

Publications of the Institute
for the History of Arabic-Islamic Science

Islamic Mathematics
and
Astronomy
Volume 78

Publications of the
Institute for the History of
Arabic-Islamic Science

Edited by
Fuat Sezgin

ISLAMIC
MATHEMATICS
AND
ASTRONOMY

Volume
78

Miscellaneous
Texts and Studies on
Islamic Mathematics
and Astronomy

Collected and Reprinted

III

1998

Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

ISLAMIC MATHEMATICS AND ASTRONOMY

Volume
78

MISCELLANEOUS TEXTS AND STUDIES ON ISLAMIC MATHEMATICS AND ASTRONOMY

III

Collected and reprinted
by
Fuat Sezgin

in collaboration with
Mazen Amawi, Carl Ehrig-Eggert,
Eckhard Neubauer

1998

Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

Q23

.17

1977

v.78



٣٠١٣٧٦

100 copies printed

© 1998

Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften
Beethovenstrasse 32, D-60325 Frankfurt am Main
Federal Republic of Germany

Printed in Germany by
Strauss Offsetdruck, D-69509 Mörlenbach

TABLE OF CONTENTS

Woepcke, Franz: <i>Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par M. le prince Balthasar Boncompagni, et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des arabes. I. Traduction d'un chapitre des Prolégomènes d'Ibn Khaldoun, relatif aux sciences mathématiques.</i> <i>Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei (Rome)</i> 10. 1856. pp. 236-248.....	1
Woepcke, Franz: <i>Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans. Premier article. Notice sur des notations algébriques employées par les Arabes. (On al-Qalaṣādī.)</i> <i>Journal Asiatique (Paris), 5ème série, 4. 1854. pp. 348-384.</i>	14
Woepcke, Franz: <i>Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par M. le prince Balthasar Boncompagni et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des arabes. II. Traduction du traité d'arithmétique d'Aboûl Haçan Ali Ben Mohammed Alkalçâdî.</i> <i>Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei (Rome)</i> 12. 1858-59. 230-275.	51
Cherbonneau, Auguste: <i>Notice bibliographique sur Kalaçâdî, mathématicien arabe du XVe siècle.</i> <i>Journal Asiatique (Paris), 5ème série, 14. 1859. pp. 437-448.</i>	97
Eneström, Gustaf: <i>Sur une formule d'approximation des racines carrées donnée par Alkalsadi.</i> <i>Bibliotheca mathematica (Stockholm) 3. 1886. col. 235-239.</i>	109

Şerefettin Yaltkaya (Ed.): <i>Mollâ Lutfî'l Maqtûl: La duplication de l'autel (Platon et le problème de Délos)</i> . Traduction française et introduction par Abdulhak Adnan et Henry Corbin. Paris 1940. 61, 23 pp. (Études Orientales VI).	113
Tytler, John: <i>Essay on the binomial theorem; as known to the Arabs</i> . (On Muḥammad Bâqir al-Yazdî.) Asiatic Researches, or Transactions of the Society instituted in Bengal (Calcutta) 13. 1820. pp. 456-466. ..	202
Tytler, John: <i>An essay on the extraction of the roots of integers, as practised by the Arabs</i> . (On Muḥammad Bâqir al-Yazdî.) Asiatic Researches, or Transactions of the Society instituted in Bengal (Calcutta) 17. 1832. pp. 51-168; 1 pl.	213
Marre, Aristide: <i>Du binome de Newton, antérieurement à Newton</i> . (On Muḥammad Bâqir al-Yazdî.) Nouvelles Annales de Mathématiques (Paris) 5. 1846. pp. 488-496.	331
Cherbonneau, Auguste: <i>Notice sur la dactylonomie ou numération digitale des anciens Arabes</i> . (Fragment de l'ouvrage de Chems eldîn abou Abd Allah Moḥammed Ibn Aḥmed El-Mouçouli.) Revue Orientale et Algérienne (Paris) 5. 1853. pp. 42-45.	340
Marre, Aristide: <i>Manière de compter des anciens avec les doigts des mains, d'après un petit poème inédit arabe de Chems-eddin el Mossouli, et le Tratado de Mathematicas de Juan Perez de Moya, imprimé à Alcala de Henares, en 1573</i> . Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche (Rome) 1. 1868. pp. 309-318.	344
Marre, Aristide: <i>Extrait du Kitâb al Mobârek d'Abu' l-Wafa al Djoueïni, transcrit d'après le ms. 1912 du Supplément arabe de la Bibliothèque Nationale de Paris, et traduit pour la première fois en français</i> . Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche (Rome) 7. 1874. pp. 267-277.	354

MATHÉMATIQUE. — *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par M. le prince Balthasar Boncompagni, et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des arabes par M. F. WOEPCKE (*)*.

PREMIÈRE PARTIE

Extraits et traductions d'ouvrages arabes inédits

I.

Traduction d'un Chapitre des Prolegomènes d'Ibn Khaldoun,
relatif aux sciences mathématiques.

LES SCIENCES RELATIVES AU NOMBRE.

La première de ces sciences est l'*arithmétique*, c'est à dire la connaissance des propriétés des nombres, en tant qu'ils sont ordonnés suivant une progression arithmétique ou géométrique. Par exemple : si des nombres forment une suite dont chaque terme surpasse le terme précédent du même nombre, alors la somme des deux termes extrêmes est égale à la somme de deux termes quelconques dont la distance aux deux termes extrêmes est égale, et cette somme est égale, en même temps, au double du terme moyen, lorsque le nombre des termes est impair ¹⁾ ; comme cela a lieu chez les nombres (naturels), pris suivant leur ordre, et chez les nombres pairs et les nombres impairs, également pris suivant l'ordre. Ou par exemple: si des nombres se suivent en proportion continue ²⁾, de manière que le premier soit la moitié du second, le second la moitié du troisième, et ainsi de suite jusqu'au dernier terme, ou que le premier soit le tiers du second, le second le tiers du troisième, et ainsi de suite jusqu'au dernier terme; alors le produit des deux termes extrêmes est égal au produit de deux nombres quelconques (de la même suite) dont la distance aux deux termes extrêmes est égale, et ce produit est égal, en même temps, au carré du terme moyen, si le nombre (des termes) est impair ³⁾. C'est ce qui a lieu chez les

(*) Comunicata nella sessione I del 7 dicembre 1856.

¹⁾ Prenons la progression arithmétique

$$a, a + b, a + 2b, \dots, a + nb, \dots, a + 2nb;$$

on aura

$$\begin{aligned} a + [a + 2nb] &= [a + b] + [a + (2n - 1)b] = \dots \\ &= [a + (n - 1)b] + [a + (n + 1)b] = 2[a + nb]. \end{aligned}$$

²⁾ Textuellement : « lorsque des nombres se succèdent suivant un seul et même rapport ».

³⁾ Prenons la progression géométrique

$$a, ma, m^2a, \dots, m^na, \dots, m^{2n}a;$$

on aura

$$a \cdot m^{2n}a = ma \cdot m^{2n-1}a = \dots = m^{n-1}a \cdot m^{n+1}a = (m^na)^2.$$

nombre pairment pairs qui forment la suite deux, quatre, huit, seize, etc. Ou par exemple, les propriétés qui se présentent dans la formation des triangles numériques (nombres triangulaires), ainsi que des carrés, des pentagones, des hexagones ¹⁾, lorsqu'ils sont disposés en série, se succédant suivant l'ordre. On additionne (d'abord les nombres naturels) depuis l'unité jusqu'au dernier ²⁾; on obtient ainsi les triangles qu'on place dans une ligne sous les côtés. On ajoute ensuite à chaque triangle le (triangle correspondant au) côté précédent et l'on obtient un carré. En ajoutant de même à chaque carré le triangle précédent on obtient un pentagone, et ainsi de suite. Ces polygones, ordonnés suivant leurs côtés, forment une table qui s'étend en longueur et en largeur. Suivant sa largeur elle présente (d'abord) les nombres (naturels) suivant l'ordre, ensuite les triangles suivant l'ordre, puis les carrés, les pentagones, etc. Suivant la longueur on y trouve chaque nombre et les polygones correspondants, à une étendue quelconque. En additionnant ces nombres, et en les divisant les uns par les autres dans le sens de la longueur et de la largeur de la table, on découvre des propriétés admirables dont je n'ai cité que quelques unes, et dans les traités qu'on a écrits sur cette matière, il se trouve des problèmes nombreux relatifs à ces propriétés. La même chose a lieu pour les nombres pairs, impairs, pairment pairs, pairment impairs et impairement pairs; chacune de ces différentes espèces de nombres possède des propriétés qui la caractérisent, et qui sont traitées exclusivement dans cette branche de la science. Cette théorie forme la première et en même temps la mieux établie des parties des mathématiques; elle est employée dans les démonstrations du calcul.

Les savants des temps anciens et modernes l'ont traitée dans des ouvrages; la plupart d'entre eux l'ont donnée comme une partie intégrante de l'ensemble des sciences mathématiques, sans en faire l'objet d'un traité spécial. Ainsi firent Ibn Sînâ (Avicenne) ³⁾, dans l'ouvrage intitulé « Al-chafâ w' al-nadjâ » (« Le remède et le salut »), et d'autres parmi les anciens ⁴⁾. Les modernes ont négligé cette branche parcequ'elle n'est pas d'un usage commun et qu'elle est importante seulement pour les démonstrations et non pour le calcul (l'arithmétique pratique); c'est pourquoi on la néglige dès qu'on a profité de son essence pour les démonstrations des procédés du calcul; c'est ce que firent Ibn Albannâ ⁵⁾, dans son ouvrage intitulé « Raf'ou'l-hidjâb » (« Le soulèvement du rideau »), et d'autres. Dieu seul connaît la vérité.

¹⁾ Voir le second livre de l'Arithmétique de Nicomaque, chapp. 6 à 12.

