne ereignet.

Maqāla II. Auseinandersetzung über die Gestalt der Erde und deren Einteilung in den bewohnten und den nichtbewohnten Teil, sowie über den Unterschied, der in den *Tāli'* (Aszendenten) und den *Maṭāli'* (Aszensionen) infolge der verschiedenen Lage der Wohnorte auftritt.

Maqāla III. Behandlung der Zeitepochen (*Tawdrīḥ*) und die Größen der Zeiten und über das, was damit zusammenhängt an *al Qirānāt*²⁾ und *al Adwār*³⁾.

In der Einleitung wird folgendes von *al Charaḡī* ausgeführt:

Nach einer etwas ausführlichen Doxologie^{3a)} heißt es: Die Erkenntnis von irgendeinem der wissenschaftlichen Behandlung zugänglichen Gegenstand ist eine ehrenvolle und lobenswerte Eigenschaft. Wer eine Wissenschaft besitzt, erwirbt sich eine Vollkommenheit, die er vorher nicht hatte. Sie war zunächst

1) *'Ilm al Tarkīb al Aflāk* bedeutet Astronomie, wobei unter *Aflāk* sowohl die Hauptsphären als auch die Epizykeln usw. verstanden sind.

2) *Al Qirān* ist die Konjunktion und zwar insbesondere diejenigen von Saturn und Jupiter (vgl. Enzyklopädie des Islam unter *al Qirān*).

3) *Al Daur* ist die Zeit, in der ein Himmelspunkt einen vollkommenen Umlauf um die Erde ausführt. Zu beachten ist die Bezeichnung *Daur al Qirān* oder *'Awd al Qirān* (Wiederkehr der *Qirān*).

3a) Den arabischen Werken wird eine längere oder kürzere Lobpreisung Gottes, ein auf *Muḥammed*, seine Familie, seine Genossen bezüglicher Segensspruch vorausgeschickt.

nur virtuell vorhanden, wurde dann aber aktuell. Was die Seele aber nur virtuell besitzt, stellt für sie im Verhältnis zu dem, was sie aktuell besitzt, ein Minus dar. Was aktuell vorhanden ist, entspricht einem wirklich vorhandenen Ergebnis, das Virtuelle aber nur unbekanntem, ja nicht vorhandenem. Offenbar gibt die Erkenntnis eines jeden (erkennbaren) Gegenstandes der Seele eine Vollkommenheit, und diese ist eine ehrenvolle und lobenswerte Eigenschaft. Einige Wissenschaften stehen aber entsprechend dem Adel des in ihnen erkannten Gegenstandes höher als andere. Unter allen Dingen, von denen man Erkenntnis hat, gibt es nichts Höheres als den Schöpfer, den ewigen, den einen, den notwendigen, die Wahrheit, die Existenz an sich. Daher gibt es keine edlere Wissenschaft als die als die Theologie bezeichnete; sie umfaßt die Lehre von dem Schöpfer, von dessen Einzigkeit, den ihm und den Cherubim unter den Engeln unbedingt zukommenden Eigenschaften. An diese Wissenschaft schließt sich der Würde nach unmittelbar an die Astronomie, d. h. die Kenntnis von dem Verhalten der Sphären, deren gegenseitiger Lage, Art und Größe, ihrer Bewegungen, dem Verhalten der auf ihnen befindlichen Gestirne und deren Bewegungen, die den Bewegungen der Sphären folgen. Diese Bewegungen sind die Ursachen für das Wachsen der Tiere und Pflanzen und auch für andere Ereignisse in der unteren Welt entsprechend der Weisheit des ewigen Schöpfers.

Von diesem Gesichtspunkt aus reiht sich die Astronomie nach Würde und Rang an die Theologie. In sie versenkten sich viele Mathematiker, die große Mühe aufwandten und sich voll Eifer bemühten, genau die Richtigkeit der Vorstellung von dem Aufbau der Sphären zu ergründen und weiter deren gegenseitige Lage gemäß dem Vorhandensein der beobachteten Bewegungen, die man den Gestirnen zuschrieb, zu erforschen. Infolge des großen, beim Suchen nach der Wahrheit aufgewandten Eifers gewannen sie nach langem Bemühen und Nachdenken einen Einblick in das, was sie beobachteten von den Zuständen der Gestirne entsprechend der Art der Darstellung, mittels deren sie sich die Mannigfaltigkeit der Bewegungen vorstellten (darstellten). Diese (ihre Erkenntnisse) waren aber nicht im Laufe der verflossenen Jahrhunderte und

Zeiten aus dem Gedächtnis geschwunden und vergangen, sie legten sie in ihren Werken nieder, und zwar ohne Beweise und losgelöst von den Gesichtspunkten, von denen aus sie zu den Vorstellungen über die gegenseitige Lage der Sphären und über die verschiedenen auf ihnen erfolgenden Bewegungen gelangt waren, ausgenommen im *Almagest* (der die Beweise enthält)⁴⁾. Dieser genügt nach seinem Inhalt seiner Aufgabe ganz vortrefflich, er legt die Gesichtspunkte vollkommen dar, die zu der Darstellung führen, von der aus sich die gefundenen Bewegungen fehlerlos ergeben. Nur ist das, womit sich der *Almagest* und die meisten über diesen Gegenstand verfaßten Werke befassen, zu kurz gefaßt hinsichtlich der gedachten Punkte und Kreise. Ihr Zweck (d. h. derjenige der Werke bzw. ihrer Verfasser) ist nur, die die Epizykeln tragenden Kugeln zu erklären, ferner die Epizykeln selbst mit den Kreisen, die von den Mittelpunkten der Epizykeln und durch die Gestirne beschrieben werden, und ferner die Bewegungen der Sphären mit den Gestirnen durch die Bewegungen der Gestirne auf den Umfängen der gedachten Epizykeln, ohne aber zu behandeln die Art der Umdrehung der kreis-(kugel-)förmigen Körper mit den Gestirnen einschließlich der Anordnung(en) von deren Bewegungen entsprechend ihrer Vorstellung von der Lage der Körper, von denen einige sich oberhalb von anderen befinden. Sie behandelten auch nicht die Tatsache, daß der eine den anderen in Bewegung setzt, endlich daß eine genaue Übereinstimmung mit den verzeichneten Angaben über die Ungleichheit in den Bewegungen (ungleichförmige Bewegung) besteht. Dabei suchten sie sich dem Verständnis der Lernenden zu nähern und die ihnen obliegende Sache zu erleichtern. Bei der Rechnung kommt man zu demselben Endergebnis (Urteil), ob das Gestirn sich von einem Punkt zu einem Punkt bewegt, oder ob es sich durch die Bewegung der Sphäre zu ihm bewegt, gerade so wie es bei einem von uns bei einer Reise von einem Ort zum anderen für die Rechnung keinen Unterschied macht, ob dies zu Fuß oder zu Pferd geschieht.

4) Dies geschieht aber auch im Werk von *al Battîni* usw. Vielleicht denkt *al Uharagi* nur an griechische Werke oder an die arabischen Schriften, die nur die Ergebnisse enthalten.

Diese Nachlässigkeit hat aber die Leute zu einem großen Irrtum geführt, insofern als sie glaubten, daß die Gestirne sich auf den Sphären von selbst bewegen und nicht in akzidenteller Weise durch die Bewegungen der Sphären. Sie gelangen so zu einem unmöglichen Schluß, und zwar indem sie behaupten, daß bei der Wanderung der Gestirne die Sphären zerteilt werden, gerade so wie sie beobachten, daß das Wasser zerteilt wird dadurch, daß der Fisch in ihm schwimmt. Das kommt daher, daß sie nicht wissen, daß die oberen Körper ein Zerteiltwerden nicht zulassen, und daß sich bei ihnen keine Neigung zur Bewegung zur Seite durch eine [senkrechte] gerade Bewegung findet, bis daß (etwa) Gott einen Befehl erteilt, der ausgeführt werden muß.

Eine Schar der Späteren wie *Abū Gaʿfar al Chāzin*, *Abū ʿAlī b. al Haiṭam* hat jedoch die Methode der Zusammensetzung der Sphären entsprechend der Vorstellung erläutert, die sie sich von der Art der Umdrehung der körperlichen Sphären gebildet hatten, die samt den Gestirnen übereinander angeordnet waren; dabei erwies sich auch die Anordnung der Bewegungen als richtig. *Abū ʿAlī b. al Haiṭam* befaßte sich mit diesen Darlegungen mit großem Eifer, nur ließ er dabei vieles zur Seite, was zur Astronomie gehört, und was sich an sie anschließt (z. B. Einteilung der Erde in Klimate, Chronologie usw.), von dem, was der, der sich mit Astronomie beschäftigt, nicht entbehren kann. Was er aber berichtet, das enthüllt und erläutert er nicht weiter, auch gibt er für nichts, das er mitteilt, einen Beweis, sondern er beschränkt sich darauf, die Art der Lage der Sphären und ihre Umdrehungen mitsamt den Sternen entsprechend der Reihenfolge und Anordnung darzustellen und zwar, wie sie sich in ihren (der Astronomen) Werken finden.

Da kam mir der Gedanke, für meine Freunde ein Werk über dies Gebiet zusammenzustellen, das das meiste, dessen man hierzu bedarf, umfaßt, indem ich mich in der Darlegung über die Zusammensetzung und Einteilung der Sphären dem Scheich *Abū ʿAlī b. al Haiṭam* anschloß; dabei behandelte ich auch die Gegenstände, die er selbst fortließ, und fügte Darlegungen und Beweise, die zu diesem Werke gehören, an einigen Stellen, die ich erwähnen werde, hinzu. Dadurch soll derjenige, der sich mit ihm befaßt, aus der reinen Nachahmung heraus-

kommen; er soll durch die Vorstellungen, die er sich selbst bildet, zu dem Grad der mittleren (Bücher)^{4a)} emporsteigen und zu dem höchsten Ziel, das in diesem Gebiet erreicht werden kann, emporgetrieben werden. Als mein Entschluß gefaßt war, da erbat ich von Gott die Hilfe und den Schutz vor dem Fehler und dem Irrtum. — Er ist nahe und er erhört!

B. Einleitung zu *al Tabṣira*.

Das zweite kürzere Werk *al Tabṣira* (Berlin 5670 und Gotha 1384) zerfällt, wie sich ergibt, in folgende Abschnitte:

Einleitende Bemerkungen. Über die Erklärung der Ausdrücke, deren man in diesem Werk bedarf.

Teil I (*Qism*). Bericht über das, was besonders zu berücksichtigen ist, bei der Auseinandersetzung über die Sphären und über deren gegenseitige Lage und zwar im allgemeinen und im einzelnen.

Teil 2. Bericht über das, was besonders eigentümlich ist bei der Gestalt der Erde und der Art ihrer Einteilung in den bewohnten und den nicht bewohnten Teil und, was damit zusammenhängt von dem, was über die Aszendenten und über Aszensionen erwähnt wird.

In dem 14. Schlußkapitel wird ganz kurz der Inhalt der dritten *Maqāla* der *Muntahā* zusammengefaßt als Behandlung der Bedeutung von *al Ta'riḥ*, dem Jahr, dem Monat, dem Tag, der Stunde.

Im großen und ganzen stimmt der Inhalt von *al Muntahā* und *al Tabṣira* überein, aus der es ein Auszug ist; nur hat die *Muntahā* im Teil 2, Kap. 2 eine sehr ausführliche Ausführung über die Meere, die auch C. Nallino (*al Battānī* I, S. 169—175) benutzt.

In der Einleitung wird folgendes ausgeführt:

Nach einer kurzen Doxologie heißt es: Die Gelehrten und Philosophen vor dieser unserer Zeit beschäftigten sich mit allen Wissenschaften, deren schriftlicher Niederlegung, ihrer Aufklärung und zusammenfassenden Darstellung. Zu ihrer Zeit

4a) Die mittleren Bücher sind bekanntlich diejenigen mathematischen Werke, die nach den Elementen des Euklid und vor dem Almagest, dem höchsten Ziel bei den mathematischen Wissenschaften, gelesen werden mußten.

waren sie frei von niedriger Beschäftigung und Beschmutzung; in ihren Arbeitsstätten waren sie von Geschenken und Reichtümern umringt. Die Könige und Fürsten hatten damals den Ehrgeiz, das Gebäude der Wissenschaften als ein festes zu errichten und die Untersuchungen der Gelehrten zu erleichtern. Jetzt aber ist der Markt der Wissenschaft und Gelehrsamkeit eingeschlafen und die Waren ihrer Vertreter sind verschwunden. Unter den Söhnen unserer Zeit finden wir keinen, der es sich angelegen sein läßt, die Wissenschaft wieder ins Leben zu rufen, und der die geistige Beweglichkeit besitzt, sich entsprechendes Lob zu erwerben, außer einem, dem Gott eine edle Seele und eine köstliche Naturanlage verliehen hat, und dem er aufrichtige Sehnsucht nach den Gebieten der Wissenschaft eingepflanzt hat sowie den Willen, einem trefflichen Manne weitgehende Gnadenbeweise zukommen zu lassen. Einen solchen preisen die Zungen, und die Gelehrten sind voller Sehnsucht nach der Zeit, zu der er lebte. Es ist dies der herrliche Emir (Fürst) *Schems al Din Abu'l Hasan 'Alī b. Naṣīr⁵⁾ al Din Maḥmūd b. Muṣaffar*. Gott erbarme sich seiner⁶⁾. Einst sagte ich zu mir selbst und kam immer wieder auf den Gedanken zurück, als Huldigungsgabe für ihn ein Werk über die Philosophie zusammenzustellen. Mancherlei Hindernisse und andere Beschäftigungen stellten sich diesem Plan in den Weg. Zu jener Zeit war ich mit einem Werk über die Logik beschäftigt, aus ihm sollten Nutzen ziehen der Anfänger sowie der, der in einer Wissenschaft bewandert ist, und der den richtigen Weg weist. Dies Werk erforderte aber für seine Vollendung eine große Anzahl von Tagen und eine lange Zeitspanne. Als nun die Zeit seiner glückverheißenden Ankunft nahe kam, wollte ich ihm mit etwas Fertigem aufwarten und ihm etwas überreichen, das ihm zur Unterhaltung dienen sollte. Ich verschob daher die Abfassung des versprochenen erwähnten Werkes und schrieb das vorliegende Werk über die Astronomie, d. h. über die Erkenntnis der Eigenschaften (*Aḥwāl*) der Sphären, deren Bewegungen und

5) Berlin hat *Naṣr al Din* und läßt *b. Muṣaffar* fort.

6) Die Redewendung *raḥmahu Allāhu* bezieht sich stets auf einen Verstorbenen. Da es aber nicht sicher ist, ob sie in unserem Fall von dem Verfasser *al Charaḡī* oder vom Abschreiber herrührt, so läßt sie keinen sicheren chronologischen Schluß zu.

über die Eigenschaften der auf ihnen befindlichen Gestirne; dabei diente mir als Vorbild *Abū 'Alī Ibn al Haitam* und zwar in der Art der Unterteilung (*Taqsim*) aller Sphären, der tragenden und der Epizykeln durch körperliche (materielle) Kugeln (Kugelschalen) und in der Art, wie sie mit den Gestirnen, die sie enthalten, umlaufen; einschließlich in der Anordnung ihrer Bewegungen in der gefundenen Rangordnung. Dabei beschränkte sich aber er (d. h. *Ibn al Haitam*) nicht auf die gedachten Kreise, auf deren Umfang sich die Mittelpunkte der Epizykeln sowie diejenigen der Gestirne befanden. In der zuletzt erwähnten Richtung ging das Bemühen der meisten früheren Gelehrten; dabei erhält man in der Tat einen Hinweis auf die Beschaffenheit der Bewegungen der Gestirne und deren numerische Verhältnisse, ohne daß man aber die Sphären in bezug auf ihre Gestalt näher untersuchte, unter der man sich die gefundenen Bewegungen in der gefundenen Anordnung vorstellt.

Ich nannte das Werk *Al Tabṣira fī 'Ilm al Hajja*, d. h. das Einsicht verschaffende in die Astronomie. Ich bemühte mich bei der Darstellung Maß zu halten und sie möglichst kurz zu fassen, ohne aber doch hinter dem mir gesteckten Ziel zurückzubleiben. Wer aber in diesem Gebiet bis zu dem letzten Ende gelangen will, der muß sich eingehend mit meinem Werk „das höchste Erreichen in der Teilung der Sphären“ (*Muntahā al Idrāk fī Taqāsim al Aflāk*; s. oben) beschäftigen. Es dürfte alles, was sich auf dieses Gebiet bezieht, in dem letzteren Werk zusammengedrängt sein. Und zu Gott ist mein Begehren hinsichtlich der Vollendung dessen, was ich erstrebte, und die Erleichterung der Gründe (d. h. daß mir die Gründe leicht werden), auf die ich fest vertraute, geschieht durch seine Gnade und seine Macht (Langmut) (*Tawāl*).

Ich habe das vorliegende Werk in zwei Teile geteilt. Der eine behandelt die spezielle Auseinandersetzung darüber, wie die Sphären zusammengesetzt sind, die Lage der einen gegenüber den anderen im ganzen und im einzelnen. Ein anderer Teil betrifft speziell die Gestalt der Erde, wie sie in einen bewohnten und einen nicht bewohnten Teil eingeteilt wird, und was mit ihr von den Aszendenten (*Tāli'*) und den Aszensionen (*Maṭāli'*) zusammenhängt.

Zur Geschichte von *Schems al Dîn* und seinem Vater
Naşir al Dîn.

Über den Gönner von *al Charağî* haben wir nur sehr wenig feststellen können und zwar im Anschluß an Angaben über seinen Vater und zwar auf Grund einer Bemerkung von N. Khanikoff, Analysis and extracts of the book of the balance of wisdom. Journ. of the American Oriental Society Vol. VI, S. 113. 1859. N. Khanikoff teilt eine Stelle aus dem *Dastûr al Wuxarâ'* von *Khwandamir* mit, in der *Naşir al Dîn Mahmûd b. Muzaḡḡar* besprochen ist. Darauf, daß es ausgeschlossen ist, daß *Naşir al Dîn* und *al Châxinî* identisch sind, haben schon die Schriftleiter der obigen Zeitschrift hingewiesen (zu *al Châxinî* vgl. E. Wiedemann, Beiträge XX, S. 73).

Herr F. Krenkow war so gütig, uns die betreffende Stelle aus dem Werk von *Mirkhwand* abzuschreiben und zu übersetzen. Zugleich machte er uns auf eine zweite Stelle in *Tabağât al Schâfi'ja* (die Klassen der Schâfi'iten) von *al Subkî* aufmerksam.

Da die Stelle bei *Khwandamir* ein Bild von den Ränken am Hof von *al Singar*^{6a)} (1117—1157), dem Herrscher von *Churâsân*, an dem auch *al Châxinî* lebte, gibt, so teile ich die Übersetzung des ganzen Stückes im wesentlichen im Anschluß an Herrn F. Krenkow mit.

Naşir al Dîn Mahmûd Muhammed (Muzaḡḡar) al Chivârixmî war in den Wissenschaften des Verstandes und der Überlieferung in hohem Maße bewandert, vor allem in den Rechtslehren (*Fiqh*) von *al Schâfi'î*; er war aber auch ausgezeichnet in anderen Wissenschaften, so in der Lehre von den *Fetwa* (Rechtsentscheidung) und der Heeresleitung. Er erwies sich als sehr wohlwollend gegen Leute von Würde und solche, die tüchtig waren. Der *Qâdî 'Omar b. Sahlân al Sâwagî* widmete ihm sein Werk

6a) *Al Singar* hatte für wissenschaftliche Fragen Interesse. Ihm widmete *'Abd al Raḡmân al Châzinî* das singarische Tafelwerk und verfaßte auf seine Veranlassung Tabellen, durch die es möglich war, aus Messungen am indischen Kreise ohne weiteres die Richtung der *Qibla* für die meisten Orte des *'Irâq* festzulegen. (Diese Tafel findet sich nicht in dem singarischen Tafelwerk; vgl. *Nutzhat al Qulûb* von *Ḥamd Allâh Mustawfî* translated by G. Le Strange, S. 25. 1919.)

Baṣā'ir Naṣīrī (der Scharfblick des *Naṣīr*)^{6b)}, das über Wissenschaft, Philosophie (*Ḥikma*) und Logik (*Mantiq*) handelt. In dem Werk *Gāmi' al Tawārīḥ* ist berichtet, daß *Naṣīr al Dīn Maḥmūd* zuerst in der Küche und im Marstall des Sultan *Singar* eine Anstellung hatte. Als er aber, wie es sich (bei seiner Tüchtigkeit) geziemte, aus dieser Stellung zu einer höheren vorrückte, machte ihn der Sultan zum Vorstand der Einkünfte und Ausgaben des Reiches. Später wurde ihm die Stelle des Vezierates übertragen. Da er aber die Aufgaben eines Veziers nicht so, wie es sich geziemte, den Gelehrten gegenüber erfüllen konnte, wurde ihm vom Sultan gestattet, diese Stellung aufzugeben. Später wurde er ein zweitesmal mit der Würde des Veziers und Finanzministers bekleidet.

Die mit dieser Anstellung verbundenen Sorgen übertrug dann *Naṣīr al Dīn* seinem Sohn *Schems al Dīn*.

Mittlerweile versuchten mehrere Emire und Säulen (hohe Würdenträger) des Reiches einen der Notabeln seiner Majestät *Singar*, nämlich *Muqarrab al Dīn*^{6c)} in die Stellung von *Naṣīr al Dīn* zu bringen. Dieser, durch die Schikanen der Emire aus dem Gleichgewicht gebracht, begann Feststellungen (über die Tätigkeit von *Muqarrab*) zu machen und ließ dem Sultan durch einen der Privatsekretäre (*Bawwāb*)^{6d)} unterbreiten, daß *Gauhar* Güter des Sultans und Staatseinkünfte verausgabt habe, und zwar ohne Rechenschaft abzulegen. Auch habe er zu der Zeit, als er sich der Gunst des Sultans erfreute, in trügerischer Weise zahllose Sachen vorgebracht. Der Sultan befahl, daß die großen Emire und die Stützen der Regierung sich versammeln sollten, um ein Verhör in dieser Angelegenheit anzustellen. Als die Versammlung stattfand und *Naṣīr al Dīn* mehrere der (oben

6b) Das Werk wird auch von *al Bundārī* (s. w. u.) erwähnt.

6c) Nach *al Bundārī* (Geschichte der Seldschuken ed. Houtsma S. 273) ist der Emir *al Muqarrab al Agall Ichtijār al Dīn Gauhar al Tāgi* (unter dem Namen *Gauhar* tritt er im folgenden stets auf). Zuerst war er ein Angestellter der Mutter von *Singar*, die 517 d. H. (1123/24) starb. Dann trat er in die Dienste des Sultans selbst und wurde sein Vertrauter. Später wurde *Gauhar* durch Assasinen ermordet; man hatte aber den Verdacht, daß dies auf Befehl des Sultans selbst geschehen.

6d) Die Aufgabe des *Bawwāb* war keine Leute vorzulassen, die dem Sultan nicht persona grata waren.

erwähnten) Ausgaben des *Gauhar Châdim* (*Châdim* = Diener, Eunuch) feststellte, widerlegte ersteren *Tiqat al Dîn Abû Ga'far*; ersterer war Vezier und Stellvertreter (*Nâ'ib*) von *Gauhar*. Er sagte, daß 1000 Sklaven . . . zur Unterhaltung des Glanzes des Dienstes nötig sind (diese hatte wohl *Abû Ga'far* angekauft), Du dagegen hast ein mit Edelsteinen geschmücktes Schreibzeug erworben, um die Würde (den Glanz) des Vezierates zu erhöhen, und dazu hast Du die Staatseinkünfte ausgegeben. In dieser Versammlung wurde viel hin- und hergeredet, und die Sache wurde dann dem Sultan berichtet. Dieser befahl, daß man die Angelegenheit von Grund aus erforschen solle. Die Streitenden sollten in seiner Gegenwart ihre Beweise vorbringen, damit er die Wahrheit erkennen und dementsprechend Gerechtigkeit üben könne. Als *Gauhar* dies erfuhr, war er im Meer der Aufregung (in höchster Aufregung) und ging zum Emir *Tschatri*, der Kammerherr war, und mit dem er als Gastfreund auf gutem Fuß stand. Dieser riet ihm durch irgend etwas den Sultan sich günstig zu stimmen. Er sagte, er solle diesem ein Geschenk schicken, um so seine Feinde zum Schweigen zu bringen (wörtlich die Zungen kurz zu machen). Dieser Vorschlag fand durchaus den Beifall von *Gauhar*.

(Folgen einige Verse.)

'*Alî Tschatri*^{6e)} ging also an einem vorher verabredeten Tag zum Sultan und versetzte ihn durch eine witzige Rede in gute Laune; zu derselben Zeit wurden dem Sultan von *Gauhar* zwei junge Sklavenjünglinge zum Geschenk gesandt, die vor Scham rote Wangen hatten (folgen zwei Verse, die anfangen „fichtenwüchsige, zart wie Rosenblätter, die auf ihren Wangen das Blut der Leber zu Rosen machten“).

Mit den Sklaven kam ein Brief von *Gauhar*, in dem dieser sagt, er habe dies Geschenk für den Herrn der Welt gekauft. Der Sultan nahm das Geschenk gnädig an, und da (wie erwähnt), *Tschatri* zugegen war, benutzte dieser die Gelegenheit, die Streitfrage wieder vorzubringen und zu berichten, daß *Gauhar* die

6e) Nach *al Bundârî* heißt der Mann *al Falak* (der Himmel) '*Alî al Tschatri*,'

beiden mondgleichen Sklaven mit seinem letzten Gold gekauft habe und nun keinen Heller mehr besäße, während es doch andere gäbe, die viele Knaben mit Locken wie Gold und Mädchen mit Wangen wie Blumen besäßen. Hierdurch gnädig gestimmt, ging der Sultan in eigner Person zum Hause des *Gauhar* und erhielt dort ein Geschenk von achtzig jugendlichen Sängerinnen mit der entsprechenden Aussteuer (2 Verse). So wurde der Sultan dem *Gauhar* gnädig gestimmt und ließ *Naşır al Din* wissen, sein Wunsch sei, daß die beiden Gegner sich nach ihrem Streit vertragen und als Freunde leben sollten.

Kurze Zeit nachher wurde *Schems al Din*, der Sohn des *Naşır al Din*, wegen des Verkehrs mit einer Dame aus dem Stande der Emire verklagt und der Sohn sowohl als der Vater wurden gefangen gesetzt; da machte *Schems al Din* einen Vierzeiler.

„Gestern war mein Vater ein Adeliger (*Sajjid*), Herrscher und Vezier. Heute bin ich selbst und ist ebenso mein Vater erniedrigt und gefangen.

Ich bin ein Jüngling und was ist meine Jugend wert, oh Herr (wohl *Singar*) . . ., Gnade für einen gebrechlichen Greis.“

Sowohl der Sohn als auch der Vater beschlossen ihr Leben in diesem Gefängnis, denn die Aufgabe dessen, der ein so hohes Amt innehat, ist es nicht, dahin zu wirken, daß zwischen Männern, die dem Thron nahe stehen, Streitigkeiten entstehen, sondern dahin, daß sie sich so viele Gefälligkeiten wie möglich erweisen, wie dies die Erfahrungen der Nationen bestätigen.

Einer der Freunde des *Naşır al Din* bat den Sultan um Gnade und war bereit, 100000 *Dindre* in den Staatsschatz zu zahlen, wenn der Sultan seinen Freund freilassen wollte. Der Sultan antwortete aber: Selbst wenn es *Tümâm*^{6f)} wären (würde ich nicht Deinem Wunsch entsprechen); die Schuld lastet doch noch auf dem anderen, um ihn ins Gefängnis zu schicken. Aber ich mache Dir ein Geschenk von 100000 *Dindr*.

6f) Ein *Tümâm* ist z. B. gleich 10000 *Dirham*, ein *Dindr* = 10 *Dirham*, also ein *Tümâm* = 1000 *Dindr*. Die Werte wechseln aber sehr.

Über *Nasir al Din Mahmūd b. Muẓaffar* gibt uns, wie erwähnt, noch eine Stelle in den *Ṭabaqāt al Schafi'īja al Kubrā* (Die großen Klassen der *Schafi'īten*) von *al Subkī* (Druck von Kairo, Bd. 4, S. 308) Anschluß. Zu deren Übersetzung war Herr Prof. Dr. Th. W. Juynboll in Utrecht so gütig zahlreiche Verbesserungen mitzuteilen. Die Stelle lautet:

Mahmūd b. Muẓaffar b. 'Abd al Malik b. Abī Tanba al Marwaxī (aus Merw), der große Vezier, *Abū'l Qāsim* stammte aus Merw und wurde am letzten Tage des *Gumādā II* des Jahres 466 = 1. März 1074 geboren. Er studierte Recht und Theologie (*Fiqh*) bei *Muẓaffar b. al Sam'ānī*. Dann ging er nach Transoxanien, dort traf er die *Imāme*⁷⁾. *Abū Sa'd* gibt an, *Mahmūd* zeichnete sich beim Disputieren aus; er war ein hervorragender Mann, im *Fikḥ* bewandert und ein scharfsinniger Gelehrter; er studierte die Wissenschaften der Alten und war lebhaft damit beschäftigt, sich diese gründlich zu eignen zu machen. Dennoch war er sehr eifrig im Verrichten der Gebete (*Ṣalāt*) und in dem Geben der *Zakāt* (Almosen). Auch war er dauernd zugegen beim Freitagsgebet (*Gum'a*) und bei den gemeinschaftlichen *Ṣalāt*⁸⁾ und ferner bei den *Dikr*-Versammlungen⁹⁾. Hierdurch wuchs sein Ansehen, sodaß er zum Vezier ernannt wurde. Dennoch — d. h. obgleich er das Vezierat zu verwalten hatte — konnte er seinen Feinden widerstehen, und seine Worte siegten sogar über seine Feinde wegen der Feinheit seiner Betrachtungsweise und der Schönheit seiner Worte (seiner Vortragsweise), mit denen er seine Argumente vortrug. Später wurde er aber seiner Stellung als Vezier entsetzt. Dann zog er sich eine Zeitlang zurück. Hierauf wurde ihm eine

7) Es sind wohl die unten erwähnten führenden Gelehrten der *Fiqh*-wissenschaften.

8) Diese gemeinschaftlichen Gebete (*Gamā'āt*) sind bei bestimmten Gelegenheiten, Festen usw. eine Pflicht für die Muslime.

9) Es sind das Versammlungen, bei denen fromme Muslime den Namen *Allāh's* mit vielen Lobpreisungen erwähnen.

Zeitlang das Amt der Finanzkontrolle¹⁰⁾ überlassen und eine Zeitlang das eines Oberintendanten des Schatzes¹¹⁾.

Später wurde er aber in *Nisābūr* gefangen genommen und nach *Merw* gebracht. Er wurde in einer Burg an den Ufern (Gegenden) des *Gaiḥūn* (Oxus), die *Bānakar* heißt, eingesperrt. In ihr wurde er getötet.

In *Merw* hörte er den *Abū Muẓaffar al Samʿānī* und in *Buchārā* den *Qāḍī Abū'l Jasr Muḥ. b. Muḥ. b. al Ḥasan al Jaxridabī* und andere.

Von ihm berichtet *Abū Sa'd*: er starb oder wurde erdrosselt im Monat *Ramādān* des Jahres 503 (= Februar/März 1110). Am Tor der Burg *Bānakar* wurde er begraben.

Auf noch andere Angaben über unseren *Naṣīr al Dīn* aus der Geschichte der Seldschuken von *al Bundārī* (s. oben S. 268 ff.) hat uns Herr Krenkow hingewiesen. Nach ihnen wurde *Abū'l Qāsim Maḥmūd b. Abi Tauba al Mārwazī* im Jahre 521 d. H. (1127/28) zum Vezier ernannt. Als solcher verkehrte er mit den vortrefflichsten Männern, die ihm zum Teil ihre Schriften widmeten, so *Omar b. Saḥlān* das oben erwähnte Werk, das in seinem Gebiet unvergleichlich ist. Ein anderer widmete ihm eine lange *Qaṣida* (Gedicht). Als *Singar* 536 d. H. (1141/42) nach dem Tode seines Bruders *Muḥiṭ al Dīn Maḥmūd* nach dem *Irāq* zurückkehrte, um das Sultanat seinem Bruder *Tuḡil b. Muḥammed* zu übertragen, wurde *Schems al Dīn* abgesetzt. *Bundārī* bemerkt dazu, „daß an Stelle eines Gelehrten Dummköpfe an das Ruder kamen, und an Stelle jenes trefflichen Mannes trat dieser Minderwertige. Findet nämlich das Unverfälschte keine Abnehmer, so geht das Verfälschte gut ab.“

Von Gewalttaten *Singars* gegen *Maḥmūd* und seinen Sohn ist keine Rede.

Betrachten wir die Zeitangaben, so hätten wir nach *al Subḥī* die Lebenszeit von *Maḥmūd* 466—503 (1069—1110).

10) Das Amt heißt *al Istifā'*, es ist dasjenige des *Mustaufī*, dieser hatte alle Rechnungen des Staats zu überwachen, und zwar sowohl diejenigen der Einnahmen als auch diejenigen der Ausgaben.

11) Das Amt heißt *al Ischrāf*; mit ihm ist eine ganz ähnliche Aufgabe verbunden. — Aus den Angaben bei Dozy ist aber nicht zu ersehen, wie sich diese beiden Ämter voneinander unterscheiden.

Singar regierte 1117—1157. Die Zahl 503 = 1110 ist jedenfalls falsch, trotzdem sie auch die Berliner Handschrift Nr. 10038 hat, wie Herr Prof. Dr. Weil uns gütigst mitgeteilt hat. Nehmen wir die Zeitangabe von *al Bundari*, so wäre *Mahmūd* bei der Übernahme des Vezirates etwa fünfzig Jahre alt gewesen, bei dessen Ende über sechzig, sodaß es natürlich war, daß er seinen Sohn zur Hilfe heranzog. Die *Tabṣira* wäre zwischen 1127 und 1138 verfaßt.

Zum Schluß ist es uns eine angenehme Pflicht Herrn F. Krenkow in Beckenham herzlichst für alle seine Ratschläge bestens zu danken und ebenso Herrn Prof. Dr. Juynboll in Utrecht. Auch Herr Professor Ruska in Heidelberg hat uns seinen gütigen Rat geliehen.

Die Astronomie des Maḥmūd ibn Muḥammed ibn 'Omar al-Ġagminī.

Von

G. Rudloff und Prof. Dr. Ad. Hochheim.

I.

Maḥmūd ibn Muḥammed ibn 'Omar al-Ġagminī.

In den zahlreichen Veröffentlichungen über arabische Astronomie sucht man vergeblich nach einer Notiz, aus der sich Schlüsse in Betreff der Zeit der Geburt, des Wohnortes und der Lebensverhältnisse des Verfassers der nachstehenden Abhandlung ziehen liessen. Auch Franz Wöpcke, dessen eingehenden Forschungen wir hauptsächlich einen genaueren Einblick in die Verdienste der Araber auf dem Gebiete der exakten Wissenschaften verdanken, hat jedenfalls in der Handschrift, nach der er im *Journal Asiatique*, Févr.-Mars 1862, pag. 112 die Ueberschriften der beiden Abtheilungen und der einzelnen Capitel aufführt, eine einschlägige Bemerkung über Ġagminī nicht gefunden; er würde sonst sicher eine Erwähnung derselben nicht unterlassen haben. Die in der Abhandlung in Abtheilung II, Kapitel 3 bei der Erklärung der Schatten angeführten Namen aš-Šafi'i und Abū Ḥanīfa bieten keinen Anhalt, auch nur annähernd die Zeit der Abfassung zu bestimmen. In der Litteraturgeschichte der Araber wird bisher ein aš-Šafi'i überhaupt nicht erwähnt, dagegen tritt uns der Name Abū Ḥanīfa zweimal entgegen. Ein Abū Ḥanīfa, dessen vollständiger Name Abū Ḥanīfa ad-Dīnawarī war, galt in der Zeit, in welcher al-Battānī thätig war, als ein Astronom von untergeordneter Bedeutung; ein anderer war nach einer Mittheilung des an-Nasawī Verfasser eines Lehrbuches der Rechenkunst und lebte gegen Ende des zehnten Jahrhunderts. Nur über den Tod des Ġagminī scheint eine Aufzeichnung zu existiren. Im Katalog der Bibliothek zu Kasan giebt Professor Gottwaldt an, daß Ġagminī im Jahre 618 der Hīġra gestorben sei, fügt aber leider keine Bemerkung über die Quelle an, aus welcher er geschöpft hat. Sonach dürfte der Verfasser der Abhandlung einer derjenigen Gelehrten gewesen sein,

15*

welche durch ihre Arbeiten die zweite Blütheperiode der Astronomie bei den Arabern eröffneten. Der Inhalt der Schrift scheint diese Annahme zu bestätigen.

Nach einer übersichtlichen Disposition schildert dieselbe die Gestalt der Sphären, die verschiedenartige Lagerung der Kugelschalen in einzelnen derselben, ferner die rotierende Bewegung der Theile mit Angabe der Richtung und der Winkelgeschwindigkeit in eingehender Weise. Sie beschreibt sodann die drei Koordinatensysteme, mit deren Hilfe sich der Ort eines Gestirnes bestimmen lässt, zählt die gebräuchlichen technischen Ausdrücke auf und erläutert dieselben. Eine Erklärung der scheinbar unregelmässigen Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten mit genauer Angabe der zugehörigen Maasszahlen bildet den Abschluss der ersten Abtheilung.

In der zweiten Abtheilung giebt die Abhandlung die Eintheilung der Erdoberfläche nach der damaligen Anschauung, beschreibt den Wechsel, den der Anblick des gestirnten Himmels bietet, sobald der Beobachter seinen Standpunkt in verschiedenen Breiten wählt, erklärt das Entstehen der Sonnen- und Mondfinsternisse und knüpft zum Schluss Fingerzeige zur Bestimmung der Mittagslinie, der Richtung der Kibla für einen beliebigen Ort und der Länge des Jahres an.

Der Abfassung der Abhandlung ging jedenfalls ein eingehendes Studium der aus der ersten Blütheperiode stammenden astronomischen Schriften und der Werke des Ptolemäus in der Uebersetzung voraus. Es lässt sich dies daraus schliessen, dass Gāgminī ganz die Anschauungen der bedeutendsten seiner Vorgänger theilt und sich aufs eifrigste bemüht, dieselben in knapper und klarer Form darzulegen; dass er ferner eine Schrift des Ptolemäus erwähnt, welche derselbe erst nach dem *Almagest* verfasst haben soll. Ausserdem ist anzunehmen, dass der Verfasser längere Zeit genaue Beobachtungen über die Sonne, den Mond und die Planeten angestellt hat, obgleich er sich nur einmal über die Anwendung des Astrolabiums auslässt und im übrigen in seiner Bescheidenheit über seine Thätigkeit auf diesem Gebiete vollständig schweigt. Für diese Annahme sprechen einerseits die Schlussworte: „Der Inhalt der Abhandlung ist es, was die Natur und ernstes Sinnen und Nachdenken über eine reiche Zahl von Fragen mich gelehrt hat u. s. f.“, andererseits die zahlreichen Abweichungen seiner Angaben von den Zahlenresultaten, welche während der ersten Periode durch Messung gefunden worden waren. Die Rechnung vermeidet er; vielleicht mochte er wegen der Ausdehnung, welche damals die mathematischen Studien schon gewonnen hatten, annehmen, dass die Methoden der Mehrzahl seiner Leser bekannt seien, und demnach die Befürchtung hegen, dass das Werk durch Einfügung des *Calculus* zu weitschweifig werden möchte. Auch einen ausführlichen Sternkatalog vermisst der Leser. Möglich ist es, dass der Verfasser

den jedenfalls sehr weit verbreiteten Katalog des Süfi für ausreichend erachtete, möglich auch, dass er seine Studien überhaupt auf eine genaue Beobachtung der Sonne, des Mondes und der Planeten beschränkt hatte.

Als den Zweck der Abfassung der Abhandlung führt Ġagminī zwar an, dass dieselbe allen Männern der Wissenschaft eine Erinnerung an ihn nach seinem Tode sein möchte; die ganze Anlage des Werkes lässt indessen darauf schliessen, dass er zugleich dabei im Auge hatte, eine instructive Vorschule der Astronomie zu schreiben, durch welche die Anfänger in die Wissenschaft eingeführt werden könnten. Als Lehrbuch mag denn auch das Werk öfter Verwendung gefunden haben; dafür spricht insbesondere, dass sich ein gewisser Ġurgānī veranlasst sah, einen Commentar dazu zu schreiben. Dass die Schrift hoch geschätzt wurde und eine weite Verbreitung gefunden hatte, geht ausserdem daraus hervor, dass der Commentator sie in seinem Texte stets nur *Mulabḥaṣ* d. i. die Abhandlung nennt. Erst von einem späteren Leser ist in einem Falle am Rande der Name des Ġagminī angefügt.

Besonders hervorzuheben ist, dass der Verfasser in der Abhandlung den Stoff mit grosser Sorgfalt gruppiert, die Erklärungen mit Schärfe und Klarheit zum Ausdruck gebracht und durch die Darstellung ein lichtvolles Bild von der Anschauung derjenigen Araber des dreizehnten Jahrhunderts geliefert hat, welche der Astronomie ein rein wissenschaftliches Interesse widmeten. Durch die Trepidationshypothese hat er sich nicht irre leiten lassen; er führt (Abthl. I, Kap. 2) an, dass er die Bewegung der Nachtgleichenpunkte für eine fortschreitende halte. Ferner ist er der erste von den asiatischen Astronomen, welcher das Koordinatensystem, dessen Basis die Horizontalebene des Beobachters ist, in nähere Betrachtung zieht. Bis dahin war dasselbe nur von Ibn Jūnus gelegentlich erwähnt worden.

Anzuerkennen ist endlich, dass Ġagminī bei seiner Darstellung jedes astrologische Phantasiegebilde grundsätzlich ausschloss. Zu welchen thörichten Folgerungen diese Verwirrung des menschlichen Verstandes verleiten konnte, zeigt deutlich die in der Mitte des 13. Jahrhunderts von Kaẓwīn verfasste Kosmographie. Es ist die Enthaltensamkeit des Ġagminī um so mehr zu bewundern, da die astrologischen Bestrebungen für die leicht erregbare Phantasie des Orientalen viel Verlockendes hatten und ausserdem unter günstigen Verhältnissen reichen Gewinn brachten. Man darf nicht einwenden, Ġagminī habe keine Kenntniss von dem astrologischen Schwindel seiner Zeit besessen. Der Schluss seiner Abhandlung spricht es deutlich aus, dass er denselben kannte, aber auch mit Verachtung auf denselben herablickte: „Wo ich mich in Gefahr sah, Phantasien und Truggebilden nachzujagen, da hielt ich an mich und hütete mich sorgfältig vor weitschweifigem Gerade“.

Um die Beziehungen, in denen der Verfasser zu den während

der ersten Blütheperiode gepflegten Studien stand, und den Unterschied zwischen seinen Anschauungen und den der nichtwissenschaftlichen Astronomen im dreizehnten Jahrhundert hervorzuheben, ist in den Anmerkungen zu der Uebersetzung wiederholt auf das Werk von al-Fergānī und auf die Kosmographie von Kāzwīnī verwiesen.

II.

Die Handschriften.

Für die Herstellung der nachfolgenden Uebersetzung standen vier Handschriften, welche der Herzoglich Gothaischen Schlossbibliothek gehören, zur Verfügung, nämlich drei Handschriften der Abhandlung und ein Commentar. Die Handschriften der Abhandlung sind:

1) A. Nr. 1385, im Folgenden als Handschrift A bezeichnet. Das Format derselben ist gross-octav, besitzt eine Höhe von 20,5 cm und eine Breite von 15 cm. Das Werk besteht aus 16 Blättern, denen vorn und hinten ein Schmutzblatt angeheftet ist. Das Papier ist starkes Leinenpapier von gelblich-weisser Farbe und gut erhalten. Jede Seite enthält 25 Zeilen. Die Schrift ist ein flüchtiges und dabei ausserordentlich gedrängtes Neslī, welches einigermassen zum Nasta'liq neigt. Bedeutendere Correcturen, von der Hand des Abschreibers ausgeführt, finden sich auf den Seiten 1 b, 2 a, 3 a, 8 a, 9 b. In Abtheilung I, Capitel V ist ein grösseres Stück ausgelassen und an einer späteren Stelle eingefügt. Es lässt sich dies nur durch die Annahme erklären, dass der Schreiber die Abschrift in rein mechanischer Weise nach einem verhefteten Exemplare angefertigt hat. Von den Figuren sind nur die fünf ersten vorhanden und zwar sind dieselben in den Text eingezeichnet; für die übrigen hat der Schreiber an geeigneter Stelle Raum gelassen, aber die Eintragung nicht ausgeführt. Die Zahlen sind durch Buchstaben des Alphabets ausgedrückt und durch einen darüber gesetzten horizontalen Strich besonders hervorgehoben. Darunter sind nicht selten die wirklichen Ziffern nachgetragen. Die Anfänge neuer Abschnitte innerhalb eines Capitels sind durch einen horizontalen Strich über dem ersten Worte gekennzeichnet. Am Schlusse nennt sich der Abschreiber Ibrahim ibn Muṣṭafā und fügt hinzu, dass er die Handschrift am 13. Ramaḍān des Jahres 1137 der Hīgā vollendet habe.

2) A. No. 1386, als Handschrift B bezeichnet. Das Exemplar besteht aus 34 Blättern in Grossduodezformat und besitzt eine Höhe von 15,5 cm und eine Breite von 11 cm. Auf jeder Seite der ersten zwanzig Blätter befinden sich 19 Zeilen, auf jeder Seite der folgenden nur 17. Das Papier ist ein glänzendes Leinenpapier von weisser ins Gelbliche schimmernder Farbe und sehr gut erhalten, obwohl ein Schutz durch Schmutzblätter nicht vorhanden ist. Die Schrift auf den ersten zwanzig Blättern ist ein ausserordentlich

sauberes Nesht. Von Blatt 21 ab ist die Fortsetzung von einer weniger sorgfältigen, aller Wahrscheinlichkeit nach jüngeren Hand geliefert. Die Abschrift ist frei von Correcturen.

Die Zahlen sind in Buchstaben des Alphabets mit rother Tinte geschrieben. Ziffern finden sich gar nicht vor. Die Capitelüberschriften sowie die ersten Worte jedes Abschnittes innerhalb eines Capitels sind ebenfalls durch rothe Schrift hervorgehoben.

Die Figuren sind auf acht besonderen Blättern ausgeführt und am Schluss der Handschrift nach einem leeren Blatte angefügt. Die erste der in der Handschrift A enthaltenen Figuren ist ausgelassen.

Eine Anmerkung über den Namen des Abschreibers und den Zeitpunkt der Vollendung der Handschrift ist nicht vorhanden.

3) A. No. 1387 (Handschrift C). Das Exemplar besteht aus 31 Blättern, besitzt Octavformat und hat eine Höhe von 18 cm und eine Breite von 13,5 cm. Auf jeder Seite befinden sich 15 Zeilen. Vorn und hinten ist je ein Schmutzblatt angeheftet. Das Papier ist starkes gut erhaltenes Leinenpapier von weissgrauer Farbe. Am Anfang ist das Werk defect, und zwar fehlt gerade die Einleitung. Die Schrift ist ein neues deutliches Nesht von dem in der Türkei üblichen Zuge. Von der Hand des Abschreibers sind später Correcturen auf den Seiten 9a und 14a eingetragen. Die Zahlen sind durch Buchstaben des Alphabets in farbiger Schrift gegeben, hin und wieder auch durch darüber gesetzte horizontale Striche gekennzeichnet. Ziffern finden sich gar nicht vor. Die Capitelanfänge sind mit rother Tinte geschrieben, die Abschnitte innerhalb derselben sind nicht besonders hervorgehoben.

Von den Figuren sind nur drei vorhanden und zwar zwei auf Seite 2b, eine auf Seite 6a. Dieselben sind aus freier Hand entworfen und sehr nachlässig in rother Farbe ausgeführt. Die erste derselben soll die Mercursphäre, die zweite die Mondsphäre darstellen, die dritte dazu dienen Länge und Breite eines Sternes graphisch zu erläutern.

Der Abschreiber nennt sich nicht, giebt auch keine Notiz über den Termin, in welchem er seine Arbeit beendete.

Der Commentar A. No. 1388 hat Octavformat und besteht aus 58 Blättern, deren Höhe 18 cm und deren Breite 13,5 cm beträgt. Schmutzblätter sind nicht angeheftet. Das Papier ist gut erhaltenes Baumwollpapier von bräunlich-weisser Farbe. Jede Seite der ersten 12 Blätter enthält 19 Zeilen, jede Seite der folgenden 21 Zeilen. Die Schrift ist ein gedrängtes, erst von Blatt 13 an gut lesbares Nasta'liq. Der letztere Theil ist offenbar von einer andern Hand als der erste geschrieben. Der auf den ersten 12 Blättern sehr breite, auf den übrigen bedeutend schmälere Rand trägt eine Menge von verschiedenen Schreibern herrührende Bemerkungen, welche meist erklärender Natur sind, ferner einige Figuren, die sich zum Theil in den Handschriften finden. In den

Text sind nur wenige Figuren eingezeichnet. Die Stellen des Ġagminī, welche erklärt werden sollen, sind anfangs in rother Schrift eingezeichnet, später, doch nicht consequent, durch einen übergesetzten Querstrich markirt. Der Verfasser nennt sich Ġurgānī. Ueber das Alter des Commentars und über die Persönlichkeiten der Abschreiber ergiebt sich nichts aus dem Inhalte der Handschrift.

Spätere Besitzer haben ihre Namen in keine der vier Handschriften eingetragen. Im Jahre 1807 wurden die Handschriften in Cairo von U. J. Seetzen für die Herzoglich Gothaische Schloss-Bibliothek angekauft.

Der folgenden Uebersetzung wurden die Handschriften A und B zu Grunde gelegt, die Handschrift C wurde nur in einzelnen Füllen zum Vergleich herangezogen. Aus diesem Grunde sind am Rande der Uebersetzung auch nur die Blattzahlen der Handschriften A und B vermerkt.

Der Text der Schrift Ġagminī's befindet sich ausserdem handschriftlich noch

- 1) in Berlin (Ravins No. 174, vergl. auch No. 243).
- 2) in Leiden unter No. 1083.
- 3) in Oxford (Pusey No. 290, 5 und wohl auch in der Karschunischen Handschrift Uri No. 59, 2).
- 4) im Britischen Museum No. 1343, 2.
- 5) in Paris No. 1114, 1 und noch einmal s. Journal asiatique n. n. O.
- 6) in Kasan No. 169, 1.
- 7) in der Ambrosiana (Bibl. Ital. T. XLII p. 35, No. 36 und T. XC p. 337 No. 274 u. 275). Siehe auch Haġi Ĥalfa VI, 113, 12886.

III.

Abhandlung über die Astronomie des Maḥmūd ibn Muḥammed ibn 'Omar al-Ġagminī.

- (1 a) A. Im Namen Allahs des Gnädigen, des Erbarmers!
 (1 b) B. Preis sei Allah nach dem Reichthum seiner Gnadengaben! Segen über seinen Propheten Muḥammed und dessen Haus! 1) Amen.
 Es sagt der arme Knecht, der auf das Erbarmen seines Herrn angewiesen ist, Maḥmūd ibn Muḥammed ibn 'Omar al-Ġagminī²⁾, den Allah beschirmen möge mit seiner Barmherzigkeit und Gnade:

1) Variante der Handschrift B: Segen über seine Propheten und seine Knechte!

2) Variante der Handschrift B: Es sagt der Scheich, der Imām, der Treffliche, Untadlige, Ruhmvolle, Gelehrte, der Meister, die Zierde der Religion und des Glaubens; Maḥmūd ibn Muḥammed ibn 'Omar al-Ġagminī.