²⁾ Il faut sous-entendre qu'on prendra pour dernier nombre successivement chacun des nombres de la suite des nombres naturels.

³⁾ Voir Casiri, Tome I, pag. 268, col. 1 et suiv.

⁴⁾ Ibn Khaldoun qui naquit en 1332 de notre ère, compte ici parmi les anciens Avicenne qui vécut dans la dernière moitié du X^e et dans la première moitié du XI^e siècle (370 à 428 de l'hégire); mais je fais observer que très-souvent les auteurs arabes désignent par « les anciens » les Grecs, et par « les sciences des anciens » les sciences cultivées par les Grecs, notamment la philosophie et les sciences mathématiques.

⁵⁾ Géomètre contemporain de Léonard de Pise. Voir *Journal Asiatique*, Cahier d'Octobre - Novembre 1834, pag. 371, la note.

Autre partie de la science du nombre.

L'ART DU CALCUL. ¹⁾

C'est un art pratique ayant pour objet les calculs dans lesquels on combine les nombres par composition et par décomposition. Quant à la composition des nombres, elle se fait ou séparément, ce qui est l'addition; ou elle se fait par répétition, c'est-à-dire qu'on répète un nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre, et cela est la multiplication. De même la décomposition des nombres s'opère ou séparément, par exemple si on retranche un nombre d'un autre nombre pour connaître le reste, ce qui est la soustraction; ou l'on divise un nombre dans un nombre donné de parties égales, ce qui est la division. Cette composition et cette décomposition ont lieu également dans les nombres entiers et dans les fractions. « Fraction » signifie le rapport d'un nombre à un autre nombre; ce rapport s'appelle donc fraction. De même la composition et la décomposition ont lieu dans les racines. « Racine » signifie un nombre qui multiplié en lui-même produit le nombre carré; donc ces racines sont également susceptibles de composition et de décomposition.

Cet art est moderne; il est nécessaire pour les calculs des opérations commerciales. On a beaucoup écrit sur cet art. Dans les grandes villes on le vulgarise par l'enseignement; et on y regarde comme essentiel à une bonne instruction de commencer par apprendre cet art, à cause de l'évidence des connaissances dont il se compose et de l'ordre systématique des démonstrations qu'il emploie. L'étude de cet art produit généralement un esprit lucide et habitué à raisonner juste. On a dit que quiconque veut aborder l'étude du calcul, doit commencer par s'adonner entièrement à la vérité à cause de la justesse des constructions ²⁾ propres au calcul et de l'exactitude scrupuleuse qu'il exige. Ensuite cela deviendra une qualité du caractère, on s'accoutumera à la vérité et s'y attachera comme à une habitude constante.

Parmi les ouvrages étendus traitant de cet art et composés en ce temps dans le Maghreb, un des meilleurs est l'ouvrage intitulé : « Al-ḥiçarou'l-çagħir » (« La petite selle ») ³⁾; Ibn Albannâ, le Marocain, en a fait un abrégé qui renferme les règles des opérations, ouvrage utile; puis il a commenté le même traité dans l'ouvrage qu'il intitula « Ra'fou'l-hidjâb » (« Le soulèvement du rideau »). Cet ouvrage est difficile pour les commençants à cause des démonstrations solidement construites (c'est à dire rigoureuses et détaillées) qu'il renferme. C'est un ouvrage d'une grande valeur, et nous avons vu les docteurs (çaiḥks) en faire beaucoup de cas, ce dont l'ouvrage est digne; la difficulté y vient seulement de la méthode des démonstrations. L'auteur (que Dieu, dont le nom soit exalté, soit miséricordieux envers lui!) a pris pour guide dans cet ouvrage le traité intitulé « Fikhou'l-ḥiçâb » (« La science du calcul »), par Ibn Almon'am ⁴⁾, et le traité intitulé « Al-qâmil »

¹⁾ C'est à dire l'Arithmétique pratique. — Comparer *Hadji Khalifa*, édition de Fluegel, Vol. III, pag. 60 et suiv.

²⁾ C'est à dire l'exactitude rigoureuse des raisonnements et des démonstrations.

³⁾ Comparer *Hadji Khalifa*, Vol. III, pag. 70, n.° 4519.

⁴⁾ Comparer *Hadji Khalifa*, Vol. IV, pag. 459, n.° 9176.

(« Le parfait ») par Alahdal¹⁾. Il résuma les démonstrations de ces deux ouvrages et autre chose encore en fait de ce qui concerne l'emploi technique des signes²⁾ dans ces démonstrations, servant à la fois pour le raisonnement abstrait et pour la représentation visible (figurée), ce qui est le secret et l'essence de l'explication (des procédés du calcul) au moyen des signes. Tout cela est difficile, mais la difficulté n'y vient que de la part des démonstrations, particularité propre aux sciences mathématiques, parceque leurs problèmes et leurs opérations sont toutes évidentes (faciles à comprendre); mais si l'on en désire l'explication, alors il s'agit de donner les raisons de ces opérations, et c'est là qu'il se présente pour l'entendement des difficultés qu'on ne trouve pas dans la pratique des problèmes. Réfléchissez à cela. Dieu guide par sa lumière qui il veut.

Autre partie de la même science,

L'ALGÈBRE.

C'est un art au moyen duquel on détermine le nombre inconnu par l'examen de ce qui est connu et donné, lorsqu'il existe entre l'un et l'autre une certaine relation. Dans le langage technique de cet art on assigne aux quantités inconnues différents degrés suivant la répétition par multiplication. Le premier³⁾ de ces degrés est *la chose* (« *châ* »), parceque toute inconnue est une chose⁴⁾. On l'appelle aussi racine, par ce qu'on obtient, par la multiplication de ce degré en lui-même, le second degré. Le second de ces degrés est *le carré* (« *mâl* »)⁵⁾, et le troisième est *le cube* (« *qa'h* »). Les degrés suivants sont déterminés d'après *l'ass*⁶⁾ des deux (degrés) multipliés. Ensuite viennent les opérations habituelles, auxquelles on soumet le problème pour arriver à une équation⁷⁾ entre deux degrés différents ou entre plusieurs

¹⁾ Comparer *Hadji Khalfa*, vol. V, pag. 27, n.° 9739.

²⁾ Comparer *Journal Asiatique*, Cahier d'Octobre — Novembre 1854, pag. 368, note 1.

³⁾ Dans un autre manuscrit des *Protégomènes* d'Ibn Khaldoun le passage relatif aux degrés de l'inconnue est conçu de la manière suivante :

« Le premier de ces degrés est le nombre, parceque c'est au moyen du nombre (donné) que l'on » détermine l'inconnue cherchée en la déduisant du rapport qui existe entre elle et le nombre. Le » second de ces degrés est la chose, parce que toute inconnue, en tant qu'elle est cachée, est une » chose; on l'appelle aussi racine, parce qu'on obtient, par la multiplication de ce degré en lui-même, » le second (sic) degré. Le troisième de ces degrés est le *mdl* qui est le carré inconnu. Les degrés » suivants etc. ».

⁴⁾ C'est à dire que l'inconnue, tant qu'elle reste telle, ne peut encore être désignée que par le nom tout à fait vague de « chose ».

⁵⁾ « *MDL* » signifie proprement « possessions, richesses ».

⁶⁾ Le terme « *ass* » ne désigne autre chose que l'exposant d'une puissance algébrique. Voir *Journal Asiatique*, Cahier d'Octobre — Novembre 1854, pag. 353, lig. 17; pag. 364, chap. III; pag. 367, chap. VII; pag. 368, chap. VIII. — Le passage du texte veut dire que le n.° degré de l'inconnue est celui qui résulte de la multiplication du $(n-m)^e$ degré par le m^e .

⁷⁾ Ou bien : « Ensuite viennent les opérations indiquées par l'énoncé du problème, au bout desquelles on arrive à une équation etc. » Il s'agit de la mise en équation du problème.

de ces degrés; on en oppose les uns aux autres ¹⁾, on restaure ²⁾ ce qui se trouve parmi eux de fractionnaire de manière à le rendre entier, et on abaisse, s'il est possible, les degrés de l'inconnue de manière à les réduire aux exposants (ass) les plus petits, afin qu'ils soient ramenés à ces trois degrés qui constituent, selon les algébristes, le domaine de l'algèbre, à savoir: le nombre, la chose et le carré. Lorsque l'équation a lieu entre un terme et un autre terme, tout est déterminé; le carré et la racine, lorsqu'ils sont égaux au nombre, cessent d'être inconnus et sont déterminés; et lorsque le carré est égal à des racines, il est déterminé par le nombre (le coefficient) de ces dernières ³⁾. Lorsque l'équation a lieu entre un terme et deux termes, la valeur de l'inconnue est déterminée par le procédé géométrique qui consiste à retrancher le produit par deux ⁴⁾; alors cette soustraction du produit détermine ce qui était inconnu d'abord. L'équation entre deux termes et deux termes ⁵⁾ est impossible (à résoudre). On ne parvient pas, selon les algébristes, en fait d'équations (résolubles) à plus de six problèmes; car l'équation entre le nombre, la racine et le carré pouvant être ou simple, ou composée, il en résulte six espèces.

Le premier qui écrit sur cette branche des mathématiques fut Abou Abdallah Alkhârezmi, après lequel vint Abou Qâmil Chodjâa Ben Aslam ⁶⁾. On a généralement suivi sa méthode (celle d'Alkhârezmi) dans cette science, et son traité sur

¹⁾ C'est l'opération de la *mokâbala*; elle consiste, d'après quelques traités d'algèbre arabes, à former l'équation, à en opposer les deux membres l'un à l'autre; d'après d'autres traités la *mokâbala* est l'action de supprimer, dans les deux membres de l'équation, les quantités égales.

²⁾ C'est l'opération du *djebr* (d'où le nom d'algèbre); elle consiste à faire disparaître de l'équation les fractions, comme le texte le dit fort clairement.