Ich habe dieses Buch über die Gestalt des Weltgebüdes verfaßt, dass es allen Männern der Wissenschaft eine Erinnerung sei an mich nach meinem Tode. Ich wollte in demselben eine möglichst klare und kurzgefasste Darstellung meines Gegenstandes geben und nannte das Buch „Abhandlung über die Astronomie“, damit schon der Name den Zweck desselben ankündige, und der Titel keinen Zweifel über das Vorhaben aufkommen lasse. Die Schrift besteht aus einer Einleitung und zwei Haupttheilen.

Die Einleitung handelt von der Eintheilung der Körper im Allgemeinen.

Der erste Haupttheil handelt von den Sphären und von dem, was mit denselben zusammenhängt. Er enthält fünf Capitel.

Erstes Capitel: Von der Gestalt der Sphären.

Zweites Capitel: Von den Bewegungen der Sphären.

Drittes Capitel: Von den Kreisen.

Viertes Capitel: Von den Bogen.

Fünftes Capitel: Von dem, was den Sternen bei ihren Bewegungen widerfährt und was sich an diese Bewegungen anschliesst.

Der zweite Haupttheil handelt von der Gestalt der Erde und den Theilen derselben, mögen sie bewohnt oder unbewohnt sein. Dieser Theil hat drei Capitel.

Erstes Capitel: Der bewohnte Theil der Erde, die Breite und Länge desselben, sowie die Eintheilung in Regionen.

Zweites Capitel: Die Eigenthümlichkeiten der Orte, welche auf dem Aequator liegen, und der Orte, welche Breite haben.

Drittes Capitel: Specielle Bemerkungen.

Einleitung.

Die Eintheilung der Körper im Allgemeinen.

Die Körper werden in zwei Classen eingetheilt: in einfache, d. h. in solche, die sich nicht in Körper von anders gearteter Beschaffenheit zerlegen lassen, und in zusammengesetzte, (2a) B. d. h. in solche, die wieder in Körper von anderer Art zerlegt werden können, wie z. B. die Mineralien, die Pflanzen, die Thiere.¹⁾

Von den einfachen Körpern giebt es zwei Arten, nämlich die

1) Kazwini, ein Zeitgenosse Ġagmini's, theilt alles, was ausser Gott existirt, ein in solches, welches einen selbstständigen Bestand hat und solches, welches diesen nicht hat. Zur ersten Gruppe gehört, was räumlich begrenzt ist, das Körperhafte und das, was nicht räumlich begrenzt ist, die geistige Substanz. Zur zweiten Gruppe wird gerechnet, was erst mittelst eines andern seinen Bestand erhält, sofern es durch die räumlich begrenzten oder immateriellen Dinge besteht, also die körperlichen und geistigen accidentellen Eigenschaften. Vergl. Zakarija ibn Muhammed ibn Mahmūd al-Kazwini's Kosmographia, im Urtext herausgegeben von Wüstenfeld, in deutscher Uebersetzung von Dr. Hermann Ethé (Leipzig 1868) S. 13.

Elemente¹⁾ d. i. die Erde, das Wasser, die Luft und das Feuer; und die ätherischen Körper d. i. die Sphären und die Gestirne in ihnen. Wird ein einfacher Körper seiner Natur ungehindert überlassen, so nimmt er auf Grund von Gesetzen, die eine andere Wissenschaft als die unsrige lehrt, die Gestalt einer Kugel an. Daher sind die Elemente im Allgemeinen und die ätherischen Körper insgesamt kugelförmig.

- Allerdings haben sich auf der Erde, als sie ihre Gestalt (1b) A. annahm, Unebenheiten der Oberfläche gebildet, indem auf ihr die Berge, die Thäler und dergl., welche wir jetzt erblicken, entstanden, aber diese Unebenheiten beeinträchtigen die Kugelgestalt der Erde im Ganzen nicht, sowie auch bei einem Ei, das man mit Gerstenkörnern beklebt, der Gesamtcharacter der Gestalt nicht verändert wird.²⁾ Ebenso hat auch das Wasser Kugelgestalt, doch ist die Rundung keine vollkommene, weil die Erhöhungen der Erde auch Ungleichheiten der Wasseroberfläche bedingen. Ferner bildet die Luft eine Kugel, deren nach innen gewandte (concave) Fläche infolge der unebenen Beschaffenheit der Wasser- und Erdoberfläche ebenfalls Unebenheiten zeigt. Das Feuer dagegen ist der wahrscheinlichsten Annahme zufolge eine Kugel von vollkommener Rundung nach der convexen wie nach der concaven Seite, und ebenso haben auch die Sphären Kugelgestalt von durchaus gleichmässiger Rundung. Von diesen Kugeln umgiebt eine die andere. In der Mitte liegt die Erde mit dem auf ihr befindlichen Wasser, diese umgiebt die Luft, diese das Feuer; dann kommt die Sphäre des Mondes, ferner die Sphäre des Mercur, dann die Sphäre der Venus; nach dieser folgt die Sonnensphäre, dann die Sphäre des Mars, ferner die des Jupiter, dann die des Saturn, dann die Sphäre der Fixsterne und endlich die

1) Statt der Elemente führt Ġāzwinī ein System von sieben Erdsphären an: die erste die Sphäre des Feuers, die zweite die der Luft, die dritte die des Wassers, die vierte die der Erde und ausserdem noch drei aus diesen vier gemischte Abtheilungen, die erste aus Feuer und Luft, die zweite aus Luft und Wasser, die dritte aus Wasser und Erde. Vergl. Ġāzwinī S. 15 und 16.

2) Muhammed al-Fergānī (950 n. Chr.) beweist bereits, dass die Erde eine kugelförmige Gestalt besitzt, die Unebenheiten, insofern durch dieselben die Kugelgestalt nicht gestört wird, erwähnt er nicht. Vergl. al-Ferg. S. 12. — Nach Ġāzwinī (S. 295) existiren dagegen noch immer verschiedene Ansichten über die Gestalt der Erde. Einer sagt: sie ist nach allen vier Richtungen gleichmässig eben hingebreitet, ein Anderer behauptet, sie hat die Gestalt eines Schildes, und wäre dem nicht so, so würde kein Gebäude auf ihr feststehen, kein Geschöpf auf ihr stehen können. Andere wieder meinen, sie habe die äussere Gestaltungsform der grossen Pauke. Noch Andere sind zu der Ueberzeugung gekommen, sie gleiche einer Halbsphäre. Worauf sich aber die meisten der alten Araber stemmen, ist die Ansicht, dass die Erde kreisrund gleich der Sphäre und in das Innere der Sphäre hineingelegt sei, wie das Eidotter ins Innere des Eies, ferner dass sie in der Mitte (des Weltalls) liege in einer und derselben Entfernung von allen Seiten.

„Sphäre der Sphären“.¹⁾ Diese letzte wird auch die grösste Sphäre genannt, das ist die Sphäre, welche alle Körper umgiebt, und hinter der nichts von vergänglichen Dingen existirt, nichts Leeres und nichts Volles. Jede umgebende Sphäre berührt die ihr zunächst liegende umgebene in der oben angegebenen Reihenfolge. Die Gesamtheit dieser Körper, der irdischen Elementarkörper und (2b) B. der Sphären, mit dem, was in ihnen ist, trägt den allumfassenden Namen „Weltgebäude“, dessen Gestalt in der Figur dargestellt ist. (Die Figur besteht aus einem System concentrischer Kreise.)

Erste Abtheilung.

Ueber die Sphären und das, was mit denselben (2a) A. zusammenhängt.

Diese Abtheilung hat fünf Capitel.

Capitel I.

Die Gestalt der Sphären.

Die Sphäre der Sonne ist ein kugelförmiger Körper, begrenzt von zwei parallelen Kugeloberflächen, deren Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt des Weltalls ist. Jede Kugel, deren Begrenzungsflächen diesen parallel sind, hat den Mittelpunkt dieser beiden Flächen zum Mittelpunkt. Da jede Sphäre, welche die Erde in sich schliesst, von zwei parallelen Flächen, d. h. solchen die überall gleichweit von einander entfernt sind, deren beiderseitiger Abstand also nirgends verschieden ist, begrenzt wird, so kann sie nicht an der einen Seite dünn, an der anderen dick sein, sondern sie hat überall dieselbe Dicke. Innerhalb der von den beiden parallelen (3a) B. Flächen eingeschlossenen Kugelschale²⁾ — also nicht im innersten

1) Die erste Beschreibung der Sphären findet sich in Platos Dialog *de republica*. Er vergleicht die Gesamtheit derselben mit einem Spinnrocken. Nach seiner Darstellung sind acht Kreise vorhanden, welche von dem Himmel umschlossen werden. Der Himmel bewegt sich von Osten nach Westen, dagegen die Gestirne in entgegengesetzter Richtung. Vergl. Schaubach, *Geschichte der griechischen Astronomie* S. 402 u. f. — al-Fargānī (S. 45) zählt nur 8 Sphären, 7 für die Planeten und die Sonne, die achte für die Fixsterne, die Sphäre der Sphären erwähnt er nicht. — Kazwīnī fügt S. 32 zur Erklärung der Sphären hinzu, dass sie weder leicht noch schwer, weder heiss noch kalt, weder feucht noch trocken, weder dem Zerreißen ausgesetzt, noch des sich wieder Zusammenfügens benöthigt sind. Die Sphäre der Sphären, welche gar keine Sterne enthält, nennt er die Atlassphäre (vergl. S. 33). S. 106 erwähnt er ausserdem die Zodiakalsphäre oder die Sphäre der Ecliptik, setzt aber hinzu, dass diese keine Sphäre wie die übrigen Sphären sei, sondern nur ein mit der Einbildungskraft zu erfassendes Ding. Die Perser nannten die neunte Sphäre ebenfalls Sphäre der Sphären. Vergl. *Histoire de l'astronomie du moyen âge* par M. Delambre, S. 197.

2) *ṭāḥan* d. h. wörtlich „das Dicke“.

centralen Kugelraum ¹⁾ — ist eine zweite Sphäre, ein kugelförmiger Körper, welcher auch die Erde in sich schliesst und ebenfalls von zwei parallelen Flächen begrenzt ist, dessen Mittelpunkt aber nicht mit dem Mittelpunkt der Welt zusammenfällt. Er berührt mit seiner convexen Seite die äussere Fläche der Kugelschale in einem beiden gemeinschaftlichen Punkte, der obersten Apsis ²⁾, und mit seiner concaven Seite die innere Begrenzungsfläche der Kugelschale in einem beiden gemeinschaftlichen Punkte der untersten Apsis. ³⁾ Es liegt also diese zweite Sphäre seitlich in der ersten, innerhalb der äusseren Begrenzungsfläche, aber nicht in dem inneren centralen Raum, dergestalt dass ihre convexe Fläche die convexe Fläche der ursprünglichen Sphäre in einem Punkte und ihre concave Fläche die concave Fläche der ursprünglichen Sphäre in einem Punkte berührt. Durch die erste und zweite Sphäre werden also zwei kugelförmige Körper gebildet, deren Begrenzungsflächen nicht parallel laufen, und von denen jeder nicht überall dieselbe Dicke besitzt. Der erste dieser beiden Körper heisst der Umgebende, der zweite der Umgebene. Der Umgebende ist am dünnsten an der obersten Apsis und am dicksten an der untersten Apsis, bei dem Umgebenen dagegen liegen die dünnste und die dickste Stelle umgekehrt. Diese beiden kugelförmigen Körper heissen *Complemente*. Die zweite Sphäre wird die „*excentrische*“ genannt, während die erste Sphäre den Namen „*al-mumattal* d. i. die gleichlaufende“ führt, weil die um ihre Oberfläche gedachte Kreislinie ebenfalls *al-mumattal* heisst. ⁴⁾ Näheres darüber findet man in dem Capitel von den Kreisen. Siehe Fig. I.

Die Sonne selbst ist ein kugelförmiger fester Körper, welcher in den Körper der excentrischen Sphäre eingefügt und gleichsam in denselben eingesenkt ist, so dass seine Oberfläche nirgends über die Oberfläche jener Sphäre hinausgeht, sondern die Oberfläche des Sonnenkörpers die beiden begrenzenden Flächen der genannten Sphäre in je einem Punkte berührt.

Was die Sphären der oberen Sterne (d. h. der Planeten Mars, Jupiter und Saturn) sowie der Venus anlangt, so gleichen dieselben

1) *ḡauf* d. h. wörtlich „der Bauch“.

2) *auḡ* d. h. derjenige Punkt der zweiten Sphäre, welcher am weitesten von der Erde entfernt ist.

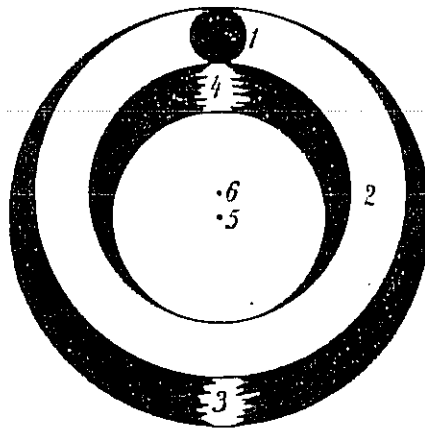
3) *ḥaḍīd* d. i. der Punkt der zweiten Sphäre, welcher die geringste Entfernung von der Erde hat.

4) *Al-Fergānī* (S. 46) erwähnt nur die zweite oder excentrische Sphäre für die Sonne und die Planeten. Der Mittelpunkt der Fixsternsphäre fällt mit dem der Erde zusammen und ist zugleich das Centrum des Weltalls. Den Beweis dafür giebt er S. 13. Die Apsiden sind daher auch bei ihm nicht die Berührungspunkte der ersten und zweiten Sphäre, sondern die Punkte, in denen das Gestirn die grösste und kleinste Entfernung von der Erde hat. — *Kazwīnī* liefert von der Sonnensphäre eine ganz ähnliche Beschreibung (S. 49 u. f.). Die erste Sphäre nennt er die *Universalsphäre* (*al-falek al-kullī*). Die Dicke derselben beträgt nach seiner Schätzung 355 470 Meilen.

im Wesentlichen der Sonnensphäre. Der Unterschied liegt nur darin, dass jeder Planet noch eine besondere kleinere Sphäre besitzt, welche die Erde nicht in sich schliesst. Diese kleineren Sphären der Planeten sind in die Körper ihrer excentrischen Sphären eingefügt, so dass die Oberfläche jeder einzelnen von ihnen die (3 b) B. Parallelfächen der sie tragenden Sphären in derselben Weise berührt, wie dies bei dem Sonnenkörper innerhalb seiner excentrischen Sphäre der Fall ist. Diese Sphären heissen *Epicyclen*.¹⁾ Die Planeten sind feste kugelförmige Körper, eingefügt in die *Epicyclen* und in

Fig. I. Handschrift A.

Sonnensphäre.



1. Sonne. 2. Excentrische Sphäre. 3. Die umgebende Sphäre.
4. Das Complement der umgebenden Sphäre. 5. Mittelpunkt der Welt. 6. Mittelpunkt der excentrischen Sphäre.

das Innere derselben derart eingeschlossen, dass ihre Oberflächen die Flächen der *Epicyclen* berühren. Die excentrischen Sphären aller Himmelskörper mit Ausnahme der Sonne heissen *hawāmil* d. h. „tragende“ Sphären, weil sie die Mittelpunkte der *Epicyclen* tragen; denn diese Mittelpunkte gehören zu ihnen wie der Theil zum Ganzen. Fig. II.

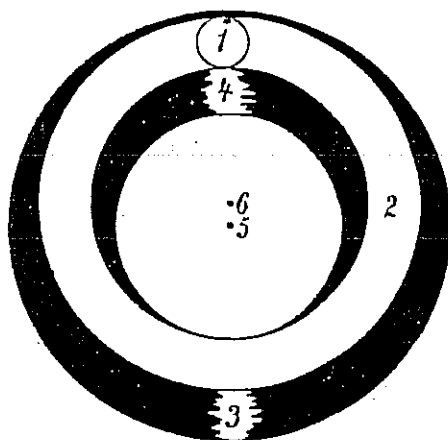
Die Sphären des Mercur und des Mondes²⁾ umfassen je drei Sphären, welche die Erde in sich schliessen, und den *Epicyclus*, und zwar gehört zur Mercursphäre zunächst eine Sphäre al- (3 b) A. *mumattāl*, deren Mittelpunkt zugleich Mittelpunkt der Welt ist,

1) Der Alexandriner Apollonius Pergaeus (230 v. Chr.) erfand durch eine einfache mathematische Betrachtung der Bewegungen die *Epicyclen*. Vergl. Ptolem. *Almagest* XII, 1 und Schaubach S. 447.

2) Die Beschreibung dieser Sphären stimmt mit der von Kāzwinī S. 33 und S. 45 überein.

ferner zwei excentrische Sphären, deren eine die „Umgebende“ der andern ist und al-mudīr „die Kreisende“¹⁾ genannt wird. Sie befindet sich im Körper des Mumattal und nimmt innerhalb desselben genau dieselbe Lage ein, wie die übrigen excentrischen Sphären innerhalb ihrer Mumattal, so dass ihre convexe Begrenzungsfläche die convexe Begrenzungsfläche des Mumattal in einem gemeinschaftlichen Punkte, der oberen Apsis, und ebenso ihre concave Begrenzungsfläche die concave Begrenzungsfläche des

Fig. II. Handschrift A.
Sphären der oberen Sterne und der Venus.



1. Epicyclus. 2. Tragende Sphäre. 3. Die umgebende Sphäre.
4. Complement der umgebenden Sphäre. 5. Mittelpunkt der Welt.
6. Mittelpunkt der tragenden Sphäre.

Mumattal in einem gemeinschaftlichen Punkte, der unteren Apsis, berührt. Die zweite der excentrischen Sphären ist die „Umgebende“²⁾ der ersten und die „Tragende“ des Epicyclus; sie befindet sich im Körper des Mudīr in der gleichen Stellung zu diesem, wie der Mudīr sie zum Mumattal einnimmt. Im Körper der „Tragenden“ befindet sich der Epicyclus und im Epicyclus der Planet genau in der Weise, welche in dem Vorhergehenden beschrieben wurde. Es muss sonach der Mercur zwei obere Apsiden haben, und zwar wird die eine ein Punkt des Mumattal, die andere ein Punkt des Mudīr sein.³⁾ Fig. III.

1) Nach Ġazwīnī (S. 45) die äußerste, alle andern zwiebelartig darin enthaltenen in Bewegung setzende Sphäre.

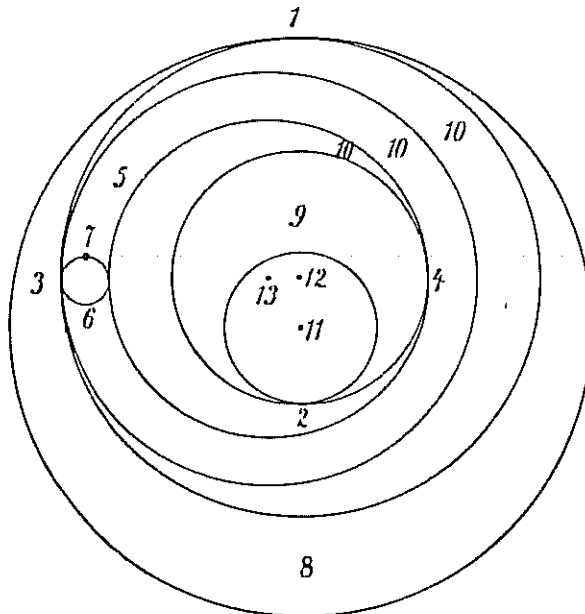
2) Nach Ġazwīnī (S. 45) al-hāriḡ elmarkaz et-tānī, die zweite excentrische.

3) Ġazwīnī erwähnt (S. 45) auch die beiden unteren Apsiden des Mercur. Die Dicke des Mumattal des Mercur, d. h. den Abstand zwischen den beiden Begrenzungsflächen schätzt er auf 386 482 Meilen, ein Resultat, welches der

Die Mondsphäre umfasst zwei Sphären, deren Mittelpunkte mit dem Mittelpunkt der Welt zusammenfallen, und eine „tragende“ Sphäre.¹⁾ Die eine der beiden ersteren, welche die zweite umschliesst, heisst al-*ġauzahar*²⁾ oder auch al-mumattal und die

Fig. III. Handschrift B.

Mercursphäre.



1. Obere Apsis. 2. Untere Apsis. 3. Obere Apsis der tragenden Sphäre.
4. Untere Apsis der tragenden Sphäre. 5. Tragende Sphäre. 6. Epicyclus.
7. Stern. 8. Das umgebende Complement. 9. Der umgebende Theil der Mumattalsphäre. 10. Mudirsphäre. 11. Mittelpunkt der Welt. 12. Mittelpunkt des Mudir. 13. Mittelpunkt der tragenden Sphäre.

zweite heisst al-māil (sphaera deflectans)³⁾; letztere befindet sich im Bauche der *Ġauzaharsphäre*, nicht im Körper derselben. Die tragende Sphäre hat ihren Platz im Māil in der bereits mehrfach dargestellten Weise. Der Epicyclus befindet sich in der

Astronom Ptolemäus durch zweifelloso Argumente astronomischer Messkunst herausgebracht haben soll. Der Sternkörper des Mercur beträgt $\frac{1}{22}$ des Erdkörpers, sein Umkreis 286 Parasangen, sein Durchmesser 273 Meilen.

1) Kāzwini zählt (S. 34) die einzelnen Theile der Mondsphäre in derselben Weise auf.

2) al-*ġauzahar* ist ein persisches Wort und bezeichnet das Sternbild des Drachen, welches in der betr. Mondsphäre liegend gedacht wurde.

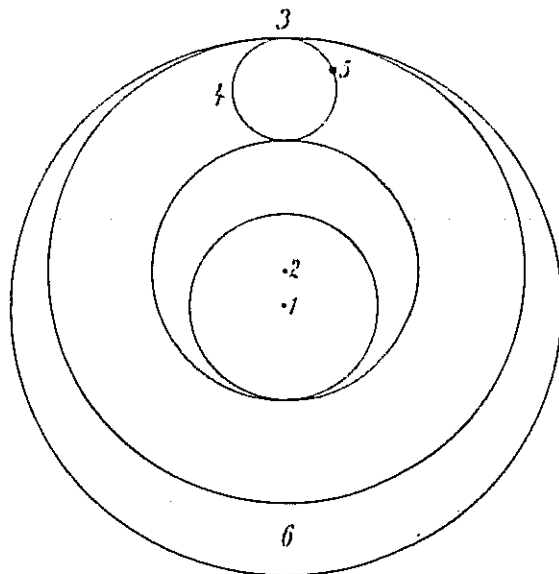
3) Nach Kāzwini (S. 34) ist dieser Name für die zweite Sphäre gewählt, weil ihr Gürtel sich von der Drachensphäre hinwegueigt.

(4 n) B. „tragenden“ Sphäre und der Mond im Epicyclus in der bekannten Weise.¹⁾

Zur Veranschaulichung der im Obigen gegebenen Darstellung möge die Figur IV dienen.

Die Sphäre der Fixsterne, die achte unter den Sphären, (3 a) A. heisst auch Thierkreis-Sphäre. Die Bedeutung dieser Bezeich-

Fig. IV. Handschrift B.
Mondsphäre.²⁾



1. Mittelpunkt der Welt. 2. Mittelpunkt der excentrischen Sphäre.
3. Obere Apsis. 4. Epicyclus. 5. Gestirn. 6. Mäil-Sphäre.

nung wird in dem Kapitel über die Kreise klar dargelegt werden. Diese Sphäre ist ein kugelförmiger, mit dem Weltall concentrischer Körper. Nach der richtigsten Annahme ist sie eine Hohlkugel, deren concave (innere) Fläche die convexe (äussere) Fläche der Saturnsphäre, und deren convexe (äussere) Fläche die concave (innere) Fläche der grössten Sphäre berührt. Die Fixsterne sind sämtlich in ihre Sphäre eingefügt und in derselben befestigt.³⁾

1) Kāzwinī (S. 54) erwähnt auch die Apsiden des Mondes, schätzt die Dicke der gesamten Mondsphäre auf 118 066 Meilen und fügt hinzu, dass Ptolemäus bereits den räumlichen Unterschied der Sphären und die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse der Sternkörper, ihre Umläufe und Durchmesser aufführe. Der Mondkörper ist nach Kāzwinī $39\frac{1}{4}$ Mal so klein als der Erdkörper, sein Umlauf beträgt 452 Meilen und sein Durchmesser annähernd 144 Meilen.

2) Die Gauzaharsphäre ist in der Figur weggelassen.

3) Nach Kāzwinī (S. 59) schätzt Ptolemäus die Dicke der Fixsternsphäre

Die „grösste Sphäre“¹⁾, auch „Sphäre der Sphären“ genannt, ist ein kugelförmiger Körper. Der Mittelpunkt derselben ist zugleich Mittelpunkt der Welt. Die concave Innenfläche derselben berührt die convexe Aussenfläche der Fixsternsphäre. Die convexe Aussenfläche dagegen berührt keinen Körper mehr, da hinter derselben nichts ist, weder Leeres noch Volles.

Capitel II.

Die Bewegungen der Sphären.²⁾

Die Bewegungen der meisten Sphären sind von doppelter Art: Bewegungen von Osten nach Westen und Bewegungen von Westen nach Osten. Unter den Bewegungen von Osten nach Westen nenne ich zuerst die Bewegung der Sphäre der Sphären um das Weltcentrum.³⁾ Diese ist die schnellste kosmische Bewegung; es wird die vollständige Umdrehung in ungefähr einem Tage und einer Nacht vollendet. An dieser Bewegung nehmen alle übrigen Sphären und die Gestirne in ihnen Theil, denn die übrigen Sphären sind dem Innern der Sphäre der Sphären eingefügt, es muss sich also die Bewegung der letzteren ihnen mit derselben Nothwendigkeit mittheilen, wie durch die Bewegung eines Gefässes der Inhalt desselben mit bewegt wird. Diese Bewegung nehmen wir wahr durch das Auf- und Untergehen der Sonne und der übrigen Sterne und wir nennen sie die „Bewegung des Universums“ oder die „erste Bewegung“, weil sie unter den Bewegungen der Himmelskörper sich zuerst unserer Wahrnehmung darbietet und weil durch sie das Universum

d. h. den Abstand zwischen ihrer oberen und unteren Begrenzungsfläche auf ungefähr 430744 Meilen. Er notirte überhaupt 1022 Sterne, davon sind 15 erster Grösse, 45 zweiter, 208 dritter, 474 vierter, 217 fünfter, 49 sechster; dazu kommen 9 dunkle und 6 Nebelsterne. Der Körper der Sterne erster Grösse ist $94\frac{1}{5}$ Mal so gross als der Erdkörper, und der Körper der kleinsten Sterne sechster Grösse 18 Mal so gross als der Erdkörper. Der Durchmesser der ganzen Fixsternsphäre, und zwar ist diese umschlossen von der noch über sie hinausliegenden Sphäre der Zodiacalbilder, beträgt 150537184 Meilen.

1) Kazwini liefert S. 109 ebenfalls eine Beschreibung der Sphäre der Sphären und knüpft daran eine Betrachtung über die Engel.

2) Ueber die Bewegungen der Sphären sagt Kazwini S. 33: Alle Sphärenbewegungen, die in der Welt existiren, betragen nach dem, was von den Ansichten der früheren und denen der griechischen Astronomen, besonders des Ptolemäus bekannt ist, zusammen 45, nämlich die Bewegung der erhabensten Sphäre und die der Fixsternsphäre, 18 Bewegungen der drei höchsten Planetensphären, für jede einzelne derselben 6, zwei Bewegungen für die Sonnensphäre, sechs für die Sphäre der Venus, neun für die des Mercur, sechs für die Mondsphäre und zwei endlich für alles unterhalb der Mondsphäre befindliche, und zwar ist das die Bewegung nach unten und die nach oben.

3) Al-Farḡānī (S. 8) schliesst auf diese Bewegung und die Lage der Pole derselben aus einer genauen Beobachtung der Gestirne, insbesondere einzelner Circumpolarsterne. S. 15 und 16 unterscheidet er ebenfalls die beiden Hauptbewegungen von Osten nach Westen und von Westen nach Osten.

bewegt wird. Die Pole, um welche die Bewegung sich vollzieht, nennt man die Pole des Weltalls und den Gürtel der um jene Pole bewegten Kugel den „Tagesgleicher“¹⁾

- Zu diesen Bewegungen von Osten nach Westen gehört auch die des Mudir der Mercursphäre um seinen Mittelpunkt, welcher nicht mit dem Weltcentrum zusammenfällt. Sie führt den Namen (4 b) B. „Bewegung der oberen Apsis“²⁾, da sich innerhalb desselben (nämlich des Mudir) die zweite obere Apsis des Mercur befindet, wie oben gezeigt wurde. Die beiden Pole und der Gürtel dieser Bewegung fallen nicht mit den Weltpolen und dem Tagesgleicher zusammen, auch nicht mit dem Gürtel der Thierkreis-Sphäre und ihren Polen. Ueber die beiden Letzteren wird das Folgende genauere Auskunft geben. Diese Bewegung (der oberen Apsis) beträgt im Laufe eines Tages und einer Nacht 59 Minuten 8 Secunden 20 Tertian, also gerade soviel als die mittlere Bewegung der Sonne, welche später erklärt werden wird.

Ferner gehört hierher die Bewegung der Gauzahar-Sphäre des Mondes um den Weltmittelpunkt. Der Gürtel dieser Bewegung liegt mit dem Gürtel der Thierkreis-Sphäre in derselben Ebene, die Pole beider Sphären in derselben Geraden. Durch diese Bewegung werden in einem Tage und einer Nacht 3 Minuten 10 Secunden 57 Tertian zurückgelegt. Diese Drehung wird „die Bewegung des Kopfes und des Schwanzes“³⁾ genannt.

Endlich ist hierher noch zu rechnen die Bewegung der Mail-Sphäre des Mondes um den Weltmittelpunkt. Ihr Gürtel und ihre Pole fallen nicht mit dem Tagesgleicher und seinen Polen, auch nicht mit dem Gürtel der Thierkreis-Sphäre und deren Polen zusammen. Im Zeitraum eines Tages und einer Nacht beträgt die Umdrehung 11 Grad 9 Minuten 7 Secunden 43 Tertian. Man nennt diese Umdrehung „Bewegung der oberen Apsis des Mondes“⁴⁾ denn diese wird durch dieselbe mit bewegt.

1) Vergl. al-Fergānī S. 16.

2) Al-Fergānī (S. 58) nimmt an, dass diese Bewegung der oberen Apsis nicht durch eine Drehung des Mudir, sondern dadurch, dass der Mittelpunkt der „Tragenden“ einen kleinen Kreis beschreibe, hervorgebracht werde. Nach seiner Angabe beträgt die Bewegung der oberen Apsis in einem Tage und einer Nacht nur 59 Minuten. — Gāgminī beschreibt diese Bewegung des Mittelpunktes der Tragenden erst am Schlusse des Cap. III als eine Folge der Drehung des Mudir. — Kāzwinī erwähnt von der Bewegung der oberen Apsis des Mercur nichts, sondern beschreibt die complicirte Bewegung des Mercur nur mit folgenden Worten: Er bleibt in jedem Zeichen des Thierkreises ungefähr 27 Tage. Rück- und Rechtläufigkeit wechseln häufig bei ihm ab und er kreist beständig um die Sonne (S. 46).

3) Al-Fergānī erwähnt diese Drehung S. 52 ebenfalls, aber ohne sie mit diesem Namen zu bezeichnen. Nach seiner Angabe beträgt sie nur 3 Minuten. — Die Bezeichnung ist hergenommen vom Sternbild des Drachen, das im Bereich dieser Sphäre zu liegen scheint, und an dem ausdrücklich Kopf- und Schwanzsterne unterschieden werden.

4) Die Bewegung der oberen Apsis des Mondes führt al-Fergānī S. 51

Was nun zweitens die Bewegungen anlangt, welche in der Richtung von Westen nach Osten¹⁾ erfolgen, so gehört zu ihnen zunächst:

„Die Bewegung der Fixsternsphäre“. Es ist diese eine langsame Drehung um den Mittelpunkt der Welt, welche nach der Annahme der meisten unter den Vertretern der Hypothese von (3b) A. der langsamen Bewegung dieser Sphäre in 66 Sonnenjahren oder 68 Mondjahren einen Grad der vollständigen Kreisbahn zurücklegt.²⁾ (Was Sonnen- und Mondjahre sind, wird später erklärt werden). Der Gürtel dieser Bewegung führt den Namen der Thierkreis, die Pole, welche nicht mit den Weltpolen zusammenfallen, heißen die Pole der Thierkreis-Sphäre. Der obengenannte Gürtel muss den Tagesgleicher schneiden. Weiteres darüber findet sich in dem Capitel über die Kreise.

Von Westen nach Osten drehen sich ferner um den Mittelpunkt der Welt die Mumattal-Sphären. Es erfolgen diese Bewegungen in derselben Weise wie die der Fixsternsphäre, auch haben sie denselben Gürtel und dieselben Pole wie diese. Es scheint sonach, dass die Drehung der Mumattal-Sphären durch die Bewegung der Fixsternsphäre verursacht wird. Diese Bewegungen führen auch den Namen Bewegungen der oberen Apsiden oder Gauzahar-Sphären. Davon sind indessen auszunehmen die eine der beiden oberen Apsiden des Mercur, welche sich im Mudir befindet, ferner die obere Apsis des Mondes und die Mumattal- oder Gauzaharsphäre des letzteren.

u. 52 nicht auf eine Drehung der Mül-Sphäre, sondern auf eine Rotation des Mittelpunktes der excentrischen Sphäre zurück; die Bahn des Mittelpunktes soll ein Kreis sein, welcher dem Thierkreis concentrisch ist. Die Drehung beträgt nach seiner Angabe nur 11 Grad und 9 Minuten. — Gāgmīnī erwähnt diese Bewegung des Mittelpunktes als eine Folge der Drehung der Mül-Sphäre erst in dem Capitel von den Kreisen (Cap. III am Schluss). — Kāzwīnī berücksichtigt weder die Bewegung des Kopfes und des Schwanzes, noch die Bewegung der oberen Apsis des Mondes.

1) Al-Fergānī erwähnt S. 16 diese Art der Bewegung von Westen nach Osten, an der alle Gestirne theilnehmen. Der Gürtel dieser Bewegung ist der Thierkreis. Die Vereinfachung seiner Erklärung folgt aus seiner abweichenden Anschauung in Betreff der Sphären. — Kāzwīnī streift diese Bewegung S. 107 nur mit wenigen Worten und erklärt dabei, dass die Bewegung der Sonne von Westen nach Osten die ihr eigenthümliche, dagegen die in der Richtung von Osten nach Westen nur eine erzwungene sei. An eine Beschreibung des Thierkreises knüpft er zugleich die Angabe der Resultate der Ptolemäischen Messung, nach der der ganze Thierkreis eine Länge von 486 259 731 $\frac{1}{2}$ Meilen und jedes Zeichen eine Breite von 1322 943 $\frac{1}{3}$ Meile besitzen soll.

2) Gāgmīnī hält sich hier an das unter der Regierung des Chāllifen al-Māmūn festgesetzte Resultat. Es scheint demnach, dass die Bestimmung der Präcession durch Ibn al-A'īn wenig Anklang gefunden hat. Die Umdrehungsgeschwindigkeit ist nach al-Fergānī (S. 49) und Kāzwīnī (S. 59) bedeutend kleiner, beide halten an der Angabe des Ptolemäus fest, nach der eine vollständige Umdrehung in 36 000 Jahren erfolgt. — Nach der Annahme der Perser beträgt die Drehung in 68 Sonnenjahren einen Grad. Vergl. Delambre S. 195.

Drittens ist hierher zu rechnen die Bewegung der excentrischen Sonnensphäre. Der Gürtel derselben liegt in
(5 a) B. derselben Ebene mit dem Gürtel der Thierkreis-Sphäre, aber die Pole fallen nicht mit denen des Thierkreises zusammen. Die Kreisbahnen der beiderseitigen Bewegungen haben gleiche Richtung. Die Drehung beträgt in einem Tage und einer Nacht 59 Minuten 8 Sekunden 20 Tertien.¹⁾

Viertens sind hier zu erwähnen die Bewegungen der tragenden Sphären um ihre Mittelpunkte, welche nicht mit dem Weltcentrum zusammenfallen. Die Gürtel und Pole derselben fallen nicht mit dem Gürtel und den Polen der Sphäre der Sphären, auch nicht mit denen der Thierkreis-Sphäre zusammen. Im Zeitraum eines Tages und einer Nacht beträgt die Drehung der tragenden Sphäre ²⁾

des Saturn: 2 Minuten 5 Sekunden 35 Tertien,
des Jupiter: 4 Minuten 59 Sekunden 16 Tertien,
des Mars: 31 Minuten 27 Sekunden 40 Tertien,
der Venus: 59 Minuten 8 Sekunden 20 Tertien,
des Mercur: 1 Grad 58 Minuten 16 Sekunden 40 Tertien,
des Mondes: 24 Grad 22 Minuten 22 Sekunden 53 Tertien.³⁾

Diese Drehung wird auch die mittlere Bewegung der Sterne genannt; nicht selten heisst sie auch die Bewegung der Breite. Indessen kann man sie ebenso gut als Bewegung der Länge auffassen, wenn man sie in Beziehung zu der Thierkreis-Sphäre setzt. Wie dies zusammenhängt, ist klar. Das Nähere darüber wirst Du in dem Capitel über die Kreise finden. Die

1) Kāzvinī (S. 49) nimmt nicht eine Drehung des excentrischen Theiles, sondern der ganzen Sonnensphäre in der Richtung von Westen nach Osten an, welche in einem Zeitraum von $365\frac{1}{4}$ Tag vollständig ausgeführt wird. — Al-Fergānī rechnet die tägliche Drehung nur zu 59 Minuten, fügt aber hinzu, dass dabei noch die Bewegung der 8. Sphäre zu berücksichtigen sei, der ganze Umlauf werde in fast $365\frac{1}{4}$ Tag (die Abweichung sei, weil zu klein, nicht genau festzustellen) beendet.

2) Al-Fergānī und Kāzvinī geben nicht die Grösse der Drehung während eines Tages und einer Nacht, sondern für jede Sphäre den Zeitraum, innerhalb dessen eine vollständige Umdrehung erfolgt.

Nach al-Fergānī beträgt die Umlaufszeit:

für den Saturn: 29 Jahre 5 Monate 15 Tage,
für den Jupiter: 11 Jahre 10 Monate 16 Tage,
für den Mars: 1 pers. Jahr 10 Monate 22 Tage,
für die Sonne, die Venus und den Mercur: 365 Tage und fast $\frac{1}{4}$ Tag,
für den Mond: 27 Tage 7 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ Stunde;

dagegen nach Kāzvinī:

für den Saturn: 29 Jahre 5 Monate 6 Tage,
für den Jupiter: 11 Jahre 10 Monate 15 Tage,
für den Mars: 1 Jahr 10 Monate 22 Tage,
für die Venus: 1 Jahr,
für den Mercur: 1 Jahr.

3) Wahrscheinlich liegt hier ein Schreibfehler vor. Nach al-Fergānī S. 51:
14° 23'.

hier besprochene Bewegung heisst übrigens auch die „Centralbewegung.“

Die Bewegungen der Epicyclensphären¹⁾ um ihre Mittelpunkte weichen von den bisher beschriebenen Bewegungen ab. Da nämlich diese Sphären die Erde nicht in sich schliessen, so muss selbstverständlich die Richtung der Bewegung in der oberen Hälfte entgegengesetzt der in der unteren Hälfte sein, d. h. wenn sich die obere Hälfte von Westen nach Osten bewegt, so rückt die untere Hälfte von Osten nach Westen. — Dies ist der Fall bei den fünf Planeten — bewegt sich dagegen die obere Hälfte von Osten nach Westen, so hat die untere Hälfte eine Bewegung in der entgegengesetzten Richtung; so ist es bei dem Epicyclus des Mondes. Bringt man das, was bisher über die Bewegungen der Epicyclen gesagt wurde, in Beziehung zu der Thierkreis-Sphäre, wie es in den astronomischen Tafeln²⁾ herkömmlich ist, so lautet das Resultat: Unter allen Himmelskörpern, die sich innerhalb der Thierkreis-Sphäre bewegen, giebt es keinen, der nicht entweder die obere Bewegung hat, nämlich die der Planeten, oder die untere Bewegung, nämlich die des Mondes. Die epicyclische Drehung (4 a) A. beträgt während eines Tages und einer Nacht

beim Saturn: 57 Minuten 7 Secunden 44 Tertien ³⁾ ,	
beim Jupiter: 54 Minuten 9 Secunden 3 Tertien ⁴⁾ ,	(5 b) B.
beim Mars: 27 Minuten 41 Secunden 40 Tertien ⁵⁾ ,	
bei der Venus: 36 Minuten 59 Secunden 29 Tertien ⁶⁾ ,	
beim Mercur: 3 Grad 6 Minuten 24 Secunden 7 Tertien ⁷⁾ ,	
beim Monde: 13 Grad 3 Minuten 53 Secunden 56 Tertien. ⁸⁾	

Diese Drehung führt den Namen „die Bewegung in entgegengesetzten Richtungen“ oder auch „die den Planeten eigenthümliche Bewegung.“⁹⁾

1) Kazwini erwähnt zwar die epicyclische Bewegung der Planeten; aber das Maass der Drehung für die einzelnen Gestirne giebt er nicht an.

2) Astronomische Tafeln hier wie öfter soviel als astronomische Schriften.

3) Al-Fergāni S. 59 für den Saturn: 59 Minuten.

4) Al-Fergāni S. 59 für den Jupiter: 54 Minuten.

5) Al-Fergāni S. 60 für den Mars: 28 Minuten.

6) Al-Fergāni S. 59 für die Venus: 37 Minuten.

7) Al-Fergāni S. 58 für den Mercur: 3 Grad 6 Minuten.

8) Al-Fergāni S. 51 für den Mond: 13 Grad 4 Minuten.

9) Al-Fergāni giebt (S. 66) ausserdem noch die Umlaufzeit der einzelnen Gestirne in ihren Epicyclen an:

für den Mond: 27 Tage 13 $\frac{1}{2}$ Stunde,

für den Mercur: 3 Monate und ungefähr 26 Tage,

für die Venus: 1 persisches Jahr 7 Monat und fast 9 Tage,

für den Mars: 2 Jahre 1 Monat und ungefähr 20 Tage,

für den Jupiter: 1 Jahr 1 Monat und nahezu 4 Tage,

für den Saturn: 1 Jahr und fast 13 Tage.

Ausser den angegebenen Bewegungen der fünf Planeten und des Mondes erwähnt al-Fergāni S. 60 noch eine Neigung und Ablenkung dieser Gestirne innerhalb ihrer Epicyclen.

Capitel III.

Von den Kreisen.

Die Kreise sind entweder sogenannte „grosse Kreise“, d. h. solche, welche das Weltall halbiren, und das Centrum der Welt zum Mittelpunkt haben, oder nicht grosse, d. h. solche, welche das Weltall nicht halbiren. Die letzteren werden „kleine Kreise“ genannt.¹⁾

Zu den „grossen“ Kreisen gehören

1) der Tagesgleicher. Dieser Kreis, den wir bereits kennen gelernt haben, führt auch den Namen der „gerade Kreis.“ Er heisst der Tagesgleicher, weil überall auf der Erde Tag und Nacht gleich sind, sobald die Sonne in seinem Zenith steht.²⁾ Der Kreis, welcher sich in der Ebene desselben befindet und um die Oberfläche der Erde herumgeht, wird der Aequator genannt.

Es ist dies derjenige Kreis, in welchem die Ebene des Tagesgleichers die Oberfläche der Erde durchschneidet. Diejenigen Kreise, welche dem Tagesgleicher parallel sind, heissen „Tageskreise.“ Diese gehören zu den kleinen Kreisen. Um ihre Entstehung zu erklären, nimmt man an, dass bei der Umdrehung der Sphäre der Sphären ein jeder Punkt auf der Oberfläche derselben einen solchen Kreis beschreibt.

2) Der Thierkreis³⁾, auch Kreis der Burgen oder Gürtel der Burgen genannt, ist bereits erwähnt worden. Nimmt man an, dass durch denselben eine Ebene gelegt sei, welche durch das ganze Weltall hindurch geht, so werden die Oberflächen aller Mumattal-Sphären in Kreisen geschnitten. Aus der Beziehung zum Thierkreise bestimmt man die Länge⁴⁾ für die Bewegungsbahnen der Sterne und der Sonne. Man denke sich nämlich von dem Mittelpunkte der Welt eine gerade Linie nach der Thierkreis-Sphäre gezogen und zwar so, dass sie durch den Mittelpunkt eines Sternes (6a) B. hindurchgeht. Trifft der Endpunkt dieser Linie gerade den Gürtel der Thierkreis-Sphäre, dann bestimmt dieser Durchstechungspunkt den Ort des Sternes auf der Thierkreis-Sphäre, resp. die Länge desselben. Breite besitzt der Stern in diesem Falle nicht. Durchsticht ferner jene gerade Linie die Thierkreis-Sphäre ausserhalb des Gürtels, so denken wir uns einen Kreis, der durch den Endpunkt der Geraden und die Pole der Thierkreis-Sphäre geht und den Gürtel der Thierkreis-Sphäre schneidet. Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist dann der Ort des Sternes auf der Thierkreis-Sphäre be-

1) Von der Eintheilung des Himmelsgewölbes mit Hilfe von Kreisen giebt Kazwini in seiner Kosmographie nur eine sehr dürftige Darstellung S. 107.

2) Vergl. al-Fergānī S. 16. Aequator vero dies, sive aequinoctialis dicitur, propterea quod sole circulum illum transeunte dies et nox parem quantitatem obtinent per universam terram. — Kazwini S. 107.

3) Vergl. al-Fergānī S. 16. — Ueber abweichende Begrenzungen der Burgen s. Delambre S. 45 u. 46.

4) Diese Ungenauigkeit in der Bestimmung der Längen findet man auch bei andern arabischen Astronomen. — Vergl. Abth. I, Cap. IV, 1.

züglich der Länge. Indessen der Stern hat in diesem Falle auch (4b) A. Breite; demnach ist jeder der beiden obengenannten Punkte als ein „Ort“ des Sternes zu bezeichnen. Mit der Bewegung eines Sternes — nämlich der Bewegung hinsichtlich seiner Länge — bewegt sich auch jener Punkt auf der Thierkreis-Sphäre fort. Die Kreise, welche dem Thierkreis parallel laufen, werden Breitenkreise genannt; sie gehören zu den kleinen Kreisen. Diese Kreise werden bei Umdrehung der achten Sphäre von jedem beliebigen Punkte derselben beschrieben. Der Thierkreis muss, da seine Pole nicht mit den Weltpolen zusammenfallen, nothwendigerweise den Tagesgleicher in zwei einander gegenüberliegenden Punkten schneiden. Der eine dieser Punkte befindet sich da, wo sich der Thierkreis nach der Nordseite hinwendet, und heisst der Punkt des Frühlings-*equinoctium*s, der andere wird der des Herbst*equinoctium*s¹⁾ genannt. Der Abstand zwischen diesen beiden Kreisen, nämlich zwischen dem Thierkreis und dem Tagesgleicher, ist in zwei Punkten am grössten. Der eine dieser beiden Punkte liegt im Norden und heisst der Punkt des Sommersolstitiums, der andere liegt im Süden und heisst der Punkt des Wintersolstitiums.²⁾ Auf diese Weise werden auf dem Thierkreise vier Punkte markirt, durch welche derselbe in vier Theile zerlegt wird.³⁾ Der Zeitraum, welchen die Sonne gebraucht, um einen solchen Theil zu durchlaufen, beträgt den vierten Theil eines Jahres. Man denkt sich (6b) B. nun auf jedem von zwei aneinander grenzenden Viertheilen zwei Punkte bezeichnet, deren einer vom andern soweit entfernt ist, als dieser von dem ihm zunächst gelegenen Endpunkte des Viertheils. Legt man durch diese Punkte sechs grosse Kreise, welche sich sämmtlich in zwei einander gegenüber liegenden Punkten, nämlich den Polen der Thierkreis-Sphäre durchschneiden, so geht der eine von diesen durch die Pole der Welt, durch die Pole der Thierkreis-Sphäre und durch die beiden Solstitialpunkte, er wird der „Berührer der vier Pole“⁴⁾ genannt. Die Pole dieses Kreises sind die *Aequinoctialpunkte*. Ein anderer von diesen Kreisen geht durch die *Aequinoctialpunkte* und hat die Solstitialpunkte zu Polen. Die vier übrigen Kreise gehen durch die vier Punkte, welche auf den beiden oben erwähnten Vierteln angenommen wurden, sowie durch vier andere den gedachten gegenüberliegenden Punkte auf den beiden übrigen den oben erwähnten gegenüberliegenden Vierteln. Durch diese Kreise wird die achte Sphäre in zwölf Theile getheilt, von denen jeder eine „Burg“⁵⁾ genannt wird. Auch der Bogen des Gürtels der Thierkreis-Sphäre, welchen je zwei dieser Kreise einschliessen, heisst „Burg“. Deshalb nennt man die Thierkreis-

1) Vergl. al-Ferḡānī S. 17. — Kāzwinī S. 107.

2) Vergl. al-Ferḡānī S. 18. — Kāzwinī S. 107.

3) al-Ferḡānī grenzt S. 16 mit Hilfe dieser Punkte die 12 Sternbilder ab.

4) al-Ferḡānī S. 17: . . . qui transpolaris circulus atque colurus vocatur.

5) Diese Eintheilung in Burgen erwähnt auch Kāzwinī S. 108; er theilt

- (5a) A. Sphäre selbst die Sphäre der Burgen. Durch die Ebenen dieser gedachten Kreise werden die Mumattal-Sphären und die Sphäre der Sphären ebenfalls in zwölf Burgen getheilt.

3) Der Kreis des Horizontes.¹⁾ Er ist ein „grosser Kreis“, welcher die Weltkugel in zwei Theile scheidet, in den einen Theil, den man sieht, und in einen zweiten Theil, den man nicht sieht. Unter Berücksichtigung desselben reden wir von einem „Aufgang und Untergang“ der Gestirne. Die Pole dieses Kreises sind der Scheitelpunkt (Zenith) und der Fusspunkt (Nadir). Der Tagesgleicher wird von diesem Kreise des Horizontes in zwei Punkten halbirt, deren einer der Ostpunkt oder der Sonnenaufgangspunkt des Aequinoctiums und deren anderer der Westpunkt oder der Sonnenuntergangspunkt des Aequinoctiums heisst. Die Verbindungslinie beider Punkte nennt man die Ost-

- (7a) B. West-Linie oder die Aequinoctiallinie. Die mit dem Horizontalkreis parallel laufenden Kreise führen den Namen el-mukantarāt d. i. Parallelkreise.

4) Der Mittagskreis.²⁾ Er ist ein „grosser Kreis“, der durch die Weltpole, das Zenith und das Nadir hindurchgeht und den Ost- und Westpunkt zu Polen hat. Den Horizontalkreis halbirt er, indem er ihn in zwei Punkten schneidet, von denen der eine der Südpunkt, der andere der Nordpunkt heisst. Die Verbindungslinie zwischen diesen beiden Punkten wird die „Mittagslinie“ genannt. Astronomische Fixirungen der Mittagslinie, sowie der Ost- und Westlinie findet man auf den Seitenflächen der bekannten Marmorsäulen.³⁾

5) Der Kreis der Höhe, auch der Zenithkreis genannt. Es ist dies ein „grosser Kreis“, welcher durch das Zenith, das Nadir und durch den Endpunkt der Linie geht, welche vom Centrum der Welt durch den Mittelpunkt eines Sternes oder der Sonne nach der Oberfläche der Sphäre der Sphären geht. Er schneidet den Horizontalkreis lothrecht in zwei Punkten. Doch liegen diese beiden Schnittpunkte nicht fest, sondern bewegen sich auf dem Horizontalkreise fort entsprechend der Bewegung des Sternes oder der Sonne. Jeder von diesen beiden Punkten heisst „Azimuthpunkt“, und der Bogen des Horizontalkreises, der zwischen ihnen und dem Ost- und Westpunkte liegt, heisst

jeder derselben in 30 Abschnitte und giebt die Namen einzelner Sternbilder. — Al-Fergānī nennt S. 16 die Namen der Sternbilder, zählt S. 77 die Sterne auf, welche in den Burgen stehen, und von dem Monde bei seinem Umlaufe getroffen werden, und beschreibt 28 derselben.