³⁾ L'auteur discute ici les trois espèces d'équations que les algébristes arabes appellent les équations *simples*, savoir

$$x^2 = a, \quad x = a, \quad x^2 = ax$$

tandis qu'ils appellent *composées* les trois espèces suivantes

$$x^2 + ax = b, \quad x^2 + b = ax, \quad x^2 = ax + b.$$

⁴⁾ Ce passage est fort obscur. Voici, en guise d'explication conjecturale, un procédé géométrique dans lequel on résout une équation du second degré au moyen de la soustraction d'une quantité multipliée en deux, à savoir d'un double rectangle.

Que l'équation proposée soit $x^2 = ax + b$. Soit ABCD un carré égal

au carré inconnu x^2 . Prenons AM et CN égaux chacun à $\frac{a}{2}$, et menons MP et NQ parallèlement aux côtés du carré ABCD. En retranchant du carré ABCD $= x^2 = ax + b$, les deux rectangles AQRM et

RPCN, ou deux fois le rectangle AQRM, c'est à dire $2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)$

$= ax - \frac{a^2}{2}$, on obtient $(ax + b) - \left(ax - \frac{a^2}{2}\right) = b + \frac{a^2}{2}$; donc

MAND + QBPR $= b + \frac{a^2}{2}$, ou $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{2}$, ou $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4}$, d'où

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}.$$

⁵⁾ C'est à dire une équation renfermant trois degrés différents de l'inconnue et un terme constant.

⁶⁾ Comparez *Hadjî Khalfa*, Vol. II, pag. 585.

les six problèmes de l'algèbre est un des meilleurs ouvrages composés sur cette science ¹⁾. Beaucoup d'Andalousiens (Arabes espagnols) ont écrit sur ce traité d'excellents commentaires. Un des meilleurs commentaires est l'ouvrage d'Alkorachi ²⁾.

Nous avons aussi entendu que quelques uns des mathématiciens les plus illustres de l'orient ont étendu le nombre des équations au delà de ces six espèces, l'ont porté à plus de vingt, et ont découvert pour toutes ces espèces des procédés (de résolution) sûrs, fondés sur des démonstrations géométriques ³⁾. Dieu exalte parmi les créatures qui il veut.

Autre partie de la même science.

LES OPÉRATIONS COMMERCIALES.

C'est l'application du calcul aux transactions commerciales qui se font dans les villes, aux marchandises, aux mesures, aux impôts et à toutes les autres opérations commerciales dans lesquelles il se présente des nombres. Elle consiste à traiter par l'art du calcul des inconnues et des connues, des fractions et des nombres entiers, des racines et le reste. Il existe un grand nombre de problèmes consacrés par l'usage et relatifs à cette matière, ayant pour but de produire chez l'élève l'habitude de ces opérations et de le familiariser avec elles à force de les répéter, de sorte qu'il parvienne à posséder d'une manière sûre l'art du calcul.

Les Andalousiens savants dans l'art du calcul ont composé sur les opérations commerciales de nombreux traités. Parmi les plus célèbres on doit citer les « Opérations commerciales » d'Alzahrâwî ⁴⁾, d'Ibn Alsamah ⁵⁾, d'Abou Mouslim Ben Khaldoûn ⁶⁾, disciple de Mouslimah Almadjritî ⁷⁾, et d'autres semblables.

Autre partie de la même science.

LE PARTAGE DES SUCCESSIONS. ⁸⁾

Cette science fait partie de l'art du calcul et s'occupe de la détermination exacte des portions dues aux héritiers dans une succession, lorsque, par exemple, ces

1) Ibn Khaldoun veut évidemment parler du traité d'algèbre composé par Abou Abdallah Mohammed Ben Mouçâ Alkhârezmî, que M. Frédéric Rosen a publié à Londres en 1831 en l'accompagnant d'une traduction anglaise.

2) Voir Casiri, Tome II, pag. 125, col. 2.

3) Nous connaissons maintenant l'ouvrage arabe qui contient cette extension de l'Algèbre à laquelle Ibn Khaldoun fait ici allusion. C'est l'algèbre d'Omar Alkhayyâmî qui ajoute aux six problèmes de Mohammed Ben Mouçâ, c'est à dire aux équations du 1.^{er} et du 2.^d degré, les équations du 3.^e degré dont il construit les racines géométriquement par les intersections de deux coniques. Comparer *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits*, par F. Woepcke. Paris 1851.

4) Voir Casiri, T. II, p. 138, col. 2 ult.

5) Voir Hadji Khalifa, Vol. III, pag. 557, n.^o 6933.

6) Voir Casiri, T. I, p. 438, col. 1.

7) Voir Casiri, T. I, p. 378, col. 2.

8) Le nom arabe de cette science est formé d'un seul mot : *Al-fardiyâh*, proprement « les sta-

portions sont nombreuses et que quelques uns des héritiers sont morts eux-mêmes de sorte que leurs portions doivent être réparties entre les survivants; ou lorsqu'il se trouve, quand les héritiers se réunissent et se pressent pour participer à l'héritage, que la somme des portions qu'ils réclament dépasse la masse de la succession; ou lorsqu'il y a discussion, au sujet des portions dues, de la part de quelques uns des héritiers contre certains autres. Dans toutes ces circonstances on a besoin d'un procédé qui serve à déterminer d'une manière exacte la grandeur des portions légales, ainsi que les portions dues aux héritiers de chaque lit, de telle sorte que les portions des biens laissés reçues par les héritiers soient à la masse entière de ces biens, comme les parties aliquotes représentant leurs droits à la succession, à la somme de toutes ces parties. Dans ces déterminations on emploie une partie considérable de l'art du calcul, notamment le calcul des nombres entiers et fractionnaires, des racines, des connues et des inconnues. Les parties de cette science se suivent dans le même ordre que les chapitres de la législation relatifs aux héritages et les questions traitées dans ces chapitres. Il résulte de là que cet art comprend premièrement une partie de la jurisprudence, à savoir les jugements relatifs aux héritages en ce qui concerne les portions dues, les assurances, les affirmations, les contestations, les testaments, les arrangements et autres choses dont il est question dans les problèmes relatifs à cette matière; en second lieu cet art comprend une partie du calcul, à savoir la détermination exacte des portions conformément à la décision légale. C'est donc un des arts les plus nobles, et les personnes qui le cultivent, citent plusieurs des sentences du prophète, conservées par la tradition, qui confirment l'excellence de cet art; par exemple: « Les *fardayidh* sont un tiers de la science entière », et « les *fardayidh* sont la première entre les sciences qui ait été exaltée », et d'autres semblables. Je crois cependant que toutes ces sentences se rapportent aux *fardayidh* proprement dits, ainsi qu'il en est question dans ce qui précède, et non pas aux *fardayidh* des héritages simplement, car ceux-ci sont trop peu étendus pour former un tiers de la science entière, tandis que les *fardayidh* proprement dits sont fort considérables ¹⁾.

Aussi bien dans les temps anciens que dans les temps modernes on a écrit sur cette branche des mathématiques et on l'a traitée à fond. Parmi les meilleurs ouvrages qui en traitent d'après les institutions du rite maléqite (que la miséricorde du Très-haut soit sur son fondateur), il faut citer le traité d'Ibn Thahit ²⁾, l'abrégé du kadhî Aboul Kâcim Alhaoufi ³⁾, et les traités d'Ibn Almountr, d'Aldja'di ⁴⁾, d'Al-cardi et d'autres. Cependant il faut placer Alhaoufi au premier rang, et son traité est préférable à tous les autres. Parmi les chaïkhs de notre rite Aboû Abdallah Mohammed Ben Soulaïmân Alsathi ⁵⁾, le grand entre les chaïkhs de Fez, a commenté le traité d'Alhaoufi par un travail explicatif et fort complet. L'imâm de la Mecque

tous de la loi sacrée », et plus particulièrement « la science qui règle les portions des héritages d'après les lois établies dans le Koran. » — Comparer *Hadji Khalifa*, Vol. IV, p. 393 et suiv.

1) Voir la note précédente.

2) Comparer *Hadji Khalifa*, Vol. III, pag. 64.

3) Comparer *Hadji Khalifa*, Vol. IV, pag. 398, n.° 8981.

4) Comparer *Hadji Khalifa*, Vol. IV, pag. 398, n.° 8978.

5) Ainsi porte le manuscrit. Mais je crois qu'il faut lire *Albasthi* ou *Alsabti*.

et de Médine ¹⁾ a composé sur le partage des successions des ouvrages d'après les règles du rite chaféite; ces ouvrages sont très-répandus à cause de sa vaste célébrité dans les sciences et de l'autorité de son rang. Il existe pareillement des ouvrages conçus d'après les règles du rite hanéfite et du rite hanbalite. Les hommes occupent dans les sciences différentes positions. Dieu dirige dans la bonne voie qui il veut.

LES SCIENCES GÉOMÉTRIQUES.

Cette science s'occupe des quantités, soit continues, telles que la ligne, la surface et le corps, soit discontinues, telles que les nombres. Elle considère les propriétés essentielles de ces quantités; par exemple, que les angles de chaque triangle sont égaux à deux angles droits; que deux droites parallèles ne peuvent se rencontrer d'aucun côté, quand même elles seraient prolongées jusqu'à l'infini; que lorsque deux droites se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux; que lorsqu'on a quatre quantités proportionnelles, le produit de la première par la quatrième est égal au produit de la seconde par la troisième, et d'autres propriétés semblables.

Le traité grec sur cette science qui a été traduit, à savoir le traité d'Euclide ²⁾ intitulé « Le livre des éléments et des fondements », est l'ouvrage le plus étendu qui ait été écrit sur cette branche des mathématiques à l'usage des élèves, et en même temps le premier ouvrage grec qui ait été traduit par les vrais croyants. Cela eut lieu du temps d'Abou Dja'far Almançour ³⁾. Il existe différents exemplaires (ou différentes éditions) de ce traité suivant les différents traducteurs. On en a une traduction par Honaïn Ben Ishak ⁴⁾, une autre par Thâhit Ben Korrah ⁵⁾, et une troisième par Youçouf Ben Albadjdjadj ⁶⁾. L'ouvrage d'Euclide comprend quinze livres, dont quatre sur les figures planes, un sur les quantités proportionnelles, un autre sur la proportionnalité des figures planes, trois sur les (propriétés des) nombres, le dixième sur les quantités rationnelles et sur les quantités qui peuvent les quantités rationnelles, c'est à dire leurs racines, enfin cinq livres sur les corps. On a fait beaucoup d'abrégés de cet ouvrage. Ainsi fit Ibn Sinâ dans ses « Préceptes de la médecine » dont il consacra une partie exclusivement et spécialement à ce sujet; et de même Ibn Alçalt ⁷⁾ dans son traité des « Connaissances suffisantes », et d'autres encore. Des savants modernes ont fait un grand nombre de commentaires sur le traité d'Euclide. Il forme la base indispensable des sciences géométriques.

Sachez que l'utilité de la géométrie consiste à éclairer l'intelligence et à affermir le raisonnement de celui qui la cultive, parceque toutes ses démonstrations se

¹⁾ Comparer *Hadji Khalfa*, Vol. III, pag. 64.

²⁾ Comparer *Casiri*, T. I, pag. 339 et suiv. — *Hadji Khalfa*, Vol. I, pag. 380 à 384. — *Gartz*, de *Interpretibus et Explanatoribus Euclidis Arabicis*; Halae, 1823.

³⁾ Comparer *Casiri*, T. I, pag. 239, col. 2.

⁴⁾ Comparer *Casiri*, T. I, pag. 286, col. 1 et suiv., et pag. 240, col. 1.

⁵⁾ Comparer *Casiri*, T. I, pag. 386, col. 2.

⁶⁾ Comparer *Casiri*, T. I, pag. 341.

⁷⁾ Comparer *Casiri*, T. I, pagg. 244, 254, 349.

distinguent par la clarté de leur arrangement et par l'évidence de leur ordre systématique. Cet ordre et cet arrangement systématique empêchent toute erreur de se glisser dans ses raisonnements, de sorte que l'esprit des personnes qui s'occupent de cette science, est moins sujet à l'erreur et que leur intelligence se développe par cette étude. On prétend aussi que les paroles suivantes se trouvaient écrites sur la porte de (l'école de) Platon : « Que nul n'entre dans notre demeure s'il n'est géomètre ». De même nos chaïkhs (que la miséricorde divine soit sur eux) ont dit que l'étude de la géométrie est pour l'esprit ce que l'emploi longtemps répété du savon est pour le vêtement dont il lave les souillures et enlève les taches. Voilà ce que nous voulions dire à propos de l'arrangement et de l'ordre systématique de cette science. Dieu seul connaît la vérité.

Autre partie des mêmes sciences.

LA GÉOMÉTRIE SPÉCIALE DES FIGURES SPHÉRIQUES ¹⁾ ET DES CONIQUES.

Quant aux figures sphériques, il existe sur elles deux ouvrages grecs, à savoir les traités de Théodose ²⁾ et de Ménélaüs ³⁾ qui traitent de leurs surfaces et de leurs intersections. Dans l'enseignement on fait précéder l'ouvrage de Ménélaüs de celui de Théodose parceque beaucoup de démonstrations du premier sont fondées sur le second. Cette science est indispensable à quiconque veut faire une étude approfondie de l'astronomie, parceque les démonstrations de cette dernière reposent sur celle-là. En effet, la théorie de l'astronomie toute entière n'est autre chose que la théorie des sphères célestes et de ce qu'on y trouve en fait d'intersections et de cercles par suite des mouvements célestes, ainsi que nous l'exposerons ci-après; elle est donc fondée sur la connaissance des propriétés des figures sphériques, de leurs surfaces et de leurs intersections.

La théorie des sections coniques forme également une partie de la géométrie. C'est une science qui examine les figures et les sections produites dans les solides coniques, et démontre leurs propriétés par des démonstrations géométriques, fondées sur les éléments des mathématiques. Son utilité se montre dans les arts pratiques qui ont pour objet des corps, tels que la charpenterie et l'architecture; elle se montre aussi lorsqu'il s'agit de construire des figures merveilleuses et des temples curieux ⁴⁾, de traîner des corps pesants et de soulever des masses volumineuses au moyen de l'équilibre et des machines, et autres choses semblables.

Certains auteurs ont traité cette branche des mathématiques à part dans un ouvrage sur la mécanique pratique contenant des procédés curieux et des artifices ingénieux, tout-à-fait admirables, et souvent difficiles à comprendre à cause de la difficulté des démonstrations géométriques sur lesquelles ils sont fondés. Cet ou-

¹⁾ Comparer *Hadji Khalifa*, Vol. I, pag. 388.

²⁾ Comparer *Casiri*, T. I, pag. 345. — *Hadji Khalifa*, Vol. I, p. 389, n.° 1099.

³⁾ Comparer *Casiri*, T. I, pag. 345. — *Hadji Khalifa*, Vol. I, p. 390, n.° 1100.

⁴⁾ L'auteur veut ici parler de la construction d'automates et d'artifices semblables, dans le genre des Pneumatiques d'Héron et des horloges du moyen âge. J'ai examiné un traité arabe sur cette matière, contenu dans le MS. n.° 108 de la Bibliothèque de Leyde.

vrage se trouve entre les mains de beaucoup de personnes; on l'attribue aux Bént Châqir ¹⁾.

Autre partie de la géométrie.

LA GÉODÉSIE.

On a besoin de cette science pour mesurer le sol, et son nom signifie la détermination de la quantité du sol; cette quantité est exprimée en emfans ou cou-dées ou d'autres (unités de mesures), ou bien par le rapport de deux quantités de terrain lorsqu'on en compare une à une autre semblable. On a besoin de ces déterminations pour fixer les impôts sur les champs ensemencés, sur les terres labourables et sur les plantations, pour partager des enclos et des terres entre des associés ou des héritiers, et pour d'autres buts semblables. On a écrit sur cette science de bons et nombreux ouvrages.

Autre partie de la géométrie.

L'OPTIQUE.

Cette science explique les causes des illusions optiques en faisant connaître leur nature et la manière dont elles ont lieu. Cette explication est fondée sur ce principe que la vision se fait au moyen d'un cône de rayons ayant pour sommet le point occupé par (l'œil de) celui qui voit, et pour base l'objet vu ²⁾. Une grande partie des illusions optiques consiste en ce que l'on voit les objets rapprochés grands et les objets éloignés petits, que des objets petits vus sous l'eau ou derrière des corps transparents paraissent grands, qu'une goutte de pluie qui tombe, fait l'effet d'une ligne droite, et un tison (tourné avec une certaine vitesse) celui d'un cercle, et autres choses semblables. Or, on explique dans cette science les causes et la nature de ces phénomènes par des démonstrations géométriques. Elle explique, en outre, les différentes phases de la lune suivant ses différentes (longitudes et) latitudes, au moyen desquelles on peut aussi connaître (d'avance le temps de) l'apparition des nouvelles lunes et l'arrivée des éclipses, et beaucoup d'autres phénomènes semblables.

Beaucoup de Grecs ont écrit sur cette branche des mathématiques. Parmi les musulmans le plus célèbre qui ait écrit sur cette science est Ibn Alhaïtham ³⁾. Il y a aussi d'autres auteurs qui ont composé des traités d'optique. Elle fait partie des sciences mathématiques et des sciences qui en dérivent.

L'ASTRONOMIE.

Cette science considère les mouvements des étoiles fixes et des planètes, et dé-

¹⁾ Comparer *Casiri*, T. I, pag. 418.

²⁾ Comparer l'*Optique* d'Euclide, Axiome 2^e, pag. 604 de l'édition d'Oxford des œuvres d'Euclide.

³⁾ Comparer l'*Algèbre* d'Omar Alkayyâmi, pag. 74, lig. 36. — Ce passage semble confirmer que l'ouvrage dont une traduction latine a été publiée à Bâle en 1572 sous le titre de « Alhazeni Opticae Thesaurus » est le même que celui que le *Târikh Alhoqamâ* cite parmi les ouvrages d'Ibn Alhaïtham.

duit de la nature de ces mouvements, par des méthodes géométriques, les configurations et les positions des sphères dont les mouvements observés sont la conséquence nécessaire. Elle démontre ainsi, par l'existence du mouvement de l'accélération et de la retardation, que le centre de la terre ne coïncide pas avec le centre de la sphère du soleil; de même elle prouve par les rétrogradations et les stations des planètes l'existence de petites sphères déférentes qui se meuvent dans l'intérieur de la grande sphère de la planète; elle démontre pareillement l'existence de la huitième sphère par le mouvement des étoiles fixes; elle déduit enfin le nombre des sphères pour chaque planète séparément, du nombre de ses inégalités, et autres choses semblables. C'est au moyen de l'observation que nous parvenons à connaître les mouvements existants, leur nature et leurs espèces. C'est ainsi que nous connaissons le mouvement de l'accélération et de la retardation, l'arrangement des sphères suivant leurs ordres, les rétrogradations et les stations, et autres choses semblables.

Les Grecs ont cultivé l'observation avec beaucoup de zèle et ont construit, dans ce but, des instruments devant servir à l'observation du mouvement d'un astre déterminé, et appelés chez eux « instruments aux armilles ». L'art de les construire, et les démonstrations relatives à la correspondance de leurs mouvements avec ceux de la sphère étaient fort répandus parmi eux. Parmi les vrais croyants on n'a montré que peu de zèle pour les observations astronomiques ¹⁾. On s'en occupait quelque peu dans le temps d'Almâmoûn; on construisit alors cet instrument connu sous le nom de l'instrument aux armilles. Ce commencement n'eut pas de suite. Lorsque Almâmoûn fut mort, personne n'imita son exemple. On négligea après lui l'observation et se fia aux observations anciennes. Mais ces observations ne sont pas exactes, parceque les mouvements célestes se modifient dans le cours de longues périodes d'années. De même la correspondance du mouvement de l'instrument pendant l'observation avec le mouvement des sphères et des astres n'est qu'approximative et n'offre pas une exactitude parfaite. Or, lorsque l'intervalle de temps écoulé est considérable, l'erreur de cette approximation devient sensible et manifeste.