1) Al-Fergānī S. 20 erklärt den Horizont in derselben Weise, den Nadir erwähnt er nicht. Abū 'l-Ḥasan von Marokko, ein Zeitgenosse Gāgmīnī's, bezeichnet Zenith und Nadir mit Semt ar-rās (Richtung des Kopfes) und Semt ar-riḡl (Richtung des Fusses). Vergl. Delambre S. 186.

2) Vergl. al-Fergānī S. 21.

3) Jedenfalls meint Gāgmīnī die Säulen, welche in Folge der unter dem Chalifen al-Māmūn vorgenommenen Gradmessung errichtet wurden.

„Azimuthbogen“.¹⁾ Das aber, was zwischen ihnen und zwischen dem Südpunkte oder dem Nordpunkte liegt, führt den Namen „Complement des Azimuth.“ Der Höhenkreis fällt mit dem Mittagskreise im Zeitraum eines Tages und einer Nacht zweimal zusammen.

6) Der erste Vertical.²⁾ Er gehört zu den „grossen Kreisen“, geht durch das Zenith, das Nadir, sowie den Ost- und Westpunkt und hat den Nord- und Südpunkt zu Polen. Der Mittagskreis wird von ihm im Zenith und Nadir geschnitten. Den Namen „Kreis des ersten Azimuth“ führt er deshalb, weil der Höhenkreis, sobald er mit ihm zusammen fällt, auf dem Horizontal-kreise keinen Azimuthbogen abschneidet. Diejenigen Kreise, welche den obengenannten Kreis schneiden, werden nach den Städten genannt, deren Scheitelpunkte in der Peripherie dieser Kreise liegen.³⁾

(5 b) A.
(7 b) B.

7) Der Declinationskreis. Auch dieser ist ein „grosser“ Kreis, und zwar geht er durch die Weltpole. Mit Hilfe desselben vermag man die Entfernung eines Sternes vom Tagesgleicher zu bestimmen und die Neigung des Thierkreises zum Tagesgleicher zu erkennen; ich meine die sogenannte „erste Neigung“⁴⁾ von der noch später die Rede sein wird.

8) Der Breitenkreis. Es ist ein „grosser Kreis“, welcher durch die Pole der Thierkreis-Sphäre und durch den Endpunkt einer Geraden hindurchgeht, welche vom Centrum der Welt durch den Mittelpunkt eines Sternes nach der Oberfläche der Sphäre der Sphären gerichtet ist. Man findet durch ihn die „Breite“ des Sternes und die „zweite Neigung“⁵⁾ des Thierkreises zum Tagesgleicher.

9) Die Kreise, welche man durch die Bewegung des Mittelpunktes eines Sternes oder des Centrum einer Sphäre beschrieben denkt. Diese Kreise befinden sich entweder auf Oberflächen von Kugeln oder nicht. Zu der ersten dieser beiden Arten gehört derjenige Kreis, welcher durch die Bewegung des Mittelpunktes der Sonne in ihrer excentrischen Sphäre beschrieben wird, ferner die Kreise, welche durch die Bewegungen der Mittelpunkte der Epicyclen in den „tragenden“ Sphären entstehen, endlich noch diejenigen, welche die Mittelpunkte der Sternkörper bei ihrer Bewegung auf den Oberflächen ihrer Epicyclen beschreiben. Jeder dieser Kreise wird nach dem Namen der Sphäre genannt, in der er sich befindet, also derjenige, welchen das Sonnen-centrum bei seiner Bewegung beschreibt, heisst der excentrische Kreis. Die Kreise, welche durch die Bewegung der Epicyclus-

1) Weder al-Fergāni noch Kāzwinī benutzen dieses Coordinatensystem zur Bestimmung der Stellung eines Gestirnes, dagegen erwähnt Ibn Jūnus das-selbe. Vergl. Delambre S. 101.

2) Wörtlich: der Kreis des ersten Azimuth.

3) Es ist zweifelhaft, ob Ġagmīni hier die Parallelkreise für seinen Standort oder die Mittagskreise der einzelnen Städte meint.

4) Vergl. Cap. IV, 8. — Die erste und zweite Neigung unterscheidet bereits Abū'l-Wafā. Vergl. Delambre S. 159.

5) Vergl. Cap. IV, 8.

- Centren entstehen, heissen die Hāmil-Kreise,¹⁾ endlich diejenigen Kreise, welche die Sternmittelpunkte bei ihren Bewegungen beschreiben, werden Epicyclen-Kreise genannt.²⁾ Nimmt man an, dass die Ebenen dieser Kreise, so wie die Ebene des Gürtels der Māil-Sphäre³⁾ das Weltall durchschneiden, so entstehen auf den Oberflächen der Mumattal-Sphären, der Thierkreis-Sphäre und der Sphäre der Sphären Kreise, welche die „geneigten Kreise“ genannt werden, weil sie zum Thierkreis eine geneigte Lage haben. Der Grund dafür liegt darin, dass die Bewegungen der Sphären, in denen sie beschrieben sind, um andere Pole erfolgen als um die der Thierkreis-Sphäre oder um die Weltpole. Diese „geneigten Kreise“ schneiden die Gürtel der Mumattal-Sphären in zwei Punkten, von denen der eine da liegt, wo sich der Stern vom Thierkreis aus nach Norden wendet. Dieser eine Punkt wird der Kopf, der
- (8 a) B. andere dagegen der Schwanz genannt.⁴⁾ —

Die Kreise aber, welche nicht auf Kugelflächen beschrieben werden, sind diejenigen, auf welchen sich die Mittelpunkte der „tragenden“ Sphären des Mercur⁵⁾ und des Mondes⁶⁾ fortbewegen und zwar dadurch, dass die Mudir-Sphäre die Hāmil-Sphäre des Mercur und die Māil-Sphäre die Hāmil-Sphäre des Mondes mit sich fortreisst. Man nennt die so beschriebenen Kreise „Kreise, die den Mittelpunkt des Hāmil tragen“, da der Mittelpunkt des Hāmil auf der Peripherie dieses Kreises fortgleitet durch die Bewegung einer Geraden, welche von einem im Durchmesser des Epicyclus liegenden Punkte ausgeht und der Bewegung seines Kreises genau folgt.⁷⁾ Eine nähere Erklärung darüber wird das fünfte Capitel geben.

(6 b) A.

Capitel IV.

Von den verschiedenen Bogen.

Der Bogen ist ein Abschnitt der Peripherie eines Kreises. Wenn Du diesen Abschnitt abziehst von 90 solchen Theilen, deren 360 den ganzen Kreisumfang ausmachen, so nennt man den nach dieser Subtraction von 90 verbleibenden Rest das Complement jenes Bogens, gerade so wie es oben bei dem Azimuthbogen und seinem Complement bereits erwähnt worden ist.⁸⁾

1) Hāmil-Sphären sind die „tragenden“ Sphären.

2) Vergl. al-Fergānī S. 46—48.

3) Die Māil-Sphäre umgiebt die tragende Sphäre des Mondes. Vergl. Cap. I.

4) Vergl. al-Fergānī S. 48.

5) Vergl. al-Fergānī S. 56 u. 57.

6) Vergl. al-Fergānī S. 51.

7) Ueber diese Gerade beim Mercur giebt al-Fergānī S. 56 folgende Erklärung: Huius autem circelli centrum fixum atque immotum haeret in ea linea, quae per centrum utrumque transit, tantumque ab eccentrici fixi centro distat in partem a centro zodiaci alteram, quantum ipsum zodiaci centrum indidem adest, ita ut circellus ille lineam, centro suo et zodiaci centro intersectam, bifariam intersecet in eccentrici fixi centro.

8) Capitel III, 5.

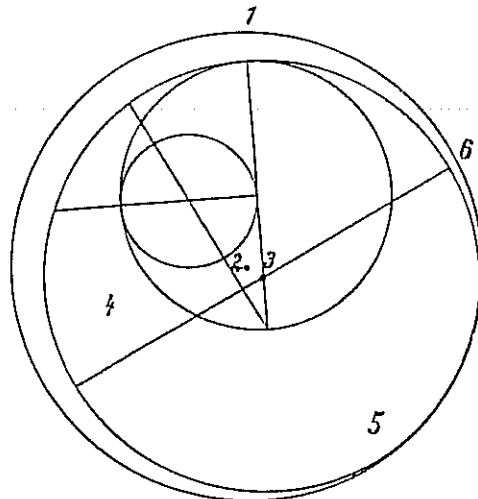
Wenn der Kopf der „Zwillinge“ im Osten steht in einem Horizont, der nicht Horizont eines Punktes des Aequators der Erde ist, und wir construiren den Declinationskreis, der durch jenen Stern hindurchgeht und den Tagesgleicher schneidet, so entsteht ein Dreieck, dessen eine Seite die Declination der Zwillinge ist (was unter der Declination eines Sternes zu verstehen ist, wird in dem Folgenden erklärt werden) und dessen beide andere Seiten zwei Bogen zwischen dem Declinationskreise und dem Punkte des Frühlings-äquinocliums sind. Der eine von diesen beiden Bogen gehört dem Thierkreise an und führt den Namen „die Grade der Gleichheit“, der andere dagegen ist ein Bogen des Tagesgleichers und ist die Rectascension des obenerwähnten Sternes der Thierkreis-sphäre, wenn der Horizont für einen Punkt auf dem Aequator angenommen wird. Der Horizont der Stadt, in der die Beobachtung angestellt wird, theilt nun dieses Dreieck in zwei Dreiecke. Das eine derselben liegt oberhalb des Horizontes und wird begrenzt von der „Ostweite“ (was die Ostweite ist, wird später gezeigt werden), von dem erwähnten Bogen des Thierkreises und von einem Bogen des Tagesgleichers zwischen dem Punkte des Frühlings-äquinocliums und dem Horizont. Das zweite Dreieck, welches unterhalb des Horizontes liegt, wird eingeschlossen von der „Ost-
 (9 a) B. weite“¹⁾, von der Declination des Kopfes der Zwillinge und einem
 (7 a) A. Bogen des Tagesgleichers zwischen dem Horizontalkreise und zwischen dem Punkte, in dem sich der Declinationskreis des Kopfes der Zwillinge und der Tagesgleicher schneiden. Dieser letztere dem Tagesgleicher angehörende Bogen ist betreffs des „Kopfes der Zwillinge“ die Rectification des Tages für die in Rede stehende Stadt. Da nun aber die Horizontalkreise je nach der Verschiedenheit der geographischen Breite der in ihren Mittelpunkten liegenden Städte verschiedene Dreiecke abschneiden, so ist nothwendigerweise der Aufgang (der Sonne) verschieden nach der Verschiedenheit der geographischen Breite.

4) Die „Mitte der Sonne“ ist ein Bogen des Thierkreises zwischen dem Anfange des Widders und dem Endpunkte einer Geraden, die von dem Centrum der excentrischen Sphäre der Sonne aus durch den Mittelpunkt der Sonne hindurch nach der Thierkreis-Sphäre geht. Nimmt man aber an, dass diese Linie vom Centrum der Welt ausgehe, so ist der Bogen des Thierkreises, welcher zwischen ihrem Endpunkte und dem Anfange des Widders liegt, die „Haupttrichtung der Sonne“, der Bogen aber zwischen den Endpunkten der beiden erwähnten Linien wird die „Rectification der Sonne“ genannt. Der Winkel endlich, welchen die beiden Geraden bilden, die sich im Mittelpunkte der Sonne schneiden, d. h. der Winkel, der auf dem Bogen der Rectification steht, heisst der Rectificationswinkel.

1) Vergl. Capitel IV, 11.

5) Die „Mitte eines Sternes“ ist ein Bogen des Thierkreises zwischen dem Anfange des „Widders“ und dem Endpunkte der Linie, die vom Mittelpunkte der Welt ausgehend durch den Mittelpunkt des Epicyclus sich bis zur Thierkreis-Sphäre erstreckt. Dies ist indessen nur der Fall, wenn der Mittelpunkt des Epicyclus in einem der beiden Knoten ¹⁾ steht. Hat er aber diese Stellung verlassen und besitzt Breite, dann trifft die Gerade die Sphäre ausserhalb des Thierkreises und zwar entweder nördlich oder südlich von demselben. In diesem Falle denkt man sich durch den Endpunkt der Geraden und die Pole der Thierkreis-Sphäre einen (9 b) B.

Fig. Va. Handschrift B.



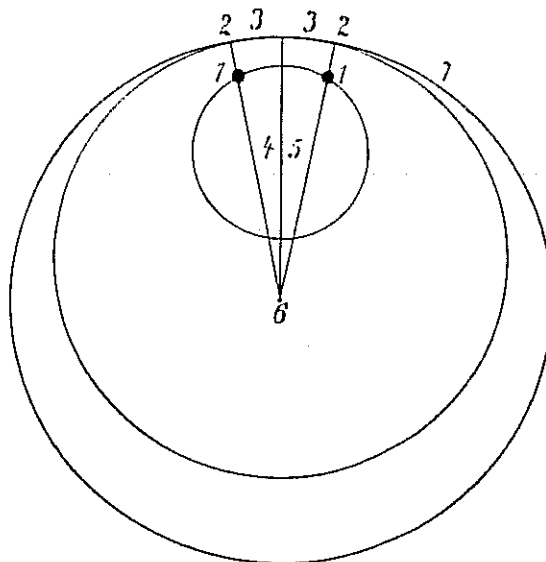
1. Obere Apsis. 2. Mittelpunkt der Welt. 3. Mittelpunkt der excentrischen Sphäre. 4. Winkel der Rectification. 5. Excentrische Sphäre. 6. Kopf des Widders.

Kreis construirt, der den Thierkreis schneidet. Der Bogen des Thierkreises zwischen dem Anfange des Widders und dem Punkte, in dem sich der construirte Kreis und der Thierkreis schneiden, ist dann die Mitte des Sternes. Nimmt man dagegen an, die Gerade, welche vom Mittelpunkte der Welt nach der Thierkreis-Sphäre gerichtet sei, gehe durch den Mittelpunkt des Sternes, so ist der Bogen zwischen dem Anfange des Widders und dem Endpunkte der Linie (falls der Stern keine Breite hat), oder zwischen dem Punkte, (7 b) A. in welchem sich der Thierkreis und der durch die Thierkreispole und den Endpunkt der Geraden gelegte Kreis schneiden, und dem

1) Die Punkte, in denen die Bahn des Sternes die Ebene des Thierkreises durchsticht.

Anfange des Widders die „Hauptrichtung des Sternes“. Der Bogen des Thierkreises zwischen der „Mitte“ und der „Hauptrichtung“ ist die „Rectification“. Wenn daher die Sonne in der oberen oder unteren Apsis steht, so dass die beiden Geraden, von denen die eine vom Mittelpunkt der Welt, die andere vom Mittelpunkt der excentrischen Sphäre ausgeht und nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtet ist, zusammenfallen, oder wenn die Sterne im Gipfelpunkt oder Tiefpunkt ihrer Epicyclen stehen, so dass die

Fig. Vb. Handschrift B.



1. Stern. 2. Hauptrichtung. 3. Bogen der Rectification. 4. Positive Rectification. 5. Negative Rectification. 6. Mittelpunkt der Welt. 7. Anfang des Widders.

beiden vom Mittelpunkt der Welt ausgehenden Linien, von denen die eine nach dem Mittelpunkte des Epicyclus, die andere nach dem Mittelpunkte des Sternes gerichtet ist, zusammenfallen, so ist eine „Rectification“ nicht vorhanden. Fig. Va, Vb, Vc.

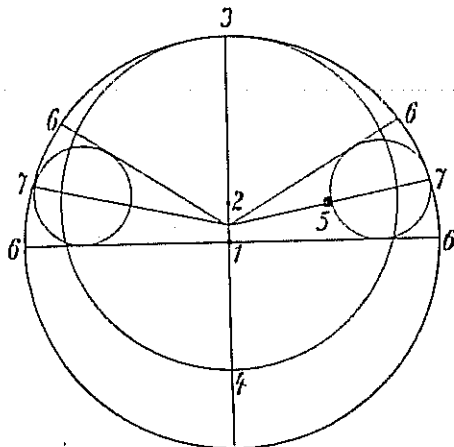
6) Man hat jede der excentrischen Sphären und jeden der Epicyclen ¹⁾ in 4 Theile getheilt, von denen die beiden unteren einander gleich und die beiden oberen einander gleich sind, und hat diese Theile Niṭāḳ ²⁾ genannt. Das Princip, nach welchem man

1) Jedenfalls sind hier nicht die Sphären, sondern die excentrischen und epicyclischen Bahnen der Gestirne gemeint.

2) ^{نِطَاقٌ} eigentlich der Schurz, dann ein Umschlagetuch, welches einen

diese Theilung ausführt, ist nicht immer dasselbe. Einige berücksichtigen die Entfernung, nämlich die Entfernung des Sternes von der Erde, und theilen demgemäss die excentrische Sphäre durch zwei Linien, von denen die eine von dem Mittelpunkte der Welt nach der obersten und untersten Apsis geht, die andere dagegen zwei „Punkte der Entfernungsmitte“ verbindet, d. h. zwei Punkte, welche auf der Oberfläche der excentrischen Sphäre einander gegen- (10 a) B. überliegen und deren Lage so ist, dass die Linien, welche einerseits vom Mittelpunkt der Welt, andererseits vom Mittelpunkt der excentrischen Sphäre nach einem oder dem andern jener beiden Punkte gezogen gedreht werden, einander gleich sind. Es geht sonach die

Fig. Vc. Handschrift B.



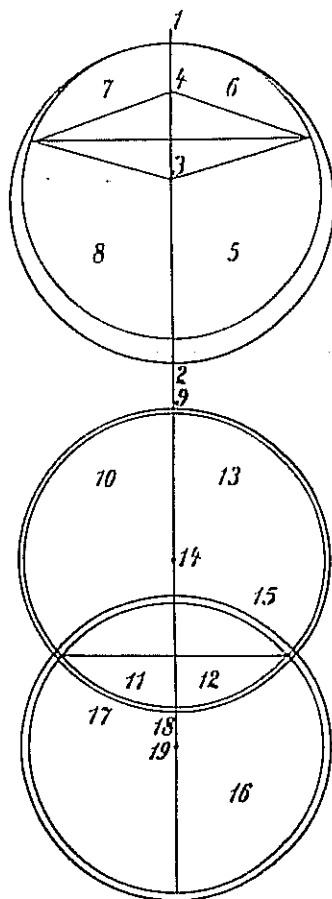
1. Mittelpunkt der Welt. 2. Mittelpunkt der excentrischen Sphäre.
3. Stellung der Sonne in der oberen Apsis. 4. Stellung der Sonne in der unteren Apsis. 5. Stern im Tiefpunkt des Epicyclus ohne Rectification. 6. Haupttrichtungslinie. 7. Mittellinie.

letztere der beiden oben bezeichneten Linien durch die Mitte des Zwischenraumes zwischen den beiden Mittelpunkten hindurch. Fig. VI. Nach demselben Princip theilt man den Epicyclus durch zwei Linien, deren eine vom Mittelpunkt der tragenden Sphäre von dem Tiefpunkte zu dem Gipfelpunkte des Epicyclus geht, während die andere durch die beiden Punkte geht, in denen sich der Epicyclus und die tragende Sphäre schneiden. — Fig. VIIa u. b. Andere berücksichtigen die Verschiedenheit der Stellungen, in welche die betr. Sphäre während ihres Umlaufes tritt, und theilen demnach die excentrische Sphäre durch zwei Linien, deren eine durch den Mittelpunkt der Welt von der obersten zur untersten Apsis geht, deren andere die Punkte

Theil des Körpers bedeckt; im vorliegenden Falle würde es mit „Region“ übersetzt werden können.

verbindet, in denen der Rectificationswinkel am grössten ist, d. h. die Punkte, die zu beiden Seiten der obersten Apsis um 90° von

Fig. VI. Handschrift B.

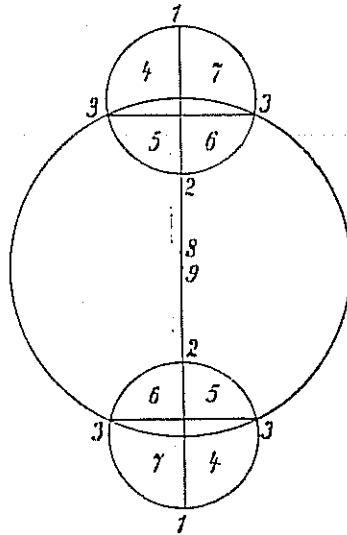


1. Untere Apsis. 2. Die weiteste Entfernung. 3. Mittelpunkt der excentrischen Sphäre. 4. Mittelpunkt der Welt. 5. Erster Niṭāk. 6. Zweiter Niṭāk. 7. Dritter Niṭāk. 8. Vierter Niṭāk. 9. Die obere Apsis. 10. Erster Niṭāk. 11. Zweiter Niṭāk. 12. Dritter Niṭāk. 13. Vierter Niṭāk. 14. Mittelpunkt des Epicyclus. 15. Umfang der tragenden Sphäre. 16. Die mittlere Rectification nach Maassgabe des Abstandes. 17. Die erste Rectification nach Maassgabe des Abstandes. 18. Tiefpunkt des Epicyclus. 19. Mittelpunkt der tragenden Sphäre.

derselben entfernt liegen. Die Theilung des Epicyclus erfolgt durch zwei Gerade, deren eine vom Mittelpunkt der tragenden Sphäre aus durch Gipfel- und Tiefpunkt des Epicyclus hindurchgeht, deren

andere auf der ersten lothrecht stehend mit ihren beiden Enden die Punkte trifft, in denen die Oberfläche des Epicyclus durch die vom Mittelpunkt der tragenden Sphäre nach ihr gezogenen Geraden (8 a) A. berührt wird. Dort ist auch auf dem Epicyclus diejenige Stelle, an der die Rectification am grössten ist. — Der erste Niṭāk liegt da, wohin der Stern gelangt, wenn er die obere Apsis oder beim Epicyclus den Gipfelpunkt berührt hat, der zweite, dritte und vierte folgen in der Richtung aufeinander, in welcher sich der Stern bewegt. So lange der Stern sich vom Hochpunkt nach dem Tief-

Fig. VIIa. Handschrift B.



1. Obere Apsis. 2. Untere Apsis. 3. Punkte der Entfernungsmitte.
4. Erster Niṭāk. 5. Zweiter Niṭāk. 6. Dritter Niṭāk. 7. Vierter Niṭāk.
8. Mittelpunkt der excentrischen Sphäre. 9. Mittelpunkt der Welt.

punkt bewegt, d. h. so lange er im ersten und zweiten Niṭāk der excentrischen Sphäre oder des Epicyclus ist, so lange geht er abwärts, so lange er dagegen sich von der unteren Apsis nach der oberen bewegt, d. h. so lange er in den beiden andern Niṭāk ist, so lange steigt er aufwärts.

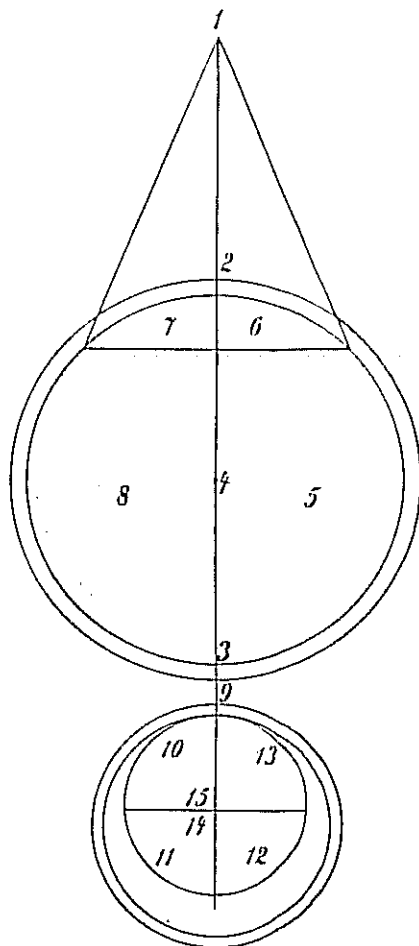
7) Die „Breite einer Stadt“¹⁾ ist ein Bogen des Mittagskreises zwischen dem Tagesgleicher und dem Zenith. Es ist dieser Bogen gleich dem Bogen des Mittagskreises, der zwischen dem Weltpole und dem Horizont (Nordpunkt) liegt.²⁾ Dieser letztere (10 b) B. Bogen wird die „Polhöhe“ (des Ortes) genannt. Sie ist die

1) Vergl. al-Fergānī S. 35.

2) Al-Fergānī erwähnt S. 22 denselben Satz, aber ebenfalls ohne Beweis.

kürzeste (sphärische) Entfernung zwischen dem Pole der Welt und dem Horizont dieser Stadt.

Fig. VII b. Handschrift B.



1. Mittelpunkt der tragenden Sphäre. 2. Untere Apsis. 3. Obere Apsis.
 4. Mittelpunkt der Welt¹⁾. 5. Erster Niṭāk. 6. Zweiter Niṭāk.
 7. Dritter Niṭāk. 8. Vierter Niṭāk. 9. Obere Apsis. 10. Erster
 Niṭāk. 11. Zweiter Niṭāk. 12. Dritter Niṭāk. 13. Vierter Niṭāk.
 14. Mittelpunkt der Welt. 15. Mittelpunkt der tragenden Sphäre.

8) Die Neigung ist ein Bogen eines Declinationskreises zwischen dem Tagesgleicher und dem Thierkreise. Dies ist die so-

1) Versehen des Abschreibers; es muss heißen: 4. Mittelpunkt des Epicyclus.

genannte „erste Neigung“, und wenn man den Ausdruck „Neigung“ schlechthin gebraucht, so meint man damit diese „erste“ Neigung. Die „zweite Neigung“ ist ein Bogen zwischen jenen beiden Kreisen, d. h. zwischen dem Tagesgleicher und dem Thierkreise, welcher einem Breitenkreise angehört. Die Neigung im umfassendsten Sinne, die man auch als die universelle oder die Generalneigung bezeichnet, ist ein Bogen zwischen Tagesgleicher und Thierkreis innerhalb des Kreises, der durch die Pole¹⁾ hindurchgeht. Sie ist die volle Bestimmung und das Maass der Neigung des Thierkreises zum Tagesgleicher.²⁾

Die Breite³⁾ eines Sternes im Verhältniss zu einem Zeichen des Thierkreises ist ein Bogen eines Breitenkreises zwischen dem Thierkreise und dem Endpunkte der geraden Linie, welche vom Mittelpunkt der Welt aus durch den Mittelpunkt des Sternes bis zur Thierkreissphäre geht. Gehört dagegen der Bogen einem Declinationskreise an und liegt zwischen dem Tagesgleicher und dem Endpunkte jener genannten geraden Linie, so stellt er die Declination des Sternes dar.

9) Die „Höhe“ eines Sternes ist ein Bogen eines Höhenkreises zwischen dem Endpunkte der vorerwähnten geraden Linie und dem Horizont. Fällt der Declinationskreis (welcher durch den Mittelpunkt des Sternes hindurch geht) mit dem Mittagskreise zusammen, so giebt die „Höhe“ die grösstmögliche Erhebung des betr. Sternes über den Horizont an.

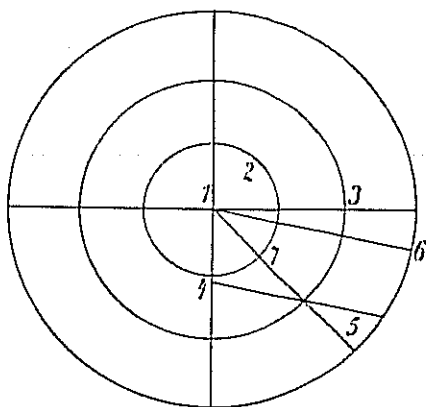
1) Gemeint sind hier die beiden Welpole und die Pole des Thierkreises.

2) Aller Wahrscheinlichkeit nach giebt Gāgminī die Grösse der universellen Neigung nicht an, weil er sie als allgemein bekannt voraussetzt. Aus Abth. II, Cap. 2 ist zu schliessen, dass er sie auf $23^{\circ} 35'$ schätzt. Nach Hipparch beträgt dieselbe, wie Ptolemäus citirt, $23^{\circ} 51' 20''$. Thābit ibn Kobrah giebt die Schiefe der Ecliptik = $23^{\circ} 33'$, ein Resultat, welches die Astronomen zur Zeit al-Māmūn gefunden haben sollen. Dies bestätigt auch Ibn Jānus, erwähnt aber zugleich, dass dieselben Astronomen drei Jahre später zu dem Resultate $23^{\circ} 33' 52''$ gelangt seien. Vergl. Delambre, S. 73 u. 77. — Al-Battānī will mit einem verbesserten Instrumente $23^{\circ} 35'$ gefunden haben. Vergl. Delambre, S. 13. — In den verschiedenen Uebersetzungen des Werkes von al-Fergānī tritt eine Differenz in Betr. der Angabe der Schiefe der Ecliptik hervor. In der Uebersetzung von Golius heisst es im 5. Kapitel (S. 20): ea quidem (mensura declinationis maximae), prout Ptolemaeus invenit, est partium 23, et minutorum 51; qualium scil. totus circulus est partium 360. At vero iuxta dimensionem, quam probatum vocant, quamque pia memoriae Almamon institui jussit, adhibitis ad eam rem viris doctis compluribus, ea declinatio continet gradus 23, et minuta 35; dagegen in der von Regiomontanus im 5. Capitel (S. 5): Quantitas declinationis circuli signorum ab aequinoctio diei est secundum quod invenit Ptolemaeus viginti quatuor graduum. Probatione autem certissima, qua probavit Almeon, quae interpretatur securus vel pacificus sive fidelis: et convenerunt in ea plures sapientum, quod est viginti trium graduum et triginta trium minutorum. — Abū'l-Hasan aus Marokko, ein Zeitgenosse des Gāgminī, behauptet, dass die Generalneigung zwischen den Grenzen $23^{\circ} 53'$ und $23^{\circ} 33'$ schwauke; er erwähnt ebenfalls den von Abū'l-Wafā stammenden Unterschied zwischen einer ersten und zweiten Neigung. Vergl. Delambre, S. 186.

3) Vergl. al-Fergānī S. 67 u. 68.

- 10) Die Parallaxe¹⁾ ist ein Bogen eines Höhenkreises zwischen den Endpunkten der beiden Geraden, welche durch den Mittelpunkt des Sternes nach der Thierkreissphäre gehen, und von denen die eine vom Mittelpunkt der Welt, die andere vom Beobachtungsort, also von einem Punkte der Erdoberfläche, ihren Ausgang nimmt. Wir vermögen dieselbe wahrzunehmen in dem Theile des Weltenraumes, der sich diesseit der Sonnensphäre befindet, auch in der
- (11 a) B. Sonnensphäre selbst noch, aber da nur noch als etwas sehr Kleines, jenseit der Sonnensphäre aber gar nicht mehr, weil von der Erde

Fig. VIII. Handschrift B.



1. Mittelpunkt der Welt. 2. Erdoberfläche. 3. Horizont. 4. Standpunkt des Beobachters. 5. Parallaxe. 6. Parallele zur Beobachtungslinie (in der Handschrift verzeichnet). 7. Winkel gleich der Parallaxe.

aus derartige Verhältnisse jenseit dieser Sphäre nicht mehr erkennbar sind. Fig. VIII.

11) Die Ostweite ist ein Bogen des Horizontalkreises zwischen der Umlaufbahn eines Sternes und dem Aufgangspunkte (der Sonne zur Zeit) des Aequinoctiums. Da nun die täglichen Umlaufbahnen der Sterne dem Tagesgleicher parallel laufen, so ist die Ostweite jedes Sternes gleich seiner Westweite. Mit der astronomischen Breite eines Punktes der Erdoberfläche nimmt natürlich die Ost- und Westweite zu.

12) Von dem Azimuth und dem Complement desselben ist bereits die Rede gewesen.²⁾ Das Azimuth ist ein Bogen des

1) Nach Ptolemäus ist die Parallaxe der Planeten nicht erkennbar. Vergl. Delambre S. 48. — Al-Battānī findet die Parallaxe der Sonne im Apogäum gleich $2' 58''$ und beim mittleren Abstand gleich $3' 6''$, die des Mondes beim geringsten Abstände $10' 42' 30''$, beim grössten $53' 34''$. Vergl. Delambre S. 39 u. 48. — Al-Fergānī S. 99 u. 100 giebt die Parallaxe des Mondes an im Perigäum $10' 44''$, im Apogäum $54'$.

2) Cap. III, 5.

Horizontalkreises zwischen dem Thierkreise und dem Höhenkreise. Das Azimuth der Kibla¹⁾ ist ein Bogen des Horizontalkreises zwischen dem Mittagskreise des Aufenthaltsortes des Betenden und dem Kreise, der durch das Zenith des Betenden und das Zenith von Mekka hindurchgeht.

13) Der Tagbogen ist ein Bogen vom täglichen Umlaufskreis der Sonne, welcher oberhalb der Erde zwischen dem Aufgangs- und dem Untergangspunkte liegt. Der von diesen beiden Punkten begrenzte Bogen unterhalb der Erde heisst der Nachtbogen.

14) Der Tagbogen eines Sterns ist ein Bogen des Umlaufskreises dieses Sterns zwischen seinem Aufgangs- und seinem Untergangspunkte oberhalb der Erde. Der Bogen unterhalb der Erde zwischen diesen beiden Punkten heisst der Nachtbogen des Sterns.

15) Die Bahn an der Thierkreis-Sphäre ist ein Bogen vom Umlaufskreise der Sonne zwischen dem Grade am Thierkreise, in welchem sie eben steht, und zwischen dem Ostpunkte des Horizonts. So ist es am Tage. In der Nacht ist es ein Bogen von jenem Kreise zwischen dem Nadir des Grades und dem Ostpunkte des Horizontes. Das Maass jedes dieser letztgenannten sechs Bogen ist das Maass des ihm entsprechenden Bogens des Tagesgleichers.

Capitel V.

Was den Sternen bei ihren Bewegungen widerfährt.

Hierher gehört zunächst die Verschiedenheit der Länge der Sonne in Folge ihrer Bewegung. Da die Sonne an der Oberfläche einer excentrischen Sphäre kreist, so befindet sich in der einen Hälfte der Thierkreis-Sphäre die grössere Hälfte der excentrischen Sonnensphäre und zwar diejenige, in welcher sich die oberste Apsis befindet, in der andern Hälfte der Thierkreis-Sphäre die kleinere Hälfte der Sonnensphäre mit der unteren Apsis. Da nun die Sonne jede Hälfte der Thierkreis-Sphäre nur mit dem Theil ihres Umlaufskreises durchschneidet, der innerhalb dieser Hälfte liegt, so muss nothwendigerweise eine Verschiedenheit stattfinden zwischen der Zeit, die sie braucht, um die eine Hälfte der Thierkreis-Sphäre zurückzulegen, und der Zeit, in welcher sie den Lauf durch die andere Hälfte vollendet. Es erscheint sonach ihre Bewegung in jener ersten Hälfte der obengenannten Sphäre (der Hälfte mit der oberen Apsis) langsamer, als in der Hälfte mit der unteren Apsis; da die Durchgangszeit dort eine längere ist als hier. Die Bewegung der Sonne innerhalb ihrer excentrischen Sphäre, d. h. die Zunahme ihrer „Mitte“, ist nun eine durchweg gleichförmige; es bedarf daher

1) Vergl. Abtheil. II, Cap. III.

eines Addirens oder eines Subtrahirens der Rectification zu der „Haupttrichtung“¹⁾, um in jedem einzelnen Falle die „Mitte“²⁾ der Sonne innerhalb der Thierkreis-Sphäre astronomisch zu bestimmen.³⁾

Was die übrigen Sterne anlangt, so tritt bei ihnen in Folge der Bewegung eine ganze Anzahl von Verschiedenheiten in der Länge auf, und zwar

- 1) in Folge der Bewegung des Sternes an der Oberfläche des betr. Epicyclus. Steht der Stern im Gipfelpunkt oder im Tiefpunkt des Epicyclus, so decken sich die beiden vom Mittelpunkt der Welt aus construirten Linien, von denen die eine durch den Mittelpunkt des Epicyclus, deren andere durch den Mittelpunkt des Sternes hindurchgeht; es giebt also in diesem Falle keine Verschiedenheit zwischen der „Mitte“ des Sterns und seiner Haupttrichtung, wie bereits oben ausgeführt wurde.⁴⁾ Befindet sich aber
- (9 a) A. der Stern nicht auf dem Gipfelpunkte oder Tiefpunkte, so fallen die
- (12 a) B. Endpunkte der erwähnten Geraden in verschiedene Punkte der Thierkreis-Sphäre, und es findet dann eine Verschiedenheit zwischen der „Mitte“ und der „Haupttrichtung“ statt. Das Maximum dieser Verschiedenheit ist da, wo das Maximum der „Rectification“ auf dem Epicyclus sich befindet. Darüber habe ich im Abschnitt von den Nīṭāk bereits das Nöthige gesagt.⁴⁾ Die Grösse der Verschiedenheit richtet sich selbstverständlich nach der Grösse des Halbmessers des Epicyclus. Die Halbmesser der Epicyclen haben in der mittleren Entfernung des Epicyclus vom Weltcentrum folgende Gradlängen:

beim Saturn 6 Grad 30 Minuten,
 beim Jupiter 11 Grad 30 Minuten,
 beim Mars 39 Grad 30 Minuten,
 bei der Venus 43 Grad 10 Minuten,
 beim Mercur 22 Grad 30 Minuten,
 beim Mond 5 Grad 15 Minuten.⁵⁾

2) Eine Verschiedenheit wird ferner dadurch herbeigeführt, dass der Epicyclus bald der Erde näher steht, bald weiter von ihr entfernt ist. Da nämlich die den Epicyclus tragende Sphäre excentrisch ist, so erscheint der Halbmesser des Epicyclus, wenn

1) Cap. IV, 4.

2) Vergl. al-Fergāni S. 46, 47 u. 50. Er erwähnt die scheinbar ungleichförmige Bewegung ebenfalls, doch begründet er dieselbe weniger eingehend.

3) Vergl. Cap. IV, 5.

4) Vergl. Cap. IV, 6.

5) Ueber die Grösse der Epicyclenkreise sagt al-Fergāni S. 65: Quod denique ad quantitates epicyclorum spectat; cuius modi partium radius eccentrici statuitur esse 60, eiusmodi partium radius epicycli est Saturno $6 + \frac{1}{2}$, Jovi $11 + \frac{1}{2}$, Marti $39 + \frac{1}{8}$, Veneri $43 + \frac{1}{8}$, Mercurio $22 + \frac{1}{2}$, Lunae $6 + \frac{1}{3}$. — Nach al-Battāni sind die Längen der Epicyclenradien für die einzelnen Planeten: Saturn $6^{\circ} 29' 2''$, Jupiter $11^{\circ} 30' 5''$, Mars $39^{\circ} 55' 22''$, Venus $44^{\circ} 9' 5''$, Mercur $22^{\circ} 30' 30''$, Mond $5^{\circ} 15'$. Vergl. Delambre S. 37. — In der Handschrift B sind für den Mond $6^{\circ} 20'$, in der Handschrift C 5° angegeben.

er der Erde näher ist, grösser und dementsprechend der Unterschied seiner Länge grösser, dagegen kleiner im umgekehrten Falle.

3) Wenn die Mittelpunkte der Epicyclen in der obersten oder untersten Apsis stehen, so fallen, wie bereits gezeigt wurde, die Durchmesser derselben mit der Geraden zusammen, welche durch den Mittelpunkt der Welt, durch den der tragenden Sphäre und durch den des Epicyclus geht. Aber dies ist nicht mehr der Fall, sobald der Mittelpunkt des Epicyclus über die oberste oder unterste Apsis hinausgerückt ist. Sein Durchmesser hat dann nicht mehr die Richtung der Geraden, welche den Mittelpunkt der tragenden Sphäre mit dem Mittelpunkte der Welt verbindet, sondern er ist nach einem anderen Punkte gerichtet, der beim Monde der „correspondirende Punkt“ heisst, dagegen bei den Planeten der „Mittelpunkt der Umlaufslinie“ oder der „Mittelpunkt der Sphäre, welche den Umlauf regelt.“ Die Bedeutung des letzteren Ausdruckes wird noch in diesem Abschnitt erklärt werden. Bei den oberen Planeten und bei der Venus ist der Durchmesser des Epicyclus nach einem Punkte in der Nähe der oberen Apsis gerichtet, der soweit vom Mittelpunkte der tragenden Sphäre entfernt ist, als dieser letztere von dem Mittelpunkte der Welt, d. h. der Mittelpunkt der tragenden Sphäre liegt stets zwischen diesem Punkte und dem Mittelpunkte der Welt. Beim Mercur ist der Durchmesser nach einem Punkte gerichtet, welcher die Strecke zwischen dem Mittelpunkte der Welt und dem (12 b) B. Mittelpunkte des Mudir halbiert. Bei dem Monde ist die Gerade nach einem Punkte gerichtet, dessen Entfernung vom Weltcentrum auf der Seite der unteren Apsis gleich der Entfernung des Mittelpunktes der tragenden Sphäre von dem Weltcentrum auf der Seite der oberen Apsis ist.¹⁾ Wenn demnach die tragende Sphäre und ihr Mittelpunkt um das Weltcentrum infolge der Umdrehung der Mailsphäre kreisen, so rotirt der besagte Punkt und der Mittelpunkt der tragenden Sphäre auf der Peripherie eines Kreises und zwar so dass beide Punkte einander diametral gegenüber stehen, d. h. (9 b) A. Endpunkte eines und desselben Durchmessers dieses Kreises sind. Dieser eben besprochene Punkt, nach dem die erwähnten Durchmesser der Epicyclen gerichtet sind, bleibt mit ihnen in einer Richtung während der ganzen Rotation²⁾; d. h. wenn man von diesem Punkte nach den Mittelpunkten der Epicyclen Linien zieht, so fällt jede derselben mit dem erwähnten Epicyclusdurchmesser zusammen und trennt sich nicht von ihm, so lange er sich dreht. Diese Linie heisst bei den Planeten die „rotirende Linie“ und der gedachte Kreis, den diese mit dem Epicycluscentrum sich

1) Vergl. al-Fergānī S. 54.

2) Vergl. Cap. III am Schluss, ferner al-Fergānī S. 60: In locis autem, quano inter absidas hasce sunt, per centrum signifieri haudquonquam (epicycli diameter) transit; neque etiam transit a parte perigaei . . . , sed in motu suo semper cohaeret cum centro eccentrici, qui exaequat motum.

drehende Linie beschreibt, führt den Namen „Gleicher der Umlaufsbewegung“, weil die Umlaufsbewegung der Planeten im Verhältniss zu ihm gleichförmig ist, d. h. weil sie von seiner Peripherie in gleichen Zeiten gleiche Bogen abschneidet. Der Endpunkt dieser Linie liegt auf der oberen Hälfte des Epicyclus und heisst der „mittlere Gipfelpunkt.“ Der Endpunkt derjenigen Linie, die vom Weltcentrum aus durch den Mittelpunkt des Epicyclus hindurchgeht, ist der „sichtbare Gipfelpunkt.“ Wir wollen jetzt die Entfernungen dieser Centren und Punkte von einander angeben. Zunächst die Entfernung des Mittelpunktes der excentrischen Sphäre vom Weltcentrum beträgt

bei der Sonne: 2 Grad 29 Minuten 30 Secunden,

bei dem Monde: 10 Grad 19 Minuten 6 Secunden,

(13 a) B. dieses ist gleich der Entfernung des correspondirenden Punktes auf der andern Seite. Bei den Planeten mit Ausnahme des Mercur ist diese Entfernung gleich der Hälfte der Entfernung des Mittelpunktes des „Gleichers der Umlaufsbewegung“ von ihm, und diese, ich meine die Entfernung des Mittelpunktes des „Gleichers der Umlaufsbewegung“ vom Mittelpunkte der Welt beträgt

bei dem Saturn: 6 Grad 50 Minuten,

bei dem Jupiter: 5 Grad 30 Minuten,

bei dem Mars: 12 Grad,

bei der Venus: 2 Grad 6 Minuten.

Was den Mercur anlangt, so liegt bei ihm das Centrum des „Gleichers der Umlaufsbewegung“ in der Mitte zwischen dem Centrum des Mudir und dem Centrum der Welt, und die Entfernung des Centrums seiner „tragenden“ Sphäre vom Centrum des Mudir ist gleich der halben Entfernung des Centrums des Mudir vom Centrum der Welt, so dass, wenn die „rotirende Linie“ vom Punkte der „kürzesten Entfernung“ aus mit der durch die Mittelpunkte hindurchgehenden Linie zusammenfällt, der Mittelpunkt der tragenden Sphäre auf den Mittelpunkt des Gleichers der Umlaufsbewegung zu liegen kommt, und wenn die „rotirende Linie“ vom Punkte der „weitesten Entfernung“ aus mit ihr zusammen fällt, so liegen auf dieser Linie zuerst der Mittelpunkt der Welt, dann der Mittelpunkt des „Gleichers der Umlaufsbewegung“, dann der Mittelpunkt des Mudir, ferner der Mittelpunkt der tragenden Sphäre und die Entfernungen zwischen ihnen sind gleich, jede von ihnen beträgt 3 Grad 10 Minuten, sonach die Entfernung des Mittelpunktes der tragenden Sphäre vom Weltcentrum 9 Grad 30 Minuten.¹⁾

Was den Sternen sonst noch widerfährt, ist eine Veränderung ihrer Breite. Die Sonne zunächst besitzt keine Breite, da sie

1) Al-Fergānī S. 64 u. 65 giebt den Abstand der Centren von einander in Sechzigsteln des Halbmessers der excentrischen Sphäre, nämlich für die Sonne $2\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, für den Saturn $3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, für den Jupiter $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, für den Mars 6, für die Venus $1 + \frac{1}{4}$, für den Mercur 3 und für den Mond $12 + \frac{1}{2}$.

bei ihrer Bewegung stets in der Ebene des Thierkreises bleibt.¹⁾ Die übrigen Sterne bewegen sich von der Ebene des Thierkreises nach Süden oder Norden entsprechend der Inclination der tragenden Sphäre und diese Abweichung heisst die Breite der excentrischen Sphäre. Das Maximum derselben ist

beim Saturn: 2 Grad 30 Minuten,
beim Jupiter: 1 Grad 30 Minuten,
beim Mars: 1 Grad,
bei der Venus: 10 Grad,
beim Mercur: 45 Grad,
beim Mond 5 Grad.²⁾

(10 a) A.

Ausser dieser Art von Breite hat der Mond keine andere, weil bei ihm die grössten Kreise der Mail-Sphäre, der tragenden Sphäre und des Epicyclus in einer Ebene liegen.

Ein weiterer Unterschied findet bei den Planeten statt in Betreff der Neigung des Gipselpunktes und des Tiefpunktes des Epicyclus zur Hämil-Sphäre. Diese Neigung heisst die Breite des Epicyclus³⁾, sie beträgt

beim Saturn: 4 Grad 30 Minuten,
beim Jupiter: 2 Grad 30 Minuten,
beim Mars: 2 Grad 15 Minuten,
bei der Venus: 2 Grad 30 Minuten,
beim Mercur: 6 Grad 15 Minuten.

Eine weitere Abweichung ist den unteren Planeten eigen infolge der Neigung des durch die „mittlere Entfernung“ hindurchgehenden Epicyclus-Durchmessers zur Mail-Sphäre. Man nennt diese Neigung „die Breite des Ueberhanges“ oder der „Dependenz“ oder der „Deflexion.“ Das Maximum derselben beträgt bei jedem einzelnen der genannten Planeten 2 Grad 30 Minuten. Was nun die Neigung des Gürtels der Mail-Sphäre zum Thierkreis anlangt, so ist sie bei den „oberen Sternen“ und bei dem Monde unveränderlich feststehend, bei der Venus und dem Mercur aber steht sie nicht fest. So oft nämlich der Mittelpunkt des Epicyclus an einem der beiden Knotenpunkte anlangt, erhält der Gürtel der Mail-Sphäre genau die Richtung des Thierkreises; sobald aber das Epicycluscentrum den betreffenden Knotenpunkt überschritten hat, so beginnt die Hälfte des Gürtels der Mail-Sphäre;

1) Vergl. al-Fergāni S. 67.

2) Das Maximum der Breite beträgt nach al-Fergāni S. 73 u. 74 in Sechzigsteilen des Radius beim Saturn 3, beim Jupiter 2, beim Mars $4\frac{1}{3}$ nach Norden, 7 nach Süden, bei der Venus, nach der Ptolemäischen Beobachtung $6\frac{1}{3}$, nach Andern 9, beim Mercur nach Norden und nach Süden $4\frac{1}{3}$, beim Monde 5. — Ibn Jānus fand $5^{\circ} 3'$, erwähnt aber, dass das Resultat 5° für den Mond von Hipparch und Ptolemäus festgestellt sei, und dass es nach Aussage der Perser nur $4^{\circ} 30'$ betrage. Die Inder haben ebenfalls stets das letztere Resultat angenommen. Vergl. Delambre S. 138.

3) Al-Fergāni erwähnt S. 71 diese Neigung ebenfalls, giebt aber das Maass derselben für die einzelnen Planeten nicht an.

und zwar die, in welcher sich der Mittelpunkt des Epicyclus befindet, sich zu neigen, — bei der Venus nach Norden und beim Mercur nach Süden; die andere Hälfte neigt sich in entgegengesetzter Richtung. Die Neigung nimmt unaufhörlich zu, bis der Mittelpunkt zur Mitte des Abstandes der beiden oben erwähnten Punkte (Knotenpunkte) von einander gelangt ist; dann beginnt sie abzunehmen, bis schliesslich der Gürtel der Mäl-Sphäre beim Eintreffen des Mittelpunktes (des Epicyclus) in anderen Knotenpunkte wieder die Richtung des Thierkreises annimmt. Hat der Mittelpunkt den Knotenpunkt passirt, so wiederholt sich der Vorgang in entsprechender Weise. Uebrigens hat der Mittelpunkt des Epicyclus nothwendigerweise bei der Venus stets eine nördliche, beim Mercur eine südliche Lage zum Thierkreise.¹⁾

- (14 a) B. Die Neigung des Durchmessers des Epicyclus — ich meine den Durchmesser, der durch den Gipfelpunkt und den Tiefpunkt geht — ist ebenfalls nicht constant. Dieser Durchmesser hat bei den oberen Planeten die Richtung der Thierkreisebene, so oft der Mittelpunkt — der Mittelpunkt des Epicyclus nämlich — sich im aufsteigenden oder niedersteigenden Knoten befindet. Hat er den aufsteigenden Knoten überschritten, so beginnt der Gipfelpunkt sich nach Süden, der Tiefpunkt nach Norden zu neigen. Diese Neigung nimmt zu, bis sie mit dem Eintreffen des Epicycluscentrums in der Mitte des Abstandes der beiden Knotenpunkte ihr Maximum erreicht. Dann fängt sie an abzunehmen, bis der Durchmesser zum zweiten Male die Richtung des Thierkreises annimmt. Dies geschieht, sobald das Epicycluscentrum in den niedersteigenden Knoten tritt. Ist das Centrum über denselben hinaus, so neigt sich der Gipfelpunkt nach Norden, der Tiefpunkt nach Süden, und diese Neigung nimmt zu, erreicht ihr Maximum und nimmt wieder ab in der oben beschriebenen Weise, wobei
- (10 b) A. natürlich die Neigung des Gipfelpunktes stets dem Thierkreise zugewandt, die des Tiefpunktes demselben abgewandt ist. Bei den unteren Sternen besitzt der Durchmesser die Richtung des Gürtels der Mäl-Sphäre, wenn das Epicycluscentrum in der Mitte des Zwischenraumes zwischen den beiden Punkten, nämlich, zwischen dem auf- und niedersteigenden Knotenpunkte, angekommen ist, also gerade da, wo die Neigung des Gürtels der Mäl-Sphäre zum Thierkreis ihr Maximum erreicht. Diese Richtungsgleichheit zwischen dem Durchmesser und dem Gürtel der Mäl-Sphäre findet sowohl in der oberen als in der unteren Apsis statt. Bei der oberen Apsis beginnt der Gipfelpunkt des Epicyclus sich zu neigen, und zwar bei der Venus nach Norden und bei dem Mercur nach Süden; bei der unteren Apsis verhalten sich beide Planeten umgekehrt. Die Neigung

1) Ġagminī bezeichnet hier die tragende Sphäre als Mäl-Sphäre, al-Fergānī erwähnt die veränderliche Richtung des Gürtels der excentrischen Sphäre zum Thierkreise ebenfalls. Vergl. S. 69.

erreicht ihr Maximum bei den mehrerwähnten Punkten. Die Zu- und Abnahme der Neigung und der Eintritt der Richtungsgleichheit erfolgen in der oben beschriebenen Weise.¹⁾

Was die „Dependenz“ anlangt, so beginnt sie beim Eintritt des Epicycluscentrums in einen der beiden Knotenpunkte in den aufsteigenden oder den niedersteigenden. Ihr Maximum tritt dann ein in der Mitte zwischen diesen beiden Punkten. Ist diese Mitte die obere Apsis, so ist der östliche Endpunkt im Neigungsmaximum bei der Venus nach Norden und beim Mercur nach Süden gerichtet, der westliche bei der Venus nach Süden und beim Mercur nach Norden. Ist die Mitte die untere Apsis, so verhält sich's bei beiden Planeten umgekehrt.