L'astronomie, dont nous parlons, est un art sublime. Cependant elle ne fait pas connaître, comme on le croit ordinairement, la forme des cieux et l'ordre des sphères tels qu'ils sont en réalité, mais elle donne seulement ces formes et ces configurations des sphères comme résultant de ces mouvements. Or, vous savez qu'une seule et même chose peut être la conséquence de causes différentes; et lorsque nous disons que les mouvements sont une conséquence nécessaire (des formes et de l'arrangement des sphères) nous concluons de l'effet à l'existence de la cause. L'astronomie ne donne donc pas la vérité absolue; de manière toutefois qu'elle n'en reste pas moins une science magnifique; elle est en effet une des parties les plus importantes des sciences mathématiques.

Un des meilleurs ouvrages qui aient été composés sur cette science est l'*Almageste* qu'on attribue à Ptolémée ²⁾. Cet auteur n'est pas un des rois grecs du même

¹⁾ Cette assertion paraît prouver seulement qu'Ibn Khaldoun n'était pas toujours parfaitement bien informé. Nous savons maintenant, grâce aux savants travaux de MM. L.—I. et L.—A. Sédillot que les astronomes arabes ont cultivé l'observation avec beaucoup de zèle.

²⁾ Comparer Casiri, T. I, pag. 348 col. 2 et suiv. — *Hadji Khalifa*, Vol. V, pag. 383 et suiv. n. 11313.

nom, ainsi que l'ont établi les commentateurs de cet ouvrage. Les savants les plus distingués de l'Islam, en ont fait des abrégés. C'est ainsi qu'Ibn Sina en fit une partie de ses « Préceptes de la médecine. » De même, parmi les savants andalousiens, Ibn Rochd (Averroès) en a donné un résumé, et pareillement Ibn Alsamah et Ibn Alçalt dans son traité des « Connaissances suffisantes ». Ibn Alfarghânî ¹⁾ est auteur d'une « Astronomie purifiée » qu'il a rendue accessible et facile en supprimant les démonstrations géométriques. Dieu, dont le nom soit exalté, a enseigné à l'homme ce qu'il n'avait pas su.

Autre partie de l'Astronomie.

LA SCIENCE DES TABLES ASTRONOMIQUES ²⁾.

C'est un art qui fait usage du calcul et qui est fondé sur des règles numériques. Il détermine pour chaque astre en particulier le chemin de son mouvement, ainsi que ses accélérations, retardations, stations et rétrogradations telles qu'elles résultent, pour le lieu qu'il occupe, des démonstrations de l'astronomie, et autres choses encore. Tout cela sert à connaître les positions des astres dans leurs sphères, pour un temps quelconque donné, par le calcul de leurs mouvements d'après les règles ci-dessus mentionnées, tirées des traités astronomiques. Cet art possède, en guise de préliminaires et d'éléments, des règles sur la connaissance des mois, des jours et des époques passées; il possède, en outre, des éléments sûrs pour la connaissance du périhélie et de l'apogée, des déclinaisons, des espèces des mouvements et des manières de les déduire les uns des autres. On dispose toutes ces quantités en colonnes arrangées de manière à en rendre l'usage facile aux élèves, et appelées tables astronomiques (« azyâdj »). Quant à la détermination même des positions des astres, pour un temps donné, au moyen de cet art, on l'appelle équation (« ta'dil ») et rectification (« takwîm »).

Tant les anciens que les modernes ont beaucoup écrit sur cet art, par exemple Albattânî ³⁾, Ibn Alqimâd ⁴⁾ et d'autres. Dans l'Occident les modernes, jusqu'au jour présent, s'en sont rapportés aux tables attribuées à Ibn Ishâk ⁵⁾. On prétend qu'Ibn Ishâk se fonda pour la composition de ces tables sur l'observation, et que dans la Sicile vécut un juif, très-versé dans l'astronomie et les mathématiques et observateur zélé, qui envoyait à Ibn Ishâk tout ce qu'il obtenait en fait de résultats exacts relativement à l'état des astres et à leurs mouvements. Les savants de l'Occident ont donc fait beaucoup de cas de ces tables à cause de la solidité des bases sur lesquelles elles sont fondées, à ce qu'on prétend. Plus tard Ibn Albannâ a fait un résumé de ces tables qu'il appela « Le chemin ouvert » (« Alminhâdj ») ⁶⁾. Cet ouvrage est très-recherché à cause de la facilité qu'il donne aux opérations.

¹⁾ Comparer Casiri, T. I, pag. 409, col. 2.

²⁾ Comparer Hadji Khalifa, Vol. III, pag. 856 à 870.

³⁾ Comparer Casiri, T. I, pag. 342, col. 1 à pag. 344, col. 1. — Hadji Khalifa, vol. III, pag. 568, n.° 6981.

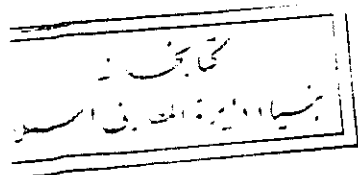
⁴⁾ Comparer Casiri, T. I, pag. 393, col. 2. — Hadji Khalifa, Vol. III, pag. 868, n.° 6969 et pag. 869, n.° 6970.

⁵⁾ Bien que le manuscrit porte à plusieurs reprises Ibn Ishâk, il paraît qu'Ibn Khaldoun veut parler du célèbre astronome Arzachel qui s'appelait Abou Ishâk.

⁶⁾ Voir Journal asiatique, Cahier d'Octobre — Novembre 1854, pag. 371, la note.

On a besoin des positions des astres pour fonder sur elles les prédictions de l'astrologie judiciaire. Cette science consiste dans la connaissance des indices d'après lesquels arrive , suivant leurs positions , ce qui se passe dans le monde des hommes en fait de règnes, de dynasties, de natiuités humaines et d'accidents extraordinaires, ainsi que nous l'expliquerons dans la suite en exposant clairement comment ces prédictions ont été confirmées par les évènements, si telle est la volonté de Dieu dont le nom soit exalté.

Remarque. Le texte qui a servi de base à la présente traduction, est une copie que j'ai prise à Leyde, en 1850, sur deux manuscrits de la Bibliothèque de cette ville qui offrent des différences nombreuses et considérables. Quoique j'aie passé plus de cinq ans à Paris, il m'a été impossible de comparer ma copie avec les beaux manuscrits de la Bibliothèque Impériale. Ces manuscrits se trouvaient pendant tout ce temps entre les mains de M. Quatremère. En outre, j'ai été obligé de faire cette traduction éloigné de presque toutes les ressources que j'avais eues à ma disposition pour mes travaux antérieurs, et même privé du secours de ma propre bibliothèque. Toutefois, aimant à placer ce morceau, à cause de son caractère encyclopédique, en tête du présent travail, et ne voulant pas trop retarder la suite de cette publication, j'ai dû me décider à donner ma traduction telle qu'on la trouve ci-dessus, malgré les imperfections résultant inévitablement des circonstances que je viens de mentionner.



RECHERCHES
SUR
L'HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
CHEZ LES ORIENTAUX,
D'APRÈS DES TRAITÉS INÉDITS ARABES ET PERSANS,
PAR M. F. WOEPCKE.

PREMIER ARTICLE.
NOTICE SUR DES NOTATIONS ALGÈBRIQUES EMPLOYÉES
PAR LES ARABES.

(Un extrait de cette notice a été présenté à l'Académie des Sciences
dans la séance du 17 juillet 1854.)

Les traités d'algèbre arabes connus jusqu'à présent, et appartenant à différentes époques, depuis

le ix^e jusqu'au xvii^e siècle de notre ère, mais ayant tous pour auteurs des Arabes de l'Orient¹, nous présentent cette science sous une forme exclusivement discursive et parlée, et qui n'admet aucun genre de notation, soit pour désigner les quantités connues

¹ Les traités en question dont aient paru jusqu'à présent le texte et la traduction, ou du moins un extrait complet, sont au nombre de quatre. Voici les titres sous lesquels ils ont été publiés :

1° « *The Khoolasat-ool-Hisab*, a compendium of arithmetic and geometry, in the arabic language, by Buhac-ood-Deen, of Amool in Syria, with a translation into persian and commentary, etc., Calcutta, 1812. » C'est un traité d'arithmétique, qui contient aussi un chapitre sur l'algèbre. L'auteur, né en 1547, en Syrie, mourut à Ispahan en 1622. En 1843, M. Nesselmann, auteur d'une excellente histoire de l'algèbre chez les Grecs, a réimprimé à Berlin le texte arabe de l'édition de Calcutta, en y faisant diverses corrections, et en l'accompagnant d'une traduction allemande. Enfin, M. Aristide Marre en a donné une traduction française dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, publiées par MM. Terquem et Gérono, année 1846, vol. V, p. 263 et suiv.

2° « *The algebra of Mohammed Ben Musa*, edited and translated by Frederic Rosen, London, 1831. » Mohammed Ben Mouâqâ, originaire du Khârezm, composa ce traité d'algèbre sous le règne et à l'invitation du khalife Almâmoûn.

3° *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmi*, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits, par F. Woepcke, Paris, 1851. Alkhayyâmi, né à Nichâboûr, mourut dans la même ville en 1123. Un fragment de ce traité d'algèbre fut découvert dans un manuscrit de la Bibliothèque impériale, en 1834, par M. Sédillot (voir *Journal asiatique*, mai, 1834), qui publia une analyse détaillée de ce fragment dans un mémoire inséré dans les *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale*, t. XIII, p. 130 à 136.