Aus allem oben gesagten erhellt, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit der „tragenden“ Sphäre gleich der der beiden oben erwähnten Durchmesser des Epicyclus ist, und dass die vier Zeiten der Umdrehung ebenfalls einander gleich sind. (13 a) A. (14 b) B.

Es mögen ausserdem hier noch die oberen Apsiden und die Knotenpunkte Erwähnung finden. Was die oberen Apsiden betrifft, welche sich bei der Umdrehung der Fixsternsphäre mit fortbewegen, so kommt die obere Apsis des Saturn um 50 Grad nach der Mitte des Zwischenraumes zwischen den beiden Knotenpunkten, also dem Maximalpunkte der Neigung des Gürtels der Mail-Sphäre zum Thierkreis und die obere Apsis des Jupiter geht dieser Mitte um 20 Grad voran. Der Ausdruck „sie geht voran“ heisst hier soviel als: das Eintreten des Sternes in die obere Apsis erfolgt eher, als er in jene Mitte gelangt und der Ausdruck „sie kommt nach“ ist in entsprechender Weise zu erklären. Die obere Apsis der übrigen Sterne liegt in jener Mitte selbst.

Was den Ort der verschiedenen oberen Apsiden anlangt, so war derselbe im ersten Jahre des Iskender²⁾

für die Sonne in den Zwillingen und zwar: 27 Grad 10 Minuten 33 Secunden,

für den Saturn im Schützen: 9 Grad 23 Minuten 33 Secunden,

für den Jupiter in der Jungfrau: 19 Grad 23 Minuten 33 Sec.,

für den Mars im Löwen: 11 Grad 53 Minuten 46 Secunden,

für die Venus in den Zwillingen: 27 Grad 10 Minuten 33 Sec.,

für den Mercur in der Waage: 26 Grad 23 Minuten 38 Sec.³⁾

Für die Orte der Knotenpunkte gelten hinsichtlich desselben chronologischen Datums folgende Bestimmungen.

Der aufsteigende Knoten (Kopf des Drachen) stand

für den Saturn im Krebs: 9 Grad 23 Minuten 33 Secunden,

1) Vergl. die Schilderung bei al-Fergānī S. 70.

2) Alexander des Grossen von Macedonien, dessen Regierungsantritt in der Chronologie der Araber und Perser den Anfang einer Epoche bildet.

3) Jedes Sternbild des Thierkreises ist zu 30⁰ gerechnet und die Stellung der Planeten durch eine Abmessung vom Pol der Ecliptik aus gesehen in der Richtung umgekehrt wie der Zeiger einer Uhr umläuft, angegeben.

für den Jupiter im Krebs: 19 Grad 23 Minuten 33 Sekunden,
 für den Mars im Stier: 11 Grad 53 Minuten 46 Sekunden,
 für die Venus in den Fischen: 27 Grad 10 Minuten 33 Sec.,
 für den Mercur im Steinbock: 26 Grad 23 Minuten 33 Sec.

In jedem folgenden Jahre nehmen die Zahlen, die für diese Orte angegeben sind, zu in demselben Masse, in dem sich die Fixsternsphäre in jedem Jahre fortbewegt. Davon ist bereits früher die Rede gewesen¹⁾.

Die Rückläufigkeit, die Rechtläufigkeit und das Stehenbleiben der Planeten.²⁾ Diese Erscheinungen erklären sich folgendermaassen. Wenn der Stern sich im oberen Theile des Epicyclus befindet, so stimmt die Bewegung seines Mittelpunktes mit der des Mittelpunktes des Epicyclus in der Richtung der Thierkreis-Sphäre überein. Es erscheint in diesem Falle seine Bewegung rechtläufig, so lange sie eine schnelle ist. Nähert sich der
 (15 a) B. Stern dem unteren Theile des Epicyclus, so fängt er an sich nach der entgegengesetzten Richtung zu wenden. Es geschieht dies in Gemässheit dessen, was oben über die Bewegung des Epicyclus um seinen Mittelpunkt gezeigt worden ist.³⁾ Solange indessen die Geschwindigkeit des Sternmittelpunktes in der entgegengesetzten Richtung noch geringer ist als die des Epicyclusmittelpunktes in der Richtung des Thierkreises, erscheint der Stern noch rechtläufig aber langsam in seiner Bewegung. Werden dann die Geschwindigkeiten der beiden Mittelpunkte einander gleich, so erscheint er feststehend. Steigert sich die Geschwindigkeit des Mittelpunktes (des Sternes) so, dass sie die Geschwindigkeit des Epicyclusmittelpunktes übertrifft, so erscheint er rückläufig. Dann nachdem er rückläufig gewesen ist, steht er zum zweiten Male still, hierauf wird er wieder in derselben Weise wie zuvor rechtläufig. Im Uebrigen vollendet er in seiner Sphäre seinen Lauf ohne weiteren Wechsel in seinem Verhältniss zu derselben. Das erste scheinbare Stehenbleiben vor dem Rücklauf heisst der erste Stand, das Stehenbleiben nach dem Rücklauf der zweite Stand.⁴⁾ (Fig. IX.) Die Geschwindigkeit des Mondmittelpunktes auf der Oberfläche der Epicyclus-Sphäre ist geringer als die des Epicyclusmittelpunktes auf der Oberfläche der tragenden Sphäre. Daher erscheint der Mond⁵⁾ nie rückläufig, wohl aber langsam in seinem Laufe.

1) Vergl. Abth. I, Cap. 2.

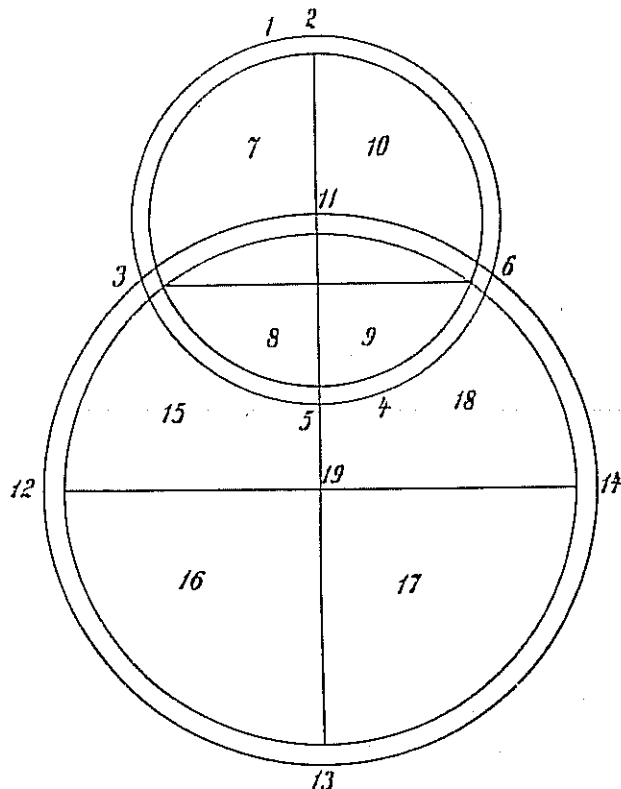
2) Die Rückläufigkeit, die Rechtläufigkeit und das Stehenbleiben der Planeten beschreibt und erklärt al-Fergānī in derselben Weise, hebt aber dabei besonders das Verhalten des Gestirnes hervor, wenn es sich im Perigäum befindet. Vergl. S. 61—63. Zum Schluss giebt er für die einzelnen Planeten die Orte an, an welchen sich dieselben in der Rechtläufigkeit oder Rückläufigkeit befinden.

3) Vergl. Abth. I, Cap. 2.

4) Die Bezeichnungen „der erste und der zweite Stand“ finden sich nicht bei al-Fergānī.

5) Vergl. al-Fergānī S. 63.

Fig. IX. Handschrift B.



1. Bahn der rechtläufigen Bewegung. 2. Gipfelpunkt des Epicyclus. 3. Erster Stillstand. 4. Bahn der rückläufigen Bewegung. 5. Tiefpunkt des Epicyclus. 6. Zweiter Stillstand. 7. Erster Niṭāk. 8. Zweiter Niṭāk. 9. Dritter Niṭāk. 10. Vierter Niṭāk. 11. Süden. 12. Osten. 13. Norden. 14. Westen. 15. Erster Niṭāk. 16. Zweiter Niṭāk. 17. Dritter Niṭāk. 18. Vierter Niṭāk. 19. Mittelpunkt der tragenden Sphäre.

Man hat die Sphäre in vier Theile zerlegt und diese Theile Niṭāko genannt. Der erste Niṭāk beginnt immer am Gipfelpunkt der Sphäre, während der zweite bis zum Tiefpunkt reicht, wie aus der vorstehenden Zeichnung hervorgeht. Wisse nun, dass der Stern den obersten Theil des Epicyclus d. h. den Gipfelpunkt in der Richtung des Thierkreises von Westen nach Osten durchläuft. Befindet sich der Stern in der Mitte des obersten Theiles des Epicyclus d. h. zwischen dem vierten und ersten Niṭāk, so ist er rechtläufig, d. h. er geht von Westen nach Osten. Bewegt er sich vom ersten zum zweiten Niṭāk, so steigt er von oben nach unten und scheint dabei vollständig stille zu stehen. Man nennt diese Stellung den ersten Stillstand. Darauf wird er rückläufig und gelangt auf diese Weise zum Ende des dritten Niṭāk. Die Bewegung ist hierbei von Osten nach Westen gerichtet. Sodann steigt er aufwärts vom dritten zum vierten Niṭāk und scheint dabei abermals stille zu stehen. Dem wahren Sach-

verhält nach läuft der Stern nicht rückwärts; die scheinbare Bewegung ist eine Folge des Laufes auf dem Epicyclus. Der Stern geht nicht zurück, sondern vorwärts in seiner epicyclischen Bahn.

- Eigenthümlichkeiten in dem Verhältniss der Planeten zur Sonne. Was zunächst die oberen Planeten anlangt, so ist die Entfernung des Mittelpunktes des Epicyclus eines jeden vom Gipfelpunkt stets gleich der Entfernung des Mittelpunktes des Epicyclus von dem Mittelpunkte der Sonne. Es steht sonach die Sonne stets in Conjunction mit ihnen, wenn sie sich im Gipfelpunkt ihres Epicyclus befinden. So oft sich nun die Sonne
- (13 b) A. vom Mittelpunkt des Epicyclus entfernt, bewegt sich in demselben Maasse der Mittelpunkt des Sternes vom Gipfelpunkt des Epicyclus weg, bis er, wenn die Sonne in Opposition zu dem Mittelpunkt des Epicyclus tritt, seinerseits den Tiefpunkt des Epicyclus erreicht. Demnach sind die Sterne immer, sobald sie im Gipfelpunkt des Epicyclus stehen, dem Sonnenbrand am meisten preisgegeben, dagegen sind sie stets der Sonne fern gerückt, wenn sie im Tiefpunkt des Epicyclus stehen. Beim Mars indessen soll zur Zeit seiner Conjunction mit der Sonne der Abstand zwischen ihm und der Sonne grösser sein als in der Zeit, in der er zur Sonne in Opposition steht, weil der Durchmesser seines Epicyclus grösser ist als der
- (15 b) B. Durchmesser der Mercurialsphäre der Sonne. Bei den beiden unteren Planeten liegt der Mittelpunkt ihres Epicyclus immer mit dem Mittelpunkt der Sonne in derselben Ebene; ihre Entfernung von der Sonne wechselt demnach um das Maass des halben Durchmessers, d. h. um das Maass des „ersten Unterschiedes“.) Daraus folgt, dass die Sonnennähe bei ihnen in der Hälfte der Rectiläufigkeit, also am Gipfelpunkt des Epicyclus, die Sonnenferne in der Hälfte der Rückläufigkeit, also beim Tiefpunkt des Epicyclus stattfindet, dass demnach die „Mitte“²⁾ jedes dieser beiden Planeten gleich der „Mitte“ der Sonne ist.

Die Erscheinungen, welche sich hinsichtlich des Mondes infolge seines Verhältnisses zur Sonne zeigen, sind: Neumond, Zunahme, Vollmond, Abnahme, Sonnenfinsterniss und Mondfinsterniss. Diese Erscheinungen rühren daher, dass der Mondkörper völlig dunkel ist und lediglich wie ein Spiegel das Licht der Sonne zurückstrahlt. Es wird demnach immer die der Sonne zugewendete Hälfte beleuchtet, die andere Hälfte dagegen finster sein. Wenn der Mond bei seiner Conjunction mit der Sonne zwischen uns und die Sonne tritt, so ist uns die dunkle Hälfte zugekehrt und wir sehen nichts von seinem Lichte. Dies ist der sogenannte Neumond. Entfernt sich sodann der Mond von der Sonne etwa um 12 Grad — weniger oder mehr je nach der verschiedenen Lage der menschlichen Wohnstätte, von der aus er

1) Vergl. Cap. V, 1.

2) Vergl. Cap. IV, 4, 5.

beobachtet wird, — so wendet sich seine beleuchtete Hälfte uns zu, und wir sehen ein Stück von ihm, eine Sichel.¹⁾ Je mehr seine Entfernung von der Sonne zunimmt, desto mehr kehrt sich die beleuchtete Hälfte nach uns hin, und desto stärker wird ihr Licht, bis der Mond in Opposition zur Sonne tritt. Wir stehen in diesem Falle zwischen beiden Himmelskörpern; und die der Sonne zugekehrte Seite des Mondes ist auch uns zugewendet. Dies ist der sogenannte Vollmond. Indem sich dann der Mond von seiner Oppositionsstellung wegwendet, kehrt sich, je näher er der Sonne kommt, desto mehr von der dunklen Seite uns zu. So wächst die Dunkelheit und das Licht nimmt ab, bis es schliesslich wieder ganz verschwindet.²⁾

Wenn der Mond bei seiner Conjunction in die gerade Linie zwischen der Erde und der Sonne tritt — und zwar ist dies im auf- oder niedersteigenden Knoten oder in der Nähe dieser Punkte der Fall —, dann tritt er zwischen die Sonne und zwischen uns und verhüllt uns das Licht der Sonne. So entsteht eine Sonnenfinsterniss.³⁾ Das Schwarze, das bei derselben in der Sonne (16 a) B. sichtbar wird, ist die Farbe des Mondkörpers. Der Grund aber, weshalb dies Schwarze von Westen her in die Sonne tritt, liegt darin, dass der Mond von Westen her zu ihr herankommt. Wenn sich der Mond an der Sonne vorbeibewegt, wird es aus dem angegebenen Grunde auch an dem westlichen Ende zuerst wieder hell.

Wenn sich der Mond ebenso, wie es hier der Fall war, d. h. in derselben Linie mit der Sonne, aber in Opposition zu ihr befindet, so tritt zwischen beide die Erde und der Schatten der letzteren fällt auf den Mond. Es dringt demnach das Sonnenlicht nicht zu ihm, und er verharrt deshalb in seiner ursprünglichen Dunkelheit. In diesem Falle haben wir eine Mondfinsterniss.⁴⁾

1) Al-Fergāni beschreibt S. 93—96 den Vorgang in ganz ähnlicher Weise, giebt aber zugleich an, in welcher Richtung die Beleuchtung auf der Mondscheibe fortrückt und berücksichtigt verschiedene Stellungen der Sonne im Gürtel der Thierkreis-Sphäre, insbesondere für die Dauer des Neumondes. Auch die Entfernung um 12 Grad erwähnt er, doch hängt nach ihm dies mehr oder weniger von der Stellung des Mondes, nicht aber von der Lage des Beobachtungsortes ab. — Vergl. Delambre: Al-Battāni, a éprouvé qu'on pouvait voir la Lune à 10° 50' de distance au Soleil et à 13° 1/2 selon les circonstances.

2) Vergl. al-Fergāni S. 94. — Kazwini schildert S. 36 die Entstehung des Mondwechsels in genau derselben Weise, doch tritt nach ihm der Neumond erst ein, wenn eine schmale Sichel des Gestirns wieder sichtbar wird. Vergl. Abth. II, Cap. 3. — Die Griechen nannten ebenfalls den Tag Neumond, an welchem der Mond wirklich neu erschien. Vergl. Schaubach S. 190.

3) Vergl. al-Fergāni S. 105 u. f. Kazwini S. 52. Beide erklären die Entstehung der Sonnenfinsterniss in derselben Weise, erwähnen ausserdem die verschiedenen Arten derselben, aber sie geben nicht an, in welcher Richtung die Verfinsternung erfolgt. — Ueber den Zeitraum zwischen zwei Verfinsternungen s. al-Fergāni S. 108.

4) Vergl. al-Fergāni S. 103 und Kazwini S. 38. Al-Fergāni erwähnt bei dieser Gelegenheit auch die Länge des Erdschattens nach der Ptolemäischen Messung.

Die Verfinsterung des Mondes und ebenso seine spätere Wiederaufhellung beginnt von Osten her, weil der Mond von Westen her in den Schatten der Erde tritt und sonach sein östlicher Rand zuerst den Schatten erreicht, also auch zuerst dunkel wird. Aus demselben Grunde geht der östliche Theil zuerst am Schatten vorüber und wird daher zuerst wieder hell.

Zu dem, was den Mond betrifft, gehört auch das, dass die Sonne mit ihrer Bewegung stets die Mitte zwischen der oberen Apsis des Mondes und dem Mittelpunkt seines Epicyclus hält. Die Sache verhält sich folgendermaassen. Wenn der Mittelpunkt des Mondepicyclus in der oberen Apsis des Mondes mit dem Sonnen-
centrum in Conjunction tritt, so befindet er sich in einem Punkte des Thierkreises, z. B. im Kopf des Widders; dann bewegt sich die obere Apsis von ihm hinweg, in dem sie im Zeitraum eines Tages und einer Nacht mit der Bewegung der Mail-Sphäre 11 Grad 9 Minuten 7 Sekunden 43 Tertien und mit der Bewegung der Gauzaharsphäre 3 Minuten 10 Sekunden 37 Tertien zurücklegt, also im Ganzen 11 Grad 12 Minuten 18 Sekunden 20 Tertien und zwar nach der entgegengesetzten Richtung, die Sonne dagegen bewegt sich von ihm ungefähr um 7 Grad 9 Minuten 8 Sekunden 20 Tertien und der Mittelpunkt des Epicyclus in Folge der Umdrehung der tragenden Sphäre um 24 Grad 22 Minuten 53 Sekunden 20 Tertien. Diese beiden ebengenannten Bewegungen, die der Sonne und die des Epicyclus, erfolgen in derselben Richtung, aber die Mail-Sphäre treibt die tragende Sphäre in der entgegengesetzten Richtung fort, und zwar um soviel, als das Maass ihrer Bewegung beträgt, nämlich 11 Grad 12 Minuten 18 Sekunden 20 Tertien. Dem Mittelpunkt (des Epicyclus) bleiben demnach für die Bewegung in der Richtung (der Sonne) ungefähr 13 Grad 10 Minuten 35 Sekunden. Dies ist die Mitte des Mondes im Zeitraum eines Tages und einer Nacht. Wenn Du die Mitte der Sonne
(16b) D. davon abziehst und zu der Bewegung der Mail-Sphäre addirst, dann ist das Resultat der Subtraction der Unterschied des Mittelpunktes von der Sonne, und das der Addition der Unterschied der oberen Apsis des Mondes von ihnen beiden; beides aber beträgt ungefähr 12 Grad 11 Minuten 24 Sekunden.) Sonach hält die Sonne die Mitte zwischen jenen beiden. Man nennt demgemäss die Bewegung des Mittelpunktes den „doppelten Unterschied“. Denn wenn der Unterschied zwischen dem Mittelpunkte und der Sonne verdoppelt wird, so ist das Resultat dieser Verdoppelung gleich dem Unterschied zwischen dem Mittelpunkt und der oberen Apsis. Nothwendigerweise steht der Mittelpunkt bei seiner Geviertstellung zur Sonne in der unteren Apsis und bei seiner Conjunction und Opposition in der oberen Apsis. In Folge dessen gelangt der Mittel-

2) Vergl. al-Fargānī S. 52. Die Resultate Gāgminīs beruhen jedenfalls auf genaueren Messungen als die Angaben al-Fargānī's.

punkt bei jedem Umlauf zweimal in die obere Apsis und zweimal in die untere Apsis. —

Gleiches, wie ich es hier dargestellt, ist der Fall beim Mittelpunkt des Epicyclus des Mercur, weil die Bewegung des Mittelpunktes, welche durch die Umdrehung der „tragenden“ Sphäre herbeigeführt wird, doppelt so rasch ist als die Bewegung der oberen Apsis, welche ihren Grund in der Umdrehung der Mudir-Sphäre hat. Da nun die Mudir-Sphäre die „tragende“ Sphäre um so viel, als ihre eigene Bewegung beträgt, zurücktreibt, so muss der Rest der Bewegung des Mittelpunktes gleich der Bewegung der Mudir-Sphäre in entgegengesetzter Richtung sein. Wenn also diese beiden Punkte — ich meine den Mittelpunkt (des Epicyclus) und die obere Apsis, welche sich in der Mudir-Sphäre befindet, — sich in der Waage bei der anderen oberen Apsis, nämlich der der Mumattal-Sphäre getroffen haben, dann bewegen sie sich von dieser hinweg in entgegengesetzter Richtung und zwar so, dass der Mittelpunkt (des Epicyclus) immer ebenso weit von der Apsis (der Mumattal-Sphäre) als die Apsis der Mudir-Sphäre von dieser entfernt ist. Beide treffen sich während ihrer Umdrehung zweimal, einmal in der Waage und einmal im Widder. Zweimal liegen sie einander diametral gegenüber, wenn sich der eine von ihnen im Steinbock, der andere im Krebs befindet.

Zweite Abtheilung.

(10b) A.

Die Gestalt der Erde und was damit zusammenhängt.

Diese Abtheilung hat drei Capitel.

Capitel I.

Der bewohnte Theil der Erde, seine Länge, seine Breite und seine Eintheilung in Zonen.

Die Erde hat, wie bereits gesagt wurde, eine kugelförmige Gestalt.¹⁾ Auf derselben denkt man sich drei Kreise beschrieben. Der eine derselben ist der bereits früher erwähnte Aequator; er liegt in der Ebene des Tagesgleichers; der zweite befindet sich in der Ebene des Horizontes des Aequators, der dritte in der Ebene des Mittagskreises; der letztere schneidet den Aequator in der Mitte (17a) B. der bewohnbaren Region.²⁾ Der erste Kreis theilt die Erde in zwei

1) Vergl. die Einleitung.

2) Die übrigen arabischen Astronomen theilen die Erdoberfläche mit Hilfe von zwei Kreisen. Der erste ist bei allen wie hier der Aequator. Die Lage des zweiten ist nach al-Fergāni S. 20 dadurch bestimmt, dass er im Osten und Westen durch die Grenzen des bewohnten Theiles der Erde geht, nach Kazwini S. 300 dadurch, dass er an dem Pol der Aequinoctiallinie vorübergeht.

Hälften, eine südliche und eine nördliche; der zweite halbt jede Hälfte, so dass Viertel entstehen. Das eine der beiden nördlichen Viertel ist die bewohnbare Erdregion mit den Bergen, Ebenen, Auen und Gewässern, die wir auf ihr erblicken, und mit der reichen Fülle von menschlichen Wohnorten, welche sich über dieselbe hin verbreiten. Die übrigen Viertel sind nicht bewohnbar. Der dritte Kreis theilt die bewohnte Erdregion in eine östliche und eine westliche Hälfte. Der Punkt, in dem sich der erste und der dritte Kreis schneiden, heisst die Wölbung der Erde.¹⁾

Die Breite der bewohnten Region beträgt 86 Grad.²⁾ Den Anfang derselben bildet der Aequator. Doch spricht Ptolemäus in einer späteren Schrift, als der *Almagest* ist, die Meinung aus, dass es auch jenseit des Aequators noch bewohntes Land gebe, und zwar bis zu einer Entfernung von 16 Grad 25 Minuten.³⁾ Nach der Meinung dieses Gelehrten würde also die Breite der bewohnten Region 102 Grad 25 Minuten betragen. Die Länge dieser Region beträgt 180 Grad.⁴⁾ Ihren Anfang bildet der äusserste Westen, doch bezeichnen einige Gelehrte als Anfang die Küste des Weltmeeres, andere einige entfernte Inseln im Weltmeere, welche von
(11 a) A. der Küste desselben 10 Grad hinausliegen.

Die bewohnte Region der Erde wird in sieben Abschnitte getheilt, welche sich in gleicher Richtung mit dem Aequator hinziehen und Zonen genannt werden.⁵⁾ Den Anfang der ersten Zone bildet der Aequator. Dort ist der Tag stets 12 Stunden lang, wie später ausführlich dargestellt werden wird. Einige aber setzen den Anfang der ersten Zone dahin, wo der Tag, oder richtiger der längste Tag des Jahres, 12 Stunden 45 Minuten hat. Der Breitengrad dieses Anfanges ist 12 Grad 40 Minuten. Die Mitte dieser Zone ist nach

1) Jedenfalls der Schnittpunkt des ersten und dritten Kreises, welcher in dem bewohnten Theile der Erde liegt.

2) Die Breite des bewohnten Theiles beträgt nach al-Fergānī (S. 31) vom Aequator ab gerechnet $66 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ Grad. — Kāzwīnī (S. 302 u. 303) giebt die Breite des bewohnten Theiles nicht an, sondern erwähnt nur, dass frühere Könige um das bewohnte Viertel der Erde herumgegangen seien, diese seien Feridūn der Nabatäer, Alexander der Griechen und Ezdešīr hābok der Perser.

3) Nach al-Fergānī (S. 32) wird der Theil der Erdoberfläche, welcher sich jenseit der ersten Zone nach Süden erstreckt, vom Meere begrenzt. — Kāzwīnī erzählt (S. 301), dass der griechische König Ptolemäus in das Erdviertel, welches südlich von dem bewohnten liegt, Leute entsandte, die Nachforschungen anstellen sollten über die Länder desselben, dass dieselben aber umkehrten und die Nachricht brachten, es seien dort nur öde und wüste Länder, in denen kein bewohnter Ort, auch kein Geschöpf vorhanden sei.

4) Vergl. al-Fergānī S. 32.

5) Dieselbe Eintheilung findet sich bei den übrigen arabischen Astronomen. Vergl. al-Fergānī S. 30—34, Kāzwīnī S. 301 u. 302. — Nach einer Mittheilung des Plutarch theilte bereits Pythagoras die Erde wie die Himmelskugel in 5 Abschnitte, in die arktische, Sommer-, Winter-, Aequinoctial- und die antarktische Zone. Die mittlere begreift die mittlere Region der Erde in sich und heisst daher die heisse oder die vorbrannte. Pythagoras hält den Erdstreich zwischen der Sommer- und Winterzone für bewohnbar und genüssigt. Vergl. Schaubach S. 98.

allerseits übereinstimmender Ansicht die Linie, welche als längste Tageszeit 13 Stunden hat und unter einer Breite von 15 Grad 37 Minuten ¹⁾ liegt. Der Anfang der zweiten Zone, die natürlich unmittelbar auf die erste folgt, hat als längste Tageszeit 13 Stunden 15 Minuten und liegt in der Breite von 20 Grad 27 Minuten.²⁾ Die Mitte derselben hat als grösste Tageslänge 13 Stunden 30 Minuten und liegt in der Breite von 24 Grad 40 Minuten.³⁾ Der Anfang der dritten Zone, welche sich natürlich der zweiten anschliesst, ist da, wo der längste Tag 13 Stunden 45 Minuten hat, und die Breite (17 h) B. 27 Grad 30 Minuten beträgt; ihre Mitte hat eine Tageslänge von 14 Stunden und liegt in der Breite von 30 Grad 40 Minuten.⁴⁾ Der Anfang der vierten Zone hat 14 Stunden 15 Minuten ⁵⁾ grösste Tageslänge und die Breite desselben beträgt 33 Grad 37 Minuten.⁶⁾ Die Tageslänge der Mitte ist 14 Stunden 30 Minuten, die Breite 35 Grad 22 Minuten.⁷⁾ Der Anfang der fünften Zone hat 14 Stunden 45 Minuten Tageslänge und 38 Grad 54 Minuten Breite ⁸⁾, ihre Mitte 15 Stunden Tageslänge und 41 Grad 15 Minuten Breite.⁹⁾ Der Anfang der sechsten Zone hat 15 Stunden 15 Minuten Tageslänge und 43 Grad 22 Minuten Breite ¹⁰⁾, ihre Mitte 15 Stunden 30 Minuten Tageslänge und 45 Grad 21 Minuten Breite.¹¹⁾ Der Anfang der siebenten Zone hat 15 Stunden 45 Minuten Tageslänge und 47 Grad 12 Minuten Breite ¹²⁾, ihre Mitte 16 Stunden Tageslänge und 48 Grad 52 Minuten Breite.¹³⁾ Das Ende der siebenten Zone ist nach Einigen das Ende der bewohnten Erdregion, nach Andern geht es nur bis zu 50 Grad 20 Minuten der Breite.¹⁴⁾

Dass die Breite des Zwischenraumes, welcher sich zwischen dem Anfange der ersten Zone und der Mitte derselben befindet, sowie

- 1) Nach al-Fergānī (S. 33) 16 Grad 40 Minuten.
- 2) Nach al-Fergānī (S. 33) 20 Grad 30 Minuten.
- 3) Nach al-Fergānī (S. 33) 24 Grad 6 Minuten.
- 4) Nach al-Fergānī (S. 33) $30 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ Grad.
- 5) Nach al-Fergānī (S. 33) 14 Stunden 30 Minuten.
- 6) Nach al-Fergānī (S. 33) $33\frac{2}{3}$ Grad.
- 7) Nach al-Fergānī (S. 33) $36\frac{2}{3}$ Grad.
- 8) Nach al-Fergānī (S. 33) 39 Grad.
- 9) Nach al-Fergānī (S. 34) $41\frac{1}{3}$ Grad.
- 10) Nach al-Fergānī (S. 34) $43\frac{1}{3}$ Grad.
- 11) Nach al-Fergānī (S. 34) $45\frac{2}{3}$ Grad.
- 12) Nach al-Fergānī (S. 34) 47 Grad 15 Minuten.
- 13) Nach al-Fergānī (S. 34) 48 Grad 56 Minuten.
- 14) Nach al-Fergānī (S. 34) 50 Grad 30 Minuten. — Er rechnet die Breite

des bewohnten Theiles im Ganzen auf 38 Grad. — Nach Kāzwinī (S. 301) sind die Zonen von verschiedenartiger Länge und Breite; die längste und breiteste derselben ist die erste Zone, deren Länge von Osten nach Westen ungefähr 3000 Parasangen und deren Breite von Süden nach Norden ungefähr 150 Parasangen beträgt. Die kürzeste aller Zonen an Länge wie an Breite ist die siebente, deren Länge nur ungefähr 1500 Parasangen und deren Breite von Süden nach Norden ungefähr 70 Parasangen beträgt. Was die übrigen Zonen zwischen beiden betrifft, so ist deren Länge und Breite verschieden, bald etwas mehr, bald etwas weniger.

auch jenes andern Zwischenraumes, welcher von der Mitte bis zum Ende der siebenten Zone reicht, so unverhältnissmässig gross ist, hat seinen Grund darin, dass die betr. Strecken nur ganz vereinzelt bewohnt sind. Aus diesem Grunde zählt auch das Land jenseit des Aequators nicht mit zu der bewohnten Erdregion. Ferner schliessen Einige deshalb den Erdstrich zwischen dem Aequator und 12 Grad 45 Minuten der Breite, sowie den zwischen 50 Grad 20 Minuten der Breite und dem Ende der bewohnten Region von der letzteren aus. Doch befinden sich hinter dem zuletzt angegebenen Breitengrade noch bewohnte Gegenden. So soll nach der Behauptung Einiger in der Nähe des 63. Breitengrades eine bewohnte Insel liegen, deren Bevölkerung wegen der dort herrschenden starken Kälte in künstlich erwärmten Wohnungen lebt. In der Breite von 64 Grad wohnt ein nicht näher bekanntes Volk slavischen Stammes und in der Breite von 66 Grad sind Gegenden, deren Bewohner den wilden Thieren ähnlich sind.¹⁾

(11 b) A.

Capitel II.

Von den Eigenthümlichkeiten des Aequators und der Orte, welche Breite haben.

Dem Aequator ist eigenthümlich, dass der Tagesgleicher im Zenith seiner Bewohner steht, und ebenso die Sonne, sobald dieselbe zu den beiden Aequinoctialpunkten gekommen ist. Ferner gehört es zu den Eigenthümlichkeiten des Aequators, dass sein Horizont, den man den „Horizont des rechtwinkligen Kreises“ oder den „Horizont der Kugelhöhe“ nennt, den Tagesgleicher und sämtliche Parallelkreise²⁾ unter rechten Winkeln halbirt.³⁾ Es erscheint dort die Rotation der Weltkugel wie die eines Schöpfrades, bei dem die am Rande befindlichen Schöpfgefässe in rechten Winkeln aus der Wasseroberfläche hervorkommen. Am Aequator geht jeder Stern und jeder Punkt der Weltkugel auf und unter mit alleiniger Ausnahme der beiden Weltpole, denn diese

1) Ueber die Region jenseit der siebenten Zone bemerkt al-Fergāni S. 39: Reliquum vero habitati tractus, quod quidem cognovimus ultra haec climata proferri, initium quoque capit ab oriente, scil. Jagōgum regno. Delinde Tagargarum, Turcarum, Tartarorum et Alanorum regna secut. Deinde per Burghānam et Slavoniam tendit. Tandemque à mari hesperio suum habet. — Dagegen Kazwini S. 303: Was nun den übrigen Rest der Erde anlangt, so hindern am Betreten desselben die hochragenden Berge, die unzugänglichen Pfade, die überfluthenden Meere, die übermässigen Abstürze und die Veränderlichkeit hinsichtlich der Hitze, Kälte und Finsterniss in der nördlichen Himmelsgegend, unterhalb der Bahn der Bahn naʿs, denn die Kälte ist dort ganz übermässig gross, weil die sechs Wintermonate ganz und gar eine Nacht bilden, die ganze Luft sich in Folge dessen aufs gewaltigste verfinstert, die Wasser wegen der Heftigkeit der Kälte gefrieren und Pflanzen und Thiere umkommen.

2) Wörtlich: Tageskreise.

3) Vergl. al-Fergāni S. 21.

liegen unmittelbar auf dem Horizont. Ferner sind dort die sichtbaren Bogen der Rotationskreise den unter der Erde befindlichen gleich, und demzufolge sind Tag und Nacht gleich, nämlich je 12 Stunden lang.¹⁾ Ebenso sind auch Tag und Nacht jedes Sternes dort gleich, und die grösste Declination der Sonne vom Zenith nach Norden und nach Süden hin folgt einer und derselben Norm, nämlich dem Neigungsmaximum des Thierkreises zum Tagesgleicher.

Was nun die Orte betrifft, die vom Aequator aus nach Norden zu geneigt sind, deren Breite aber weniger als 90 Grad beträgt, so haben diese die Eigenthümlichkeit, dass ihre Horizonte, welche gewöhnlich „geneigte“ Horizonte genannt werden, den Tagesgleicher unter schiefen Winkeln halbiren. Der rotirende Weltkreis erscheint von einem solchen Orte aus in der Form eines schräg über die Schulter gehängten Gürtels (eines Wehrgehenkes). Der Horizontalkreis selbst aber theilt sämtliche Rotationsbahnen in zwei ungleiche Bogen. Die sichtbaren Bogen derjenigen unter diesen Rotationsbahnen, welche im Norden des Aequators liegen, sind grösser als die unter der Erde befindlichen; bei den Rotationsbahnen im Süden ist es umgekehrt.²⁾ Deshalb sind in diesen vom Aequator abwärts geneigten Orten Tag und Nacht nur dann gleich, wenn die Sonne sich in dem Anfangspunkte des Widders oder in dem der Waage befindet.³⁾ Dies ist an den beiden Tagen Nairüz und Mihrgāu der Fall.⁴⁾ Dagegen ist der Tag länger als die Nacht, wenn die Sonne in einem der nördlichen Zeichen des Thierkreises steht, und kürzer als die Nacht, wenn die Sonne in einem südlichen Zeichen steht. Je grösser die Breite eines Ortes ist, desto grösser wird an ihm der Unterschied zwischen Tag und Nacht sein, und zwar aus dem Grunde, weil hier naturgemäss das Zenith sich vom Tagesgleicher abneigt. In gleichem Maasse, wie dies geschieht, erhebt sich der Nordpol und die ihm naheliegenden Rotationsbahnen. Je mehr nun die Breite zunimmt, desto mehr nimmt auch der Neigungswinkel des Zenith zum Tagesgleicher zu und demgemäss die Erhebung des Nordpols und der ihm naheliegenden Rotationskreise. Damit wächst der Unterschied zwischen ihren sichtbaren und den unterhalb der Erde befindlichen Bogen. Der Südpol aber und die demselben zugewandten Kreise, in denen die unter der Erde befindlichen Bogen die zu Tage liegenden an Grösse übertreffen, sinken abwärts.⁵⁾ Jeder Rotationskreis, dessen Entfernung

1) Vergl. al-Fergānī S. 21, 22, 23.

2) Vergl. al-Fergānī S. 22.

3) Vergl. al-Fergānī S. 23.

4) Nairüz und Mihrgāu sind Bezeichnungen zweier besonders hervorragender Tage im Kalender der Perser. Nairüz ist der persische Neujahrstag und Mihrgāu (Sonnentag) der 16. Tag des siebenten Monats der Perser. Bemerkenswerth ist, dass Gāgminī auf den persischen Kalender Bezug nimmt. — Nach Kāzwini S. 131 sind die Termine der Tag- und Nachtgleiche der 18. āilāl (September) und der 16. adār (März).

5) Vergl. al-Fergānī S. 23.

vom Nordpol gleich der Erhebung dieses Poles über den Horizont ist, bleibt mit allem, was er in sich schliesst, und mit allen den Sternen, welche zwischen ihm und dem Pole liegen, dem Beobachter fortwährend völlig sichtbar, dagegen ist sein Nudirkreis auf der Südseite der Erde mit allem, was er in sich schliesst, und mit allem, was zwischen ihm und dem Südpol liegt, fortwährend verborgen.

Diejenigen Orte nun, deren Breite 90 Grad nicht erreicht, lassen sich in verschiedene Abtheilungen bringen, von denen jede ihre besonderen Eigenthümlichkeiten besitzt.

Zur ersten Abtheilung gehören diejenigen Orte, deren Breite geringer ist als das Neigungsmaximum des Thierkreises zum Tagesgleicher. An diesen Orten steht die Sonne zweimal im Jahre im Zenith, nämlich bei ihrem Eintritt in zwei Punkte, die zu beiden Seiten des Sommersonnenwendepunktes liegen, und deren Neigung zum Tagesgleicher gleich der Breite des betreffenden Ortes ist.¹⁾

Zu berücksichtigen sind ausserdem diejenigen Orte, deren Breite gleich dem oben erwähnten Neigungsmaximum ist. Für diese steht die Sonne nur einmal jährlich im Zenith, nämlich bei ihrem Eintritt in den Sommersonnenwendepunkt.²⁾ Die Orte, welche zwischen dem Aequator und dieser Breite liegen, haben einen zweifachen Schatten, d. h. an diesen Orten fällt der auf die Erde geworfene Schatten in der Mittagszeit nach Norden und nach Süden. Die

(19 a) B. Orte dagegen, die zwischen der oben bezeichneten Breite und dem 90. Breitengrad liegen, haben nur einen Schatten, d. h. in ihnen geht der Schatten nur nach Norden.

Ferner kommen in Betracht diejenigen Orte, deren Breite grösser als das Neigungsmaximum³⁾, aber kleiner als das „Complement des Neigungsmaximums“ ist. In dem Zenith derselben steht die Sonne niemals. An denjenigen Orten aber, deren Breite gleich dem „Complement des Neigungsmaximums“, d. h. gleich 66 Grad 25 Minuten ist, tritt der Pol der Thierkreis-Sphäre, sobald er bei der Gesamtbewegung des Weltalls in die Peripherie des Mittagskreises gelangt, in das Zenith; in diesem Falle fällt der Thierkreis mit dem Horizontalkreise zusammen, und zwar so, dass der Ostpunkt im Sternbild des Widlers, der Südpunkt im Sternbild des Steinbocks, der Westpunkt im Sternbild der Waage und der Nordpunkt im Sternbild des Krebses liegt. Sobald der Pol das Zenith verlässt, gehen sechs von den Zeichen des Thierkreises gleichzeitig auf, nämlich die, welche sich auf der östlichen Hälfte des Horizontes befinden, vom Steinbock bis zum Krebs. Die sechs anderen gehen gleichzeitig unter. Nur der Rotationskreis des Krebses geht dort aus dem oben angegebenen Grunde nicht unter. In dieser Breite dauert sowohl der

1) Vergl. al-Fergāni S. 24.

2) Vergl. al-Fergāni S. 25.

3) Neigungsmaximum ist die universelle Neigung oder Schiefe der Ecliptik. Vergl. Abth. I, Cap. IV, No. 8.

längste Tag als auch die längste Nacht 24 Stunden.¹⁾ In genauem Einklang zu den im Bisherigen gegebenen Bestimmungen über die nördlichen Rotationskreise bezüglich ihres dauernden Sichtbarseins und der Grösse der Tagbogen steht das, was über die entsprechenden Rotationskreise auf der südlichen Halbkugel²⁾ hinsichtlich des dauernden Verborgenseins und der Grösse der Tagbogen gesagt werden kann.

Endlich sind diejenigen Orte zu erwähnen, deren Breite über das Complement des Neigungsmaximums, d. h. über 66 Grad 25 Minuten hinausgeht. Aus allem bisher Gesagten ergibt sich mit Nothwendigkeit, dass diejenigen Theile des Thierkreises, deren Neigung zum Tagesgleicher grösser als das Complement der Breite des auf der Erde gelegenen Ortes ist, nicht untergehen. Damit Du das leichter einsehen kannst, nimm an, dass sich der nördliche Pol des Thierkreises auf dem Mittagskreise befinde. In diesem Falle neigt er sich nach Süden hin, und genau nach dem Maasse seiner südlichen Neigung vom Zenith senkt sich der Kopf des Steinbockes im Süden vom Horizont abwärts, während der Kopf des Krebses im Norden aufwärts steigt.³⁾ Nach Süden hin liegt der Tagesgleicher über dem Horizont und das Maximum seiner Erhebung richtet sich nach dem Maasse der Differenz zwischen 90 Grad und der Breitengradzahl des Beobachtungsortes. Diese Differenz zwischen dem höchsten Breitengrade und der Ortsbreite wird das „Complement der Breite“ genannt. — Der Begriff des Complementes ist uns ja aus der Lehre vom Bogen bereits bekannt.⁴⁾ — Demnach befinden sich diejenigen Theile des Thierkreises⁵⁾, deren Neigung zum Tagesgleicher klainer als das Complement der Breite ist, zugleich mit dem Tagesgleicher aber südlich von demselben oberhalb des Horizontes, dagegen berühren diejenigen Teile, deren Neigung gleich dem Complement der Breite ist, den Horizont, ohne unter denselben hinabzugehen, und endlich sinken diejenigen Theile, deren Neigung grösser ist als das Complement, hinab und sind in fortwährender Verborgenheit. Die Region der hier besprochenen Gestirne, welche fortwährend verborgen sind, wird von einem Bogen des Thierkreises gebildet, dessen Halbirungspunkt der Punkt der Wintersonnenwende ist. Das Maass der Zeitdauer, welche die Sonne braucht, um diesen Bogen zu durchlaufen, giebt die Länge der längsten Nacht des Beobachtungsortes. Das Nadir dieses Bogens auf der nördlichen Hälfte des Thierkreises ist fortwährend sichtbar, wie bereits gezeigt wurde, und das Maass der Zeit, welches die Sonne braucht, um diesen Nadirbogen zurückzulegen, ist die Länge des längsten Tages

1) Vergl. al-Fergānī S. 25 u. 26.

2) Wörtlich: Nadirkreise.

3) Vergl. al-Fergānī S. 27.

4) Vergl. Capitol IV.

5) Gāgminī hat hier nur die Hälfte des Thierkreises im Auge, welche südlich vom himmlischen Aequator liegt.

für den betreffenden Ort. Diese Tageslänge kann bis zu beinahe 6 Monaten steigen und ebenso die Länge der Nacht.¹⁾ —

Ein Theil der Zeichen des Thierkreises geht übrigens dort (d. h. in der Region der Breite, die wir eben betrachten) in entgegengesetzter Reihenfolge auf und in normaler unter. Dies ist der Fall bei derjenigen Hälfte des Thierkreises welche sich vom Steinbock bis zum Krebs erstreckt. Es gehen sonach die Zwillinge vor dem Stier, der Stier vor dem Widder auf u. s. w. der andere Theil in normaler Reihenfolge auf und in entgegengesetzter unter. Dies ist der Fall bei der anderen Hälfte des Thierkreises, so dass also der Schütze vor dem Scorpion, der Scorpion vor der Waage untergeht u. s. w.²⁾

- Um dies klarer und anschaulicher zu machen, nehmen wir an, dass sich der nördliche Pol der Thierkreis-Sphäre auf der
- (20 a) B. Peripherie des Mittagskreises südlich vom Zenith befinde. Dann ist die Hälfte der Zeichen des Thierkreises vom Widder bis zur Waage in ihrer Reihenfolge nach Norden zu sichtbar, dagegen ist die andere Hälfte im Süden verborgen. Es steht nun der Kopf des Widders im Ostpunkt und der Kopf der Waage im Westpunkt, demnach ist der Widder vor den Fischen auf und die Waage vor der Jungfrau untergegangen. Dreht sich jetzt der Pol der Thierkreis-Sphäre von der Peripherie des Mittagskreises nach Westen hin und steigt damit zugleich der Widder aufwärts, so beginnt das, was sich an den Widder nach Süden hin anschliesst, ebenfalls anzusteigen, das ist aber der letzte Teil des Sternbildes der Fische. Also beobachtet man eine entgegengesetzte Reihenfolge. — Sind die Fische völlig aufgegangen, so geht dann in derselben Weise der Wassermann auf. Ebenso verhält es sich mit dem Untergehen,
- (14 a) A. d. h. die Waage sinkt herab und ihr Kopf befindet sich im Westpunkt im Begriff unterzugehen. Sobald dieselbe untergegangen und hinabgesunken ist, folgt das, was sich daran anschliesst und das ist — also wieder in umgekehrter Reihenfolge — das Ende der Jungfrau u. s. w. Nehmen wir dagegen an, der Kopf des Krebses stehe in südlicher Richtung auf der Peripherie des Mittagskreises, so befinden sich die Sternbilder von der Waage bis zum Widder in nördlicher Richtung unter dem Horizont, die andere Hälfte aber ist über dem Horizont sichtbar. In diesem Falle ist die Jungfrau vor der Waage aufgegangen. Wenn nun der Kopf
- (14 b) A. des Krebses sich von der Peripherie des Mittagskreises entfernt, so fängt die Waage an in der bereits angegebenen Weise aufzugehen. Die Reihenfolge ist normal. Da nun das Untergehende dem Aufgehenden gegenüberliegt, so geht das, was in verkehrter Reihenfolge aufgeht, an der gegenüberliegenden Stelle auch in verkehrter Reihenfolge unter und so vice versa. Da nun andererseits die

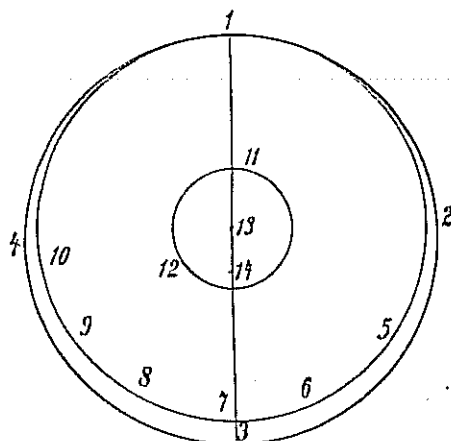
1) Vergl. al-Fergāni S. 29.

2) Vergl. al-Fergāni S. 29.

normale Reihenfolge des Aufgehens der einen Hälfte des Thierkreises der Reihenfolge des Aufgehens der zweiten Hälfte entgegengesetzt, dagegen mit der Reihenfolge des Untergehens übereinstimmend ist, so muss nothwendigerweise das Aufgehen in der einen Hälfte entgegengesetzt dem Untergehen derselben sein; d. h. was in verkehrter (20 b) B. Reihenfolge aufgeht, geht in normaler unter. Fig. X a und b.

Was nun endlich diejenigen Orte anlangt, deren Breite 90 Grad beträgt, so coincidirt in ihnen der Weltpol mit dem Zenith und der Tagesgleicher fällt mit dem Kreise des Horizontes zusammen. Von diesen Orten aus betrachtet scheint sich das Weltall wie ein Mühlstein zu drehen und zwar parallel dem Horizont. Das Jahr

Fig. Xa. Handschrift B.



1. Norden. 2. Osten. 3. Süden. 4. Westen. 5. Jungfrau. 6. Löwe. 7. Krebs. 8. Zwillinge. 9. Stier. 10. Widder. 11. Nordpol der Thierkreis-Sphäre. 12. Kreishahn des Poles. 13. Weltpol. 14. Zenith.

hat hier nur einen Tag und eine Nacht. Der Tag dauert nämlich 6 Monate, denn so lange steht die Sonne in den Sternbildern der nördlichen Thierkreishälfte. Ebenso dauert die Nacht 6 Monate, weil die Sonne solange in den Sternbildern der südlichen Hälfte des Thierkreises steht. Es geht hier kein Theil des Weltalls auf und keiner unter, denn die nördliche Hälfte ist stets sichtbar, die südliche aber beständig unter der Erde verborgen.¹⁾

In dem Obigen haben wir nur den Orten des nördlichen Theiles der Erde eine besondere Betrachtung gewidmet, weil sie den bewohnten Theil der Erdoberfläche bilden. Indessen alles, was nach der bisherigen Darstellung infolge der Neigung dieser Orte vom

1) Vergl. al-Fargāni S. 29. — Kāzwinī erwähnt von diesen astronomischen Beobachtungen an Orten verschiedener Breite nichts.

Aequator nach Norden zu sagen ist, das gilt auch in gleicher Weise von den südlichen Orten infolge der Neigung derselben nach Süden. Darum mag bezüglich der letzteren diese Notiz genügen.

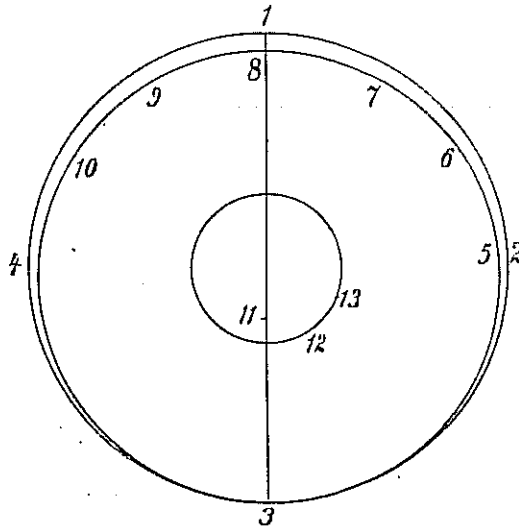
Capitel III.

Ueber verschiedene einzelne Gegenstände.

Der Tali' (d. h. „der Aufgehende“) ist ein auf dem Horizont befindlicher Punkt des Thierkreises im Osten.

Der Grad des Aufgangs eines Sternes ist ein Punkt des Thierkreises, welcher gleichzeitig mit dem Stern aufgeht.

Fig. Xb. Handschrift B.

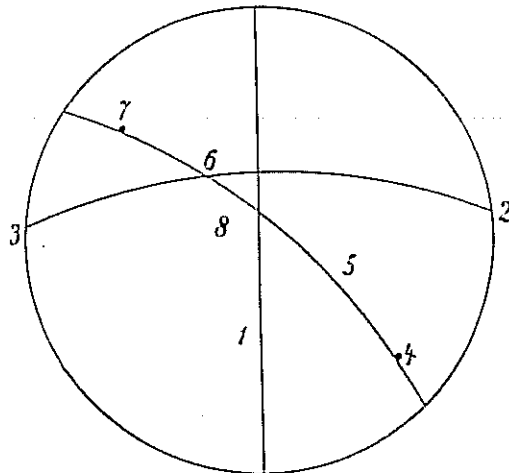


- 1 Norden. 2. Osten. 3. Süden. 4. Westen. 5. Widder. 6. Stier.
7. Zwillinge. 8. Krebs. 9. Löwe. 10. Jungfrau. 11. Zenith. 12. Nord-
pol des Thierkreises. 13. Kreisbahn des Poles des Thierkreises.

Der Grad des Durchgangs eines Sternes ist ein Punkt des Thierkreises, der gleichzeitig mit dem Stern den Mittagskreis passirt. Wenn der Stern sich auf einem der beiden Solstitialpunkte befindet, oder wenn er überhaupt keine Breite hat, so ist der Grad seines Aufganges zugleich Grad seines Durchganges. Besitzt er dagegen Breite und steht er nicht in einem der Solstitialpunkte, dann ist dies nicht der Fall. Die Erklärung dieser Abweichung ist folgende. Befindet sich der Stern in dem Raume zwischen dem Anfang des Krebses und dem Ende des Schützen, so gelangt er (21a) B. später als der Grad seines Aufganges zum Mittagskreise, falls seine Breite eine nördliche ist, dagegen früher als der Grad seines Aufganges, falls seine Breite eine südliche ist. Befindet er sich aber

auf der andern Hälfte der Thierkreis-Sphäre, dann ist's umgekehrt. Dies kommt daher, dass der Pol der Thierkreis-Sphäre östlich liegt, während die erste Hälfte die Mittagslinie passirt, dass sich also (15 a) A. der Kreis, welcher durch ihn und den Grad des Aufganges des Sternes hindurchgeht, nach Westen zu neigt. Der Grad des Aufganges kommt demnach früher zu dem Mittagskreise als der Stern selbst, falls die Breite desselben eine nördliche ist. Der Stern ist nämlich weiter von der Mittagslinie entfernt als der Grad seines Aufganges, er gelangt daher später als der letztere zu ihm. Früher als der Grad des Aufganges kommt er dagegen zu der Mittagslinie,

Fig. XI a. Handschrift B.



1. Mittagskreis. 2. Osten. 3. Westen. 4. Nordpol der Thierkreis-Sphäre. 5. Breitenkreis. 6. Grad des Sternes. 7. Der südliche Stern. 8. Der nördliche Stern.

wenn seine Breite eine südliche ist. Der Grund liegt in dem, was vorher dargelegt wurde. Der Zwischenraum zwischen dem „Grad des Aufganges“ des Sternes und dem „Grad seines Durchganges“ wird die „Ungleichheit des Durchganges“ genannt.

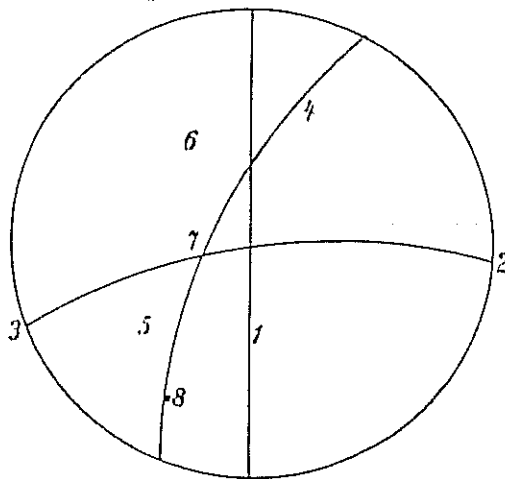
Dem oben dargelegten Gesetze folgt auch der „Grad des Aufganges“ eines Sternes sowohl bei den Zenithkreisen (aus demselben Grunde, der oben erörtert wurde), als auch bei den Declinationskreisen (wegen der Veränderung des Horizontes). Fig. XI a und b.

Der Schatten. Die Beobachtung des Schattens erfolgt entweder mittels eines Instrumentes, das in erhöhter Lage parallel mit der Ebene des Horizontes angebracht ist, und durch welches man den „ersten Schatten“, welcher auch „verkehrter“, „umgekehrter“ oder „erhöhter Schatten“¹⁾ genannt wird,

1) Nach der arabischen „Encyclopädie technischer Ausdrücke“ erklären

erhält, oder mit einem Instrument (Zeiger), das säulenartig auf der Ebene des Horizontes aufrecht steht. Der von diesem letzteren geworfene Schatten heisst der „zweite Schatten“ oder der „hingestreckte Schatten.“ Das Instrument ist manchmal in (21 b) B. 12 Theile getheilt, die man „Zoll“ nennt, manchmal in 7 oder $6\frac{1}{2}$ Theile, deren jeder als „Fuss“ bezeichnet wird, manchmal auch in 60 Theile, welche „Grade“ heissen. Wenn der „zweite Schatten“

Fig. X1b. Handschrift B.



1. Mittagskreis. 2. Osten. 3. Westen. 4. Breitenkreis. 5. Der nördliche Stern. 6. Der südliche Stern. 7. Grad des Sternes. 8. Nordpol der Thierkreis-Sphäre.

bei dem höchsten Tagesstand der Sonne das geringste Maass seiner Länge erreicht, dann ist's Mittag; die erste Nachmittagsstunde aber ist vollendet, wenn sich dieses Längenminimum verdoppelt hat. Diese Angabe findet sich bei aš-Šaf'i, dem Allah gnädig sein möge, während Abū Ḥanifa¹⁾, dem Allah gnädig sein möge, die erste Nachmittagsstunde erst dann vollendet sein lässt, wenn die Schattenlänge des Mittags sich verdreifacht hat.

Wie man die Mittagslinie und die Aequinoctiallinie findet. Man ebnet zunächst den Erdboden, so dass Wasser, welches an der betreffenden Stelle ausgegossen wird, sich nach allen Seiten gleichmässig verbreitet. Dann beschreibt man auf dieser Stelle einen Kreis von beliebiger Grösse, den sogenannten „indischen Kreis“²⁾

sich diese Bezeichnungen so: „Erster Schatten“ heisst der Schatten, weil er wegen der erhöhten Lage des Schattenzeigers eher sichtbar ist als der nachher genannte „zweite“; „verkehrter“ Schatten heisst er, weil die Gestalt des Schattens mit dem Vordertheil (arabisch „Kopf“) nach unten hängt. — Vergl. ausserdem Delambre S. 16.

1) Vergl. Einleitung.

2) Vergl. Delambre S. 102.

und stellt im Mittelpunkt desselben lothrecht einen kegelförmig zugespitzten Zeiger auf, dessen Höhe ein Viertel von der Länge des Kreisdurchmessers beträgt. Dass der Zeiger wirklich lothrecht steht, lässt sich entweder mittelst der Setzwage erkennen, oder auch dadurch, dass man die Entfernung vom Kopfpunkt des Zeigers bis zur Peripherie nach drei auf der Peripherie angenommenen Punkten misst. Nun beobachtet man den Punkt, in dem der Endpunkt des Schattens, bei seinem Eintritt in den Kreis von Westen her, die Peripherie desselben berührt, — und zwar genau, ehe dieser Moment vorüber ist — dann ferner den Punkt, an dem das Schattenende an der Ostseite aus dem Kreise austritt, und markirt diese beiden Punkte. Hierauf halbirt man den zwischen beiden Punkten (22 a) B. liegenden Bogen und zieht von dem Halbierungspunkte eine durch das Kreiscentrum gehende Gerade von beliebiger Länge. Diese ist die Mittagslinie.¹⁾ Sie theilt die Peripherie in zwei Hälften. Wenn man dann die Halbierungspunkte dieser Hälften durch eine Gerade, welche die Mittagslinie im Kreiscentrum rechtwinklig schneidet, mit einander verbindet, so ist diese die Ost-, West- (15 b) A. oder Aequinoctial-Linie.

Wie man den Richtungspunkt der Kibla findet.²⁾ Unter dem Richtungspunkt der Kibla versteht man einen Punkt des Horizontes, welcher dem, der sich nach ihm hinwendet, zugleich die Richtung auf die Ka'ba giebt. Ist die geographische Länge und Breite von Mekka geringer als die Länge und Breite der Stadt, in welcher sich der betreffende Beobachter befindet, so zählt man auf dem „indischen Kreis“ vom Südpunkte aus die Differenz zwischen den beiden Längen nach Westen zu ab, ebenso vom Nordpunkt aus und verbindet die beiden Schlusspunkte dieser abgegrenzten Kreisteile durch eine gerade Linie. Desgleichen zählt man vom Westpunkte aus nach Süden zu den Gradunterschied zwischen den beiden Breiten ab, ebenso vom Ostpunkte aus und verbindet die beiden so fixirten Schlusspunkte durch eine gerade Linie, welche natürlich die erst erwähnte Linie schneiden wird. Zieht man nun vom Mittelpunkt des Kreises aus nach dem Durchschnittspunkte eine gerade Linie und verlängert dieselbe bis zur Peripherie, so hat man die gewünschte Richtung. Der Bogen zwischen dem Endpunkte dieser Geraden und dem Südpunkte ist der Neigungsbogen des Richtungspunktes der Kibla; er giebt an, um wieviel sich der Betende vom Südpunkte abwenden muss. Nach Analogie des bisher Gesagten verfährt man auch dann, wenn die Länge von Mekka oder die Breite oder auch beide grösser sind als die Länge oder Breite oder Länge und Breite der Stadt. — Die Länge von Mekka beträgt, von den Inseln der Seligen aus gerechnet, 70 Grad 10 Minuten,

1) Al-Battānī bestimmt den Meridian und die Ost-Westlinie mit Hilfe von zwei gleichlangen Schatten. Vergl. Delambre S. 18.

2) Vergl. Delambre S. 57.

die Breite von Mekka 21 Grad 40 Minuten. Die Länge von Ĥuwārezm beträgt 94 Grad, also der Unterschied zwischen den beiden Längen 23 Grad 50 Minuten. Die Breite von Ĥuwārezm beträgt 42 Grad 10 Minuten, also der Unterschied zwischen den beiden Breiten 20 Grad 30 Minuten. Ist die Länge der betreffenden Stadt gleich der Länge von Mekka, so liegt die Kibla auf der Mittagslinie. Ist aber die Breite der Stadt gleich der Breite von Mekka, so fasse zunächst die Grade der Thierkreis-Sphäre in's Auge, welche Du bei der Drehung (des Astrolabiums) als im Zenith Mekkas stehend findest, nämlich 7 Grad 21 Minuten von den Zwillingen und 22 Grad 39 Minuten vom Krebs; dann nimm sie oder vielmehr eine von diesen beiden auf die Linie der Himmelsmitte im Astrolabium, das auf die Breite der betreffenden Stadt gestellt ist, und markire den Gesichtspunkt durch ein Zeichen, ferner drehe den Spinnfaden um die Differenz der beiden Längen nach Westen, wenn die Stadt östlich von Mekka liegt, und nach der entgegengesetzten Seite hin, wenn die Stadt westlich liegt. Der Punkt, zu dem Du auf diese Weise gelangst, markirt die Zahl der Grade, bis zu der sich ein zum Horizont paralleler Kreis erhebt. Nun beobachte das Kommen (23 a) B. der Sonne bis zu dieser Erhebung und berechne die Entfernungsdifferenz nach der bisher verfloßenen Zeit, so findest Du den Richtungspunkt der Kibla.)

- (16 a) A. Belehrung über den Tag und die Nacht, über die Stunden, die Jahre und die Monate. Wenn das Licht der Sonne auf die Erde fällt, so beleuchtet es diejenige Hälfte der letzteren, welche der Sonne zugewandt ist, dagegen verbreitet sich der Schatten über die der Sonnenseite gegenüberliegende Seite. Wenn also die Sonne oberhalb der Erde ist, so ist es Tag — denn der Tag hat kein eigenes Licht, sondern nur die Beleuchtung durch die Sonne; — befindet sich aber die Sonne unterhalb der Erde, so fällt der Schatten der letzteren nach oben, und dann ist es Nacht. Der geworfene Schatten hat die Gestalt eines Kegels²⁾, denn der Körper der Sonne ist grösser als der der Erde. Nähert sich nun die unterhalb der Erde stehende Sonne dem Horizont, so geht der Schattenkegel vom Zenith abwärts, und die Luft wird durch das nahe Licht der Sonne hell. Am Horizont erscheint Licht,

1) Sédillot beschreibt (*Matériaux pour servir à l'histoire comparée des Sciences Mathématiques chez les Grecs et les Orientaux*, Paris 1845, S. 323 u. f.) das rechnerische Verfahren zur Ermittlung dieses Punktes. Vgl. ferner Günther, *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie* S. 66 Anmerkung, in der der Verfasser ein mechanisch-descriptives Verfahren des ehemaligen persischen Officiers A. Krīz schildert.

2) Ueber die Gestalt des Erdschattens vgl. al-Fergānī S. 103. In Betreff der Länge desselben fügt er hinzu: *Umbrae quidem a terrae superficie ad finem usque longitudo, juxta Ptolemaei dimensionem, aequat dimidiam diametrum terrae ducenties sexagies octies; et rotunditatis diameter eo loco, quem luna in oppositione transit, continet tantas partes 2 + $\frac{3}{8}$, quanta est ipsa Lunae diameter.* — Kāzwinī (S. 38) erwähnt nur die kegelförmige Gestalt des Erdschattens bei der Beschreibung der Mondfinsternisse.

welches um so stärker wird, je näher die Sonne kommt. Ausserdem zeigt sich eine Röthe. So erklärt sich die Entstehung von Abend- und Morgenroth.

Der Tag mit der Nacht ist die Zeit, welche vergeht, während sich die Sonne infolge der Bewegung des Weltalls vom Mittagskreise fortbewegt und wieder zu demselben gelangt. Im gewöhnlichen Leben nennt man „Tag“ (mit der Nacht) die Zeit von einem Sonnenuntergang bis zum nächsten Sonnenuntergang.¹⁾ (23 b) B. Man könnte als Beginn des Tages jeden Moment annehmen, in dem sich die Sonne von irgend einem Punkte der Weltkugel entfernt, aber die Mathematiker und Astronomen haben sich dahin geeinigt, den Beginn des Tages auf den Zeitpunkt zu setzen, in dem die Sonne den Mittagskreis verlässt, weil die Verschiedenheit der Aufgänge je nach den Horizonten der verschiedenen Orte eine vielfache ist, dagegen die Verschiedenheit des Anfanges durch Zugrundelegung des Mittagskreises verschwindet.²⁾ Denn der Mittagskreis steht an allen Orten lothrecht zu dem Horizont des Aequators.

Die Zeit des Tages mit der Nacht wird noch mehr, als es die Drehung der Universalsphäre bewirkt, verlängert durch das Vorrücken der Sonne auf ihrer Bahn im Thierkreise. Da nun die Sonne von der Thierkreis-Sphäre (in gleichen Zeiten) Bogen von verschiedener Grösse abschneidet, so ist auch das Vorrücken derselben ungleich. Wenn aber auch die Sonne nach dem Allmachtswillen Gottes (in gleichen Zeiten) gleiche Bogen abschneidet, so würde doch das Vorrücken derselben nicht gleichförmig sein. Aus diesem Grunde sind die Tage mit ihren Nächten verschieden. Man unterscheidet „wahre“ und „mittlere“ Tage (mit ihren Nächten).

Der „wahre“ Tag ist die Zeit, in der ein Punkt des Tagesgleichers zu seinem Ausgangsorte zurückkehrt, vorausgesetzt dass während dessen auch der Aufgangspunkt der Sonnenbahn durch diesen bestimmten Ort hindurchgegangen ist. Der „mittlere“ Tag ist die Zeit, in der ein Punkt des Tagesgleichers zu seinem Ausgangspunkte zurückkehrt, vermehrt um die Zeit, in welcher ein Punkt des Tagesgleichers den Durchmesser der Sonne durchläuft.³⁾ Der Ausgangspunkt wird in den astronomischen Tafeln in der Regel „der Ort“ genannt.

Die Zeit des Tages im engeren Sinne wird gerechnet vom Aufgange der Sonne bis zum Untergange derselben, oder wie im Gesetz⁴⁾ zu lesen ist, vom Erscheinen der Morgenröthe bis zum

1) Al-Fergānī S. 3 giebt zugleich den Grund für diesen Brauch an und erwähnt das abweichende Verfahren bei den Römern und andern Völkern. — Kazwīnī S. 181 rechnet Tag und Nacht gesondert. — Nach einer Mittheilung des Plinius (2, 77) rechneten die Athenienser ebenfalls den Tag von einem Untergange der Sonne bis zum folgenden. Vergl. Schaubach S. 35.

2) Vergl. al-Fergānī S. 48.

3) Diese Unterscheidung zwischen dem wahren und dem mittleren Tage findet sich weder bei al-Fergānī noch bei Kazwīnī.

4) Im Koran.

Sonnenuntergang. Vom Sonnenuntergange bis zu ihrem Aufgange währt die Nacht, oder nach der Aussage des Gesetzes, bis zum Anbruch der Morgenröthe.

Die Nacht und den Tag theilt man in Stunden. Diese sind entweder „Normalstunden“ oder „Zeitstunden“.¹⁾ Die Normalstunden, die man auch „gleiche Stunden“ nennt, sind abgegrenzt nach der Zeitdauer, welche die Universalsphäre bei ihrer Rotation braucht, um 15 Grad zurückzulegen. Wenn Du also den Nachtbogen oder Tagbogen oder einen Bogen des Weltkreises so theilst, dass jeder einzelne Theil 15 Grad umfasst, so ist das was herauskommt, die Zahl der Normalstunden der betreffenden Nacht oder des betreffenden Tages oder des jeweilig verstrichenen Theiles von Tag und Nacht. Die „Zeitstunden“ nennt man auch die „ungleichen Stunden“. Jede von ihnen ist allemal der zwölfte Theil eines Tages oder einer Nacht. Wenn also der Tag länger ist als die Nacht, so sind die Stunden dieses Tages auch länger als die Stunden der Nacht. Ist der Tag kürzer, so sind seine Stunden auch kürzer als die Nachtstunden. Wenn man den Tag- oder Nachtbogen in 12 Theile theilt, so erhält man die Strecke, welche der Weltkreis in jeder „Zeitstunde“ zurücklegt, oder mit andern Worten, die Zahl der Grade einer Zeitstunde, die man „Zeiten“ nennt. — Es sind also die Normalstunden diejenigen, deren Zahl sich nach der Länge oder Kürze des Tages ändert, deren Zeit aber unverändert bleibt, während bei den Zeitstunden die Zeit aber nicht die Zahl sich ändert.

Das Jahr ist der Zeitraum, in dem die Sonne von einem beliebig angenommenen Punkte aus den Thierkreis durchläuft, bis sie mit der ihr eigenen von Westen nach Osten gehenden Bewegung bei dem Ausgangspunkte wieder anlangt. Man hat den Anfang des Jahres auf den Zeitpunkt fixirt, in dem die Sonne in den Kopf des Widders eintritt.²⁾ Ueber die Länge des Jahres sind die Angaben verschieden. Die Einen haben gesagt, diese Länge betrage $365\frac{1}{4}$ Tag³⁾, nach Ptolemäus hat das Jahr 365 Tage und ein Viertel von 300 Theilen des Tages; nach der Ansicht der Späteren hat es 365 Tage und einen viertel Tag, weniger 3 Grad 24 Minuten von 360 Graden.⁴⁾ Wenn hier vom Tage geredet wird, so ist der

1) Auch al-Fergānī S. 44 unterscheidet zwischen Normalstunden und Zeitstunden. — Ġazwinī erwähnt nur die Normalstunden. S. 129. — Al-Battānī giebt nach dem Vorgange des Ptolemäus besondere Regeln, um die Zeitstunden in Normalstunden und umgekehrt zu verwandeln. Delambre S. 19.

2) Vergl. Ġazwinī S. 174. — Ueber den Beginn des Jahres findet sich bei al-Fergānī keine Angabe.

3) Nach al-Fergānī S. 3 ist dieses das Jahr der Syrer. — Vergl. auch Ġazwinī S. 173. Dieser rechnet das Jahr zu 365 Tagen.

4) D. h. weniger $\frac{17}{75}$ Stunden oder $13\frac{3}{5}$ Minuten. — Nach Delambre S. 34 gab Ptolemäus, indem er dem Beispiele des Hipparch folgte, die Länge des Jahres auf 365 Tage 5 St. 56' 12" an, dagegen al-Battānī auf 365 Tage 5 St. 56' 22" und S. 35 365 Tage 5 St. 46' 24". — Bei den Persern wurde die Länge des Jahres zu 365 Tagen 5 St. 49' 3" 5''' gerechnet. Vergl. Delambre S. 196.

Tag mit der zu ihm gehörigen Nacht gemeint. Das Jahr, von dem hier die Rede ist, ist das Sonnenjahr oder das „wahre Jahr“.

Das Mondjahr ¹⁾ hat zwölf Monate. Der Monat und zwar der Mondmonat ist die Zeit, in welcher der Mond von einer beliebigen Stellung zur Sonne aus nach einem Umlauf zu derselben Stellung zur Sonne zurückkehrt. Diejenige der Stellungen des Mondes, welche sich uns am meisten bemerkbar macht, ist der Neumond. Aber das Sichtbarwerden des Neumondes ist verschieden je nach der Verschiedenheit der „Burgen“, in die er tritt. Infolgedessen findet der Neumond keine besondere Berücksichtigung ausser in den Bestimmungen des Gesetzes. Man setzte vielmehr den Anfang des Monats auf die Conjunction der Sonne und des Mondes und nahm als Dauer desselben die Zeit zwischen zwei Conjunctionen nach Maassgabe des mittleren Laufs der beiden Gestirne an.²⁾ Als Resultat ergab sich die Zahl von 29 Tagen 31 Sechzigsteln eines Tages und 50 Sechzigsteln der vorerwähnten Tagetheile.³⁾ Dies ist das Maass des Monats. Multiplicirt man dasselbe mit 12, so erhält man die Zahl der Tage des Mondjahres, nämlich $354 + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ Tag.⁴⁾ Dies ist das mittlere Mondjahr, das also (25 b) n. um etwa 10 Tage $20\frac{1}{2}$ Stunde kürzer ist als das Sonnenjahr.

Dieses ist's, was die Natur und ernstes Sinnen und Nachdenken über eine reiche Zahl von Fragen mich gelehrt hat. Ich verdanke diesen still gepflegten Studien das Verständniss und das klare Erkennen der wissenschaftlichen Thatsachen, die ich hier in kurzer Zusammenfassung dargestellt habe. Wo ich mich in Gefahr sah, Phantasien und Truggebilden nachzugehen, da hielt ich an mich und hütete mich sorglich vor weitschweifigem Gerede. Hoffentlich ist es mir in diesem Bestreben, dass ich nie ausser Acht liess, gelungen, meinen Zweck zu erreichen. Doch ist und bleibt mein erster Grundsatz: Bescheidenheit!

Hiermit schliesse ich mein Buch. Allah aber kennt die Wahrheit am besten. Zu ihm führt unser Weg; bei ihm ist unser Ziel. Allahs Segen und Heil sei über Muhammed und seinen Bekenner! Amen.

1) Vergl. al-Fergāni S. 2 und Kazwini S. 173.

2) Vergl. al-Fergāni S. 2. — Kazwini nennt S. 138 den Zeitraum zwischen zwei Neumonden den arabischen, den zwischen zwei Conjunctionen von Sonne und Mond den syrischen Monat (S. 152).

3) Hipparch hatte nach den Beobachtungen der Chaldäer die Länge des Mondmonats abgeleitet: 29 Tage $31' 50'' 8''' 9IV 24V$; danach würde die Länge des Mondjahres, zu 12 Monaten gerechnet, betragen: 354 Tage $32' 1'' 37''' 52IV 48V$. Vergl. Delambre S. 96. — al-Fergāni S. 1 und Kazwini S. 139 beschränken sich auf die Angabe, dass ein Monat zu 30, der nächste zu 29 Tagen angesetzt sei.

4) Diese Länge des arabischen Jahres erwähnt auch al-Fergāni S. 2. Kazwini S. 138 dagegen führt nur an, dass das Jahr aus 354 Tagen und einem Bruchtheil von einem Tage bestehe.

Zu Rudloff und Hochheim,
Die Astronomie des Ġagmini.
(S. 213 ff.)

Von

Prof. Dr. Hel. Sutor in Zürich.

1. Die Lebenszeit Ġagmini's wird nach einer Angabe von Professor Gottwaldt in das Ende des 6. und den Anfang des 7. Jahrh. d. H. gesetzt. Ich halte dafür, dass diese Angabe doch etwas zu weit zurückgeht, obgleich ich für eine spätere Lebenszeit keine zwingenden Beweise beibringen kann. Immerhin hätten doch die hierauf sich beziehenden Stellen des von K. Vollers u. And. in den letzten Jahren successiv herausgegebenen Katalogs der vizekönigl. Bibliothek in Kairo zur Vergleichung herbeigezogen werden dürfen, von dessen math.-astronomischem Theile (Bd. V, p. 177—398) ich kürzlich einen Auszug in Uebersetzung gegeben habe (Zeitschrift für Math. und Phys. von Schlömilch und Cantor, hist.-litterar. Abtheilung, Jahrg. 38, p. 1—24, 41—57, 161—184). Diese Bibliothek besitzt einige Mss. der Astronomie des Ġagmini; von diesen habe ich in meine Uebersetzung (p. 161 und 162) aufgenommen: 1) das im Sammelband A. N. 10. H. N. 4268 sich befindende; 2) einen Commentar zu diesem Werke (sammt Text) von Kaḍi-Zadeh ar-Rūmi (A. N. 8. H. N. 4266), und dann noch 3) den Bargendi'schen Anhang zu diesem Commentar (A. N. 1. H. N. 4259). Im Artikel über den Commentar des Kaḍi-Zadeh heisst es nun: „Die Abfassung (nicht Abschrift!) des Textes wurde beendet im Jahre 808, 1405, 06“; hierauf gestützt, nennen denn auch die Herausgeber des Katalogs den Ġagmini einen Gelehrten des 9. Jahrh. d. H. Da nun der Commentar, wie es im selben Artikel heisst, im Jahre 813, 1410/11 verfasst wurde, da ferner Sajjid Scherif 'Alī ben Muḥammed al-Ġurgāni (nebenbei bemerkt ein oft genannter, bedeutender arabischer Gelehrter'), wie sich aus der Abhandlung der Hrn. Rudloff und Dr. Ad. Hochheim und auch aus Ḥaġi Chalifa VI, 113 ergibt, ebenfalls einen Commentar zu Ġagmini geschrieben hat, aber wie ziemlich unbestritten ist, schon 816, 1413/14 gestorben ist (vgl. meine Abhandlung p. 162), so möchte wohl die Vermuthung nahe

1) Vgl. über ihn, wie auch über Ġagmini, die interessante und reichhaltige Abhandlung B. Dorn's: Drei astron. Instrumente mit arab. Inschriften in den Mém. de l'acad. impér. de St. Pétersbourg, VII. Série, Tome IX, und Silvestre de Sacy im X. Bd. der Notices et extraits des Mss. de la biblioth. du roi etc. Paris 1818.

liegen, die obige Angabe der Abfassung der Astronomie des Gāgminī (808) sei unrichtig; immerhin ist sie nicht unmöglich, obschon noch eine andere Stelle mit ihr im Widerspruch steht: Hāgi Chalfa nennt VI, 113 neben Gurgānī als Commentator des Gāgminī auch den Kemāl ed-Dīn Turkemānī, „qui compositionem commentarii in urbe Gulistān mense Ramaḍān anni 755 absolvit“. Man muss eben die Angaben Hāgi Chalfas mit Vorsicht aufnehmen, sogar öfters wiederkehrende Zeitangaben über denselben Autor sind bisweilen nicht übereinstimmend. Ueber das Alter Kemāl ed-Dīns habe ich nirgendwo weitere Angaben gefunden. Auch eine Stelle Woepkes (*Journal asiatique* 1862, p. 112), nach welcher das in der Pariser Bibl. befindliche Ms. 1114, ancien fonds arabe, des Gāgminī aus dem Jahre 806 datirt sei, würde nicht mit der obigen Abfassungszeit 808 ganz übereinstimmen. Immerhin glaube ich aus einer Vergleichung der vorliegenden Schrift Gāgminīs mit den Stellen, die Carra de Vaux aus Naṣīr ed-Dīns Taḍkira fi'l-ma'al-hai'a anführt (in seiner Abhandlung: *Les sphères célestes* selon Naṣīr ed-Dīn, Paris chez Ernest Leroux), den Schluss ziehen zu dürfen, dass Gāgminī jünger ist als Naṣīr ed-Dīn († 1273); doch müssten zur sichern Erledigung dieser Frage wohl auch noch die übrigen astron. Schriften Naṣīr ed-Dīn's beigezogen werden. Wenn auch diese Bemerkungen noch keine Entscheidung in der Frage der Lebenszeit Gāgminīs herbeigeführt haben, so glaubte ich sie der Vollständigkeit wegen doch mittheilen zu müssen.

2. Wenn die Verfasser p. 219 übersetzen: „Ich wollte in demselben eine möglichst klare und kurzgefasste Darstellung meines Gegenstandes geben und nannte das Buch „Abhandlung über die Astronomie“, damit schon der Name den Zweck desselben ankündige und der Titel keinen Zweifel über das Vorhaben aufkommen lasse“, so hätten sie doch wohl „Mulahhas“ durch seine eigentliche Bedeutung „Auszug, Compendium“ wiedergeben sollen und nicht durch das unbestimmte „Abhandlung“.

3. Die Verfasser schreiben p. 213: „In der Litteraturgeschichte der Araber wird bisher ein as-Safi'i überhaupt nicht erwähnt“, sie befinden sich hierin im Irrthum; dieser Name, der ja nichts anderes bedeutet als der Schāfi'ite, d. h. der Anhänger einer der vier berühmten Rechtsschulen, kommt in den neuern Ausgaben von Katalogen (vgl. den schon genannten Katalog d. Bibl. in Kairo von Vollers, etc., ferner das Verzeichniss der arab. Handschriften der kgl. Bibl. in Berlin v. Ahlwardt, 4 Bände) sehr oft als Beiname von arab. Autoren vom 10. Jahrh. an vor.

4. Im Verzeichniss der Orte, an denen der Text der Schrift Gāgminī's sich noch befinde (p. 218), dürfte auch München genannt sein; vgl. J. Aumer, die arab. Handschriften der kgl. Hof- und Staatsbibl., München, 1866, p. 377, No. 854.

Dies zur Beleuchtung und Richtigstellung einiger Punkte der sehr verdienstvollen Arbeit der Herren Rudloff und Hochheim.

Zu Ġāgmini's Astronomie.

Von

Dr. C. A. Nallino.

Für die Nicht-Orientalisten, an welche Rudloff und Hochheim's Aufsatz über die Astronomie des Ġāgmini (in dieser Zeitschrift, S. 213 ff.) sich auch wendet, werden vielleicht folgende Bemerkungen nicht ohne Interesse sein.

Aus den wenigen hier zu meiner Verfügung stehenden Büchern kann ich ebenfalls keine genaue Notiz über Ġāgmini's Geburts- oder Todesjahr herausbringen; ich bemerke nur, dass Herr Prof. V. von Rosen, in seinem Katalog der orientalischen Sammlung Marsigli zu Bononien, 618 d. H. als Ġāgmini's Todesjahr angiebt, ohne die Quelle zu erwähnen; dagegen sagt der Verfasser des Kairoer Katalogs an mehreren Stellen, dass selbiger ein Gelehrter des 9. Jahrhunderts d. H. war: *من علماء القرن التاسع*. Vielleicht ist diese Angabe die richtigere, wenn man annehmen will, dass al-Ġāgmini in der zweiten Hälfte des 8. und in der ersten des 9. Jahrh. lebte; da der sehr verbreitete, dem berühmten Olug Beg gewidmete Commentar des Mūsā ben Maḥmūd Qāḍi-Zādeh ar-Rāmi¹⁾ im Jahre 815 d. H. verfertigt wurde.

Die beiden Nisbah, al-Ġāgmini und al-Ḥuwarizmī beweisen, dass der Verfasser aus Ġāgmin, einem Flecken in Ḥuwarizm, den heutigen transkaspischen Ländern, war²⁾; dass er auch medicinische Studien betrieb, erfahren wir aus seinem Qānūn, „der kleine Qānūn“³⁾, welcher ein Compendium des Qānūn von Ibn Sīnā war, und von Ḥusain ben Muḥammad ben 'Alī al-Astarābādī im Jahre 831 commentirt wurde⁴⁾.

1) Handschriftlich erhalten zu München (Aumer, Nr. 854), East India Office (Loth, Nr. 751), Bononien (Rosen, Nr. 423), Kairo (Fihrist al-kutub al-'arabijjah, V, 223—224, 4 Exx.). Glossen von al-Bargandī (10. oder 11. Jahrh.) zu Qāḍi-Zādeh werden im Kairoer Katalog, V, 221—222 u. 224 erwähnt. — Ein unbestimmter Commentar zu al-Ġāgmini, in der Biblioteca Nazionale zu Neapel (Cataloghi dei codici orientali d'alcune Biblioteche d'Italia, S. 240).

2) Vgl. auch Ḥuwarizm S. 272 als Beispiel gewählt.

3) Vgl. H. H. IV, S. 495; Leidener Katalog III, S. 421.

4) Handschriften dieses Commentars sind nicht selten; z. B. India Office (Loth, S. 297), Neapel (Cataloghi, S. 236), Kairo (Fihrist al-kutub al-'arabijjah, VI, 21).

S. 213 liest man: „In der Litteraturgeschichte der Araber wird bisher ein aš-Šāfi'ī überhaupt nicht erwähnt“. In Wirklichkeit erscheint ein aš-Šāfi'ī als Verfasser eines astronomischen Gedichtes, welches in einer Leidener Handschrift enthalten ist; ich kann jetzt nicht die genaue Stelle des Katalogs bezeichnen. — S. 220, Anm. 2, ist 950 ein Druckfehler für 850. Allerdings scheint jetzt der Verfasser des bekannten Handbuchs nicht Muḥammed al-Fergānī zu sein, sondern sein Sohn Aḥmed ben Muḥammed al-Fergānī, der noch um 861 n. Chr. am Leben war. Vgl. darüber de Goeje's Einleitung zu Ibn Rosteh (Biblioth. Geographorum Arabicorum, t. VII, 1892). — S. 234: „astronomische Fixirungen der Mittagslinie findet man auf den Seitenflächen der bekannten Marmorsäulen“; wozu die sonderbare Anm. 3 beigelegt ist. Ich vermute, dass im Text ar-ruḥāmāt steht, was die technische Bezeichnung der „Sonnenuhr“ ist. — S. 245, Anm. 2, ist es zu bemerken, dass Ibn Rosteh (ed. de Goeje, S. 16), der 290—300 d. H. schrieb, dieselbe Stelle des Fergānī in folgender Weise, welche auch die richtige zu sein scheint, anführt: „(die Schiefe der Ecliptik), wie sie Ptolemäus gefunden hat, beträgt $23^{\circ} 51'$, wenn man den Kreis in 360° einteilt. Dagegen, nach der geprüften Messung¹⁾, welche al-Ma'mūn durch viele Gelehrte vollziehen liess, beträgt sie $23^{\circ} 33'$ “. — Endlich seien noch ein paar kleine Druckfehler bemerkt: S. 244, Anm. 2, ist Korrāh statt Kobrah, und S. 263, an mehreren Stellen, mihrḡān zu lesen.

Udine.

1) Al-qiyās al-muntahān = az-ziḡ al-muntahān „die geprüfte astronomische Tafel“, welche unter der Leitung des Jahjā ben Abi Maḡār für al-Ma'mūn verfasst wurde; s. Golī notae in Alferg., S. 66, und Kitāb al-Fihrist 275. Sie enthielt auch Beobachtungen vom Jahre 211 d. H.; s. Ibn Jānus, Leidener Handschrift, S. 106: وذكر أبو معشر بن محمد البلخي في زيجه ان اصحاب الممتحن قاسوه (اي قلب الاسد) في سنة ٢١١ للهجرة وفي سنة ١٩٥ ليزدجرد فوجدوا مكانه في الاسد نجلا — Ibn Jānus (S. 120 f.) hat auch ein Kapitel, das sechste, في اوساط الزيج، الممتحن وتعاديله وامكن اوجاته.

Nachtrag.

Meine Reise nach Kairo ermöglicht es mir, jetzt die Richtigkeit meiner Vermuthung über ar-ruhāmāt zu bestätigen. Der Text von Gāgmini lautet: *و هذا الخط و خط المشرق والمغرب* und diese (Mittags-) Linie, sowie „die Ost- und Westlinie sind auf den Flächen der ruhāmāt berechnet“; und diese Stelle wird von Qādī-Zādeh, der auch den Uebersetzern vorlag, folgendermassen erklärt *والرخامة آلة متخذة من رخامة او نحاس او غيرها لغرض معين مخطوطة بخطوط منبها خط الزوال والاعتدال يتوصل بها الى كثير من الاعمال كمعرفة die ruhāmāh ist ein aus Marmor oder Kupfer oder anderen Stoffen zu einem bestimmten Zwecke „verfertigtes und mit Linien versehenes Instrument, unter denen die Mittags- und Aequinoctiallinie zu finden sind. Mit dessen Hilfe gelangt man zu mehreren Operationen, z. B. zur Bestimmung der Höhen, der Zeiten, der Schatten u. s. w.“* —

Ich lasse hier noch Bargandi's Glosse über den Commentar des Qādī-Zādeh in ihrem nicht besonders vortrefflichen Arabisch folgen: *ان رخمم بفتح الراء حجار بيض رخو الواحد رخامة وهذه الآلة في الاصل تصنع من هذا النوع من الحجر فسميت بذلك وان مصنوعة من جواهر اخر وصناعتها تكون على انواع لان سطحها اما ان يكون في سطح الانف او في سطح نصف النهار او في سطح اول السموت فتخرج مقادير اطلال الارتفاعات واطلال الساعات واطلال سير الاوقات على تقدير ان يكون مقياس الظل على هذه السطوح* „ar-rahām, mit *a* nach *r*¹⁾, ist ein weisses und weiches Gestein; sein nomen unitatis rahāmāh bedeutet ein Instrument das so benannt wurde weil anfanglich aus jenem Stein verfertigt. Jetzt ist es auch aus anderen Stoffen, und verschiedenartig; weil seine Fläche nach der Ebene des Horizontes oder des Mittags oder des ersten Azimuth eingerichtet sein kann. Durch dies Instrument werden die Schatten der Höhen, der Stunden und der übrigen Zeiten nach der Länge des auf solche Ebenen geworfenen Schattens „bestimmt“ (vgl. Gāgmini, 2. Abth., Kap. III).

Die Leser des Kitāb al-Fihrist wissen wohl, dass schon unter dem Chalifen al-Ma'mūn Bücher über die ruhāmāt verfasst wurden.

Kairo, d. 24. Januar 1894.

1) Diese irrigte Angabe rührt wohl vom Verfasser her, weil sie in allen Handschriften der viceköniglichen Bibliothek zu Kairo enthalten ist.

Zur Frage über die Lebenszeit des Verfassers
des *Mulāḥḥaṣ fi'l-hei'a*, Maḥmūd b. Muḥ. b. 'Omar
al-Ġāḡminī.

Von

Dr. Heinrich Suter.

Bei Anlass der Veröffentlichung einer Übersetzung des *Mulāḥḥaṣ fi'l-hei'a* durch Rudloff und Hochheim (in dieser Zeitschrift, 47. Bd. p. 213 ff.) haben Prof. C. A. Nallino in Neapel und der Verfasser dieses Artikels sich in dieser Zeitschrift (47. Bd. p. 711 und 48. Bd. p. 120) über die Lebenszeit des Ġāḡminī ausgesprochen. Beide kamen zu dem Schlusse, dass Ġāḡminī am Ende des 8. und Anfang des 9. Jahrh. d. H. gelebt habe, während Gottwaldt im Kasaner Katalog ohne Quellenangabe und nach ihm Brockelmann (Gesch. d. arab. Litteratur, I. p. 473) sein Todesjahr auf 618 d. H. ansetzen. Bei meinen Studien über arabische Mathematiker und Astronomen bin ich nun auf neue Angaben gestossen, welche die von mir in Zweifel gezogene Behauptung Ḥāḡī Chalfas (VI, 113), Kemāl ed-Dīn Turkemānī habe i. J. 755 einen Kommentar zum *Mulāḥḥaṣ* des Ġāḡminī vollendet, höchst wahrscheinlich machen, aber auch meine damals ausgesprochene Ansicht, Ġāḡminī müsse jünger sein als Naṣīr ed-Dīn eṭ-Ṭūsī, rechtfertigen. Meine neuen Belege sind folgende:

1. Im Brit. Mus. (Nr. 1342, 2^o) befindet sich der von Ḥāḡī Chalfas genannte Kommentar zum *Mulāḥḥaṣ* von Kemāl ed-Dīn eṭ-Turkomānī, gewidmet dem Sulṭān b. Sulṭān Maḥmūd Ġānī-Beg Chān. Dies kann wohl kein anderer sein als der Chān der goldenen Horde von Kiptschak, der Sohn Ösbegs, Ġānī-Beg, gest. i. J. 758 d. H. (vgl. A. Müller, *Der Islam im Morgen- und Abendland*, Bd. II, 278 und 284).

2. Ġāḡminī hat noch ein medizinisches Werk, betitelt: „*ḡānūnṡa*“ (kleiner Kanon), Auszug aus dem Kanon des Ibn Sīnā, geschrieben; dasselbe ist noch vorhanden u. a. O. in München (Aumer, Nr. 808, 3^o) und Gotha (Pertsch, Nr. 1928 u. 29).

Im ersten Ms. ist der Verfasser nicht genannt, die Inhaltsangabe zeigt aber klar, dass dies der „kânûntsche“ des Ġagmîni sei; die Abschrift des Ms. ist datiert aus dem Jahre 741 d. H. In der Beschreibung des Gothner Ms. sagt Pertsch, Ġagmîni sei nach einer Randbemerkung auf fol. 1b des Ms. Nr. 1930, welches einen Kommentar zu dem „kânûntsche“ enthält, im Jahre 745 d. H. gestorben.

Mag nun die letztere Angabe ganz genau sein oder nicht, so viel ergibt sich aus diesen Daten mit ziemlicher Sicherheit, dass Maḥmûd b. Muḥ. b. 'Omar el-Ġagmîni in der ersten Hälfte des 8. Jahrh. d. H. gelebt hat.

Beiträge

zu den Beziehungen Kaiser Friedrichs II. zu zeitgenössischen Gelehrten des Ostens und Westens, insbesondere zu dem arabischen Enzyklopädisten

Kemāl ed-din ibn Jūnis.

In Bd. XI, Heft 4 (1914) des Archivs für Kulturgeschichte veröffentlichte E. Wiedemann einen Beitrag zu den Beziehungen Friedrichs II. (1212—1250), zu arabischen Gelehrten. Hiezu geben wir im folgenden auf Wunsch des Verfassers eine Erweiterung, die wir den historischen und biographischen Quellenwerken der Araber, soweit sie uns bis jetzt zur Verfügung stehen, entnommen haben.

Friedrich II. interessierte sich sehr für wissenschaftliche Fragen, besonders aus den Gebieten der Philosophie, Physik und Astronomie. Nach den Berichten arabischer Autoren soll er eine Reihe von Fragen aus diesen Wissenschaften aufgestellt haben, deren Lösung er wünschte, und da es zu seiner Zeit im Abendlande nur wenige Gelehrte gab, die sich mit Fragen solcher Art, besonders aus den Gebieten der Physik und Astronomie, beschäftigten und solche zu lösen imstande waren, so wandte er sich nach dem Morgenlande, und zwar in erster Linie an einen Herrscher, mit dem er in näheren Beziehungen stand, den Ejjubiden *el-Mālik el-Kāmil*¹⁾. Dieser legte die Probleme den damals im besten Rufe stehenden muslimischen Gelehrten vor. Unter ihnen zeichnete sich besonders der bedeutende Korankenner und Rechtsgelehrte *Abū'l-Fath*²⁾ *Mūsā b. Jūnis b. Muḥammed b. Ma'n'a* aus, der den ehrenden Beinamen *Kemāl ed-dīn* (Vollkommenheit des Glaubens) hatte und gewöhnlich unter dem Namen *Kemāl ed-dīn ibn Jūnis* genannt wird. Dieser vielseitige Gelehrte, der auch Philosophie, Mathematik, Astronomie, Medizin beherrschte wie kaum ein zweiter seiner Zeit, ist daher von den bedeutenderen arabischen Biographen und Historikern, wie *Ibn Abi Ūṣaib'ā*, *Ibn Challikān*, *Abū'l-fidā* u. s. w., gebührend gewürdigt worden³⁾.

1) Neffe Saladdins, regierte 1218—1238. In einem Vergleich trat er an Friedrich II. Jerusalem mit einem Landstrich bis Joppe ab. — Die Transkription von E. Wiedemann weicht etwas ab von der in meinem Buch „Die Mathematiker und Astronomen der Araber etc.“ in Abhandlungen z. Gesch. d. math. Wiss. X (1900).

2) *Ibn Abi Ūṣaib'ā* hat *Abū Imrān*. 3) Vergl. auch H. Suter, l. c. S. 140—142.

Wir geben nun im folgenden eine Lebensbeschreibung dieses Mannes nach den genannten Quellen; wir folgen in erster Linie *Ibn Chalikān*¹⁾ (*Wafajāt al-a'jān* = 'Tod der Vornehmen, Ausgabe von Kairo, 1892–93, II, 132 ff.); Zusätze, die wir aus anderen Schriftstellern hinzufügen, sind als solche bezeichnet.

Kemāl al-dīn ibn Jūnis wurde geboren in *Mosul* am 5. *Šafar* des Jahres 551 d. H. (30. März 1156); er studierte daselbst unter seinem Vater das Recht und die Theologie, begab sich dann 571 (1175/76) nach Bagdad an das Kollegium *el-Nizāmijja* und arbeitete dort unter dem Repetitor *el-Sadiq el-Sulamāsī* (*Ibn Chall. hat Sulamānī*); er studierte hier die Grundzüge des Rechtes und die Rechtskontroversen, ebenso die Philologie unter *Kemāl al-dīn Abū'l-Barakāt 'Abderrahmān b. Muḥammed el-Anbārī*²⁾; vorher schon hatte er bei dem Scheich *Abū Bekr Jahjā b. Sa'dūn el-Qortubī* (d. h. von Cordova stammend) studiert und sich sehr ausgezeichnet. Hierauf wandte er sich wieder nach Mosul zurück und lehrte nach dem Tode seines Vaters in der Moschee, die nach dem Emir *Zein al-dīn*, dem Herrn von Arbela, benannt ist. Diese Moschee habe ich (*Ibn Chalikān*) gesehen, sie ist nach Art eines Kollegiums gebaut und heißt noch das *Kemālische Kollegium*, es erhielt diesen Namen, weil *Kemāl al-dīn ibn Jūnis* so lange in demselben wirkte und zu ihm, als er berühmt geworden, von allen Seiten die Theologen herbeiströmten. In allen Gebieten zeigte er ein reiches Wissen und vereinigte in sich die Kenntnis so vieler Disziplinen wie selten einer. Er zeichnete sich besonders auch in den mathematischen Wissenschaften aus. Ich sah ihn in Mosul im Monat *Ramaḍān* 626 (1220) und bin öfters bei ihm ein- und ausgegangen, da zwischen ihm und meinem Vater innige Freundschaft bestanden hatte. Es kam mir freilich nicht zu, Unterricht von ihm zu empfangen, denn ich blieb nicht lange in Mosul, sondern verreiste bald wieder nach Syrien. Die Theologen behaupten, daß er eine genaue Kenntnis von 24 Disziplinen hatte, zu diesen gehörte das *Šaf'ītische Recht*³⁾, hierin war er der erste seiner Zeit; es gab aber auch eine Menge von *Hanefiten*⁴⁾, welche bei ihm ihr eigenes Recht hörten. Er war ein vollkommener Kenner der juristischen Polemik von (d. h. zwischen) *Irāq* und *Buchāra*, er kannte die Grundlagen des Rechtes und des Glaubens (der Religion). Nachdem die Werke *Faḫr al-dīn el-Rāzī's*⁵⁾ nach *Mosul* gelangt waren, da verstand die technischen Ausdrücke darin keiner außer *Kemāl al-dīn*. Er wurde mit dem *Irschād* (= richtige Leitung) des *'Amidī*, als er sich mit ihm beschäftigte, in einer Nacht fertig und ließ ihn dann durch seine Schüler lesen, wie behauptet wird. Er war bewandert in der Logik, Philosophie, Metaphysik, Physik und Medizin, er kannte die mathematischen Wissenschaften, den Euklid und die Astronomie, die Kegelschnitte (des Appollonius), die mittleren

1) *Ibn Chalikān* wurde geboren 1211 zu Arbela und starb 1282 in Kairo.

2) Gest. 1181, vergl. Brockelmann, *Gesch. d. arab. Literatur*, I, 251.

3) Der Rechtsgelehrte *el-Šaf'ī*, der Begründer einer der vier Hauptrechtsschulen der Araber, lebte von 767–820, er starb in *Fostāṭ* (Alt-Kairo).

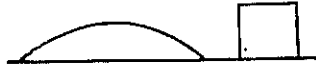
4) *Abū Hanīfa*, der Begründer der ältesten der vier Rechtsschulen lebte, von 680(?)–767.

5) Vergl. H. Suter, I. c., S. 132; er starb 1210.

Bücher¹⁾ und den Almagest (des Ptolemäus), ebenso die verschiedenen Arten der Rechenkunst, nämlich die Algebra, die Arithmetik und die Regel der beiden Fehler, dann die Musik und die Ausmessung der Figuren, eine Disziplin, in welcher er nicht seinesgleichen hatte, ausgenommen in der oberflächlichen Kenntnis dieser Dinge, ohne ihre tiefere Ergründung und Wahrheit.