4° *Extrait du Fakhrî*, traité d'algèbre par Aboû Bekr Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhi; précédé d'un mémoire sur l'algèbre indéterminée chez les Arabes, par F. Woepcke, Paris, 1853. Alkarkhi dédia ce traité à Fakhr Al-moulq, mort le 3 septembre 1016, vizir du prince bouïde Belâ Ed-daoulah, fils d'Adhad Ed-daoulah.

ou inconnues sur lesquelles on opère, soit pour indiquer ces opérations. Tout, au contraire, y est exprimé par des mots et des phrases, même les coefficients numériques, qui ne sont représentés ni par les lettres numérales, ni par les chiffres, mais par les numératifs de la langue.

On sait que, d'autre part, l'algèbre des Grecs et celle des Indiens nous offrent déjà des commencements d'une notation algébrique. Diophante a des signes pour l'inconnue et ses puissances, ainsi que pour le terme constant, auxquels signes il joint les coefficients numériques, figurés au moyen des lettres de l'alphabet; en outre, il a un signe pour exprimer la soustraction. Les algébristes indiens ont, de plus, des signes pour un nombre quelconque d'inconnues, une notation des puissances qui permet de l'appliquer d'une manière uniforme à toutes ces inconnues, et une certaine méthode, quoique très-imparfaite encore, de poser une équation. Ils placent les deux membres de l'équation sur deux rangs, l'un au-dessous de l'autre; chaque rang contient, dans le même ordre, toutes les puissances de l'inconnue qui entrent dans l'équation, depuis la plus élevée jusqu'au terme constant; à celles des puissances qui ne se trouvent pas effectivement dans l'un des deux membres, on donne le coefficient zéro. Ainsi, pour figurer l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 400x = 9999,$$

on écrit, d'après ce mode de notation (*x* étant le

signe indien du terme constant, *ya* celui de la première inconnue, *v* celui du carré, *vv* celui du carré-carré, et un point superposé celui de la soustraction):

ya vv1 ya v2 ya 400 ru 0
ya vv0 ya v0 ya 0 ru 9999.

Il paraissait, d'après cela, que les Arabes, tout en enrichissant la *théorie* de l'algèbre de découvertes originales et importantes, comme l'est, par exemple, la construction géométrique des équations du 3^e degré, étaient restés ou redescendus, par rapport à la *forme*, au-dessous de leurs devanciers.

Je pense donc que la découverte que je viens de faire de l'existence d'une notation algébrique très-développée chez les Arabes de l'Occident, peut offrir un certain intérêt pour l'histoire des sciences.

Cette notation est presque aussi complète qu'elle pouvait l'être, tant que l'algèbre elle-même restait *numérique*. Car, je me hâte de le dire, quelque honneur que l'invention de cette notation puisse faire aux géomètres arabes, elle ne diminue en rien la gloire de Viète, dont l'immense et incontestable mérite consiste à avoir introduit la notation *littérale* pour les quantités *connues* dans le calcul algébrique, et à avoir, le premier, en exprimant en même temps les opérations algébriques par des signes, *figuré* des *calculs virtuels* avec des *lettres*, tandis que jusque-là on n'avait su qu'exécuter des *calculs réels* sur des *nombres*; en un mot, à avoir changé la face de la science même, et jeté les bases de l'analyse mo-

derne, en remplaçant l'algèbre *numérique*, que nous trouvons chez les Grecs, les Indiens, les Arabes et chez les Occidentaux avant Viète, par le *calcul des symboles*¹.

Voici maintenant en quoi consiste essentiellement la notation arabe :

1° L'inconnue et ses puissances sont désignées par les initiales de leurs noms arabes, superposées aux coefficients numériques, savoir :

La 1^{re} puissance (x), par un *chîn* ش, initiale du mot شىء *chāi*, « chose »;

La 2^e puissance (x^2), par un *mîm* م, initiale du mot مال *māl*, « possession », carré;

La 3^e puissance (x^3), par un *qâf* ك, initiale du mot كعب *qa'b*, « cube ».

2° On pose des équations en plaçant les deux membres de l'équation l'un à la suite de l'autre, et en les séparant par un *signe d'égalité*, figuré ainsi :

ج².

3° Dans chaque membre on place d'abord tous les termes positifs, et ensuite tous les termes négatifs, en les séparant les uns des autres par la particule لا *illā*, « moins ». Dans un second manuscrit du traité d'où je tire cette notation, le mot لا est remplacé seulement par son trait final لā, ce qui lui

¹ Voir le beau mémoire de M. Chasles, dans lequel l'illustre géomètre a discuté à fond cette importante question, *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, t. XII, p. 741 et suiv.

² On paraît avoir fait ce signe du *lām* final de la racine عدل « égaler ».

ôte son caractère grammatical, et lui donne presque tout à fait celui d'une simple notation, donc d'un *signe de la soustraction*.

4° Les racines des quantités sourdes, soit entières, fractionnaires ou mixtes, sont désignées par un *djîm* جذر, initiale du mot جذر *djidzr*, « racine », superposé à la quantité sourde, et équivalant, par conséquent, au *signe radical*.

5° Lorsqu'il s'agit de trouver la valeur d'une inconnue par la proportion, on écrit celle-ci en séparant les quatre termes les uns des autres par le signe suivant . . . , et en mettant, à la place du terme inconnu, un *djîm* جذر, initiale du mot جذر « racine », lequel terme est employé, conjointement avec شىء « chose », par les algébristes arabes, pour désigner la première puissance de l'inconnue¹.

6° On se sert, avec une clarté parfaite, de la notion de l'*exposant*, désigné par le mot أس *ass*, qui signifie proprement : « principe, base, fondement ». Je fais observer exprès, dès l'abord, et comme un point très-essentiel, que le mot *ass* est employé au singulier, et non au pluriel اساس *içâs*; donc, qu'on ne dit pas, par exemple, « le cube a trois içâs (éléments) », tournure qui ne s'accorderait pas avec une conception nette et précise de l'idée de l'exposant, mais qu'on dit bien « l'*ass* du cube est trois ».

¹ Voir l'édition ci-dessus citée de l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. 7 de la traduction, p. 5 du texte arabe; l'*Extrait du Fakhri*, p. 48; et l'extrait ci-dessous du *Traité d'Alkalçâdi*, au troisième chapitre de la quatrième partie.

La notation dont je viens de donner un aperçu se trouve employée dans un traité d'arithmétique composé, vers le milieu ou dans la seconde moitié du xv^e siècle, par un Arabe d'Espagne, Ali Ben Mohammed Alkalçâdi, et contenu dans un manuscrit appartenant à M. Reinaud, que l'éminent orientaliste a bien voulu me communiquer¹. Le manuscrit de M. Reinaud est d'autant plus précieux, qu'un double, existant à la Bibliothèque impériale², est copié avec la négligence la plus déplorable, précisément en ce qui concerne la notation, et de manière à n'en présenter que des traces éparses et incohérentes³. Les initiales superposées aux chiffres, qui constituent l'élément le plus essentiel de la notation, y manquent presque partout; et, dépourvus de ces signes, les groupes de chiffres, réunis pour former des polynômes ou des équations, au moyen du signe de la soustraction⁴ et du signe de l'égalité, n'ont plus d'autre signification démontrable, que

¹ Je saisis avec empressement cette occasion d'offrir mes remerciements à M. Reinaud, si distingué par la bienveillance qu'il met à procurer aux personnes studieuses tout ce qui peut les aider dans leurs travaux, ou faciliter leurs recherches.

² N° 1134, ancien fonds arabe.

³ Il faut dire cependant que, abstraction faite des formules figurées au moyen de la notation, le texte du manuscrit de la Bibliothèque impériale est souvent meilleur que celui du manuscrit de M. Reinaud, et très-utile pour corriger le texte de ce dernier manuscrit.

⁴ C'est dans le manuscrit de la Bibliothèque impériale que la particule de la soustraction se trouve constamment remplacée par son trait final seulement, et ainsi changée dans un signe de la soustraction. (Voir l'exposé ci-dessus, 3^e.)

celle d'un moyen mnémonique, imaginé pour faciliter à l'esprit les opérations du calcul, en lui présentant simultanément, et arrangés d'une façon convenable, les nombres qui entrent dans le problème. Il est vrai que les signes des puissances se trouvent mis dans quelques cas isolés; mais employés ainsi, sans suite, ils n'ont encore que la valeur de signes mnémoniques. Car la condition indispensable pour donner à des signes conventionnels quelconques le caractère d'une notation, c'est qu'ils soient toujours employés quand il y a lieu, et toujours de la même manière. Bref, au lieu de prouver l'existence d'une notation algébrique chez les Arabes, le manuscrit de la Bibliothèque impériale, que j'avais vu d'abord, semblait prouver, au contraire, que les Arabes n'avaient pas su s'élever réellement à une semblable conception, tout en en ayant eu peut-être une idée plus ou moins vague; d'autant plus que l'auteur n'expose pas les principes de sa notation, mais se borne à la laisser s'expliquer par elle-même, en donnant pour toutes ses formules, d'abord l'énoncé parlé, et ensuite l'expression figurée, précédée des mots : « Posez cela ainsi » فانزل هكذا هكذا. Cependant j'étais intimement convaincu que cet état du manuscrit ne provenait que d'une altération due à la négligence d'un copiste ou d'une succession de copistes; et que tout ce que je pouvais en tirer dans cet état ne servirait qu'à obscurcir la question, au lieu de l'éclaircir. Je m'étais donc décidé à réserver ces données avec quelques autres

pièces que j'examinerai ci-après, et qui toutes m'indiquaient l'existence d'une notation algébrique chez les Arabes, jusqu'à ce que je pusse en découvrir une preuve bien décisive, lorsque le manuscrit de M. Reinaud, où la notation se trouve entièrement conservée, vint m'offrir, à la fois, la confirmation complète de mes prévisions, et la clef si longtemps cherchée de cette question intéressante.

On trouvera ci-après un extrait du traité en question, dans lequel sont réunies, suivant l'ordre, toutes les formules posées par Alkalçâdi, et quelques passages ayant trait à la notion des exposants.

Cet extrait est suivi d'un passage tiré des *Prolegomènes* d'Ibn Khaldoun, duquel il résulte que l'emploi de la notation que je viens de signaler dans le traité d'Alkalçâdi n'est pas un fait isolé; mais qu'un arithméticien et astronome arabe, également originaire d'Espagne, connu sous le nom d'Ibn Albannâ, et contemporain de Fibonacci, avait fait usage de la même ou d'une semblable notation, dans un traité pour la composition duquel il avait, à son tour, puisé dans les ouvrages de deux auteurs antérieurs, Ibn Almon'am et Alabdab. Je donne ce passage d'après deux manuscrits de la bibliothèque de Leyde, et j'aurais désiré en comparer le texte avec les manuscrits de la Bibliothèque impériale; mais ces derniers manuscrits des *Prolegomènes* se trouvent entre les mains de M. Quatremère, occupé, depuis plusieurs années, comme on sait, à publier cet important ouvrage arabe. Un passage de la tra-

duction latine d'un traité d'algèbre arabe, faite par Gérard de Crémone au xii^e siècle, passage que j'emprunte à une savante publication du prince dom Balthasar Boncompagni, fournira une preuve encore plus explicite de l'emploi fait par les Arabes de certaines notations algébriques, déjà antérieurement au $xiii^e$ siècle.

A ces pièces est jointe la reproduction et l'explication d'une table de multiplication des puissances algébriques, que j'ai rencontrée dans un manuscrit persan de la Bibliothèque impériale. Dans ce tableau, les puissances algébriques et leurs valeurs réciproques sont désignées par une autre notation, savoir, au moyen des dernières lettres radicales (et non plus des initiales) des mots qui forment les noms arabes de ces puissances. En outre, cette notation ne s'arrête pas, comme celle d'Alkalçâdi, au cube; le tableau même va jusqu'à la 10^e puissance, et la manière dont les notations sont formées montre parfaitement comment on pourrait les continuer jusqu'à une puissance quelconque.

Le morceau qui termine cette notice contient la traduction d'un passage tiré d'un manuscrit de la bibliothèque de Leyde, et fournissant une nouvelle preuve de l'emploi de deux inconnues par les algébristes arabes, dont il se trouve déjà deux exemples dans l'Extrait du Fakhrî. Quoique ne touchant pas directement à la question des notations, cet emploi de deux inconnues, dans la solution des problèmes algébriques, constitue un fait très-important pour la

forme de l'algèbre, et se rattache ainsi à la matière qui forme l'objet principal de cette notice.

I.

Il existe plusieurs variantes du titre du traité d'arithmétique qui m'a fourni, comme je l'ai dit, les données principales sur l'emploi des notations algébriques par les Arabes. Ce titre est :

1° D'après le manuscrit de M. Reinaud, كشف الاستار عن علم الغبار « Soulèvement des voiles de la science du Gobâr¹ » ;

¹ Quant au mot *Gobâr*, dont il serait très-important pour l'histoire de l'arithmétique de fixer bien exactement la signification, ou plutôt, comme je crois, les significations, voici ce que je peux donner comme un résultat provisoire, mais non encore définitif, de mes recherches sur cette matière. Il me semble qu'il faut avant tout distinguer trois choses :

1° Les neuf signes du chiffre Gobâr و ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١, par opposition aux chiffres indiens ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١ ; les premiers, très-semblables à nos chiffres modernes ou européens ; les seconds, essentiellement différents.

2° La notation du chiffre Gobâr, par opposition à l'emploi des chiffres avec valeur de position ; savoir : une notation qui paraissait être inhérente aux chiffres Gobâr, et qui consiste à désigner les dizaines par un point superposé aux unités correspondantes, les centaines, par deux points superposés, et ainsi de suite. Mais dans un manuscrit arabe appartenant à la dernière moitié du xvi^e siècle, et qui se trouve en la possession de M. Charles, qui a bien voulu me le communiquer, j'ai rencontré cette notation employée avec les chiffres indiens, et, de plus, proposée sous le titre de « notation indienne » قلم هندی. Ce fait pourrait donner lieu à des rapprochements intéressants avec les chiffres indiens du moine grec Néophytos, mentionnés par M. de Humboldt dans son célèbre mémoire sur

- 2° D'après le manuscrit de la Bibliothèque impériale « كشف الاسرار عن وضع حروف الغبار » Révélation des secrets de l'emploi¹ des signes² du Gobâr ;
- 3° D'après Casiri, qui en mentionne, dans son

les systèmes de chiffres en usage chez différents peuples, et sur l'origine de la valeur de position des chiffres indiens. (*Journal de mathématiques* de M. Crelle, t. IV, p. 206 et suiv.)

3° Le calcul Gobâr, الحساب الغباري, c'est-à-dire le calcul par écrit, en se servant des chiffres, soit Gobâr, soit indiens (mais toujours avec valeur de position et emploi d'un signe pour zéro, soit d'un point, soit d'un rond), par opposition au calcul de tête, الحساب الهوائي. Les deux manuscrits mêmes dont je me sers pour le travail actuel, fournissent une preuve que le nom du calcul est indépendant des chiffres qu'on y emploie; le manuscrit de M. Reinaud fait usage du chiffre Gobâr, le manuscrit de la Bibliothèque impériale, des chiffres indiens. Le calcul par écrit reçut, sans doute, le nom de *gobârî*, parce qu'on l'exécutait originairement sur des tables couvertes d'un sable fin, غبار. (Voir la savante note donnée par M. Reinaud à la fin de son *Mémoire sur l'Inde*, p. 399.) Cette conjecture concorde singulièrement avec une étymologie du mot *abacus*, ἀβάξ, faisant dériver ce mot de l'hébreu *abak* אבך « poussière », et proposée par M. Vincent, d'après MM. Chasles et Terquem, dans un savant mémoire sur l'origine de nos chiffres et sur l'Abacus des Pythagoriciens, inséré dans le *Journal de mathématiques* de M. Liouville, t. IV; voir p. 15 du tirage à part, la note.

¹ Littéralement : « action ou manière de poser, de mettre. »

² L'auteur entend par là les figures des neuf unités du chiffre Gobâr, ainsi qu'il résulte du passage suivant de son traité : وتشتمل على مقدمة وأربعة أجزاء وخاتمة وفي كل جزء ثمانية أبواب فاما المقدمة ففي صفة وضع هذه الحروف وما يتعلق بذلك وهي تسعة اشكال متخالفة اولها الواحد ويعد الاثنان الى التسعة الخ (Ce traité) comprend une introduction, quatre parties et une conclusion; chaque partie contient huit chapitres. Quant à l'introduction, elle traite de la manière de poser ces signes, et de ce qui s'y rapporte: ce sont neuf figures différentes dont la première est l'unité, puis vient le deux, (et ainsi de suite) jusqu'à neuf.

catalogue¹, une copie comme se trouvant à la bibliothèque de l'Escurial, كشف الاسرار في علم حروف الغبار « Révélation des secrets sur la science des signes du Gobâr ».

L'auteur dit, dans sa préface, que ce traité n'est qu'un abrégé d'un ouvrage plus étendu qu'il avait composé sous le titre de « Soulèvement de la couverture de la science du calcul » نبذة اقتطفتها من كتاب المسمى بكشف الجلباب عن علم الحساب, ouvrage mentionné par Hadji Khalfa².

Le nom de l'auteur est : أبو الحسن علي بن محمد بن شمس الدين علي القرشي الشهير بالقلصادي والاندلسي « Aboul Haçan Ali Ben Mohammed Ben Mohammed Ben Ali, le Koraïchite, connu sous le nom d'Alkalçâdî, et sous le nom d'Alandalouci Albasthi. »

Au lieu d'originaire, ou d'habitant d'Albacète en Andalousie (ou plus exactement dans le royaume de Murcie), le manuscrit de l'Escurial (Casiri, l. l.) le fait originaire de Grenade (الغرناطي).

Il mourut, d'après Casiri, le 10 dzoûlhidjdjah de l'an 881 de l'hégire (26 mars 1477), d'après Hadji Khalfa (l. l.), en 891 de l'hégire (7 janvier à 27 décembre 1486).

Le traité dont il s'agit est divisé en quatre parties. La première traite de l'arithmétique des nombres entiers; la seconde, des fractions; la troisième, des racines; la quatrième, de la détermination de l'inconnue (في استخراج المجهول).

¹ Vol. I, p. 289, ms. DCCCXLVIII, 4°.

² Édit. de Fluegel, vol. V, p. 204, n° 10686.

Cette dernière partie, qui nous intéresse ici principalement, est divisée en huit chapitres, dont voici les titres :

- 1° De la proportion (في الاعداد المتناسبة).
- 2° De l'opération avec les ronds¹ (في العمل بالكفات).
- 3° De l'algèbre (et en particulier des cas simples, c'est-à-dire des équations binômes).
- 4° Des cas composés (équations trinômes du second degré).
- 5° De l'addition des espèces (اجناس, puissances algébriques).
- 6° De la soustraction (des espèces).
- 7° De la multiplication (des espèces).
- 8° De la division (des espèces).

Enfin, la conclusion est divisée en trois sections, dont la première est intitulée : « De ce qu'il (faut faire) si l'équation contient des termes négatifs (فيما اذا كان في المعادلة استثناء) », et dont les deux autres traitent de la sommation de différentes progressions.

Je vais maintenant extraire, suivant l'ordre, tous les exemples de notations contenus dans le traité d'Alkalçâdî, en indiquant la partie et les chapitres où ils se trouvent.