Zu dieser speziellen Disziplin fügt *el-Qazwini*²⁾ hinzu³⁾: „Von dem wunderbaren, was ich von ihm (*Kemäl ed-din*) hörte, war das, daß die Franken zur Zeit des *Melik el-Kâmil* nach Syrien Probleme sandten, deren Lösung sie von ihm verlangten, darunter befanden sich medizinische, philosophische und mathematische; die medizinischen und philosophischen lösten die Gelehrten Syriens selbst, den mathematischen waren sie nicht gewachsen. Aber der *Melik el-Kâmil* verlangte, daß alle gelöst würden, und so sandte er sie nach Mosul an *Mufuldal b. 'Omar el Abhari*⁴⁾, unsern Lehrer, er war ohnegleichen in den geometrischen Wissenschaften, aber die Lösung war ihm doch zu schwierig, er zeigte das Problem dem Scheich *Ibn Jûnis*, dieser dachte darüber nach und löste es; die Aufgabe ist diese: Es sei ein Bogen gegeben, man ziehe seine Sehne und verlängere sie über den Bogen hinaus und konstruiere auf der verlängerten Sehne ein Quadrat, dessen Fläche gleich derjenigen des Bogenstückes (d. h. Segmentes)⁵⁾

sei, folgendes ist die Figur:



el-Mufuldal fand

den Beweis dazu, machte eine Abhandlung daraus und sandte sie nach Syrien an *el-Melik el-Kâmil*. Als ich (*Qazwini*) nach Syrien kam, traf ich die vortrefflichsten Gelehrten in Verwunderung über die Abhandlung, sie lobten auch die Auffindung des Beweises, denn er war ein seltenes Erzeugnis jener Zeit⁶⁾.

Ibn Chalikân führt fort: Er fand auch in der Wissenschaft der Amulette und magischen Quadrate Verfahren (Wege), auf welche bisher niemand gekommen war. Er machte auch Studien in der arabischen Grammatik und Sprache, und zwar so vollkommene, daß er ismtande war, das Buch des *Sibawaih*⁷⁾, *Ilâh* und

1) Es sind dies die mathem. und astron. Schriften, die man nach den Elementen des Euklides studieren mußte, bevor man mit dem Studium des Almagestes beginnen konnte. (Vgl. M. Stein Schneider, Z. S. für Math. und Phys. 10, 461. 1865).

2) Der berühmte Geograph, lebte von 1203–1289.

3) In *âthâr el-bilâd wa achbâr el-'ibâd* (die Denkwürdigkeiten der Lânder und dje Geschichten der Menschen) Göttingen 1848, S. 310.

4) Vgl. H. Suter, l. c., S. 145; die *Nisbe* wird auch *Abhari* gelesen; er starb um 1260.

5) *Muqawwas* ist hier mit „Kreissegment“ zu übersetzen.

6) Von der oben erwähnten Aufgabe wissen wir seit den Untersuchungen von F. Lindemann und den sich daran anschließenden, daß sie nicht streng mit Zirkel und Lineal (und nicht einmal unter Zuhilfenahme algebraischer Prozesse) für jeden Bogen zu lösen ist. Da aber kein Grund dafür vorliegt, die Nachricht für falsch zu halten, so hat wohl *Ibn Jûnis* eine Näherungsformel, sei es für das Segment selbst, sei es für die Rektifikation des zugehörigen Bogens, benutzt und dann diese in sinnreicher Weise für die Umwandlung des Segmentes in das Quadrat angewendet. (Zu solchen Näherungsformeln vgl. u. a. Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen. B. G. Teubner 1911).

7) Berühmter arab. Grammatiker, gest. um 795; vgl. Brockelmann, l. c., I, 101.

die *Takmila des Abû 'Alî el-Fârîsî*¹⁾ und den *Mufaṣṣal des Zamachschârî*²⁾ vorzutragen. In der Interpretation des Korans und in der Traditionswissenschaft, in der Namenkenntnis (von Männern der Geschichte) hatte er eine große Sicherheit; er kannte auch sehr gut die Epochen und Tage der arabischen Geschichte, ihre Schlachten, viele Poesien und Gespräche. Juden und Christen hörten bei ihm die *Tôra* und das Evangelium, er erklärte ihnen diese Schriften so gut, daß sie anerkennen mußten, sie würden keinen finden, der ihnen diese Bücher so auslegen könnte wie er. Er war in jeder Disziplin so bewandert, wie wenn er nur diese allein studiert hätte. Im Jahre 625 d. H. (1228) kam der Scheich *Athîr ed-dîn el-Mufaḥḥal b. 'Omar el-Abahri*, der Verfasser der *Ta'liqat fî'l-chilâf* (Glossen zu den Kontroversen), der astronomischen Tafeln und anderer berühmter Werke, von Mosul nach Arbela zu uns und stieg in der *Dâr el-hadîth* (Schule der Tradition) ab, ich arbeitete dann unter ihm an den Kontroversen. Eines Tages war ich bei ihm, als zu ihm einer der Rechtsgelehrten von Bagdad kam, der sehr bewandert in seinem Fache war, man sprach eine Zeit lang über Traditionen, da kam das Gespräch auf den Scheich *Kemâl ed-dîn*, und es sagte *Athîr ed-dîn* zu dem Besucher: „Als der Scheich *Kemâl ed-dîn* seine Pilgerfahrt machte und nach Bagdad kam, warst du damals dort?“ Er bejahte es. Er fragte dann weiter: „Wie wurde er beim hohen Divân empfangen?“ Der Besucher antwortete: „Sie behandelten diesen *Faqîh*³⁾ nicht nach seinem Verdienste.“ Da sprach *Athîr ed-dîn*: „Das ist zu verwundern, bei Gott! Nie trat ein Würdigerer als er in Bagdad ein!“ Diese Worte setzten mich in Erstaunen, und ich sprach zu ihm: „Oh Herr! wie hast du gesagt?“ Er sprach: „Oh mein Sohn! Nie kehrte vorher in Bagdad einer ein, der dem *Abû Hâmid el-Ġazâlî*⁴⁾ zu vergleichen wäre, und bei Gott, dieser ist nicht zu vergleichen mit dem Scheich (*Kemâl ed-dîn*)“⁵⁾ Es stand *Athîr ed-dîn* auf dem Gipfel seines Ruhmes, als er noch das Buch in die Hand nahm und sich zu seinen Füßen setzte und von ihm Belehrung empfing, und zur selben Zeit beschäftigten sich die Studierenden mit den Werken *Athîr ed-dîns*, was ich mit eigenen Augen gesehen habe. Er (*Athîr ed-dîn*) las noch unter *Kemâl ed-dîn* den *Almagest*. Es erzählte mir einer der Rechtsgelehrten, daß er den *Kemâl ed-dîn* über *Athîr ed-dîn* befragt habe und über seine Stellung in den Wissenschaften, er antwortete: „Ich weiß es nicht“. Da sprach der Rechtsgelehrte: „Wie ist das möglich, oh Herr, er arbeitet doch seit einer Reihe von Jahren unter dir?“ Er antwortete: „Der Grund ist der, daß, so oft ich auch ihn gefragt habe, ob er die Sache verstanden, er immer geantwortet hat: ja, mein Herr! und nie unterhielt er sich mit mir über eine Streitfrage, so

1) Brockelmann, l. c., I, 113 hat *al-Fasawî*; beides ist richtig, der erstere heißt „der Perser“, das zweite kommt von *Fasâ* in Persien, seiner Geburtsstadt; er starb in Bagdad 987.

2) Berühmter Grammatiker, starb 1143; vergl. Brockelmann, l. c., I, 289.

3) Gelehrter (Doktor) in Recht u. Theologie.

4) Der berühmte orthodoxe arabische Philosoph, der Verfasser des Buches „Vernichtung d. Philosophen“ (*Tahâfut al-falâsifa*), lebte 1050–1111; vgl. Brockelmann, l. c., I, 419.

5) Dies ist jedenfalls eine starke Übertreibung.

daß ich mich von seiner Tüchtigkeit hätte überzeugen können“. Es besteht kein Zweifel, daß er (*Athir ed-din*) gegenüber *Kemäl ed-din* sich so benahm aus Höflichkeit (guter Erziehung); er war Repetitor unter ihm an der *Bedrija*-Schule, und er pflegte zu sagen: „Ich habe mein Heimatland nur verlassen und mich nach Mosul begeben, um unter dem Scheich zu arbeiten.“ — Wer sich nur an diesen Artikel hält, mag mir Unwahrheit (Übertreibung) in dem, was ich von dem Scheich sagte, vorwerfen, wer aber aus jenem Lande ist und weiß, was der Scheich für dasselbe war, der weiß auch, daß ich ihm nicht Eigenschaften (die er nicht hatte) zugeschrieben habe, wir verwahren uns, bei Gott!, vor Übertreibung und leichtsinniger Überlieferung. Es erwähnt ihn auch *Abü'l-Barakät el-Mubârak b. el-Mustaufi*, wenn er in seiner Chronik von Arbela sagt: „Er war weise, bahnbrechend in jeder Wissenschaft, besonders in denen der Alten, wie Logik, Geometrie u. a. Das beweisen die Lösungen der Schwierigkeiten im Euklides und Almagest für den Scheich *Scharaf ed-din el Muza'ffar b. el-Muza'ffar el-Fäsi el-Qâri* (Koranleser), den Erfinder des Linear-Astrolabiums, bekannt unter dem Namen „der Stab“ (*al-'ašd*)“¹⁾. Ferner sagt *Ibn el-Mustaufi*: „Es kamen ihm Fragen zu aus Bagdad über schwierige Partien dieser Wissenschaft, die er löste (sie kamen ihm nur gering vor), und für die er die Beweise fand“. Ebenso sagt er: „Er rezitierte mir folgende seiner Verse, die er an den Statthalter von Mosul sandte, ihn um Fürsprache (oder seine Gunst) bittend“:

Wenn je ein Land durch seinen Beherrscher hervorgeleuchtet hat,
so hat das Königreich der Welt durch dich seinen Glanz erlangt;
Durch die Dauer der Jahrhunderte bleibe deine Herrschaft unumschränkt,
deine Bestrebungen anerkannt und dein Urteil gerecht!

Es ist dir die Macht verliehen worden zum Schutze dieses Landes,
gleichwie Joseph in seiner Macht hatte die Städte Pharaos.

Im Jahre 633 d. H. (1235/36) war ich in Damaskus, wo damals ein Mann lebte, der in den mathematischen Wissenschaften sich auszeichnete; er fand einige schwierige Stellen in arithmetischen, algebraischen und Vermessungs-Aufgaben und im Euklid, diese schrieb er alle auf ein Blatt und sandte sie nach Mosul, nach einigen Monaten kam die Antwort zurück, und das Rätselhafte und Verborgene war enthüllt und klargemacht. Am Ende der Antwort schrieb er (*Kemäl ed-din*) noch, er möge das Ungenügende der Antwort entschuldigen, denn sein Geist (Genie) sei steif und sein Scharfsinn matt, die Vergeßlichkeit habe sich ihrer bemächtigt, und die Ereignisse der Zeit hätten ihnen mitgespielt, und vieles von dem, was er einst gelernt habe, habe er vergessen, wie wenn er es nie gelernt hätte. Der Fragesteller sagte mir, er habe nie eine solche Sprache gehört, außer von den Alten, die in diesen Wissenschaften vollständig bewandert waren, das sei nicht die Sprache der Kinder unserer Zeit.“

Über diese Aufgabenlösung durch *Kemäl ed-din ibn Jânis* wollen wir noch einen dritten arabischen Gelehrten sprechen lassen; *Ibn Abi Ušai'bi'a* sagt in seinen

1) Vergl. E. Dorn in den Mémoires de l'acad. impér. des sciences de St. Pétersbourg, Sér. VIII, t. IX, Nr. 1, p. 87, u. Carra de Vaux im Journal asiatique, Nr. Mai-Juni 1895.

Geschichten der Ärzte (I, 306): „Es sagte mir der *Qāṣī Negm ed-dīn b. el Karīdī*: es erzählte mir der *Qāṣī Gelāl ed-dīn el-Bajḍādī*, ein Schüler von *Kemāl ed-dīn*, daß, während er die Vorlesungen *Kemāl ed-dīn*s hörte, zu *Bedr ed-dīn Lu'tū* († 1259), dem Beherrscher (Statthalter) von Mosul, ein Gesandter des Frankenkönigs *Imbarūr* (= Imperator, d. i. Kaiser Friedrich II.), der sehr bewandert in den Wissenschaften war, mit Fragen (Problemen) aus der Wissenschaft der Gestirne und andern Gebieten kam, mit dem Wunsche, daß *Kemāl ed-dīn ibn Jūnis* dieselben beantworten (lösen) möchte. Da ließ der Herrscher von Mosul dem *Kemāl ed-dīn* Mitteilung hievon machen und ihm sagen, er möchte in seiner Kleidung und Haltung den Anstand wahren, und dies deshalb, weil er von *Ibn Jūnis* wußte, daß er stets abgetragene Kleider anzuziehen pflegte und sich um die Dinge der Welt gar nicht kümmerte; er antwortete ja. Dann erzählt *Gelāl ed-dīn* weiter: Ich war gerade bei ihm, als ihm gemeldet wurde, daß der Gesandte der Franken sich der *Medresa*¹⁾ näherte, da schickte er einen der Rechtsgelehrten ihm entgegen, und als der Gesandte zum Scheich herantrat, sahen wir, daß der Ort (die Stelle, der Boden) von den schönsten und kostbarsten griechischen Teppichen bedeckt war, und eine Menge von Sklaven neben ihm standen und viele Diener in schönem Schmuck. Sie begrüßten sich, und der Scheich schrieb ihm die Antworten zu sämtlichen Fragen auf²⁾, und als der Gesandte wegging, verschwand vor unsern Augen wieder alles, was wir gesehen, und ich sprach zum Scheich: Oh Herr! wie wunderbar war alles, was wir soeben an Glanz und Pomp gesehen haben! Da lächelte er und sprach: „Oh *Bajḍādī*, es war (nur) Dekoration“³⁾.

Ibn Chaltikān fährt fort: „Aber ich habe mich schon zu lange mit der Darlegung seines Wissens aufgehalten, und bei meinem Glauben! ich habe noch sehr abgekürzt. Als sein Bruder, der Scheich *Imād ed-dīn Muḥammed* gestorben war, wurde *Kemāl ed-dīn* an seiner Stelle zum Vorsteher der Schule '*Alāijja*' ernannt, und nachdem die Schule *Qāhirijja* eröffnet worden war, wurde er als Direktor an diese versetzt und hierauf an die *Bedrijja* im *Dhāt Hijja* 620 (Ende 1223). Eines Tages waren in seinem Unterricht eine Anzahl Professoren zugegen, die alle den '*Tūlasān*'⁴⁾ trugen, unter ihnen '*Imād ed-dīn Abū 'Alī 'Omar el-Ṣanhāgī el-Leznī*' der Grammatiker, der aus dem Stegreif folgende Verse vortrug:

Kemāl ed-dīn ist die Vollkommenheit in Wissen und Stellung,
weg mit den Anstrengungen, die nach deiner Größe streben!
Wenn irgendwo die Scharfsinnigsten zusammenkommen,
so ist es jedes Pflicht und Ziel, zu hören auf das, was du sprichst;

1) Höhere Schule Akademie.

2) Nach diesem Berichterstatte wären die Antworten auch gar schnell gefunden worden.

3) Im Text steht *hūwa 'alam*, das letztere Wort ist wie der ganze Text nicht vokalisiert; *ilm* = Wissen, Wissenschaft kann es wohl kaum heißen, so lese ich eben '*alam*' = Fahne, Tuchstreifen und gebe es, um einen leidlichen Sinn herauszubringen, durch „Dekoration“ wieder, man könnte vielleicht auch übersetzen „das sind Fetzen“.

4) Ein dreieckiger Mantel, den die Rechts- und Theologieprofessoren als Auszeichnung oder Amtskleidung trugen.

Glaube nicht, daß sie aus Eigensinn mit dem *Tailasan* sich bekleideten,
nein, nur aus Bescheidenheit und Selbsterkenntnis.

Derselbe machte auch folgende Verse auf ihn:

Mosul zieht mit großer Schleppe einher,
stolz gegen alle übrigen Städte
auf seinen Tigris und seinen *Kemāl*; beide sind Heilmittel
für die Durstigen und die vom schwachen Geiste,
der Eine ist ein überfließender Strom, mit süßem Wasser,
der andere ein Ozean des Wissens.

Der Scheich *Kemāl ed-dīn* kam auch in den Verdacht des Unglaubens wegen seiner Vorliebe für die philosophischen Wissenschaften, und es befahl ihn zu gewissen Zeiten wegen der Herrschaft jener Ideen über ihn eine gewisse Nachlässigkeit; hierüber sagt *Imād ed-dīn*:

Ist es dir zu verdanken, daß die Gazelle nach ihrem Grollen
wieder gut und mein Freund geworden ist?

Ich gab ihr Wein mit Honig gemischt, so fein (leicht?) wie meine Verse
und so fein (leicht) wie der Glaube des *Ibn Jānis*¹⁾.

Kemāl ed-dīn starb in Mosul am 14. Schabān 639 (17. Febr. 1242) und wurde auf dem nach seiner Familie (Stamm) benannten Gottesacker neben dem Gottesacker *Ġassān*, außerhalb des Tores *Irāq*, begraben.²⁾

So weit *Ibn Chalikān*. Dieser Autor führt keine Werke von *Ibn Jānis* an, dagegen nennt *Ibn Abi Usaibī'a* (S. 308) folgende: Die Enthüllung der Schwierigkeiten und Verdeutlichung der schweren Fragen über die Auslegung des Korans. Das Buch der Winke und Räte in der Rechtswissenschaft, in zwei Bänden. Das Buch über die seltenen Worte im Kanon (des ?)³⁾. Das Buch über die Grundlagen (des Rechtes). Das Buch der Quellen der Logik. Das Buch der Rätsel (?) in der Philosophie. Das Buch der Herrschergeheimnisse über die Gestirne (oder auch aus den Gestirnen?)⁴⁾.

Zur Vervollständigung der Beziehungen Friedrichs II. zu orientalischen Gelehrten sei hier noch eine Stelle aus Bar-Hebræus (*Abūfaraj*) angeführt⁴⁾:

1) Diese sind schwer zu übersetzen, und wir verstehen auch ihren Sinn nicht recht; Joa. v. Hammer, der überhaupt die arabischen Gedichte sehr frei übersetzt hat, überträgt diese Verse in seiner Literaturgeschichte, Bd. 7, S. 468 folgendermaßen: „Fürwahr, es kam zu mir das Reh bei Nacht, das bis zum Morgen treu bei mir gewacht, ich gab ihm einen Becher roten Wein, wie mein Gedicht und *Ibn Jānis*’ Glauben rein“ So kann ich die Verse mit dem besten Willen nicht übersetzen. — Mac Guckin de Slane überträgt die Verse in seiner Übersetzung *Ibn Chalikān* (Bd. III, S. 472–473) so: I tell you seriously that the gazelle (the young beauty whom I loved and) who always used to frown (upon me) has consented to meet me and become my companion. I gave her wine mixed with (the honey of) her lips, (wine) light as my verses and light as the religious convictions of the son of Yānus.

2) Wüstenfeld. Gesch. der arab. Ärzte, S. 129. hat „*Ibn Sīnā*“, was bei *Ibn Abi Usaibī'a* nicht steht.

3) Es scheint dies ein astrologisches Werk zu sein.

4) Ausgabe von Pocock (Oxford 1672) S. 521, lat. Übersetz. S. 341; Ausgabe von *Ṣāḫḫānī* (Beirut 1890) S. 477. Vgl. Suter, l. c., S. 137. Diese Stelle hat M. Steinschneider veröffentlicht in der Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. 31 (1886). hist.-literar. Abtlg. S. 107–108

„*Thadhārī*“) von Antiochia, ein jakobitischer Christ, vervollkommnete sich in Antiochia in der syrischen und griechischen Sprache und in den Wissenschaften der Alten, reiste dann nach Mosul und studierte unter *Kemāl ed-dīn ibn Jānis* die Werke *al Fārābis* und *Ibn Sīnās*, den Euklides und den Almagest. Dann kehrte er nach Antiochia zurück, weilte aber nicht lange daselbst, weil er einsah, daß er in der Erlangung des Wissens hier nicht weiter käme, und begab sich zum zweiten Mal zu *Ibn Jānis* nach Mosul und vertiefte hier noch sein Wissen. Dann begab er sich nach Bagdad und beschäftigte sich hier vor allem mit medizinischen Studien, indem er sich besonders auf die außergewöhnlichen und seltenen Gebiete derselben warf. Der Sultan *Alā ed-dīn* wollte ihn in seine Dienste nehmen, fand ihn aber sonderbar und empfing ihn (deshalb) nicht freundlich. Da wandte er sich nach Armenien und trat in die Dienste Konstantins, des Sohnes des Königs *Hātim* (oder *Hatum*)²⁾, aber er fand ihre Gesellschaft (ihren Umgang) nicht angenehm und reiste deshalb mit einem daselbst sich aufhaltenden Gesandten des *Imbārūr* (imperator), des Königs der Franken, zu diesem, von dem er Wohlthaten empfing und bei ihm sehr in Gunst stand, er gab ihm sogar die Stadt *Kamāhija* (?) zu Lehen. Aber trotzdem sich so seine Lage sehr verbessert und sein Gut sich sehr vermehrt hatte, sehnte er sich doch nach seinem Vaterland zurück, aber der König gewährte ihm diese Gunst nicht. So blieb er, bis ihm ein günstiger Moment, nämlich ein Ausrücken des Königs zu einem Feldzug nach dem Westen, die Erfüllung seines Wunsches zu ermöglichen schien. Er raffte seine Habe zusammen und bestieg mit einem seiner Diener ein Schiff und fuhr gegen *Akkā* (Acre). Auf der See erhob sich ein (ungünstiger) Wind und trieb sie nach einer Stadt, vor der der König gerade Anker geworfen hatte. Als Theodorus dies gewahr wurde, nahm er Gift aus Scham, nicht etwa aus Furcht, denn der König hätte den Tod eines solchen Mannes nicht zugegeben“.

Dieser Theodorus von Antiochia ist wohl der Meister Theodorus, der Philosoph Friedrichs II., der von Leonardo von Pisa erwähnt wird, der einen Brief an ihn geschickt hat über einige Aufgaben, die auf unbestimmte Gleichungen ersten Grades führen. Auch Theodorus hat dem Leonardo eine Aufgabe aus der unbestimmten Analytik zweiten Grades vorgelegt, die Leonardo in seinem *Liber quadratorum* gelöst hat³⁾. — In den Werken Leonardos kommt noch ein anderer Philosoph Friedrichs II. vor, nämlich Johannes von Palermo, der wahrscheinlich etwas vorher, vielleicht auch noch gleichzeitig mit Theodorus, in den Diensten des Kaisers stand und ebenfalls mathematische Fragen an Leonardo gerichtet hat. Dies alles beweist, daß am Hofe Friedrichs II. ein reges wissenschaftliches Leben geherrscht hat, zu dem also sowohl abendländische als morgenländische Gelehrte ihren Beitrag gesteuert haben.

1) Ist wahrscheinlich Theodorus zu lesen, wie ich auch a. a. O. transkribiert habe.

2) „*Hathum*“ bei A. Müller, Der Islam im Morgen- u. Abendland, II, 228.

3) Vgl. Cantor, Vorl. über Gesch. d. Math. II (2. Aufl.) S. 46, 50. Theodorus korrespondierte wahrscheinlich mit dem jüdischen Gelehrten *Jehūda b. Salomo Kohen* aus Toledo arabisch über mathemat. Fragen; vgl. M. Steinschneider, Die arabische Literatur der Juden, S. 102, Nr. 117.

XVI. *Notice of the Astronomical Tables of Mohammed Abibeker Al Farsi, two copies of which are preserved in the Public Library of the University of Cambridge.*

By SAMUEL LEE, M. A.

OF QUEEN'S COLLEGE;

PROFESSOR OF ARABIC IN THE UNIVERSITY; AND SECRETARY TO THE
CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY.

[Read Nov. 13, 1820.]

IN making the following communication to the Cambridge Philosophical Society, I have not so much hope of contributing any thing to the stock of science which is already possessed on the subject in question, as of adding something to the history of its progress, and of bringing before the public the names of some men, who appear to have laboured with success in its furtherance: and, until Mr. Sedillot, as announced by Delambre*

* *Astronomie du Moyen Age*, p. 166. "M. Sedillot se propose de donner des notices plus completes de l'*Almageste* d'Aboul Wefa, du Manuscrit d'Ebn Schathir, de celui de Leyde, et de tous ceux qu'il pourra se procurer."

It may be proper here to point out a very enormous mistake, which it is probable M. Delambre has copied either from Weidler or Montucla. In recounting the Arabic MSS. found in the Library of Merton College, Oxford, he says, 'Mais, pour prouver avec quelle ardeur les Arabes s'adonnaient à l'Astronomie, il ajoute, que dans le seul Bibliothèque Mertonienne

shall favor the public with his more complete work on the Astronomy of the Arabians, notices, like the present, of such works as are to be found in our Public Libraries, may not be unacceptable. In presenting therefore to the Society a notice of a very scarce and valuable work on Arabian Astronomy, I trust I shall do no more than what some of the most eminent writers on Astronomy have often called for: and, in so doing, it is my intention to avoid prolixity, and to give such details from the Preface of the work in question, and such extracts from the work itself, as may be interesting and useful.

The only notice of the work, here alluded to, is, as far as my researches have gone, to be found in the *Bibliothèque Orientale* of D'Herbelot, which, from the manner in which it is given, is sufficient to shew that the writer had never seen the work in question. The notice is this, "Zig' Mohammed Ben Abibekr Al-Farsi. Tables Astronomiques composées par Mohammed, &c. pour le Sultan Al-Malik Al-Modhaffer Abou Mansour Joussof Ben Omar, Seigneur de l'Jemen ou Arabie heureuse.

Cet Auteur dit qu'il a suivi dans son Ouvrage les observations du grand Astronome *Ferideddin Aboul Hassan Ali Ben*

Mertonienne d'Oxford, ou conservait plus de *quatre cents* Manuscrits Arabes, tout remplies des doctrines et d'Observations Astronomiques.' Montucla, in his *Histoire des Mathemat.* Liv. I. Part ii, says, Il nous apprend (i. e. Edovard Bernard) que la seule Bibliothèque de Oxford possède plus de 400 manuscrits Arabes sur l'Astronomie. And, for proof of this, he refers the reader to the *Philosophical Transactions* for 1694, where not so much as one word is found on this subject. The only work there mentioned, as being connected with Edward Bernard, is a notice of the *Catalogus Codd. Manuscriptorum Angliæ et Hiberniæ*. I suppose, however, the passage referred to is, Tom. I. *Philosophical Transactions*, p. 334, which has been cited by Asseman, p. 47, in his account of the *Globus Cœlestis Cufico-Arabicus*, where, writing to Huntington, Bernard says, "Inter Codices tuos Arabicos in *Musæo Mertonensi* (numeras autem plus quadraginta doctrinæ, et observationis sideralis refertos." The *quadraginta* here mentioned has perhaps been mistaken for *quadringenti*, a mistake certainly of no common magnitude.

Abdalherim Al-Schirvani,* dit *Al-Rassed*: l'Observateur. Il cite encore plusieurs autres Tables Astronomiques, dont voici les titres. *Zig' Al-Mosthi*, *Zig' Al-Moddel*, *Zig' Almohakkem*, *Zig' Al-Zahir*, *Zig' Al-Mostanfi*, et *Zig' Al-Olaï Al-Rassadi*, qu'il dit être le dernier de ceux qui ont observé par eux-mêmes, ce qu'il faut entendre jusqu' en l'année 541. de l'Hég. auquel temps cet Auteur a écrit."

This account by D'Herbelot is erroneous in several particulars: for first, instead of the *Zig' Al Mosthi*, as given by him, the MS. has *Zig' Al Moghni*. And again, instead of the *Zig' Almostanfi*, the MS. has *Zig' Almostawfi*. And, in the third place, instead of An. 541 of the Hegira, according to D'Herbelot, the MS. has An. 541 of the Æra of Yezdigird: from all of which, it is, perhaps, but fair to conclude, that D'Herbelot had never seen the work of Al Farsi.

It is curious enough that excepting this very imperfect notice by D'Herbelot, the work of Al Farsi seems to have been totally unknown in Europe; and, although Astronomical Tables have been composed in Europe upon the Arabian models, yet it is most likely that these were taken from originals, which Al Farsi has shewn to be incorrect; and on which account, he had been compelled to have recourse to observations made long after those of Albategnius, upon which these tables had mostly been constructed.

* Soyuti in his Dictionary of Patronymics, which is preserved in the Public Library in the collection of Mr. Burkhardt, says, الشَّروَانِي بالفتح والسكون للراء، الي شروان مدينة، &c. That is, Sharwání, with the vowel *a* before *r*, which itself has no vowel, refers to the city Sharwán. In the MS. above alluded to, the vowel *u* is placed before *r*. And D'Herbelot, as well as the Editor of the Kamoos, places *i* before *r*, so that the word is written, Sharwání, Shurwání, and Shirwání. I prefer the first on the authority of Soyuti, and the Author of the Geographical Dictionary entitled معجم ما استعجم, who writes it in the same way.

Montucla, again, in his History of the Mathematics, notwithstanding his having cited several of the Tables, or Ziges, as given by D'Herbelot, has omitted to mention those of Al Farsi, although he might have seen in D'Herbelot, that they were constructed upon an entirely new set of observations.

It is not, however, my intention here to enter into the merits of the Tables in question:—to attempt to shew in what way they are preferable to those that went before them:—or to institute any thing like a comparison with the Tables of modern times. I shall leave these questions to be decided by those who have more leisure and skill for these pursuits, contenting myself with merely bringing to light the work in question.

It is a remarkable fact that two editions of this very scarce work have lain in the Public Library of this University upwards of 160 years: one of which is the work of Al Farsi, the other an abridged edition by some unknown hand; and undertaken, as the epitomator observes in his preface, for the purpose of facilitating the use of the Tables, by reducing them to the æra of the Hegira, the original work having been calculated according to the Persian æra of Yezdigird.*

I shall have no necessity to appeal to the abridged edition of the work in question, as the other MS. is in very good

* The title of Al Farsi's work is, كتاب الزيج الممتحن المعروف بالمظفري
 رصد الحكيم الفاضل الكامل عطارد الارض جاسوس الفلك
 ابي الحسن علي بن عبد الكريم الشرواني الراصد المعروف
 بالفهاد رحمه الله تعالى وتاليف الفقيه اللوذعي المنور
 خاصه السلطان الملك المظفر بدر الدين محمد ابي بكر
 الفارسي رحمه الله تعالى. The book of the approved Tables, known by
 the

preservation, and very accurately written; with this exception, that the diacritical points are very generally omitted, which makes the work of decyphering considerable, and the orthography of some of the proper names irrecoverable. As mention however is made of the original compiler of the tables in the preface to this second edition, I shall take the liberty to transcribe it.* “The most elegant work,” says this editor, “that has been published on this subject, (namely, Astronomy) according to the longitude of Yemen, is that of the learned and excellent Mohammed Abibeker Al Farsi, which he published for the Treasury of the Sultan Al Malik Al Modhaffer, and entitled ‘Al Zig Al Mumtahan Al Khazayini.’ i. e. The approved Treasury Tables. And again, speaking of the mean motion of Mercury, and condemning the practice of some who had gone before him, he mentions another work of Al Farsi in the following terms.† “He

the title Al Modafferi, from the observations of the learned and excellent, &c. Abi Al Hassan Ali Ibn Abd Al Karim Al Shurwani, the observer, (better) known by Al Fakhad, &c. Published by the eloquent and enlightened Doctor, for the Sultan Al Malik Al Modaffer, Badar Al Din Mohammed Abibeker Al Farsi. The MS. is in large quarto containing about 250 pages, and has the class marks G. G. 3. 27. It is said, in a note, to have been bought in Mocha, A. D. 1639, for 200 Ryalls of Eight; and, that it was placed in the Library A. D. 1658, by the Executors of Wm. Bretton, B. D. formerly Fellow of Emmanuel College, and afterwards Rector of Clapton in Northamptonshire.

* وان ابلغ ما صنف في ذلك لطول اليمن كتاب الحكيم
الفاضل الكامل محمد ابي بكر الفارسي الذي صنعه لخزانة
السلطان الملك المظفر وسماه بالزيج الممتكن الخرائتي.

† ومن اراد الوقوف علي حقيقة ذلك فليطالع الكتاب
الذي افه الحكيم محمد ابي بكر الفارسي المسمي معارج
الفكر الوهيب في حل مشكلات الزيج.

who wishes to know the truth of what has been said, may consult the work published by the learned Mohammed Abibeker Al Fârsi, entitled, "A step for the ardent mind towards solving the difficulties of the Astronomical Tables:" I cite these particulars merely for the purpose of shewing in what repute our Author was held by his learned countrymen; and to preserve the title of one of his works.

I now proceed to the preface of the work itself, which I shall give as faithfully as possible, from the words of the Author; and then the contents of each chapter of the book; and after that, a few extracts from the Tables.

After a religious preamble in praise of God, and the Prophet, which I shall omit, the Author thus proceeds, "The humble Mohammed Abibeker Al Fârsi, relying on the favor of the Almighty, affirms, that the most elevating and ennobling pursuit that can occupy the attention of man, is that of Astronomy and the wonders which it possesses: and since, (adds he), it has been my good fortune to have held an office in the service of our Lord and King, the illustrious and excellent Al Modhaffer Al Mansûri, Al Malik Al Modhaffer,* &c.—Yûsuf Ibn Omar Khalîl, Commander of the faithful,* &c.—And since his favors have been continually and plentifully heaped upon me, it became my wish to publish a set of Astronomical Tables, for the Royal Treasury, unlike any that had gone before, and which should remain unimpaired to the end of time. I therefore took, as the most to be depended upon, the mean motions of the Sun, Moon, and Planets, as given from the observations of the learned and excellent Philosopher Ferîd Eddin, &c. Abi Al Hassan Ali Ibn Abd Al

* The parts here omitted consist of the mere repetition of terms of respect, which are altogether uninteresting to an European reader.

Karím Al Sharwání, the Observer, known by the title *Al *Fahhád*, one of the most celebrated and correct of the learned moderns, and who published several Astronomical Tables, of which the following are the titles: viz. 1. *Al Moghni*, 2. *Al Mohakkam*, 3. *Al Záhír*, 4. *Al Mostawfi*, 5. *Al Modddal*, and 6. *Al Olái Al Rassadi*, which is the last published by him from observations. I took this last, on several accounts, because, for instance, the accuracy of the calculations, and the demonstrations on which they were founded; were superior to any that had gone before; and because it was compiled at a time much nearer that in which the observations had been made, than any other. The date of these observations is that of †541 of the æra of Yezdigird. It has been related that Al Sharwání continued to make and correct his observations on the mean motions of the Planets, through a space of not less than 30 years, which he did by instruments, either made by his own hands, or procured from distant places for that purpose. The instruments alluded to are, the Armilla, which is used for the purpose of ascertaining the longitude and latitude of the Planets. ‡The Dhát Al Shuabatein, with which the (Zenith) distances of the Planets, and their diameters are observed:—and the quadrant, used to ascertain the Sun's declination, which was divided into 5400 minutes, equalling the minutes contained in a

* Pardum (domans B. in Av.) instituens ad venationem. Castell. Lex. Hept.

† See the above mentioned notice by D'Herbelot.

‡ There is no mention made of this word in any of the Dictionaries or Vocabularies, which are all extremely defective in terms used in the Sciences: the words are ذات الشعبتين i. e. *having two branches*: the etymology of the word, and the description of the uses of this instrument, which is given in the text, clearly shew that it was a species of the instrument invented by Ptolemy for the determination of the Moon's parallax, and which was used by Albategnius in the determination of the obliquity of the ecliptic: it was known to Copernicus and the Astronomers of his age under the name of *Regulæ Parallactica*, and was first abandoned by Tycho Brahé.

quadrant of the heavens, used for the purpose of correcting the observations.

Nor did Al Sharwání depend on the observations of those who had gone before him, seeing as he did the great error and confusion that prevailed among them; and which attached itself, not more to the observations made by Hipparchus and Archimedes, before the time of Ptolemy, than it did to those made by them and Ptolemy himself. The same is true with respect to the observations of Ptolemy and those of the moderns, who followed the Tables called **Almumtáhan*, (approved). Now, between the times in which the observations of Hipparchus and Ptolemy were made, there intervened a space of about 260 years; and between the times of the Observations of Ptolemy, and those of the moderns made in the time of Mámoon a space of about 700 solar years. And in the same manner did those who followed the approved Tables disagree, so that one seemed to oppose the other.

Of these Authors were the following: namely, Thábet Ibn Korra: Ahmed Ibn Mohammed Al Nahawéndi the Arithmetician: Isaac Ibn Honein: Hámid Ibn Ali Al Wásiti: †Abu Moasher Al Balkhi: Mohammed Ibn Jábir Ibn Senán Al Batáni (Albatagnius): Send Ibn Ali: Khálid Ibn Abd Al Malik Al Marúrúthi: Ali Ibn Isá Al Astralábi: Abás Ibn Saíd Al Jauhari: Ahmed Ibn Abd Allah the Arithmetician: Ali Ibn Isaac Ibn Kíshoor: Moosa Ibn Shákir, and his three Sons, Mohammed, Ahmed, and Al Hassan: Sáhal Ibn Bashár Al Maháni: Al Kásim Ibn Abd Allah: Ahmed Ibn Abd Allah Habash: Abu Kásim Ali Ibn Al Hosein Ibn Isá Al Sharíf Al Hoseini, known

* By some termed the *Tabulæ Probatæ*; and by Mr. Caussin, *Table vérifiée*. Notices et Extr. Biblioth. du Roi. Vol. VII. p. 96. notes.

† There is a work on Astrology with Astronomical tables by this Author in the University Library marked Gg. 3. 19.

generally by Ibn Aálam: Al Fadl Ibn Hátim Al *Nairizi: Mohammed Ibn Ahmed Yúsuf Al Samarkandi: Abu Al Hassan Ali Ibn Amájur Al Turki: Yahya Ibn Abi Mansúr: †Ali Ibn Abd Al Rahmán Ibn Ahmed Ibn Younis: and Abu Al Hassan. The observations of all of whom differed from one another; and each of whom published a set of Tables from such materials as he had before him, and which he considered as sufficiently accurate.‡

§ It is related by Ali Ibn Abd Al Rahmán Ibn Ahmed Ibn Younis, as told him by Send Ibn Ali, respecting Ibn Yahya Ibn Abi Mansúr: namely, that Ibn Yahya's observations could not be correct, nor have arrived to that degree of accuracy that could be wished, as he had seen the Armilla with which they had been made, sold, some time after his death, in the street of the Paper-makers in Bagdad; and that it was divided into parts of 10 minutes each: This, says the Author, is a proof that his observations with this instrument were not perfect, on account of its being divided into parts which were sixths of a degree: but if its divisions had been of one minute each, they would have been perfectly correct.

It is related by the learned and excellent Abu Al Hassan Ali Ibn Abd Al Karím Al Sharwání the Observer, above mentioned, that he found the mean motions of the Sun and Moon agreeable to the observations of Yahya Ibn Abi Mansúr, and those of Khálid Ibn Abd Al Malik Al Marúrúdhí:—of Abbas

* In the orthography of this name I have followed Mr. Caussin, who says he was a native of Naíríz in Persia, and was famous for his knowledge of Geometry and Astronomy. Notices et Extr. Vol. VII. p. 118.

† Of whose work an ample extract is given by Mr. Caussin in the Notices and Extr. Vol. VII.

‡ From p. 60 et seq. of the Volume alluded-to Ibn Younis makes the same remark.

§ The passage here cited from Ibn Younis, is found in Mr. Caussin's edition above alluded to.

Ibn Saïd Al Jauhari, and of Habash, all of which agreed with one another in this particular.

But with respect to the two superior Planets: viz. Saturn and Jupiter, it was found in the Tables called *Al Olâi Al Rassadi* (composed by Sharwâni) that a conjunction would take place in Capricorn, in which the one would appear to touch the other, and which would happen on the *14th of Safar, 562, of the Hejira, that is, on the 6th of Bahman Mâh, ann. †535 of Yezdigird: and it so happened; so that the calculation agreed with the fact; which was not the case with any other of the Tables that had been published from observation; but, on the contrary, the event universally contradicted the prediction: which may be sufficient to vouch for the accuracy of Al Sharwâni.‡

It is further related, that Al Sharwâni observed the mean motions of Mars, through a long space of time, and found them agreeable to the observations of Ibn Aâlam. He likewise observed for a long time the mean motions of Venus, when she came in conjunction with the star in the heart of Leo, which he also found agreeable to the observations of Ibn Aâlam.

But with respect to the real motions of Venus, and the place of her apogee, he found some difference between his own observations, and those of others who had gone before him: for, according to him, the apogee of Venus would differ from that of

* Corresponding to Nov. 30, 1166, A. D. which also corresponds to 535 of Yezdigird as given by Gravius in the *Epochæ celebriores*. See Tables.

† This æra, according to Gravius, *Epochæ Celebriores*, began A. D. 632, which is the year in which Yezdigird ascended the throne of Persia.

‡ It is worthy of remark that the complaints of Ibn Younis were to the very same effect: viz. that in his day, none of the observations corresponded in time and quantity with the predictions, whence we may infer that the science of Astronomy, had received considerable improvement from the labours of Al Sharwâni. See Mr. Caussin *Not. et Extr.* p. 122, et seq.

the Sun in degrees, though it would be in the same sign; which is contrary to the general opinion of Astronomers.

Again, with respect to the true motion of Mercury, after repeated observations, he found it to differ from the observations of all but those of Ptolemy, with which it agreed. On these accounts (says Al Farsi) I relied entirely on his observations, because of their great accuracy and the clearness of their demonstrations, and because I had proved them during a considerable length of time, by the conjunctions of the planets one with another, or with one or other of the fixed stars; as, for instance, with the star in the heart of Leo, and others; as well as the quantity and time of duration of the Solar and Lunar eclipses; in all of which I found the prediction to correspond with the event.

I found, moreover, (continues Al Farsi) that most of those who had gone before me, and had composed Tables, had formed them upon the observations of others, as in the case of *Kúshiár, author of the Tables called Al Jámia; Mohammed Ibn Ayúb, author of those styled Al Mofrid; and Ali Al Nasúi, author of those called Al Fákhir;—and Abi Rashíd Al †Barabshi, author of those called Al Kámil, all of whom implicitly relied on the mean motions of the Planets, as given by Al Batáni (Albategnius) taking all the errors and mistakes just as they found them.‡

When therefore I knew the character of the different Tables that had come down to my times, and found none comparable to

* There is a work on Astrology by this Author, bound up in the same volume with the work of Al Farsi.

† It is impossible to be certain of the orthography of this word from the Manuscript, which here omits some of the diacritic points: thus البراشي.

‡ We have here a further account of Tables of which D'Herbelot has taken no notice when speaking of Al Farsi, which it is most likely he would have done had he ever seen this work: and it is doubtful whether a notice of any one of them is to be found in D'Herbelot.

those called Al Olāi Al Rassadi, either as respects their accuracy, or the nearness of the time of their compilation to that of the observations on which they were founded, I took this, with some degree of confidence, as the basis of my own, which I published as conformably as may be to his models, facilitating, at the same time, the work of calculation as much as possible; and which had formerly been attended with considerable difficulty. I then gave my work the title of Al Zig Al Mumtāhan Al Modhafferī, i. e. The approved Tables of Modhaffer, according to the name of our Sovereign Al Malik Al Modhaffer, (may his reign be perpetual.)

The epoch of all the elements of the mean motions of the Planets, and of the equations of their apogees in these Tables, I laid down for the beginning of the year 631 of Yezdigird, on the third day of the week at twelve o'clock, which answers to the 17th day of Safar An. Hej. 661.* And the extent of time for which they are formed is An. 1321 of Yezdigird. The place, moreover, according to the longitude and latitude of which these Tables are computed, is the point of the great circle determining the climate of Yemen, the longitude of which eastward from the Canary Isles, is $63^{\circ} 30'$, and the latitude, from the Equator northward $14^{\circ} 30'$, which determines the boundaries of Yemen, upon which these Tables have been formed.†

I further affirm, (continues Al Farsi) that no one has, in our times, published Tables at all to be compared with these, nor will

* Which answers to Dec. 13, A. D. 1262.

† In a note written between the lines in this place of the MS. it is said *وهذه البقعة هي مدينة صنعاء اليمن لان هذا المذكور طولها وعرضها* This place is the city of Senā in Arabia felix, as this is the longitude and latitude given of that place." This, upon referring to the Tables I find to be the case, which is sufficient to determine the place where Al Farsi wrote.

any come hereafter who will equal them, whether as regards their truth, or the accuracy of their construction, excepting only, where some error might have escaped the compiler from absence of mind, either in laying down the numbers in the letters of the alphabet, or in making the computations. My apology is therefore made, and my attention known. No one, it should be remembered, is free from error, especially when beset with difficulties, except the Almighty, whose favor and furtherance I have supplicated in the prosecution of this work, and I am not without confidence that he has answered my requests. I have divided these Tables into 40 chapters, which are as follows.

The number of Chapters in these Tables.

Chap. 1. On Chronology. 2. To find an unknown from a known date, by the Tables. 3. To find the beginning of the Roman, Coptic, Arabian, and Persian year. Also to find the beginning of the year and months of the Jews by the Tables. 4. To find the embolisms of the Arabian and Roman years by the Tables. 5. Explanation of the Elements, to which the mean motions of the Planets, (the Sun and Moon, with their true motions,) are reduced in these Tables; and to find any one for any given time. 6. To rectify the difference of time at any place differing in longitude from that wherein these Tables have been composed, which is in the climate of Yemen. 7. To find the length of Day and Night, for any given time by computation and the Tables. 8. Explanation of the requisites for a calculator in using the mean motions of the Sun, Moon, and Planets, and their equations, as laid down in these Tables: also their true motions. 9. To find the Sun's place. 10. To find the Moon's place. 11. To find the place of the Nodes. 12. To find the places of the five Planets. 13. On the retro-

grade motions of the Planets:—and their being stationary. 14. To find the latitude of the three superior Planets. 15. To find the latitude of the two inferior Planets. 16. *To find the Sun's Declination: also to find the first and second declination by calculation. 17. To find the Moon's latitude. 18. To find the times of the Conjunctions and Oppositions. 19. To find the places of the Conjunctions and Oppositions. 20. To find the Phases of the Moon. 21. To find the sine, the arc being given; and *vice versa*. 22. To find the versed sine, the arc being given; and *vice versa*: also to find the chord, the arc being given, and *vice versa*. 23. On the ascension in a right sphere. 24. On the ascendant, and how to find the parts of the hours of day. 25. To find the Sun's altitude from the tangent and cotangent of observation; and *vice versa*: also to find the reversed shadow (i. e. the cotangent) commonly in use. 26. To find the Equation of the time of day (at any given place): also the places of the Sun and Planets by computation and the Tables. 27. To find the latitude of any place by an observation of the Sun's altitude, and by the Tables. Also to find the longitude of any place and its meridian. 28. To find the ascendant; also the circle of the Heavens corresponding to the latitude of Yemen, from the observed altitude of the Sun. 29. To find the ascendant; also an arc of the Heavens from the observed altitude of the Planets. 30. To find the parts of the ascendant: also the point of the Ecliptic that is upon the Meridian, the common and sidereal time being given. 31. To find the time when any point of the Ecliptic comes to the Meridian, either at a place having latitude, or in one that has none. 32. To find the Equation for the centre points of the twelve signs of the Zodiac. 33. To determine the cases wherein the solar Eclipses take place,

* For an explanation of what is meant by first and second declination, see Delambre Ast. du Moyen Age, p. 158.

y computation and the Tables. 34. To calculate a solar Eclipse. 35. To calculate a lunar Eclipse. 36. On the *Comet; and to find its place with respect to the Ecliptic. 37. To find the hours of the day as equated for the latitude of Yemen, by the Tables. 38. To find the greatest Meridian altitude for the latitude of Yemen, by the Tables. 39. To find the conjunctions of the Planets one with another: also the times of the conjunctions of the Moon with the Planets. 40. To find the places of the fixed Stars for the epoch of these Tables, i. e. for the beginning of the year 631 of Yezdigird: also to find the places of the 28 stars of the Ecliptic from their original places: which ends the Tables.

The following are two Tables giving the mean places of the Planets, and their Apogees, which may have been influenced by the observations of Sharwāni.

* The word used in the text is الكبد, of which the Author himself says, اعلم ان الكبد من كواكب ذوات الاذنان وليس هو في افلاك الكواكب وموضعه في الفلك الاثير ما دون فلك القمر

Observe that الكبد is one of the stars having a tail, not situated in the firmament of the stars: but having its place in the ethereal heaven, below that of the moon. I have therefore supposed it must mean a Comet, no assistance whatever, in this, as well as innumerable other instances, being to be obtained from the Dictionaries; but the Author speaks of this comet as if it were a solitary phenomenon, and subject to the same laws of motion as any of the planets; he has given tables of its mean place in the ecliptic for intervals of 1 year, of 10 years, and of 100 years; a proof, if any were wanted, of the very little attention which was paid to observation in the construction of their tables.

Table of the MEAN PLACES of the PLANETS, for the beginning of the Year 631 of Yezdigird, for the Longitude of 60° 30' from the Canary Isles, Eastward.

Planets.	Signs.	Deg.	Min.	Sec.
The Sun's mean place	6 ^s	28°	38'	22"
The Moon's ditto	5	2	14	29
Its true place	5	27	34	22
The Nodes	11	38	7	6
Saturn's mean place	4	12	39	8
Its true place	9	5	28	14
Jupiter's mean place	4	8	30	13
Its true place	11	19	55	9
Mars' mean place	2	25	23	57
Its true place	2	16	5	25
Venus's mean place	7	10	14	22
Its true place	1	38	45	52
Mercury's mean place	2	26	49	22
Its true place	11	55	7	31

Table of the APOGEES of the PLANETS, for the year above mentioned.

Planets.	Signs.	Deg.	Min.	Sec.	Thirds.	Fourths.
The Sun.....	*Pisces	2°	29'	12"	30'''	5 ^{iv}
Saturn.....	Sagittarius..	8	9	23	30	0
Jupiter	Virgo.....	5	29	5	30	5
Mars	Leo	4	16	6	30	0
Venus	Gemini	2	17	16	30	0
Mercury	Scorpio	7	0	41	30	0

* This is evidently a mistake in the manuscript, as the right sign Cancer is always mentioned in other parts of the Tables.

The positions of the Apogees given in this Table do not accord with those given by Ibn Younis in the year 220 of Yezdigird, and much less with their true places for that time, as determined by modern tables: and, the case of the Sun excepted, their planetary theory would necessarily give results essentially different from the true ones.

The obliquity of the ecliptic is always made $23^{\circ} 35'$, the determination of it given by Albategnius, and adopted by all subsequent Arabian Astronomers. The Sun is said to be vertical at Aena when he is in the 9th degree of Taurus, and its latitude is stated to be $14^{\circ} 30'$: this would give a value of the obliquity much less than the preceding: but no inference can properly be drawn from hence, as we know not whether these results were connected with each other.

It may perhaps be unnecessary to give any further extracts from the Tables, I shall therefore only remark, that in the original work they occupy 96 pages; in the abridgement 70. The chapters moreover in the abridgement are confined to 30. It was my original intention to give a list of the principal places in the East with their longitudes and latitudes from the Tables above mentioned: but, as I intend to present to the Society some extracts from the Geography of Abulfeda, of which a very valuable copy, written by Erpenius, is deposited in the Public Library, and which has never yet been laid wholly before the public, I now defer that part of my design to some future day, when the list of Al Farsi, and the extracts from Abulfeda may appear together.

SAMUEL LEE.

Cambridge,

Nov. 5, 1820.

P. S. I must not omit to mention, that I am indebted to the Rev. Mr. PEACOCKE, the present Secretary of the Society, for several valuable hints, during the preparation of this Paper for the Press.

Das Rechenbuch des Abū Zakarijā el-Ḥaṣṣār.

Von HEINRICH SUTER in Zürich.

In der Biblioth. Mathem. 13, (1899), p. 87 habe ich auf die Wahrscheinlichkeit hingewiesen, daß das Gothaer Ms. 1489 (PERTSCH, *Die arab. Handschriften d. herzogl. Bibl. zu Gotha*, 3. Bd., 1881, p. 114), das eine Abhandlung über die Rechenkunst von MUHAMMED B. 'ABDALLĀH B. 'AIJĀS ABŪ ZAKARIJĀ, genannt EL-ḤAṢṢĀR, enthält, identisch mit oder vielmehr das arabische Original einer von MOSES B. TIBBON gemachten hebräischen Übersetzung eines Rechenbuches des MUH. B. 'ABDALLĀH ABŪ BEKR, genannt EL-ḤAṢṢĀR, sein könnte, welche Übersetzung noch im Vatican (Nr. 396) und in Oxford (Christ Church Coll. Nr. 189) vorhanden ist, und zuerst von M. STEINSCHNEIDER beschrieben worden ist¹⁾, der auch zuerst die Vermutung ausgesprochen hat, der Autor möchte der von IBN CHALDŪN in seinen Prolegomena erwähnte EL-ḤAṢṢĀR sein, auf dessen Rechenbuch der *Talchis* des IBN EL-BENNĀ basieren soll. Ich habe dabei die Bemerkung hinzugefügt, für die endgültige Erledigung dieser Frage wäre eine genauere Prüfung des Gothaer Ms. sehr zu wünschen. Um diese Angelegenheit nicht länger in Schwebe zu lassen, habe ich nun selbst diese genaue Prüfung unternommen. Für die Erlaubnis der Benutzung des Ms. für längere Zeit auf der Kantonsbibliothek in Zürich spreche ich hiermit der Verwaltung der herzogl. Bibliothek in Gotha meinen verbindlichsten Dank aus.

Das Rechenbuch des ḤAṢṢĀR umfaßt 128 Blätter (18,5 × 13,5 cm), die Seite zu 15 Zeilen, in deutlichem Neschi geschrieben, aber nicht ganz sorgfältig, denn es kommen bisweilen Auslassungen oder auch Wiederholungen vor; auch bezweifle ich, daß die Anordnung der Kapitel, besonders aber ihrer Unterabteilungen in dieser Abschrift ganz dieselbe sei, wie sie im Original gewesen ist, ich bin der Ansicht, daß hie und da Verschiebungen stattgefunden haben. Einen Titel hat das Buch nicht, der Anfang (fol. 1^b) lautet:

1) Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 3, 1880, p. 109—110.

„Im Namen Gottes des Barmherzigen und Gnädigen, mein Herr, erleichtere (meine Aufgabe), oh du Gütiger! Es spricht der Meister ABŪ ZAKARĪJĀ MUḤAMMED B. 'ABDALLĀH, bekannt unter dem Namen EL-ḤAṢṢĀR¹⁾; Lob sei Gott etc. Möge Gott uns das Richtige eingehen und uns bewahren vor dem Zweifel (der Unsicherheit)! Nachdem ich die Erfahrung gemacht habe (wörtl. „gesehen habe“), daß die Wissenschaften und die (schöne) Litteratur zur Grundlage die Wissenschaft der Zahl haben, (natürlich) nach Gott und den göttlichen Dingen, so habe ich über die Zahl ein Werk verfaßt, und habe darin auf jede subtile Frage meine Achtsamkeit gerichtet, damit es den Anfängern Einsicht verschaffe und den Geübten zur Erinnerung (Auffrischung) diene. Und alles, was ich in diesem Buche zusammengestellt, beschrieben und erklärt habe, das stammt aus den Darlegungen der älteren Gelehrten, und ich habe es entnommen aus den Büchern der Vorfahren, habe es gesammelt, kommentiert, und habe es mit ihren sicheren Schlüssen (Beweisverfahren) gefunden und abgeleitet. Und zu Gott flehe ich um Bewahrung vor Irrtum, und ihn bitte ich um Beistand für die Richtigkeit des Ausdruckes und der Ausführung (der Operationen): es giebt keinen Meister außer ihm, und kein Gutes außer dem Guten von ihm!“

Der Verfasser des Gothaer Handschriftenkatalogs, W. PERTSCH, sagt in seiner Beschreibung unserer Handschrift (l. c. p. 115), die Abhandlung breche auf fol. 128^b ab, ohne beendet zu sein, und am Schlusse der Beschreibung bemerkt er, die Handschrift sei nicht datiert. Beides ist unrichtig; die Abhandlung EL-ḤAṢṢĀRS schließt auf fol. 128^a mit den Worten: „Beendet ist das gesegnete Buch mit dem Lobe Gottes, seiner Hilfe und seiner Gunst (Auszeichnung) etc. Schluß (der Abschrift) am Dienstag den 13. Muḥarrem des Jahres 836“ (9. Sept. 1432). — Was auf fol. 128^b steht, gehört nicht mehr zur Abhandlung EL-ḤAṢṢĀRS, es ist eine in das Gebiet der Rechtswissenschaft gehörende Aufgabe über den gesetzlichen Almosenzehnten (*el-zakāt*); sie ist allerdings von der gleichen Hand geschrieben wie das vorhergehende, was den Verfasser des Katalogs zu dem erwähnten Irrtum geführt haben wird.

Es folgen dann nach einem leeren Blatt zehn Blätter (130—139) mit Bruchstücken aus einer ebenfalls arithmetischen Abhandlung, mit ost-arabischen Ziffern und von verschiedenen Händen geschrieben; vielleicht sind es Teile aus der SACHĀWISCHEN Abhandlung, d. h. aus dem Rechen-

1) Der Schlussbuchstabe ist zerstört, aber es ist zweifellos, daß derselbe ein *r* war; auf fol. 1^a steht auch mit roter Tinte geschrieben: *el-ḥaṣṣār fī'l-ḥisāb* (EL-ḤAṢṢĀR über die Rechenkunst); was die Bedeutung von EL-ḤAṢṢĀR (= der Schilfmattenflechter) anbetrifft, so vergleiche, was ich darüber in der Biblioth. Mathem. l. c. gesagt habe.

buch des 'ABDELQÂDIR B. 'ALÎ EL-SACHÂWÎ¹⁾, da auf fol. 1^a unterhalb der rot geschriebenen Worte „*el-haššûr fi'l-hisâb*“ noch die schwarz geschriebenen „*el-sachâwije fi'ilm el-hisâb*“ (die SACHÂWISCHE Abhandlung über die Rechenkunst) stehen.

Eine vollständige Wiedergabe dieser umfassendsten Abhandlung über arabische Rechenkunst, die auf uns gekommen ist, hätte zu großen Zeitaufwand erfordert; ich gebe daher im folgenden nur eine Übersicht über den Inhalt derselben, werde aber immerhin gewisse Kapitel und Stellen, die für die Geschichte der arabischen Rechenkunst von Bedeutung und Interesse sind, dem Leser in wortgetreuer Übersetzung vorführen. Nach der oben gegebenen Einleitung fährt der Verfasser fort:

„Ich habe dieses Buch in Kapitel eingeteilt: das erste Kapitel handelt über die Operationen mit ganzen Zahlen, das zweite über die Operationen mit Brüchen. Was das erste Kapitel betrifft, das über die Operationen mit ganzen Zahlen handelt, so ist dasselbe wieder in zehn Teile²⁾ geteilt: der erste handelt über die Stufen (Ordnungen) der Zahlen und ihre Namen; der zweite über die Göbärzeichen und ihre Wertänderung nach den Stufen der Zahlen; der dritte über die Addition (*jam'*) der Zahlen; der vierte über die Subtraktion (*tarb*); der fünfte über die Multiplikation (*darb*); der sechste über die Benennung (*tasmije*)³⁾; der siebente über die Division (*qisme*); der achte über die Halbierung (*tansîf*); der neunte über die Verdoppelung (*taš'îf*); der zehnte über die Radizierung (*tağdir*).

[fol. 2^a] *Erstes Kapitel.* Erster Teil: „Über die Stufen der Zahlen⁴⁾ und ihre Namen und ihren Ursprung. Wisse, das es zwölf Zahlennamen⁵⁾ giebt; der erste ist das Eins, welches der Ursprung und der Anfang der Zahl ist; füge hierauf zu dem Eins wieder Eins hinzu, so entsteht das Zwei, dieses ist die erste Zahl, denn das Eins ist keine Zahl, das Zwei ist die erste Zusammensetzung (also die erste Zahl); hierauf füge zu dem Zwei wieder Eins hinzu, so wird diese Zahl Drei genannt“... So geht es fort bis zu Neun, dann heisst es weiter: „Und diese neun Zahlen heißen die Einer, diese bilden die erste Stufe; alsdann füge zu dem Neun Eins hinzu, so heisst das Resultat Zehn, und dieses ist der

1) Vgl. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, p. 193.

2) Der Verfasser braucht hier für diese Unterabteilungen das Wort *aqṣām* (= Teile), im Text sind aber nachher alle diese Abteilungen wieder mit *bâb* (= Kapitel) überschrieben, was die Übersichtlichkeit stört.

3) „Dénomination“ in der Übersetzung des *Talchiz* durch A. MARRE.

4) Hier steht im Text der Singular.

5) Nämlich die Namen der Zahlen von 1 bis 9, dann die Namen für 10, 100 und 1000, aus diesen zwölf Namen werden alle Zahlennamen gebildet.

erste Rang (*manzile*) der Zehner, sie nimmt unter den Zehnern dieselbe Stellung ein, wie das Eins unter den Einern; hierauf füge zu dem Zehn ein zweites Zehn hinzu, so erhältst du Zwanzig, dies ist ein Name, der entnommen (zusammengesetzt) ist aus (den Namen) Zwei und Zehn“, etc. . . . So geht es fort durch alle Zehner, dann durch die Hunderter und Tausender¹⁾ (hier nicht mehr vollständig durchgeführt) bis fol. 4^a, Zeile 5 v. o., hier folgt ein kleiner Abschnitt (*faṣl*), welcher beginnt: „Und da die Einer die erste Stufe bilden, so sagt man, ihr Index“ (*uss* oder *uss* = Grundlage, Spur) sei Eins, ebenso der Index der Zehner sei Zwei, derjenige der Hunderter Drei etc. . . . „Und die Männer der Rechenkunst nennen dieses Kapitel der Zahlenstufen auch das Kapitel des *Ass*.“

[fol. 4^a] Zweiter Teil: „Über die Göbärzeichen und ihre Wertänderung nach den Stufen der Zahlen. Wisse, daß die Männer der Rechenkunst neun Göbärzeichen verwenden, welche folgende verschiedene Formen haben“):

9 8 7 6 4 1^r (3) 2 (2) 2 1

Nun folgt fol. 4^b—6^b eine weitere Ausführung über die Darstellung mehrstelliger Zahlen mit Hinzuziehung der Null (0 = *sifr*), welche wir, da sie nichts Bemerkenswertes bietet, übergehen.

[fol. 6^a] Dritter Teil: „Über die Addition der Zahlen.“ Hierzu ist nur zu bemerken, daß die Summe, wie allgemein bei den Arabern über die Summanden geschrieben wird, und daß EL-ḤAṢṢĀR die Addition mit der niedersten Stelle beginnt.

[fol. 8^a] Vierter Teil: „Über die Subtraktion der Zahlen.“ Diese Operation wird mit der höchsten Stelle begonnen im Gegensatz zur Addition, und was sehr interessant ist, auch im Gegensatz zu EL-QALAṢĀDĪ. EL-ḤAṢṢĀR folgt also in Bezug auf die Subtraktion noch der älteren Methode der Ostaraber, wie des MUḤAMMED B. MÜSĀ EL-CHOWĀREZMĪ, während er bei der Addition schon den bequemern Weg eingeschlagen hat. IBN EL-BENNĀ⁴⁾ erwähnt beide Wege, fügt aber bei der Addition hinzu, man be-

1) Aus dieser Ausführlichkeit der Darstellung kann man wohl den Schluß ziehen, daß dieses Buch in erster Linie ein für Anfänger im Rechnen, für Schüler bestimmtes Lehrbuch war.

2) Ich brauche hier absichtlich nicht das Wort „Exponent“, das Andere dafür gesetzt haben, weil es sich nicht mit diesem Begriffe deckt, allerdings braucht EL-QALAṢĀDĪ auch für den Exponenten einer Potenz das Wort *ass*.

3) Ich gebe diese Ziffern wieder, da sie etwas abweichen von den Göbärziffern, die uns M. CANTOR im 1. Bd. seiner *Vorlesungen* vorgeführt hat; die Zeichen für 2 und 3 nähern sich im Verlaufe der Darstellung mehr den Formen in den Klammern, also den heutigen.

4) Vergl. *Le Talkhys d'IBN ALBANNĀ, publ. et trad. par AB. MAHRE. Extrait des Atti dell' Accad. pontif. de' nuovi Lincei, T. XVII, Rome 1865, p. 3 und 8.*

binne am meisten mit der niedersten Stelle, bei der Subtraktion aber, man beginne am meisten mit der höchsten im Gegensatz zur Addition, er hat sich also noch nicht ganz von EL-HASSÄR emanzipiert; dagegen steht EL-QALASÄDİ schon auf dem modernen Boden, er beginnt bei beiden Operationen mit der niedersten Stelle.

[fol. 10^r] Fünfter Teil: „Über die Multiplikation.“ Dieser Teil zerfällt in 10 Unterabteilungen, welche ebenfalls wieder wie die Hauptkapitel und die Teile Kapitel (*bāb*) genannt werden. In diesen werden zuerst einstellige Zahlen miteinander multipliziert, d. h. das Einmaleins wird vollständig in Worten durchgeführt, die Tafel, die sich bei IBN EL-BENNÄ (l. c. p. 17) befindet, fehlt hier; dann folgen Multiplikationen von zweistelligen mit einstelligen Zahlen, von zweistelligen mit zweistelligen, u. s. f. Ich gebe im folgenden eine Stelle aus der 10. Unterabteilung in Übersetzung wieder:

„Wenn zu dir gesagt wird, multipliziere 43 mit 76¹⁾, so setze das 43 in eine Zeile, wie es früher gemacht wurde, hierauf das 76 in eine andere Zeile darunter, und zwar so, daß die erste (niederste) Stelle der untern Zeile unter die letzte (höchste) Stelle der obern Zeile zu stehen kommt, und die zweite Stelle der untern Zahl zur Linken der ersten, nach folgender Weise (Figur): $\begin{array}{r} 43 \\ 76 \end{array}$, hierauf multipliziere die letzte Stelle

der obern Zahl mit der letzten der untern, d. h. 4 mit 7, dies giebt 28, und setze das 8 genau über das 7 in die Zeile über dem 43, und das zwei links von dem 8; dann multipliziere dasselbe 4 mit dem 6 unter ihm, dies giebt 24, setze das 4 über das 4 der obern Zeile und das 2 addiere zu dem 8, das über dem 7 steht, dies giebt 10, lösche also das 8 aus und setze an seine Stelle eine Null, und füge zu dem 2, das zuvorderst ist, 1 hinzu, dies giebt 3, lösche das 2 aus und setze an seine Stelle das 3; hierauf verschiebe die untere Zahl um eine Stelle nach rechts, so daß das 6 unter das 3 und das 7 unter das 4 zu stehen kommt; hierauf multipliziere das 3 der obern Zahl mit dem 7 der untern, dies giebt 21, füge dazu das 4, das über dem 4 der obern Zeile steht, dies giebt 25, dann lösche das 4 aus und setze an seine Stelle das 5, das 2 setze an die Stelle der Null, die vor dem 4 stand; hierauf multipliziere das 3 mit dem 6 unter ihm, dies giebt 18, setze das 8 über das 3 der obern Zeile²⁾, und füge das 1 zu dem 5 hinzu, dies giebt 6, lösche das 5 aus, und setze an seine Stelle das 6, so ist das Resultat der Multiplikation 3268.“

Da das Auslöschen der Ziffern im Druck nicht leicht zu bewerk-

1) Alle Zahlen sind mit Worten ausgeschrieben, nur der ursprüngliche Ansatz der beiden Faktoren und das Schlusresultat sind in Hocharziffern hingeschrieben.

2) Der Text hat hier unrichtig „lösche das 3 aus und setze an seine Stelle das 8“.

stelligen ist, so lasse ich die Darstellung dieses Multiplikationsbeispiels in Ziffern weg, es kann sich diese Jeder leicht selbst konstruieren. Ich will hier nur darauf aufmerksam machen, daß dieses Multiplikationsverfahren mit dem von EL-QALASĀDĪ¹⁾ zuerst beschriebenen im wesentlichen übereinstimmt, doch kennt dieser kein Auslöschen der Ziffern mehr, sondern setzt die einzelnen Teilprodukte über einander und erhält durch Addition derselben das Schlusresultat. EL-HAṢṢĀR hat also wohl noch mit der Staubtafel gerechnet, wo das Auslöschen der Ziffern leicht auszuführen war, EL-QALASĀDĪ wahrscheinlich nicht mehr, sondern nur auf Papier. Eigentümlich ist es auch, daß EL-HAṢṢĀR in diesem so ausführlichen Rechenbuch die Netzmethode der Multiplikation nicht erwähnt, vielleicht ist sie bloß durch die Abschreiber weggelassen worden.

[fol. 14^a] Sechster Teil: „Über die Benennung, d. i. die Teilung des Kleineren durch das Größere.“) Wisse, daß diesem Kapitel eine Einleitung vorhergehen muß, deren Kenntnis für den Studierenden notwendig ist; dieses Kapitel ist von großem Nutzen in allen Rechnungsoperationen, mit seiner Hilfe wird bei jeder ausgeführten Multiplikation die Richtigkeit derselben gefunden, ferner erkannt, ob eine Zahl zusammengesetzt oder nicht zusammengesetzt sei; eine zusammengesetzte Zahl ist nämlich eine solche, welche aus der Multiplikation einer zusammengesetzten Zahl mit einer zusammengesetzten oder nicht zusammengesetzten entstanden ist²⁾; die nicht zusammengesetzte Zahl ist eine solche, die keinen Teiler außer Eins besitzt. — Einleitung in die Benennung³⁾: Ihr Studium (wörtl. „Verehrung“) ist von Nutzen für den Studierenden. Wisse, daß jede Zahl, die keine Einer hat, durch 10 teilbar ist (wörtl. „einen Zehntel besitzt“); ferner, daß die Zahlen in gerade und ungerade eingeteilt werden. Was die gerade Zahl anbetrifft, so wird sie entweder durch wiederholte Subtraktion von 9 erschöpft (*inṭaraha* = weggeworfen), dann ist sie durch 9 teilbar, oder sie wird nicht erschöpft und der Rest ist 3 oder 6, dann ist sie durch 6 teilbar; bleibt aber ein anderer Rest, so subtrahiere von der Zahl wiederholt 8, wird sie erschöpft, so ist sie durch 8 teilbar, wenn nicht und der Rest ist 4, so ist sie durch 4 teilbar; bleibt [fol. 14^b] aber ein anderer Rest, so subtrahiere von der Zahl wiederholt 7, wird sie

1) *Traduction du traité d'arithmétique d'Abou'l Hasan Ali b. Mohammed Alkalçadi, par F. Woepcke*; Extrait des *Atti dell' Accad. pontif. de' nuovi Lincei*, T. XII, Rome 1859, p. 9 und 10.

2) In einem neueren Rechenbuch, verfaßt von BUTRUS EL-BISTĀNĪ, Beirut 1859 (p. 165), finde ich folgende Bemerkung: „Diese (Art der) Teilung nennen die Magrebiner (Westaraber) „die Benennung“, die Perser aber „das Verhältnis“ (*el-nisbe*).“

3) Es ist dies nicht korrekt ausgedrückt, der Text scheint hier verdorben zu sein.

4) Im Text steht hier wohl unrichtig „Multiplikation“.

erschöpft, so ist sie durch 7 teilbar, wenn nicht, so ist sie nur durch 2 teilbar. — Was die ungerade Zahl anbetrifft, so wird sie entweder durch wiederholte Subtraktion von 9 erschöpft, dann ist sie durch 9 teilbar, oder sie wird nicht erschöpft und der Rest ist 3 oder 6, dann ist sie durch 3 teilbar; bleibt aber ein anderer Rest, so subtrahiere von der Zahl wiederholt 7, wird sie erschöpft, so ist sie durch 7 teilbar, wenn nicht, so versuche es mit den stummen Teilen¹⁾, du findest es, so Gott will; merke dir aber noch, daß jede Zahl, die am Ende ein 5 hat, durch 5 teilbar ist. — Kapitel der Neunersubtraktion: Wisse, daß bei (wiederholter) Subtraktion von 9 von jedem Zehner 1, von jedem Hunderter 1, von jedem Tausender 1 übrig bleibt; deshalb nimmst du jede Zahl (d. h. Ziffer) nach ihrem Namen (ohne Stellenwert)²⁾, wie es gemacht wurde bei der Multiplikation.³⁾ — Kapitel der Achtersubtraktion: Wisse, daß bei (wiederholter) Subtraktion von 8 von jedem Zehner 2, von jedem Hunderter 4 übrig bleibt, daß die geraden Hunderter durch 8 teilbar sind, also auch die Tausender und was nach ihnen kommt.⁴⁾ — Kapitel der Siebnersubtraktion: Wisse, daß bei (wiederholter) Subtraktion von 7 von jedem Zehner 3, von jedem Hunderter 2, von jedem Tausender 6, von jedem Zehntausender 4, von jedem Hunderttausender 5, von jedem Millionier 1, von jedem Zehnmillionier [fol. 15^v] wieder 3 übrig bleibt, d. h. es kehren nach je zwei *Tekrûr*⁵⁾ die gleichen Reste wieder; wisse also, daß bei jedem Tausender, dessen Wiederholungszahl (*tekrûr*) ungerade ist, der Rest 6 beträgt, dagegen bei jedem Tausender, dessen Wiederholungszahl gerade ist, der Rest 1 ist, daß ferner bei jedem Zehntausender mit ungerader Wiederholungszahl der Rest 4, bei jedem Zehntausender mit gerader Wiederholungszahl 3 beträgt“, etc. — Der Schluß dieser Einleitung lautet: „Wisse ferner, daß eine Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist, es auch nicht durch 4 und 8 sein kann; daß eine Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist, es auch nicht durch 6 und 9 sein kann, und daß jede Zahl, die nicht durch 5 teilbar ist, es auch nicht durch 10 sein kann.“

1) So muß es heißen nach *EL-QALASÂDI*, d. h. „versuche, ob 11, 13 etc. Teiler der betr. Zahl seien“, und nicht *f'il-uchrâ* (= mit der andern), wie es im Text *EL-HASSÂN* steht.

2) Vgl. *IBN EL-BENNÂ* (l. c. p. 9), wo es heißt: „tu prends la valeur des sièges, comme s'ils étaient des unités.“

3) d. h. bei der Anwendung der Neunerprobe in der Multiplikation.

4) Hier und bei der Siebnersubtraktion fehlt die Anwendung dieser Restregeln auf die Bestimmung des Restes einer mehrstelligen Zahl, es fehlt auch am Schlusse dieser Einleitung die Anwendung des Gesagten auf die verschiedenen Proben.

5) d. h. „Wiederholung“; so heißt jede Gruppe von je 3 Stellen einer Zahl; *M. CANTON* hat „*takarrur*“, was auch „Wiederholung“ bedeutet, allein sowohl *IBN EL-BENNÂ* als auch *EL-HASSÂN* haben *tekrûr*.

„Nach dieser Einleitung kehren wir zum Kapitel der Benennung zurück, d. h. zur Bildung des Verhältnisses einer kleineren Zahl zu einer größeren, (zur Untersuchung) ob jene ein Teil oder mehrere von dieser sei. Wenn z. B. zu dir gesagt wird, benenne eins nach fünfzehn, so hast du nun gelernt, daß fünfzehn eine zusammengesetzte [fol. 15^b] Zahl ist, und zwar entstanden aus der Multiplikation von drei mit fünf, also ist drei ein Fünftel von ihr, und fünf ein Drittel von ihr, und eins ist ein Drittel von drei, also ist eins der Drittel des Fünftels von fünfzehn. Es ist notwendig, daß hier noch einleitend etwas hinzugefügt werde; ich sage also: das Verhältnis von 1 zu 2 heißt ein Zweiteln, dasjenige von 1 zu 3 ein Drittel, das von 2 zu 3 zwei Drittel, das von 1 zu 4 ein Viertel, das von 2 zu 4 zwei Viertel oder ein Zweiteln“, etc. . . . So geht es fort bis zu neun Zehnteln, womit diese Einleitung beendet ist. Dann folgt: „Ich sage also, daß eins ein Drittel des Fünftels von fünfzehn ist, wenn du nun diese Benennung durch Gobarzeichen (wörtl. „durch den Gobar“) darstellen willst, so schreibe dies so: $\frac{2}{5} \frac{1}{3}$ “¹⁾ Willst du nun eine andere Zahl nach 15 benennen, so setze sie über das 3 (den einen Faktor von 15), dann suche eine Zahl, die mit 3 multipliziert entweder die gegebene Zahl ergibt, oder ein Produkt, das von jener Zahl subtrahiert einen Rest kleiner als 3 läßt. Soll z. B. 7 nach 15 benannt werden, so setze das 7 über das 3, hierauf suche eine Zahl, die mit drei multipliziert entweder 7 ergibt, oder eine Zahl, die um weniger als 3 kleiner ist als 7, du findest diese Zahl gleich 2, nun setze dieses 2 über das 5, multipliziere 2 mit 3, dies giebt 6, subtrahiert von 7 bleibt 1, dieses setze nach dem 2 über das 3, so daß du nun 2 über 5 und 1 über 3 hast; ziehe also eine Linie, schreibe unter sie das 5 und das 3, und zwar das 5 rechts vom 3, dann über das 5 das 2 und über das 3 das 1, so wird dies ausgesprochen: zwei Fünftel und ein Drittel eines Fünftels; du benennst also immer das, was über dem größern Faktor des Nenners steht, nach diesem, und hierauf das, was über dem kleinern Faktor steht, nach diesem und dem größern, der ihm vorangeht; geschrieben wird es:

$$\frac{2}{5} \frac{1}{3}$$

1) Diese Form ist im Text weggelassen (wahrscheinlich durch die Abschreiber), an ihrer Stelle steht eine überflüssige Darstellung, welche klar machen soll, daß man die Zerlegung von 15 in 5 mal 3 in der Tafel des Einmaleins (die aber bei el-Ḥaṣṣār fehlt) finden könne.

2) Ich gebe diese Brüche und alle folgenden in unserer Schreibweise; nach arabischer, wo von rechts nach links gelesen wird, ist also der obige Bruch geschrieben $\frac{1}{3} \frac{2}{5}$; bekanntlich kann dies auch in Form eines aufsteigenden Kettenbruches geschrieben werden, nämlich $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ (vgl. CANTOR, Vorlesungen I, 764—765, 2. Aufl.).

hierauf verdoppele die Zahl, die du mit sich selbst multipliziert hast, und stelle das Resultat um eine Stelle weiter nach rechts, dann suche eine Zahl, die du zur Rechten der vorigen setzest, und die, wenn du sie mit der verdoppelten Zahl multiplizierst und ebenso mit sich selbst, alles verschwinden macht, was von der ursprünglichen Zahl übrig geblieben, dann [fol. 23^b] ist das Verfahren zu Ende. Willst du z. B. die Wurzel aus 625 haben, so bestimme zuerst die oberste Stelle, welche eine Wurzel hat, diese ist 6, suche dann eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert, das 6 verschwinden macht, oder einen Rest übrig läßt, der kleiner ist als sie (?), du findest diese Zahl gleich 2, multipliziere dieses mit sich selbst, giebt 4, subtrahiere dieses von 6, bleibt 2, setze dieses an die Stelle des 6; hierauf verdoppele das 2, das du mit sich selbst multipliziert hast, dies giebt 4, und setze es um eine Stelle weiter nach rechts unter das (zweite) 2; dann suche eine Zahl, die du unter das 5 setzest, und die mit dem 4 multipliziert und ebenso mit sich selbst multipliziert, die noch vorhandene Zahl verschwinden macht, du findest diese Zahl gleich 5, multipliziere sie also mit 4, giebt 20, dies von 22 subtrahiert bleibt 2, dann multipliziere 5 mit sich selbst, giebt 25, subtrahiere dieses von den 25, welche über ihm stehen, so verschwinden diese; nun halbiere die vorher verdoppelte Zahl wieder und lasse die Hälfte an derselben Stelle stehen, so hast du als Wurzel 25.“

Da hier noch Ziffern durchgewischt werden, so ist die Darstellung des Verfahrens durch Ziffern etwas verschieden von der des QALASÄDI (l. c. p. 38), nämlich folgendermaßen: Zuerst steht die Zahl 625 da, nachdem das Quadrat von 2¹⁾ von 6 abgezogen ist und der Rest 2 an Stelle des 6 gesetzt ist, hat man die Zahl 225 auf der Tafel; das 2 wird verdoppelt und das 4 unter das zweite 2 gesetzt, also:
$$\begin{array}{r} 225 \\ 4 \end{array}$$
 in 22 geteilt giebt 5, dieses wird hinter das 4 gesetzt, also:
$$\begin{array}{r} 225 \\ 45 \end{array}$$
 nun 5 mal 45 von 225 abgezogen, bleibt Null, dann zuletzt das 4 halbiert, und an seine Stelle die Hälfte 2 gesetzt, so hat man die Wurzel 25.

[fol. 24^a] Die nächste Wurzelausziehung ist diejenige aus 583696, die Darstellung des Verfahrens durch Ziffern ist nach der Beschreibung folgende: zuerst steht die Zahl 583696 da, nachdem das Quadrat von 7 von 58 abgezogen ist und der Rest 9 an Stelle von 58 gesetzt ist, steht die Zahl 93696 da; hierauf verdoppelt man das 7, giebt 14, und setzt dieses unter das 93, also:
$$\begin{array}{r} 93696 \\ 14 \end{array}$$
 dann dividiere man 93 durch 14, giebt 6, und

1) Das irgendwohin, vielleicht über das 6, geschrieben wird, EL-HASSAN sagt nichts davon; das Hinschreiben desselben ist aber auch keineswegs notwendig, wie man am Schlusse der Darstellung sieht.

setze dieses hinter das 14, also: $\begin{array}{r} 93696 \\ 146 \end{array}$, multipliziere 146 mit 6, und ziehe das Resultat von 936 ab, bleibt 60, welches an die Stelle von 936 gesetzt wird, also hat man jetzt $\begin{array}{r} 6096 \\ 146 \end{array}$; dann verdoppele man das 6 (von 146), giebt 12, füge den Zehner 1 von diesem zu 4 hinzu, giebt 5, also hat man jetzt 152, dieses setze man unter das 146, indem man es um eine Stelle nach rechts verschiebt, so hat man nun auf der Tafel: $\begin{array}{r} 6096^1) \\ 146 \\ 152 \end{array}$;

hierauf suche man, wie oft 152 in 609 enthalten ist, es ist dies 4 mal, setze das 4 hinter das 2, also: $\begin{array}{r} 6096 \\ 146 \\ 1524 \end{array}$ multipliziere nun 1524 mit 4, und

subtrahiere das Ergebnis [fol. 25^a] von 6096, der Rest ist Null; hierauf halbiere man alles, was man verdoppelt hat, d. i. 152, und setze die Hälfte 76 an seine Stelle, so hat man, wenn man das 4 dahinter dazu nimmt, die Wurzel 764.

Wie man sieht, kann dieses Verfahren auf der Staubtafel rasch und mit wenig Ziffern durchgeführt werden; es zeigt auch einige Ähnlichkeit mit dem heutigen insofern, als das jeweilige Divisionsergebnis hinter den Divisor gesetzt wird.

Nun folgt eine kurze Auseinandersetzung des Verfahrens der Wurzel- ausziehung aus Zahlen, die Nullen am Ende haben und als Beispiel ist die Wurzel aus 10000 gewählt. Am Schlusse dieses Kapitels heisst es dann: „Nun sind wir am Ende unserer zehn Kapitel (über die ganzen Zahlen) angelangt, und beginnen nun mit der Multiplikation²⁾ [fol. 25^b] der Brüche in Göbārbezeichnung; dieses Kapitel haben wir in 72 (Unter-) Kapitel³⁾ geteilt.“

1. Teil: „Über die Multiplikation der Brüche.“ Dieser erste Teil bildet gleichsam eine Einleitung in das Kapitel über die Brüche, und sollte daher einen andern Titel tragen, etwa: „Über die verschiedenen Arten von Brüchen und ihre Schreibweise“. Zuerst folgen nun die einfachen Brüche, die ersten neun Stammbrüche, ihre Namen und ihre Schreibweise, also $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{10}$; dann sagt der Verfasser: „Willst du nun zwei Drittel darstellen, so schreibe (in dem Brüche $\frac{1}{2}$) an die Stelle des

1) Dieses Zahlenbild steht nicht mehr im Text, ich habe es aus letzterem rekonstruiert, vielleicht wurde auch das 146 durchgewischt, und das 152 unmittelbar unter das 609 gesetzt.

2) Eigentümlicherweise kommt zuerst die Multiplikation und erst nachher die Addition und Subtraktion der Brüche; wir können nicht entscheiden, ob dies auch die Anordnung des Originals war.

3, Ich werde diese in der Folge auch wieder „Teile“ nennen.

1 ein 2 und an diejenige des 2 ein 3, also $\frac{2}{3}$, u. s. f. „Zu den einfachen Brüchen gehören auch die stummen¹⁾ Brüche (d. h. solche, deren Nenner eine der Primzahlen von 11 an ist), z. B. $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{5}{17}$ etc., arabisch ausgedrückt: „ein Teil von elf“²⁾, ein Teil von dreizehn, zwei Teile von elf“ etc.

Nun kommt er zu den Brüchen, deren Nenner zusammengesetzte Zahlen sind, und nimmt als erstes Beispiel einen Zwölftel, dies schreibt er: $\frac{1}{6-2}$ und liest es „ein Zweitel eines (des) Sechstels“; er fügt hierauf hinzu [fol. 26v]: „das ist die Darstellung (Figur) eines Bruchbruches (*kesru kesrin*); wenn du aber einen Bruch mit (und) Bruchbruch darzustellen hast, so schreibe die Nenner unter einen (horizontalen) Strich und über jeden einzelnen derselben die ihm zukommenden Teile (wörtl. „seinen erwähnten Teil“), z. B. wenn zu dir gesagt wird, stelle drei Fünftel und einen Drittel eines Fünftels dar, so schreibe dies so: $\frac{3-1}{5-3}$.“ Als zweites Beispiel folgt: $\frac{4-3}{13-11}$ = vier Dreizehntel und drei Elftel eines Dreizehntels (= $\frac{47}{143}$).

Nun folgen 71 Teile (Kapitel), in denen Multiplikationen von je zwei Faktoren ausgeführt werden, die alle möglichen Kombinationen aus den vier Bestandteilen: ganze Zahlen, einfache Brüche, Bruchbrüche und Brüche mit Bruchbrüchen enthalten. Es ist dies die umfangreichste³⁾ aller bisher bekannten Darstellungen der Bruchrechnung (insbesondere der Multiplikation) in arabischen Rechenbüchern, so weitschweifend, daß sie ermüdend wirkt, so unhandlich und verwirrend für den Praktiker, daß eine kürzere Bearbeitung des hier Gebotenen eine absolute Notwendigkeit war. Es würde sich kaum der Mühe lohnen, wenn ich alle diese Fälle zur Darstellung bringen wollte, aber einige typische Beispiele muß ich doch herausheben, um den Leser mit den mühsamen und nach unseren Begriffen komplizierten Bruchrechnungen aus der Zeit EL-HASSARS bekannt zu machen.

[fol. 27v] 2. Teil: „Über die Multiplikation eines⁴⁾ Bruches mit einer⁴⁾ ganzen Zahl.“ Wenn $\frac{5}{6}$ mit 10 multipliziert werden soll, so wird dies so angeschrieben: $\frac{5}{6}$; dann wird gesagt, man multipliziere 5 mit 10, giebt 50, und teile dies durch 6, giebt $8\frac{2}{3}$ (wird nicht abgekürzt); hierzu folgt die Siebnerprobe.

1) Im Text steht hier nur *el-ağsā'* (= die Teile); vgl. auch den *Talchiz*, l. c. p. 20.

2) Zu ergänzen: „Teilen eines Ganzen“ (oder der Einheit).

3) Die Multiplikation umfaßt 46 Blätter, dann folgen noch auf 42 Blättern, allerdings mit Algebraischem und Reihensummierung vermischt, die Addition, Subtraktion und Division der Brüche.

4) Der Verfasser braucht immer den bestimmten Artikel.

3. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches samt Bruchbruch mit einer ganzen Zahl.“ Wenn $\frac{1}{5}$ und die Hälfte von $\frac{1}{5}$ mit 12 multipliziert werden soll, so [fol. 28^a] schreibe man dies so: $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$; dann wird gesagt:

„Beginne in der obern Linie und multipliziere das 1 über dem 5 mit dem 2 unter dem Strich und addiere zum Produkt das 1 über dem 2, dies giebt 3, dies multipliziere mit 12, giebt 36, und dividiere dies durch das Produkt der Nenner¹⁾, d. h. durch 10, dies giebt $3\frac{3}{5}$.“ Folgt Siebnerprobe.

4. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruchbruches mit einer ganzen Zahl.“ Wenn der Drittel eines Siebentels mit 25 multipliziert werden soll, so schreibe man dies so: [fol. 28^b] $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}$; dann beginne man in der

obern Zeile und multipliziere das 1 mit 25, und dividiere das Resultat durch 21 (durch 7 und 3), dies giebt: $1\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}$ ($= 1\frac{1}{21}$). Folgt Siebnerprobe.

5. Teil: „Über die Multiplikation zweier verschiedener (einfacher) Brüche mit einer ganzen Zahl.“ Wenn $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ mit 15 multipliziert werden soll, so schreibe man dies so: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$, dann beginne man in der obern

Zeile und multipliziere das 3 mit 5 und das 4 mit 4, und addiere die beiden Produkte, dies giebt 31, dies multipliziere man mit 15, giebt 465, und teile dieses durch 4 und durch 5, dies giebt: $23\frac{1}{4}$ ($= 23\frac{5}{20}$).⁴⁾

Ich habe diese vier unmittelbar aufeinander folgenden Teile wiedergegeben, um die Regellosigkeit der Anordnung zu zeigen, die das ganze Werk charakterisiert; jedermann würde hier den vierten Teil vor dem dritten erwarten und vielleicht auch den fünften vor dem dritten; auch wäre für die Ausführung der Rechnung des fünften Teils das Vorausgehen der Addition der Brüche notwendig.

[fol. 30^a] 9. Teil: „Über die Multiplikation zweier verschiedener (einfacher) Brüche mit einer ganzen Zahl und einem Bruche.“

Beispiel: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$.

Gang der Ausrechnung:

$$\frac{(3 \cdot 5 + 4 \cdot 4) (5 \cdot 6 + 5)}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1005}{6 \cdot 5 \cdot 4} = 9\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} (= 9 + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{120} = 9\frac{5}{120}).$$

Hier folgt zum ersten Mal in diesem Kapitel die allgemeine Rech-

1) Der Text hat einfach „durch die Nenner“, d. h. nacheinander durch 5 und durch 2.

2) Im Text steht: $3\frac{5}{5} \cdot \frac{0}{2}$, d. h. $3 + \frac{3}{5} \cdot \frac{0}{2 \cdot 5}$.

3) Das bloße Nebeneinanderstellen zweier Brüche bedeutet ihre Addition.

4) Die Abkürzung $23\frac{1}{4}$ ist nicht angegeben.

nungsregel für diesen Fall, was sich noch öfters wiederholt, immerhin aber in der Mehrzahl der Fälle fehlt.

[fol. 32^a] 13. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches samt Bruchbruch mit einer ganzen Zahl und einem Bruche samt Bruchbruch.“

Beispiel: $8\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2}$.

Gang der Ausrechnung:

$$\frac{(5 \cdot 2 + 1) [(8 \cdot 7 + 5) 5 + 1]}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{3366}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2} = 8\frac{3}{7 \cdot 5 \cdot 2} \text{ 1) } (= 8 + \frac{0}{7} + \frac{0}{42} + \frac{3}{210} + \frac{0}{120} = 8\frac{3}{210}).$$

[fol. 41^a] 28. Teil: „Über die Multiplikation eines (einfachen) Bruches mit einem (einfachen) Bruche.“²⁾ Es sei $\frac{7}{3}$ mit $\frac{9}{10}$ zu multiplizieren, man schreibe dies so: $\frac{7}{3}$; man multipliziere nun das 7 mit dem 9, dies giebt

63, und teile dies durch 8 und 10, dies giebt: $\frac{7}{10} \cdot \frac{7}{3}$ ($= \frac{63}{30}$). Hier folgt, wo man es am ehesten erwarten würde, keine allgemeine Rechnungsregel für diesen Fall.

[fol. 47^b] 41. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches von einer ganzen Zahl und einem Bruche mit einem ähnlichen Ausdruck.“³⁾ Soll z. B. $\frac{2}{3}$ von $5\frac{5}{6}$ mit $\frac{6}{7}$ von $8\frac{4}{9}$ multipliziert werden, so schreibe man dies so:

$$\frac{2}{3} \cdot 5\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot 8\frac{4}{9} \text{ 4)}.$$

Das Resultat der Multiplikation ist: $28\frac{1 \cdot 2 \cdot 10}{3 \cdot 7 \cdot 3} (= 28\frac{20}{378})$. Diese Aufgabe und eine ganze Reihe der noch folgenden können, wie der Verfasser selbst angiebt, auf zwei und mehr verschiedene Arten aufgefaßt werden; als solche Beispiele gebe ich die beiden folgenden:

[fol. 55^b] 55. Teil: „Über die Multiplikation einer ganzen Zahl und eines Bruches und einer ganzen Zahl und eines Bruches mit einem ähnlichen Ausdruck.“

Beispiel: $3\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{3} \cdot 4\frac{3}{4} \cdot 6\frac{4}{5}$.

Nach dem Wortlaut des Titels dieses Teils ist allerdings nur folgende Auffassung zulässig: $(3\frac{1}{3} + 5\frac{1}{3}) (4\frac{3}{4} + 6\frac{4}{5})$ und nach dieser ist das Ergebnis: $102\frac{0 \cdot 0 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} (= 102\frac{3}{120})$; nach der arabischen Schreibweise des Zahlen-

1) So geschrieben, damit alle Nenner, die in der Aufgabe vorkommen, auch im Schlusresultat figurieren; es könnte einfacher geschrieben werden: $8\frac{1}{7 \cdot 5 \cdot 2}$ ($= 8\frac{1}{70}$); auch sollten von rechts wegen über 7, 6 und 2 Nullen stehen, bisweilen aber sind diese weggelassen.

2) Auch diesen Fall würde man wohl früher erwarten.

3) Der Text hat „mit dem gleichen“.

4) Wenn ein Bruch vor einer ganzen oder gemischten Zahl steht, so bedeutet dieses die Multiplikation beider, also nach unserer Schreibweise: $(\frac{2}{3} \cdot 5\frac{5}{6}) (\frac{6}{7} \cdot 8\frac{4}{9})$

beispiels aber kann die Aufgabe auch so aufgefaßt werden: $(3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \frac{1}{3})$
 $(4 + \frac{3}{4} \cdot 6 \frac{1}{5})$; dann wäre das Resultat $= 51 \frac{3}{5} (= 51 \frac{11}{30})$.

[fol. 59^v] 58. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches und einer ganzen Zahl und zweier einfacher Brüche und einer ganzen Zahl und eines Bruches mit einem ähnlichen Ausdruck.“

Beispiel: $\frac{3}{4} \cdot 5 \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot 3 \frac{2}{5}$.
 $\frac{3}{8} \cdot 4 \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{8} \cdot 2 \frac{3}{11}$

Nach dem Wortlaut des Titels könnte diese Aufgabe nur so aufgefaßt werden: $(\frac{3}{4} + 5 + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} + 3 + \frac{2}{5}) (\frac{3}{8} + 4 + \frac{1}{7} + \frac{3}{8} + 2 + \frac{3}{11})$; der Verfasser bemerkt aber, man könne die Aufgabe auf verschiedene Arten auffassen, je nachdem man die beiden Faktoren in 2, 3, 4 oder 5 Summanden zerlege, z. B.

in 2 Summanden: $(\frac{3}{4} \cdot 5 \frac{1}{2}) + (\frac{5}{8} \cdot 3 \frac{2}{5})$
 $(\frac{3}{8} \cdot 4 \frac{1}{7}) + (\frac{3}{8} \cdot 2 \frac{3}{11})$ 1)

in 3 Summanden: $(\frac{3}{4} \cdot 5) + (\frac{1}{2} + \frac{5}{8}) 3 + (\frac{2}{5})$
 $(\frac{3}{8} \cdot 4) + (\frac{1}{7} + \frac{3}{8}) 2 + (\frac{3}{11})$

oder anders: $(\frac{3}{4} \cdot 5 \frac{1}{2}) + (\frac{5}{8}) + (3 \frac{2}{5})$
 $(\frac{3}{8} \cdot 4 \frac{1}{7}) + (\frac{3}{8}) + (2 \frac{3}{11})$

in 4 Summanden: $(\frac{3}{4} \cdot 5) + (\frac{1}{2}) + (\frac{5}{8}) + (3 \frac{2}{5})$
 $(\frac{3}{8} \cdot 4) + (\frac{1}{7}) + (\frac{3}{8}) + (2 \frac{3}{11})$ etc.

Man sieht aus diesen beiden Beispielen, wie das Fehlen von Additions- und Multiplikationszeichen die Rechnungsaufgaben mehrdeutig machen mußte; um so befremdender ist es, daß man nicht zur Einführung solcher Zeichen gekommen ist. Das komplizierteste Beispiel solcher Bruchrechnungen enthält der

[fol. 61^v] 59. Teil: nämlich $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 2 \frac{3}{8} \cdot 4 \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{3}$ zu multiplizieren mit einem ähnlichen Ausdruck. Diese Aufgabe läßt natürlich noch viel mehr Auffassungen zu, auf deren Wiedergabe ich aber verzichte.

[fol. 62^v] Vom 60. Teil an tritt noch eine weitere Bruchform auf, die EL-ḤAṢṢĀR „den Bruch mit Weglassung des »und« oder „den Bruch genommen von einem Bruch“ nennt.“ Er schreibt diese Form ganz gleich wie den Bruch samt Bruchbruch, es bedeutet nun aber z. B. $\frac{3}{7} \frac{3}{5}$ nicht mehr $\frac{3}{7}$ und $\frac{3}{5}$, sondern $\frac{3}{7}$ von $\frac{3}{5}$, d. h. $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{35}$. EL-QALĀṢĀDĪ unterscheidet diese Bruchform von der erstern (Bruch samt Bruchbruch)

1) Ich setze die beiden Faktoren nach arabischer Schreibweise untereinander.

2) Bei Ibn el-Bennā (l. c. p. 20) heißen diese Brüche „des fractions subdivisées“, bei el-Qalāṣādī (l. c. p. 20) „des fractions divisées en partie“; die Weglassung des „und“ ist am letztern Orte ebenfalls erwähnt.

dadurch, daß er nach WOEPCKE¹⁾ vertikale Striche zwischen die einzelnen Brüche setzt, also: $\frac{3}{7} \frac{1}{5}$, $\frac{7}{9} \frac{1}{5} \frac{1}{4}$ etc.²⁾ Wir nehmen an, es habe auch EL-HASSÄR auf irgend eine Weise die beiden Formen unterschieden, diese Unterscheidung aber sei von den Abschreibern nicht berücksichtigt worden. Ich bediene mich im folgenden Beispiel der Schreibweise EL-QALASÄDİS.

[fol. 67^a] 67. Teil: „Über die Multiplikation einer ganzen Zahl und eines Bruches mit Weglassung des »und« und eines einfachen Bruches mit einem ähnlichen Ausdruck.“

Beispiel: $2 \frac{3}{7} \frac{1}{5} \frac{2}{3}$.

d. h. in unserer Schreibweise: $(2 \frac{9}{35} + \frac{2}{3}) (3 \frac{15}{21} + \frac{1}{2})$.

Resultat: $12 \frac{9}{8} \frac{2}{5} \frac{9}{2} \frac{2}{2}$ (= $12 + \frac{9}{8} + \frac{3}{5} + \frac{2}{240} = 12 \frac{17}{240}$).

[fol. 69^a] 70. Teil: Dieser enthält die Aufgabe folgendes Produkt zu berechnen:

$$1 \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{1}{3} \cdot 1 \frac{1}{4} \cdot 1 \frac{1}{5} \cdot 1 \frac{1}{6} \cdot 1 \frac{1}{7} \cdot 1 \frac{1}{8} \cdot 1 \frac{1}{9} \cdot 1 \frac{1}{10}.$$

Resultat = $5 \frac{1}{2}$.

Die beiden letzten Teile (71. und 72.) dieses Kapitels handeln über die Multiplikation von Brüchen mit Ausschließung⁴⁾ (*istiṭnā'*). Wir geben das Beispiel des

[fol. 70^a] 71. Teils: $\frac{3}{4}$ illā $\frac{1}{6}$
 $\frac{1}{8}$ illā $\frac{1}{3}$.

d. h. in unserer Schreibweise: $(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}) (\frac{4}{5} - \frac{1}{3})$.

Resultat = $\frac{2}{9} \frac{3}{8} \frac{3}{6}$ (= $\frac{2}{9} + \frac{3}{12} + \frac{3}{360} = \frac{98}{360}$).

EL-HASSÄR faßt aber die Aufgabe noch anders auf, nämlich:

$$(\frac{3}{4} - \frac{1}{6} \text{ von } \frac{3}{4}) (\frac{4}{5} - \frac{1}{3} \text{ von } \frac{4}{5}) = (\frac{3}{4} - \frac{1}{8}) (\frac{4}{5} - \frac{1}{15}) = \frac{1}{3}.$$

[fol. 72^a] Am Schlusse dieses Kapitels sagt der Verfasser: „Was wir nun über die Multiplikation der Brüche gesagt haben, sollte für den, der es aufmerksam studiert, genügen; wir haben weggelassen, was jeder schon wissen muß (wörtl. „dessen Nichtwissen für Keinen möglich ist“), und haben die Weitläufigkeit vermieden (!), was wir erwähnt haben, findet in dem was nachher kommt, jeweilen sein Analoges, etc.“

Drittes⁵⁾ Kapitel: „Über die Verwandlung (*ṣarf*) der Brüche.“⁶⁾

1) EL-QALASÄDİ, l. c. p. 29.

2) In der Feser Ausgabe des QALASÄD' (v. J. 1315, 1897/98) sind diese Brüche geschrieben: $\frac{7}{8} \ominus \frac{4}{5} \ominus \frac{3}{4}$.

3) Könnte einfacher $12 \frac{9}{8} \frac{2}{5}$ geschrieben werden.

4) Bei Ibn EL-BENNA (l. c. p. 20) „des fractions séparées en deux par un moins“.

5) Dieses Wort fehlt im Text; überhaupt hört von hier an jede Zählung von Kapiteln auf.

6) Vgl. den *Tulchīs*, l. c. p. 22 („sur la conversion“) und EL-QALASÄDİ, l. c. p. 36 („de la transformation“).

Hier handelt es sich darum, einen Bruch in einen andern mit größerem oder kleinerem Nenner zu verwandeln; es wird bemerkt, daß das erstere das bessere (wohl nützlichere) sei, was an seiner Stelle, nämlich bei der Addition und Subtraktion der Brüche, sich zeigen werde. Dieses Kapitel zerfällt in fünf Unterkapitel oder Teile, ich gebe davon die zwei ersten:

[fol. 72^v] 1. Teil: Es sei $\frac{5}{6}$ in Siebentel zu verwandeln, man schreibe dies so: $\frac{5}{6}$. Dann multipliziere man das 5 mit dem 7, dies giebt 35, und

teile dies durch die beiden Nenner (d. h. zuerst durch 6 und nachher durch 7), dies giebt $\frac{35}{42}$ ($= \frac{5}{6} + \frac{5}{42} = \frac{35}{42}$). Es folgt die allgemeine Regel für diesen Fall.

2. Teil: Es sei $\frac{5}{6}$ in Zehntel zu verwandeln, man schreibe dies so: $\frac{5}{6}$. Dann bestimme man wie früher den Zähler von $\frac{5}{6}$, er ist 11,

multipliziere ihn mit 10, giebt 110, und teile dies (nach einander) durch die Nenner 2, 6 und 10, dies giebt: $\frac{110}{120}$ ($= \frac{11}{12} + \frac{1}{60} = \frac{55}{60}$).

[fol. 75^v] *Viertes Kapitel*: „Über die Addition der Brüche.“ Dasselbe zerfällt in 22 Teile, deren Inhalt aber ein ziemlich bunter ist; neben Additionen von Brüchen treten hier auch algebraische Aufgaben auf, die auf Gleichungen ersten und zweiten Grades führen, ebenso Summationen von Reihen, die man wohl eher im Kapitel über die ganzen Zahlen erwartet hätte. Aus der Addition von Brüchen gebe ich folgende zwei Beispiele:

[fol. 76^v] 3. Teil: „Addition eines Bruches samt Bruchbruch zu zwei einfachen Brüchen.“

Beispiel: $\frac{5}{6} - \frac{1}{9}$.

Resultat: $2\frac{6}{9} - \frac{1}{9} (= 2 + \frac{5}{9} + \frac{1}{9} = 2\frac{49}{9})$.

[fol. 78^v] 8. Teil: „Addition eines Bruches von einer ganzen Zahl zu einem ähnlichen Ausdruck.“

Beispiel: $\frac{2}{3} + 7$.

d. h. in unserer Schreibweise: $\frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{7}{3} \cdot 9$.

Gang der Ausrechnung: $\frac{2 \cdot 7 \cdot 9 + 7 \cdot 9 \cdot 3}{3 \cdot 9} = 12\frac{4}{3}$ ($= 12 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 12\frac{13}{3}$).

[fol. 79^v] „Anderer Teil (Kap.) aus der Addition der Brüche: über die Addition der Vermögen. Wenn zu dir gesagt wird, es giebt ein gewisses Vermögen (*māl*), addiere seinen dritten Teil zu seinem vierten, so erhältst du 21 Dirhem. Die Auflösung ist folgende: 3 und 4 sind in 12 enthalten, du nimmst nun $\frac{1}{3}$ von 12 und $\frac{1}{4}$ von 12 und addierst dies, so hast du 7; nun ist das Verhältnis von diesem 7 zu 12 dasselbe wie

das Verhältnis von 21 zu dem gesuchten Vermögen; multipliziere also 12 mit 21 und dividiere das Produkt durch 7, so hast du 36 und dies ist das Vermögen. — Wenn du willst, kannst du die Aufgabe auch mit (Hilfe) der Algebra lösen: Setze das Vermögen gleich einer unbekannten Zahl (*sai'* = Ding), dann nimmst du einen Drittel und einen Viertel davon, dies ist drei Sechstel und die Hälfte eines Sechstels¹⁾ der unbekannten Zahl, und dies ist gleich 21; nun frügst du, mit wieviel muß ich drei Sechstel und die Hälfte eines Sechstels der unbekannten Zahl wiederherstellen²⁾, damit die unbekannte Zahl selbst herauskommt? Du findest, daß du mit $1\frac{5}{6}$ multiplizieren mußt, wie wir dies im Kapitel über die Wiederherstellung der Brüche beweisen werden; multipliziere also auch 21 mit $1\frac{5}{6}$, dies giebt 36, und dies ist das (gesuchte) Vermögen. — Wenn du willst, kannst du die Aufgabe auch mit Hilfe der Wagschalen (*el-kiffät*) lösen. Dies Verfahren besteht darin, daß du für eine der Wagschalen irgend eine beliebige Zahl wählst, also z. B. die Zahl 3; nimm nun ihren Drittel und ihren Viertel, dies macht zusammen $1\frac{1}{4}$. vergleichst du dieses mit 21, so findest du, daß in der Wagschale der Drei $19\frac{1}{4}$ fehlen; behalte nun diesen Fehler im Gedächtnis, und wähle nun für die zweite Wagschale irgend eine Zahl, z. B. 4, nimm ihren Drittel und ihren Viertel, dies macht zusammen $2\frac{1}{3}$; vergleichst du dieses mit 21, so findest du, daß in der Wagschale der Vier $18\frac{2}{3}$ fehlen; nun multipliziere den Fehler der ersten Wagschale, also $19\frac{1}{4}$, mit der Zahl der zweiten Wagschale, also mit 4, dies giebt 77, dann multipliziere den Fehler der zweiten Wagschale, also $18\frac{2}{3}$, mit der Zahl der ersten Wagschale, also mit 3, dies giebt 56, subtrahiere dieses Ergebnis vom ersten, der Rest ist 21, subtrahiere auch den kleinern Fehler vom größern, der Rest ist drei Sechstel und die Hälfte eines Sechstels, dann teile 21 durch dieses, das Resultat ist 36, und dies ist das Vermögen. Ich werde diese Lösung beweisen an ihrem Orte, so Gott will.“

Wir sehen in der Behandlung dieser Aufgabe³⁾ die drei Hauptlösungsarten derselben vereinigt, wie sie teilweise schon die Ägypter und Indier kannten: die Methode des falschen Ansatzes oder das Verfahren mit der angenommenen Zahl, die Methode der Algebra und die Regel der beiden Fehler oder die Methode der Wagschalen. Die

1) Also $= \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$, was aber nicht im Text steht, alle Zahlen sind mit Worten ausgeschrieben.

2) *Ġabura*, d. i. das Verbum, dessen nom. act. *el-jabr* oder *el-jabr* (= Algebra = Wiederherstellung) ist; vgl. unten p. 36 den Teil „über die Wiederherstellung“.

3) Dieselbe Aufgabe findet sich auch bei *el-Qalāṣādī* (l. c. p. 50), aber er nimmt für die beiden Wagschalen nicht 3 und 4, sondern 12 und 24, und vermeidet damit Brüche.

erstere Methode ist im *Talchīṣ* sowohl als bei EL-QALASĀDĪ das „Proportionsverfahren“ genannt, bei EL-ḤAṢṢĀR trägt sie keinen besondern Namen.

Es folgen nun eine Reihe anderer Aufgaben, die auf Gleichungen ersten Grades führen, die komplizierteste ist folgende:

[fol. 83^v] „Es ist ein Vermögen gegeben; du addierst seinen dritten und fünften Teil, und nimmst hiervon einen Viertel und dazu die Hälfte des Restes (der übrig bleibt, wenn du das vorhergehende vom Vermögen abgezogen hast)¹⁾, so erhältst du 11.“

Die algebraische Lösung führt auf die Gleichung:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x \right) + \frac{x - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x \right)}{2} = 11; \quad x = 30.$$

[fol. 84^v] Nun folgt auch eine unbestimmte Aufgabe: „Es sind zwei verschiedene Zahlen gegeben; du addierst den dritten Teil der einen zum vierten Teil der andern, dies giebt 6. Diese Aufgabe läßt viele Antworten zu, eine davon ist: Nimm von dem 6 was du willst, und setze es gleich dem Drittel der einen Zahl, dann ist das was von 6 übrigbleibt gleich einem Viertel der andern Zahl, oder du setzest das zuerst von 6 genommene gleich einem Viertel der einen Zahl, dann ist der Rest gleich dem Drittel der andern; z. B. nimm 2 von 6 und setze es gleich einem Drittel der einen Zahl, dann ist der Rest 4 gleich einem Viertel der zweiten Zahl, also ist die erste Zahl 6 und die zweite 16; es kann aber auch die erste Zahl 9 und die zweite 12, oder die erste 3 und die zweite 20 sein etc.“

Es folgen nun Summationen von Reihen.

[fol. 84^v] Ein anderer Teil (Kap.) der Addition: „Über die Addition der Zahlen.“²⁾ Wenn gesagt wird: addiere von 1 bis 10 nach der (natürlichen) Reihenfolge der Zahlen, so addiere 1 zu 10, dies ist 11, und multipliziere dieses mit der Hälfte von 10, d. i. 5, so erhältst du 55, und dies ist die gesuchte Summe.“ Es folgt die allgemeine Regel für diesen Fall.

„Ein anderer Teil (Kap.): Addiere von 1 bis zu einer unbekannten Zahl nach der Reihenfolge der Zahlen, die Summe ergibt 55, welches ist die unbekannte Zahl? [fol. 85^v] Auflösung: Multipliziere 55 mit 2, dies giebt 110, behalte dies im Sinn; hierauf nimm die Hälfte des 1, mit dem du angefangen hast, und multipliziere es mit sich selbst, dies giebt $\frac{1}{4}$, addiere dies zu den im Sinn behaltenen 110, dies giebt $110\frac{1}{4}$, ziehe hieraus

1) Das Eingeklammerte fehlt im Text.

2) Hier fehlt: „nach ihrer natürlichen Reihenfolge“.

die Quadratwurzel, wie wir im Kapitel über die Wurzelanziehung zeigen werden, so Gott will, dies giebt $10\frac{1}{2}$, von diesem subtrahiere das $\frac{1}{2}$, das du mit sich selbst multipliziert hast, so hast du 10, und dies ist die gesuchte Zahl. — Willst du diese Aufgabe auf dem Wege der Algebra lösen, so setze die unbekannte Zahl $= x$ (*sai*'), addiere zu ihr 1, giebt $x + 1$, multipliziere dies mit der Hälfte der unbekannten Zahl, dies giebt $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$ ¹⁾, dies muß gleich 55 sein; nun stellst du das vollständige Quadrat²⁾ her, indem du es mit 2 multiplizierst, und ebenso das ihm gleichgesetzte, d. i. das 55, mit 2 multiplizierst, dies giebt $x^2 + x = 110$; so ist die Aufgabe auf den vierten Fall³⁾ der Algebra gebracht worden, mit dem du verführst, wie wir es an seiner Stelle zeigen werden, so Gott will.⁴⁾

[fol. 85^b] Nun folgen Summationen von Reihen der geraden und ungeraden Zahlen, alle ohne Angabe der allgemeinen Regel, dann die Aufgabe: Man summiere von 1 bis zu einer unbekannten Zahl nach der Reihenfolge der ungeraden Zahlen und erhalte 36, welches ist die unbekannte Zahl? — Erste Lösung: Ziehe die Wurzel aus 36, diese ist 6, verdoppele dieses, giebt 12, davon 1 abgezogen, giebt 11, dies ist die unbekannte Zahl. — Zweite (algebraische) Lösung: Setze die unbekannte Zahl $= x$, addiere dazu 1, nimm die Hälfte von der Summe, giebt $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, quadriere dies, giebt $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, dies ist gleich 36; hieraus erhält man die Gleichung $x^2 + 2x = 143$, die nach dem vierten Fall gelöst $x = 11$ ergibt. — Hierzu bemerkt er noch, man könne auch so verfahren: man multipliziere das 36 mit 4, dies giebt 144, ziehe daraus die Wurzel, diese ist 12, und subtrahiere davon 1, dies giebt 11. — Am Schlusse sagt er, wenn man algebraisch gerechnet habe und die Wurzel nicht rational werde, dann liege in der Aufgabe ein Fehler vor.

Es folgen die Summationen der Quadrat- und Kubikzahlen; da nirgends allgemeine Regeln ausgesprochen sind, so gebe ich nur kurz in moderner Schreibweise die Aufgabe, den Gang der Lösung und das Resultat an, falls dies letztere im Text steht.

1) Es ist wohl unnütz zu bemerken, daß nirgends im Text Gleichungen mit algebraischen Zeichen vorkommen, alles ist in Worten ausgeschrieben, obiger Ausdruck lautet also: *nisf mül we nisf sai* (= Hälfte eines Quadrates und Hälfte eines Dinges).

2) Fehlt: „und das vollständige Ding“.

3) Vgl. Mun. n. Müsa, edid. Fr. Rosen, p. 38.

4) Dies zeigt er aber nirgends in diesem Buche; er hat vielleicht später noch ein Kapitel über Algebra hinzugefügt, das im Laufe der Zeit verloren gegangen ist; dies letztere ist deshalb nicht unwahrscheinlich, weil der *Tulchis* und sein Kommentar am Ende ein besonderes Kapitel über Algebra enthalten.

$$[\text{fol. 86}^b] \quad (1^3 + \dots + 10^3) = (1 + \dots + 10) \left(\frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3}\right)^3 = 55 \cdot 7 = 385.$$

$$(5^3 + \dots + 12^3) = (1^3 + \dots + 12^3) - (1^3 + \dots + 4^3).$$

$$[\text{fol. 87}^a] \quad (2^3 + \dots + 10^3) = (2 + \dots + 10) \left(\frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{2}{3}\right)^3 = 30 \cdot 7\frac{1}{3} = 220.$$

(nur die gerad. Z.) (gerade Z.)

$$(1^3 + \dots + 9^3) = (9 + 2) \left(\frac{2}{3} \cdot 9 + 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 165.$$

(nur die ungerad. Z.)

$$[\text{fol. 87}^b] \quad (1^3 + \dots + 10^3) = [(1 + \dots + 10)]^2 = 55^2 = 3025. ^4)$$

$$(4^3 + \dots + 10^3) = (1^3 + \dots + 10^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3).$$

$$[\text{fol. 88}^a] \quad (1^3 + \dots + 9^3) = (1 + \dots + 9) [2(1 + \dots + 9) - 1]^5 =$$

(nur die unger. Z.) (unger. Z.) (unger. Z.)

$$= 25(2 \cdot 25 - 1) = 1225.$$

$$(7^3 + \dots + 11^3) = (1^3 + \dots + 11^3) - (1^3 + \dots + 5^3).$$

(nur die ungerad. Z.) (unger. Z.) (unger. Z.)

$$[\text{fol. 88}^b] \quad (1^3 + \dots + x^3) = 1225; \text{ wie groß ist } x?$$

$$\text{Algebraische Lösung: } \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \left\{ 2 \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 1 \right\} = 1225.$$

Diese Gleichung wird nicht gelöst, es heißt nur, es ergebe sich hieraus $x = 9$: allein vorher steht folgende Lösung (in Worten): $\sqrt{\frac{1225}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = 24\frac{3}{4}$; dann $\sqrt{(24\frac{3}{4} + \frac{1}{4})^2} - 1 = 9$; dieselbe entspricht der Auflösung der obigen Gleichung, wenn dieselbe als quadratische in Bezug auf $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ als Unbekannte betrachtet wird. Dann wird weiter bemerkt: „Wenn du willst, kannst du auch die mit ihrem Doppelten multiplizierte Zahl (d. h. $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$) als Unbekannte annehmen (= z), multipliziere sie dann mit ihrem Doppelten weniger 1, dies giebt $2z^2 - z$, und dies setzest du gleich 1225, hieraus ergibt sich $z = 25$; nun ist dies, wie wenn du sagst: summiere von 1 bis

1) Allgemein: $\frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Vgl. EL-KARCHI bei CANTOR, Vorl. I, 724 (2. Aufl.).

2) Allgemein: $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$, wo $2n$ die letzte gerade Zahl der Reihe ist.

3) Allgemein: $\frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}$, wo $2n+1$ die letzte ungerade Zahl der Reihe ist.

4) Allgemein: $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

5) Allgemein: $(n+1)^2 \{2(n+1)^2 - 1\}$, wenn $2n+1$ die letzte ungerade Zahl der Reihe ist.

zu einer unbekannten Zahl nach der Reihe der ungeraden Zahlen, die Summe sei 25, so findest du hieraus wie früher die unbekannte Zahl = 9.“

[fol. 89^a] $(2^3 + \dots + 10^3) = (2 + \dots + 10) \cdot 2 (2 + \dots + 10)^{-1} = 30 \cdot 60 = 1800.$
 (nur gerade Z.) (gerade Z.) (gerade Z.)
 $(2^3 + \dots + x^3) = 1800$; wie groß ist x ?

Auflösung: $\sqrt[3]{1800} = 30$; „nun ist dies, wie wenn du sagst: summiere von 2 bis zu einer unbekannten Zahl nach der Reihe der geraden Zahlen, die Summe sei 30, so findest du hieraus die unbekannte Zahl wie früher = 10.“

[fol. 89^b] Es folgt die Aufgabe über die Verdoppelung der Häuser (Felder) des Schachbrettes. Die Summation wird ausgeführt wie bei IBN EL-BENNA (l. c. p. 4)²⁾ und die Summe richtig angegeben.

[fol. 90^a] *Fünftes Kapitel: Über die Subtraktion der Brüche.*³⁾ Diese wird ziemlich rasch abgethan, indem im Anfang gesagt wird: „Wisse, daß alle Fälle, die im Kapitel der Addition vorgekommen sind, sich bei der Subtraktion wiederholen.“

Von den 12 Beispielen, die bis zu den Aufgaben, die auf Gleichungen führen, behandelt werden, gebe ich nur zwei wieder, bei den meisten sind die Resultate gar nicht angegeben.

1) Es sei $\frac{1}{4}$ von $\frac{5}{6}$ zu subtrahieren, man schreibe dies so:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} \end{array} \right\}^4 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 4 - 1 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{3}{6 \cdot 2} (= \frac{7}{12}).$$

[fol. 90^b] 2) Es sei $\frac{4}{5}$ und die Hälfte von $\frac{1}{5}$ von $\frac{10}{11}$ zu subtrahieren, man schreibe dies so:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{5} \\ \frac{10}{11} \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{10}{11} - \frac{4}{5 \cdot 2} = \frac{10 \cdot 10 - (2 \cdot 4 + 1) 11}{10 \cdot 11} = \frac{1}{11 \cdot 10} (= \frac{1}{110}).$$

[fol. 93^b] Anderer Teil (Kap.): „Über die Subtraktion der Vermögen.“ Hier folgen ähnliche Aufgaben wie in dem Teil „über die Addition der Vermögen“; ich gebe die folgenden wieder:

„Es sei ein Vermögen gegeben, du subtrahierst (von ihm) seinen dritten und seinen vierten Teil, es bleibt 10 übrig, wie groß ist das Vermögen?“

1) Allgemein: $2 [n (n + 1)]^2$, wenn $2n$ die letzte gerade Zahl der Reihe ist.

2) Durch wiederholte Anwendung der Formel:

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

3) Im Text steht nur „Kapitel der Subtraktion“.

4) Eigentümlicherweise wird der Subtrahend über den Minuend gestellt.

Es folgen nun wieder die drei verschiedenen Auflösungsarten wie bei der analogen Aufgabe im Kapitel der Addition (p. 29—30). Nach der Auflösung mit Hilfe der Wagschalen folgt die allgemeine Darstellung (kein Beweis!) dieser Regel mit Unterscheidung der beiden Fälle, da die beiden Fehler gleiches oder ungleiches Zeichen haben.

[fol. 96^a] „Aufgabe (Kap.) von den Schilfrohren (*qaṣab*). Von einem Schilfrohr steht im Boden (wörtl. „Schlamm“) ein Drittel seiner Länge, im Wasser ein Viertel, und über dem Wasser 10 Spannen (*aṣḥār*), wie lang ist es?“

Algebraische Lösung: $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = 10$ ($x = 24$).

Es folgt noch eine Aufgabe über das Schilfrohr, die auf die Gleichung führt:

$$x - (\frac{1}{3}x + 2) - (\frac{1}{4}x + 3) = 10 \quad (x = 36).$$

Dann kommt die Aufgabe: „Bei einem Fisch nimmt der Kopf einen Drittel seines Gewichtes, der Schwanz einen Viertel [fol. 96^b] desselben in Anspruch, das Mittelstück wiegt 10 Pfund (*arṭāl*, pl. v. *riṭl* oder *rotl*), wie schwer ist der Fisch?“

Sechstes Kapitel: „Über die Division der Brüche.“¹⁾ Dieses Kapitel zerfällt in zwei Hauptteile, in die Benennung, d. h. Division von Kleinerem durch Größeres, und die eigentliche Division, d. h. Division von Größerem durch Kleineres. Der Teil über die Benennung zerfällt in 23 Unterkapitel mit den verschiedensten Kombinationen von Ganzen, Brüchen, Brüchen von Brüchen, etc., ich gebe hier folgende zwei Beispiele:

Es soll $\frac{1}{3}$ durch 4 geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}.$$

Nach diesem Beispiel folgt [fol. 97^a] die allgemeine Regel, wie ein Bruch durch eine ganze Zahl geteilt wird.

[fol. 98^b] Es soll $\frac{3}{5} + \frac{7}{8}$ durch 6 geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\frac{\frac{3}{5} + \frac{7}{8}}{6} = \frac{3 \cdot 8 + 7 \cdot 5}{5 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 4 \cdot 3} (= \frac{59}{240}).$$

Der Teil über die eigentliche Division zerfällt in 25 Unterkapitel, ebenfalls mit den verschiedensten Kombinationen, ich gebe daraus die folgenden Beispiele:

1) Im Text steht nur „Kapitel der Division“.

2) Man beachte, daß $\frac{1}{12}$ in diesem Falle nicht etwa geschrieben ist $\frac{1}{4 \cdot 3}$, sondern wie immer $\frac{1}{6 \cdot 2}$ (= die Hälfte eines Sechstels).

[fol. 107^b] Es soll 10 durch $\frac{1}{5}$ geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left. \begin{array}{l} 10 \\ \frac{1}{5} \end{array} \right\} = 10 \cdot 5 = 50.$$

Es folgt nun die allgemeine Regel für die Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch, und es werden zwei Fälle unterschieden, je nachdem der Bruch den Zähler 1 oder einen andern Zähler hat. Erstes Beispiel für den letzteren Fall:

$$\left. \begin{array}{l} 9 \\ \frac{3}{8} \end{array} \right\} = \frac{9 \cdot 8}{3} = 24.$$

[fol. 108^b] Es soll 10 durch einen Drittel eines Fünftels geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left. \begin{array}{l} 10 \\ \frac{1}{5 \cdot 3} \end{array} \right\} = 10 \cdot 5 \cdot 3 = 150.$$

[fol. 117^a] Es soll $\frac{3}{4}$ von 5 durch $\frac{2}{5}$ von 3 geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} 5 \\ \frac{2}{5} 3 \end{array} \right\} = (3 \cdot 5 \cdot 5) : (2 \cdot 3 \cdot 4) = 3 \frac{1}{4}.$$

[fol. 118^b] „Anderer Teil (Kap.) der Division: Über die Wiederherstellung (*el-jabr*)¹⁾ der Brüche. Dieses Kapitel ist von großem Nutzen in den gesamten Rechnungsoperationen und vor allem in der Algebra. Wenn z. B. gesagt wird, mit was mußt du $\frac{1}{3}$ wiederherstellen, damit du 1 erhältst, so ist dies dasselbe, wie wenn gesagt wird, mit welcher Zahl mußt du $\frac{1}{3}$ multiplizieren, um 1 zu erhalten. Das Verfahren ist das, daß du 1 durch $\frac{1}{3}$ teilst, dies giebt 3, und dies ist die Zahl, mit welcher $\frac{1}{3}$ multipliziert 1 ergibt.“

[fol. 119^a] Zweites Beispiel dieser Art: „Mit wieviel mußt du $\frac{3}{4}$ wiederherstellen, damit du 1 erhältst? Teile 1 durch $\frac{3}{4}$, dies giebt $1 \frac{1}{3}$, und dies ist das Gesuchte.“

Es folgen weitere Beispiele, auch solche, wo nicht die Einheit erhalten werden soll, z. B.: „Mit wieviel mußt du $2 \frac{1}{2}$ wiederherstellen, um 6 zu erhalten? Teile 6 durch $2 \frac{1}{2}$, dies giebt $2 \frac{2}{5}$, dies ist das Gesuchte.“

[fol. 120^a] „Teil (Kap.) des Erniedrigens“ (*el-haf*) der Brüche. Wisse, daß das Erniedrigen das Gegenteil des Wiederherstellens ist; wenn z. B. gesagt wird, mit welcher Zahl mußt du 1 erniedrigen, damit du $\frac{1}{2}$ erhältst, so teile (benenne) $\frac{1}{2}$ durch 1, dies giebt $\frac{1}{2}$ und dies ist das Gesuchte.“

1) Vgl. den *Talchis*, l. c. p. 22 („sur la réintégration“), und *EL-QALASÂDÎ*, l. c. p. 35 („de la restauration“), und oben p. 30.

2) Vgl. *ibid.* („sur l'abaissement des fractions“).

Anderes Beispiel: „Mit wieviel mußt du $2\frac{1}{2}$ erniedrigen, um 1 zu erhalten? Teile (benenne) 1 durch $2\frac{1}{2}$, dies giebt $\frac{2}{5}$ und dies ist das Gesuchte.“ Es folgen noch weitere Beispiele.

[fol. 120^b] *Siebtentes Kapitel*: „Über die Ausziehung der Wurzeln aus ganzen Zahlen und Brüchen. Die Beschreibung des Verfahrens, wie man aus ganzen Quadratzahlen die Wurzel zieht, ist schon vorausgegangen; in diesem Kapitel wollen wir jetzt die Wurzel ausziehung aus Brüchen, die Quadratzahlen sind, und aus ganzen Zahlen und Brüchen, die keine Quadratzahlen sind, erklären.“

[fol. 121^a] Erstes Beispiel¹⁾:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2};$$

dann folgen:

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \text{ und } \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4};$$

hierauf:

$$\sqrt{\frac{1}{8 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{1 \cdot 4 + 1}}{\sqrt{8 \cdot 2}} = \frac{3}{4};$$

[fol. 122^a] weiter:

$$\sqrt{\frac{7 \cdot 4 + 1}{9 \cdot 8 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{(8 \cdot 7 + 4) \cdot 2 + 1}}{\sqrt{9 \cdot 8 \cdot 2}} = \frac{11}{12} = \frac{5 \cdot 1}{6 \cdot 2};$$

[fol. 124^b]

$$\sqrt{2 \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2};$$

[fol. 126^a]

$$\sqrt{4 \frac{4}{8 \cdot 8}} = \frac{\sqrt{(4 \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 1}}{\sqrt{8 \cdot 8}} = \frac{17}{8} = 2 \frac{1}{8}; \text{ etc.}$$

[fol. 126^b] „Teil (Kap.) der Ausziehung der irrationalen (el-ṣumm) Wurzeln durch Annäherung. Wenn gesagt wird: welches ist die Quadratwurzel aus 5, so nimm die nächste Quadratzahl an 5, diese ist gleich 4, subtrahiere sie von 5, der Rest ist 1, benenne dieses nach 4, dies giebt $\frac{1}{4}$, und addiere dieses zu der Wurzel aus 4, die gleich 2 ist, dies giebt $2\frac{1}{4}$, und dies ist die angenäherte Wurzel aus 5; multiplizierst du nämlich $2\frac{1}{4}$ mit sich selbst, so erhältst du $5\frac{1}{16}$, der Fehler ist $\frac{1}{16}$ Überschufs.“²⁾

[fol. 126^a] „Willst du aber eine größere Annäherung haben, so verdoppele $2\frac{1}{4}$, dies giebt $4\frac{1}{2}$, benenne nach diesem $\frac{1}{16}$ (d. h. teile $\frac{1}{16}$ durch

1) Ich mache darauf aufmerksam, daß sich nirgends bei el-Ḥaṣṣār ein Zeichen für die Wurzel ausziehung findet.

2) Es ist dies die bekannte Annäherung $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$; der Fall, wo $r > a$, und $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + 1}$ oder $= a + \frac{r + 1}{2a + 2}$ gesetzt wird, wie im *Tal-chiṣ*, bez. bei el-Qalaṣādi, findet sich bei el-Ḥaṣṣār nicht in dieser Weise behandelt, sondern er nimmt in diesem Falle die nächst höhere Quadratzahl (vgl. unten die Ausziehung der Wurzeln aus 15 und 20) und subtrahiert von deren Wurzel den Quotien-

$4\frac{1}{2}$, dies giebt $\frac{1}{72}$ (ein Achtel eines Neuntels), subtrahiere dieses von $2\frac{1}{4}$, so bleibt $2\frac{2}{3}\frac{1}{4}$ ($= 2\frac{17}{72}$); multiplizierst du dieses mit sich selbst, so erhältst du $5\frac{1}{8}\frac{1}{9}\frac{1}{9}$ ($= 5\frac{1}{5184}$) und dies ist näher (an 5) als $5\frac{1}{16}\frac{1}{4}$ — Wenn du noch eine größere Annäherung willst, so verdoppele $2\frac{17}{72}$, „benenne nach dem Resultat $(\frac{1}{72})^2$ und was du so erhältst, subtrahiere von $2\frac{17}{72}$, so ist das Ergebnis noch angenäherter als die erste und zweite Wurzel; so kannst du fortfahren, soweit du willst.“

„Um die Wurzel aus 10 zu erhalten, nimmst du die nächste Quadratzahl an 10, also 9, subtrahierst diese von 10, bleibt 1, benennst dieses nach der doppelten Wurzel aus 9, also nach 6, dies giebt $\frac{1}{6}$, dies addierst du zu der Wurzel aus 9, so erhältst du $3\frac{1}{6}$; dieses mit sich selbst multipliziert giebt $10\frac{1}{36}$.“

Nun folgt ein anderes Annäherungsverfahren als das vorhergehende: [fol. 126^v] „Willst du eine größere Annäherung haben, so multipliziere 10 mit irgend einer Quadratzahl, z. B. mit 100, dies giebt 1000, ziehe hieraus die Wurzel nach dem eben beschriebenen Verfahren, sie ist $31\frac{19}{31}\frac{1}{2}$ ($= 31\frac{39}{62}$), und teile dieses durch die Wurzel aus 100, also durch 10, so erhältst du $3\frac{5}{31}\frac{9}{10}\frac{1}{2}$ ($3\frac{101}{620}$), und dies ist näher als $3\frac{1}{6}$.“

„Um die Wurzel aus 15 zu erhalten, nimmst du die nächste Quadratzahl an 15, also 16, subtrahierst davon 15, bleibt 1, benennst dieses nach der doppelten Wurzel aus 16, d. h. nach 8, und subtrahierst das Ergebnis ($\frac{1}{8}$) von der Wurzel aus 16, dies giebt $3\frac{1}{8}$, und dies ist die angenäherte Wurzel aus 15.“

Es folgt Wurzel aus 20, zu der er bemerkt, man könne als nächste Quadratzahl entweder 16 oder 25 nehmen, in beiden Fälle erhalte man dasselbe, nämlich $4\frac{1}{2}$.

[fol. 127^r] Für die Ausziehung der Wurzel aus $2\frac{1}{2}$ giebt er zwei Wege an; der eine besteht darin, daß man es in einen Bruch verwandelt, dessen Nenner eine Quadratzahl ist, also z. B. in $\frac{19}{4}$, dann die Wurzel aus 10 zieht und das Resultat ($3\frac{1}{6}$) durch die Wurzel aus 4, also 2, teilt, dies giebt $1\frac{2}{3}\frac{1}{3}$ ($= 1\frac{7}{12}$); der andere ist derselbe, wie der oben bei der Wurzel-

ten aus dem Rest $((a+1)^2 - (a^2 + r))$ durch das Doppelte der Wurzel, was auf dasselbe herauskommt wie das Verfahren EL-QALASÄDİ, denn es ist in der That:

$$(a+1) - \frac{2a+1-r}{2(a+1)} = a + \frac{r+1}{2a+2}.$$

1) Es ist dies die zweite Annäherung bei EL-QALASÄDİ (l. c. p. 41):

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}$$

(vgl. auch CANTOR, Vorl. I, 765 (2. Aufl.)).

ausziehung aus 10) angewandte, d. h. es wird $2\frac{1}{2}$ mit irgend einer geraden Quadratzahl, also z. B. mit 36, multipliziert, dies giebt 90, hieraus die Wurzel angenähert gezogen, giebt $9\frac{1}{2}$, und dieses durch die Wurzel aus 36, also 6, dividiert, giebt $1\frac{1}{2}$.

[fol. 127^b] Um die Wurzel aus $\frac{1}{3}$ zu erhalten, multipliziert er $\frac{1}{3}$ mit 36, giebt 12, nimmt die angenäherte Wurzel hieraus, welche $3\frac{1}{2}$ ist, und teilt dieses durch die Wurzel aus 36, also 6, giebt $\frac{1}{2}$.

Er erwähnt aber auch, daß man nach dem gewöhnlichen Verfahren dasselbe erhalte, d. h. man nehme den nächsten Bruch an $\frac{1}{3}$, welcher ein Quadrat ist, also $\frac{1}{9}$, subtrahiere diesen von $\frac{1}{3}$ und benenne den Rest $\frac{1}{9}$ nach dem Doppelten der Wurzel aus $\frac{1}{9}$, also nach 1, und addiere das Ergebnis zu $\frac{1}{9}$, giebt $\frac{1}{3}$.

Als letztes Beispiel folgt die Wurzel aus $\frac{3}{7}$; man multipliziere $\frac{3}{7}$ mit einer durch 7 teilbaren Quadratzahl, also z. B. 49, giebt 21, ziehe hieraus die Wurzel, giebt $4\frac{1}{2}$, teile dies durch die Wurzel aus 49, also durch 7, giebt $\frac{3}{5}$.

Hierauf folgt der oben (p. 13) schon angeführte Schluß.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, daß dieses Werk dasjenige sei, das MOSES BEN TIBBON ins Hebräische übersetzt hat (immerhin wäre noch eine Kollation mit dem Ms. des Vaticans zu wünschen, die mir leider unmöglich war); ebenso können wir die Angabe IBN CHALDŪN, daß dieses Buch die Grundlage für den *Talchīs* des IBN EL-BENNÄ gebildet habe, als richtig annehmen, man wird beim Studium beider Schriften Vergleichungspunkte in hinreichender Zahl finden, auf die wesentlichsten habe ich jeweilen den Leser aufmerksam gemacht; der Stoff, die Darstellungsweise und die Verfahrensarten bei den verschiedenen Operationen sind also im Großen und Ganzen dieselben, nur die Anordnung des Stoffes ist eine andere, und diese Änderung war sehr geboten, denn das Buch EL-ḤAṢṢĀR zeichnet sich, wie ich oben schon angedeutet habe und wie auch jeder Leser es finden wird, durch große Inkonsequenz in der Anordnung aus. Es ist übrigens möglich und keineswegs unwahrscheinlich, daß EL-ḤAṢṢĀR selbst eine Umarbeitung und Verkürzung seines Werkes vorgenommen hat, und daß dieser Auszug aus seiner größern Arbeit vielleicht „das kleine Buch des ḤAṢṢĀR“ (*kitāb el-ḥaṣṣār el-ṣaḡīr*, wie es bei IBN CHALDŪN heißt) genannt worden ist; aus diesem Auszug (oder dieser Umarbeitung) hätte dann IBN EL-BENNÄ einen weitem, seinen *Talchīs* gemacht; hierbei ist er aber zu kurz und zu gelehrt verfahren (bekanntlich giebt er keine Zahlenbeispiele, sondern nur Regeln), so daß für praktische Zwecke ein Kommentar zu diesem *Talchīs* notwendig wurde; diesen hat

dann EL-QALAṢĀDī verfaßt, und hat sich darin, einige Vorteile und Neuerungen bei den Operationen und Änderungen in der Anordnung abgerechnet, wieder in deutlich erkennbarer Weise dem Originale genähert.

Wir haben gesagt, daß der Stoff, den EL-ḤAṢṢĀRS Werk, der *Talchīṣ* und sein Kommentar behandeln, im Großen und Ganzen derselbe sei; es ist dies richtig bis auf die letzten arithmetischen Kapitel des *Talchīṣ*, nämlich diejenigen über die vier Operationen mit Wurzeln, und den Abschnitt über die Algebra, die bei EL-ḤAṢṢĀR fehlen. Was die Algebra anbetrifft, so vergleiche man, was ich darüber oben p. 32 Note 4) gesagt habe; auch der Abschnitt über die Operationen mit Wurzeln mag im Originalwerk EL-ḤAṢṢĀRS gestanden haben, im Laufe der Zeit aber durch Verschulden der Abschreiber verloren gegangen sein; es wäre aber auch möglich, daß IBN EL-BENNĀ zum Werke seines Vorgängers eigene Zusätze gemacht hätte.

Was die Lebenszeit EL-ḤAṢṢĀRS anbetrifft, so können wir leider nur eine untere Grenze angeben, es ist dies die Blütezeit seines Übersetzers MOSES BEN TIBBON, d. h. die Jahre 1240—1275; wir glauben aber nicht, daß seine Lebenszeit viel weiter zurückreiche, wahrscheinlich war er ein Gelehrter des 12. Jahrhunderts. Alle meine Nachforschungen in west-arabischen Quellenwerken über diesen Mathematiker waren bis jetzt erfolglos.

Note sur le "muwaqqit" marocain

Abû Muqri^c — ou mieux Abû Miqra^c — al-Baṭṭiwi (XIII^e s. J.-C.)

L'un des poèmes didactiques (*rağaz*, *urğūza*) sur la « science » du calendrier qui a connu et connaît encore le plus de vogue chez les Musulmans occidentaux est celui qui porte le nom d'*al-Muqri'* et fut composé par un lettré marocain du XVII^e siècle : Muḥammad b. Sa'īd as-Sūsī al-Margīfī. Cette *urğūza* fut commentée à deux reprises par son auteur sous les titres d'*al-Mumli'* (commentaire détaillé) et d'*al-Muṭṭali'* (résumé), ouvrages qui ont été imprimés en Orient comme en Occident et dont il existe également un grand nombre de manuscrits (1).

Le titre complet du poème est : *al-Muqri' fi iḥlās al-ilm Abī Muqri'*. Le livre complètement satisfaisant comme abrégé de la science d'Abû Muqri', ou Abû Muqri'a — telles sont du moins les transcriptions habituelles figurant dans les ouvrages européens de bibliographie arabe, du nom de ce personnage — qu'on a cherché à identifier parmi les nombreux calculateurs de l'heure (*muwaqqilīn*, vulg. *muqqilīn*) des siècles précédents. Hartwig Derenbourg, en signalant dans ses *Manuscrits arabes de l'Escurial* (2) un commentaire de l'œuvre elle-même d'Abû Muqri', indiqué d'une façon plus complète sous ses noms d'Abû 'Abd Allāh Muḥammad ibn 'Alī « al-Buṭwī » comme ayant vécu au commencement du III^e s. de l'Hégire, XIV^e s. J. C., a pensé qu'il pouvait s'agir de *مجدد البطري* « qu'Ibn Khaldoun (*Histoire des Berbères*, I, pp. 450, 474, 496) (3) désigne comme un des généraux commandant l'armée d'Aboû'l-Ḥasan, le sultan Mérinide du Maroc en 731 et 732 Hég. / 1331-32 J. C. ». C. Brockelmann a reproduit ce renseignement de Derenbourg sans lui laisser sa forme dubitative (4), et, de ce fait, il a pris la valeur d'une assertion prouvée, alors qu'elle ne l'est aucunement.

Voici ce qu'on trouve en effet dans le *Mumli'* et aussi dans un autre commentaire du *Muqri'*, plus détaillé encore, œuvre de Muḥammad b. Muḥammad b. 'Abd Allāh b. al-Ḥusain al-Warziẓi, un marocain du Dar'a (vulg. Drâ) qui écrivait

(1) Bibliographie. — C. BROCKELMANN, *Geschichte d. Arab. Literat.*, t. II, Berlin, 1902¹ pp. 400 et 403. — E. LÉVI-PROVENÇAL, *Les Historiens des Chorfa*, Paris, Larose, 1922, p. 260 sq. — H. P. J. RENAUD, *Addit. et correct. à Suter « Die Mathematiker u. Astronom. d. Arab. »*, Extr. de *Isis*, n° 52 (vol. XVIII, 1), July, 1932, p. 181, n° 540 et les sources citées.

(2) Tome I, p. 235, n° 381¹ (Public. de l'École des langues orient. vivantes), Paris, Leroux, 1884. Il s'agit d'un poème didactique sur le calendrier dont le texte existe également à l'Escurial, n° 389¹ (884¹ de Casiri, qui appelle l'auteur Abû Miqra', et en fait, selon son habitude un musulman espagnol) et 954¹ (omis par Casiri s. n. 941).

(3) Il s'agit du texte arabe, édition De Slane, Alger, 1847, 2 vol. 4°.

(4) *Op. cit.* L'un de nous a avisé dernièrement le grand érudit allemand des constatations qui font l'objet de la présente note, afin qu'il puisse insérer un rectificatif dans son *Supplément* en cours de publication.

en 1164/1751 J. C. Al-Marġīṭī, parlant de l'auteur dont il abrège le poème, l'appelle : Abū 'Abd Allāh Muḥammad b. 'Abd al-Ḥaqq b. 'Alī al-Baṭṭiwi (1), surnommé Abū Miqra' « parce qu'en voyage il ne se séparait généralement pas de son bâton (*miqra'*), à la manière des campagnards ». Telle serait donc l'interprétation à donner à ce surnom mal compris d'ابو مشرع, qui devrait être rendu par l'« homme au bâton » ; ce mot مشرع, du type des « noms d'instrument », a en effet ce sens, et désigne même, d'après le commentaire d'al-Warzizī, « le bâton qui sert à allumer le feu » (par frottement) (2).

Plus loin, dans le même ouvrage (3), il est question de l'époque à laquelle vivait Abū Miqra', à propos des dates des solstices d'hiver et des équinoxes dans le calendrier 'aġami. On sait que par suite du phénomène de la précession, ces dates tombent chaque année un peu plus tôt, 20 minutes environ, ce qui donne un jour en 72 ans ; c'est pourquoi al-Warzizī explique qu'à son époque, au XII^e siècle de l'hégire (XVIII^e s. J. C.), le solstice d'hiver a lieu le 9 décembre, tandis qu'au siècle précédent celui de l'auteur du *Muqni'*, il se produisait le 10, et qu'enfin, au temps d'Abū Miqra' (début du VIII^e s. H./début du XIII^e s. J. C.), le solstice ne tombait que le 16 de ce mois.

Il n'y a donc pas de contestation sur l'époque de la vie d'Abū Miqra' mais seulement sur son identité. Al-Warzizī donne en effet une variante du nom de ce *muwaqqil* d'origine rifaine, l'appelant « l'imām Abū Muḥammad 'Abd al-Ḥaqq b. 'Alī al-Baṭṭiwi » ; il est vrai que dans des ouvrages qui ont été aussi souvent copiés et recopiés que le *Muqni'* et ses commentaires, des variantes de ce genre ne sont pas rares et on ne saurait s'y fier entièrement. Ce qui est plus étonnant, c'est l'absence de notices chez les biographes marocains concernant cet Abū Miqra'. La *Ġaḍwat al-iqtibās* d'Ibn al-Qāḍi (4) cite deux Aḥmad b. 'Isā al-Mawāsi (d'Iguermāwās, village du Rif) al-Baṭṭiwi, Abu 'l-'Abbās, tous deux *muwaqqilīn*, l'un qualifié d'imām, de *mu'addil* (5) occupant le premier rang de ceux de sa profession dans la ville de Fès, et qui est mort en 807/1404-05, tandis que le second, également biographié dans le *Nail al-ibtihāj* d'Aḥmad Bābā (6), aurait vécu un siècle plus tard, jusqu'en 911/1505-06.

Quant au « général » mérinide mis en avant par Derenbourg, son nom si répandu de Muḥammad, le seul que donne Ibn Ḥaldūn, laisse évidemment la possibilité

(1) Telle est l'orthographe exacte de cet ethnique, dérivé du nom des Baṭṭiwa ou Baṭṭiyya, ancienne tribu de la région située entre Alhucemas et Taza, à ne pas confondre avec les actuels Baqqūya — les Bocoya des géographes — qui occupent la côte à l'Ouest d'Alhucemas ; cf. Georges S. Colin, *Archives Marocaines*, vol. XXVI (*El-Maqṣad, Vie des saints du Rif* de 'Abd al-Ḥaqq el-Bādisi), Paris, Champion, 1929, p. 166, n. 9.

(2) Cf. Dozy, *Supplément aux dictionnaires arabes*, II, 333. Un surnom analogue : Abū Dabbūs, fut porté, comme on sait, par le dernier souverain almohade. A l'heure actuelle, on dit encore en Mauritanie : *gra' l-āfya*, pour « allumer le feu ».

(3) Édition tunisienne, 1344 Hég., p. 31.

(4) Edit. de Fās, 1317 Hég., pp. 62 et 65.

(5) Sur le sens de ce mot, cf. de l'un de nous : *Notes critiques d'histoire des sciences chez les Musulmans*, I, *Hespéris*, 1^{re}-2^e trim. 1937, p. 2, n. 3.

(6) Edit. de Fās, 1317 Hég., p. 61 ; édit. égypt., 1351 Hég., p. 87.

d'une identification avec le vizir du sultan Abû Sa'îd 'Utmân b. Ya'qûb b. 'Abd al-Ḥaqq (1310-31 J. C.) prédécesseur et père d'Abû 'l-Ḥasan. L'historien Ibn al-Aḥmar, dans la *Rawḍat an-nisrîn* (1), appelle ce ministre : Muḥammad b. Abî Bakr b. Yaḥyâ al-Baṭṭîwî. La supposition est du moins vraisemblable : les vizirs furent souvent à cette époque investis de fonctions militaires ; d'autre part, l'importante tribu des Baṭṭîwa, alliée par des mariages aux Mérinides, leur fournit, comme on sait, nombre d'hommes de plume et d'épée (2). Les Baṭṭîwa jouent alors un rôle que leur situation assez excentrique par rapport au foyer intellectuel et politique de Fès ne justifierait pas, si l'on ne tenait compte de leur qualité de parents et clients du clan qui détenait le pouvoir. Autant l'ethnique al-Baṭṭîwî se rencontre rarement sous les dynasties qui précèdent et celles qui suivent, autant il apparaît souvent, du XIII^e au XV^e siècle, sous les Beni Merin et leurs cousins Beni Waṭṭâs. Cela explique pourquoi Derenbourg, peu familier avec l'histoire du Maroc, mal connue d'ailleurs il y a cinquante ans, a fondé son identification sur la seule correspondance des ethniques.

Pour résumer la question :

1^o Ni le surnom et la généalogie, ni l'époque de la vie du *muwaqqit* Abû Miqrâ' — c'est-à-dire Muḥammad b. 'Abd al-Ḥaqq (ou Abû Muḥammad 'Abd al-Ḥaqq) b. 'Alî al-Baṭṭîwî — ne permettent de l'identifier avec les calculateurs de l'heure que nous avons trouvés cités sous le même ethnique, jusqu'à présent, par les principaux biographes marocains.

2^o Muḥammad al-Baṭṭîwî, le commandant des troupes du sultan Abu 'l-Ḥasan envoyées en 1331-32 pour débloquer Bougie assiégée par les 'Abdalwadites (3), est peut-être le même personnage que le vizir du règne précédent : Muḥammad b. Abî Bakr b. Yaḥyâ al-Baṭṭîwî. Mais il n'y a pas correspondance entre la généalogie de ce vizir et celle de l'auteur de l'*urğûza* sur le calendrier.

Il eût été cependant curieux, encore qu'il ne s'agisse ici que d'une « science » peu relevée, de trouver dans l'histoire marocaine un devancier de ces généraux qui se reposaient de leurs campagnes en écrivant de savants mémoires sur quelque point des mathématiques pures ou appliquées.

G. S. COLIN et H. P. J. RENAUD.

(1) Edit. et trad. Gh. Bounali et G. Marçais, Paris, Leroux, 1917 ; trad. p. 73 ; cf. aussi préface, p. XVII.

(2) Les Oulâd Maḥallî (ou mieux Maḥlî), entre autres ; cf. G. S. Colin, *Maqṣad*, *op. cit.*, p. 206, n. 371.

(3) Il semble avoir déjà été au service des Ḥafṣides, en 1317-18 ; cf. Ibn Ḥaldûn, *op. cit.*, trad. De Slane, IV, 450.

- سُوتَر، هَاينَرِيخ: حول علاقات القيصَر فريدريخ الثاني بمعاصريه من علماء
المشرق والمغرب من العالم الإسلامي خاصة بالمؤلف الموسوعي كمال الدين
ابن يونس. (بالألمانية) ٣٠٧
- لي، صاموئيل: ملاحظات حول الزيج لمحمد بن أبي بكر الفارسي الذي
تحتفظ المكتبة العامة لجامعة كامبردج بنسختين منه. (بالإنكليزية) ٣١٥
- سُوتَر، هَاينَرِيخ: كتاب الحساب لأبي زكرياء الحصار. (بالألمانية) ٣٣٢
- كولان، جورج سيراغان، هانري-باول-جوزف رَنو: ملاحظة حول "الموقَّت"
المغربي أبو المقرِّع أو: المقرِّع -وهو الأصح- البطيوي (القرن ٧هـ).
(بالفرنسية) ٣٦٢

- ١٧٩ تروثفكه، يوهانس: في تاريخ الرياضيات (إنشاء الشكل السباعي
الأضلاع لأرخميدس، والشكل ذي التسعة أضلاع للبيروني). (بالألمانية)
- ١٩٣ فارثهايم، جُستاف: حول حلول بعض المسائل في كتاب "مقالة في الأعداد
المعطيات" لليوردانوس نَمورارْيوس (حول الكرجي). (بالألمانية)
- ١٩٧ قارا، فرثنسكو: الرياضي مسلمة بن أحمد المجريطي. ملاحظات لإعداد
بيوبليوغرافيا. (بالإسبانية)
- ٢١٣ سانشس بيرس، خوزيه أوجُستو: جابر بن أفلح، الإشبيلي. (بالإسبانية) ..
- ٢٢١ فيدَمَان، آيلهارد؛ كول، كارل: في تاريخ العلوم الطبيعية. (٧٠) مدخل
إلى كتب الخرقى. (بالألمانية)
- ٢٣٧ رودلف، جُستاف؛ وأدولف هوخهايم: علم الفلك عند محمود بن محمد
الجغميني. (بالألمانية)
- ٣٠٠ سُوْتَر، هاينرخ: حول: رودلف، جُستاف؛ وأدولف هوخهايم: علم الفلك عند
محمود بن محمد الجغميني. (بالألمانية)
- ٣٠٢ ناليتو، كارلو الفونصو: حول علم الفلك عند الجغميني. (بالألمانية)
- ٣٠٥ سُوْتَر، هاينرخ: حول قضية زمن حياة محمود بن محمد الجغميني مؤلف
كتاب الملخص في الهيئة. (بالألمانية)

فهرس المحتويات

- فونكه، فرانس: أبحاث حول كتب عدة لليوناردو من بيزا اكتشفها ونشرها
الأمير بالتسار بونكوبانيه، وصلتها بكتب وأعمال الرياضيين العرب.
(٣) ترجمة فرنسية لقطعة لمؤلف مجهول (رسالة إلى عبد الله بن علي
الحاسب) في إنشاء المثلثات القائمة الزوايا المنطقة الأضلاع، وترجمة
لرسالة في نفس الموضوع لأبي جعفر محمد بن الحسين (الخازن).
..... (بالفرنسية) ١
- كارا دو فو، برنار: حول استخراج خطين بين خطين متوالين متناسبين .
(حول جعفر محمد بن الحسين الخازن). (بالفرنسية) ٨٥
- فيدمان، آيلهارد: في تاريخ العلوم الطبيعية. خامساً- مختارات من
موسوعات عربية وغير ذلك. ١- ترجمة القول في الهندسة من إرشاد
القاصد للأنصاري. ٢- مختارات من كتاب الشفاء لابن سينا في العلوم
الفلسفية (ما يتعلق بالعلوم الرياضية). ٣- مختارات حول العلوم
الطبيعية لابن سينا والأنصاري. (بالألمانية) ٨٧
- فيدمان، آيلهارد: في تاريخ العلوم الطبيعية. (٧٢) مدخل إلى القسم
الفلكي من كتاب الشفاء لابن سينا. (بالألمانية) ١٣٣
- لوكاي، باول: حول نشر حساب المثلثات الكروية. (حول نصر بن عراق).
..... (بالألمانية) ١٣٧

طبع في ١٠٠ نسخة

نشر بمعهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
بفرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية
طبع في مطبعة شتراوس، مورلتاخ، ألمانيا الاتحادية

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٧٧

نصوص ودراسات
حول الرياضيات الإسلامية
والفلك الإسلامي

القسم ٢

جمع وإعادة طبع
فؤاد سزكين

بالتعاون مع
كارل إيرج-إيجرت، مازن عماوي، إكهارد نوباور

١٤١٩هـ - ١٩٩٨م

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

يصدرها
فؤاد سزكين

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٧٧

نصوص ودراسات
حول الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

القسم ٢

جمع وإعادة طبع

١٤١٩ هـ - ١٩٩٨ م

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
سلسلة الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي
المجلد ٧٧