¹ C'est un procédé particulier pour résoudre des problèmes de la forme $\frac{x}{a} \pm \frac{x}{b} = c$ par la méthode des deux fausses positions. Il paraît avoir reçu son nom d'une figure dont on se sert dans cette opération, et qui ressemble à deux cercles qui se touchent extérieurement. Dans les deux cercles, on place les deux nombres supposés dans les deux hypothèses.

TROISIÈME PARTIE

RADICAUX.

CHAPITRE V¹.

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \dots \frac{\supset}{\supset}; \quad \sqrt{12} \dots \frac{\supset}{12}^2; \quad \sqrt{27} \dots \frac{\supset}{27}; \\ \sqrt{32} \dots \frac{\supset}{32}; \quad \sqrt{2} \dots \frac{\supset}{2}; \quad \sqrt{18} \dots \frac{\supset}{18}; \\ \sqrt{5} - \sqrt{3} \dots \frac{\supset}{\supset} \forall \frac{\supset}{7}^3. \end{aligned}$$

CHAPITRE VI.

$$\sqrt[3]{48} \dots \frac{\supset}{48}; \quad \sqrt{54} \dots \frac{\supset}{54}; \quad \sqrt{72} \dots \frac{\supset}{72}^4.$$

¹ Dans ce chapitre seulement, le signe de la racine n, dans le manuscrit de M. Reinaud, la forme d'un chiffre Gohâr $\supset$, au lieu d'un $\supset$; mais, dans les chapitres suivants, on trouve partout le $\supset$, qui est évidemment la forme normale du signe. Dans le manuscrit de la Bibliothèque impériale, le trait qui sépare le nombre du $\supset$ superposé ne se trouve pas, et, dans les deux chapitres suivants, le $\supset$ lui-même manque presque partout dans ce manuscrit.

² Dans le manuscrit de M. Reinaud, les nombres 3 et 12 des deux radicaux $\sqrt{3}$ et $\sqrt{12}$, dont il s'agit de faire la somme, sont placés l'un tout près de l'autre, sous un même trait, surmonté d'un signe de racine seulement; mais, dans le manuscrit de la Bibliothèque impériale, les deux radicaux sont parfaitement séparés.

³ Le manuscrit de la Bibliothèque impériale porte ici, comme partout dans les formules, $\forall$ au lieu de $\forall$.

⁴ Je suis convaincu que cette formule doit être $\frac{\supset}{72}^4$, et représenter $\sqrt[4]{72}$. Pour confirmer ma conjecture, voici le texte qui précède cette formule, très-corrompu dans le manuscrit de M. Reinaud, mais très-bien conservé dans le manuscrit de la Bibliothèque impériale. Il s'agit dans ce chapitre de la multiplication des radicaux; au dernier paragraphe l'auteur dit : « Si le mot racine se trouve un plus grand

CHAPITRE VII.

$$\begin{aligned} \sqrt{60} \dots \frac{\rightarrow}{60}; \quad \sqrt{5} \dots \frac{\rightarrow}{5}; \quad \sqrt{12} \dots \frac{\rightarrow}{12}; \\ \sqrt{20 \frac{1}{2}} \dots \frac{\rightarrow}{20 \frac{1}{2}}; \quad \sqrt{6} \dots \frac{\rightarrow}{6}; \quad \sqrt{\frac{3}{5}} \dots \frac{\rightarrow}{\frac{3}{5}}; \\ 3\sqrt{6} \dots \frac{\rightarrow}{6}; \quad \sqrt{51} \dots \frac{\rightarrow}{51}; \quad \frac{1}{2}\sqrt{48} \dots \frac{\rightarrow}{48}; \quad \sqrt{12} \dots \frac{\rightarrow}{12}. \end{aligned}$$

CHAPITRE VIII.

$$6 + \sqrt{27} \dots \frac{\rightarrow}{27} \therefore 6^1; \quad \sqrt{4 \frac{1}{2}} + \sqrt{1 \frac{1}{2}} \dots \frac{1}{2} \therefore \frac{1}{2} \therefore 2;$$

nombre de fois au-dessus de l'un des deux nombres qu'au-dessus de l'autre (ان كان لفظ الجذر على أحد العددين أكثر مما على صاحبه), élevez au carré celui qui est en défaut, jusqu'à ce qu'il devienne de l'espèce de l'autre. Exemple : Si l'on vous dit, multipliez la racine de six par la racine de racine de deux, élevez six au carré, multipliez le résultat en deux, et placez au-dessus du produit le mot racine deux fois (واقف على الخارج لفظ الجذر مرتين); ce sera ce qu'on a cherché, savoir la racine de racine de soixante et douze. »

Je fais observer que, à partir d'ici, le trait qui sépare le nombre du $\rightarrow$ superposé commence à manquer aussi dans le manuscrit de M. Reinaud. Dans les formules du texte ci-dessus j'ai mis ou ôté ce trait, selon qu'il se trouve ou non dans le manuscrit de M. Reinaud.

¹ On pourrait croire, d'après cet exemple, que le signe $\therefore$ a la valeur d'un signe de l'addition. Mais comme il n'est employé de cette manière qu'accidentellement, dans quelques cas isolés, dont on trouvera encore ci-après deux ou trois exemples, il manque à cet emploi ce caractère de suite, indispensable, comme je l'ai dit ci-dessus, pour constituer une notation. Le véritable et propre emploi du signe $\therefore$ consiste à séparer les termes de la proportion, et l'on verra que pour cela il est toujours employé, et toujours de la même manière, ainsi que l'exige une notation. Je dis donc que l'auteur n'a pas de signe pour exprimer l'addition.

² Dans le manuscrit de la Bibliothèque impériale, cette formule est figurée comme il suit : $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow$. 24.

$$45 - \sqrt{450} \dots \frac{2}{7} \sqrt{\frac{1}{9}}; 6\frac{3}{7} - \sqrt{9 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} \dots \frac{2}{7} \sqrt{\frac{1}{9}}$$

QUATRIÈME PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

PROPORTIONS.

$$\begin{array}{l} 7 : 11 = 84 : x \quad \dots\dots \triangleright : 84 : 14 : 7; \\ 11 : 20 = 66 : x \quad \dots\dots \triangleright : 66 : 20 : 11. \end{array}$$

CHAPITRE III.

ALGÈBRE.

« Cette science est fondée sur trois espèces, savoir : les nombres, les choses et les carrés, auxquelles se joignent les cubes. Le nombre n'a point d'*ass*, l'*ass* des choses est un, l'*ass* des carrés est deux, et l'*ass* des cubes est trois. Parmi toutes ces espèces, il n'y a de connu que le nombre. *Chose* et *racine* ont la même signification, et veulent dire une (quantité) inconnue. Le *carré* (*mâl*) est ce qui résulte de la multiplication de la chose par elle-même. Le *cube* est ce qui résulte de la multiplication du carré par

¹ Dans cette formule, c'est le manuscrit de la Bibliothèque impériale qui a le Δ , tandis qu'il est omis dans le ms. de M. Reinaud.

² Dans cette formule, le $\frac{1}{2}$ manque dans les deux manuscrits; mais cette omission doit être mise sur le compte des copistes. La quantité «neuf et un septième et deux septièmes d'un septième» est figurée de la même manière dans les deux manuscrits. De même, ailleurs dans ce traité, «quatre neuvièmes et cinq huitièmes d'un neuvième et la moitié d'un huitième d'un neuvième» sont figurés ainsi

$\frac{154}{11}$, pour ne pas citer d'autres exemples.

²⁸⁹ Ces deux formules sont figurées tout à fait de la même manière

sa racine. *Algèbre* signifie, dans le langage technique, l'action d'ôter la particule¹ de la négation² et ce qui la suit, et de le reporter, en conservant l'égalité, dans l'autre membre. La *mokābalaḥ* et l'égalisation, c'est l'action d'examiner les termes du problème, les uns relativement aux autres (النظريين), et de retrancher chaque espèce de sa semblable : la négative³ de la positive⁴; et le positif est ce qui précède la particule de la négation, et le négatif est ce qui la suit. »

FORMULES D'ÉQUATIONS BINÔMES.

$$4x^1 = 12x \dots 12 \text{ مقل } 2^1; \quad 18x^2 = 72 \dots 72 \text{ مقل } 2^2; \\ 5x = 60 \dots 60 \text{ مقل } 6^0.$$

dans les deux manuscrits, sauf la différence des chiffres, qui sont toujours indiens dans le manuscrit de la Bibliothèque impériale.

¹ حرف; ce mot signifie chez les grammairiens arabes « particule », et je l'ai traduit ainsi pour être bien sûr de ne rien prêter à l'auteur en ce qui touche la notation. Mais ce mot signifie aussi très-souvent « signe », comme ci-dessus (p. 359, 2^e note), où l'auteur s'en servait pour désigner les neuf signes du chiffre Gobâr. C'est aussi de ce mot qu'on se sert toujours pour désigner les « lettres » de l'alphabet.

² استثناء signifie proprement « l'action de faire une exception. » La particule لا, qui dans l'usage technique de l'algèbre correspond à notre « moins », signifie dans le langage ordinaire « excepté ».

³ ناقص, « déficient ».

⁴ زائد, « excédant ».

⁵ C'est par suite d'une inadvertance de copiste seulement que le Δ superposé manque dans le manuscrit de M. Reinand. Dans le manuscrit de la Bibliothèque impériale, ces indices des puissances manquent presque toujours, comme je l'ai déjà fait observer, et je signalerai tous les cas où, par exception, ils se trouvent. Mais le signe d'égalité est toujours mis dans le ms. de la Bibliothèque impériale.

⁶ Je crois que c'est seulement par suite d'une négligence de co-

CHAPITRE IV.

FORMULES D'ÉQUATIONS TRINÔMES.

$$\begin{aligned}
 x^3 + 10x &= 56 \dots \text{٥٦} \overbrace{10}^{\text{١٠}} \overbrace{1}^{\text{١}}; & x^3 &= 8x + 20 \dots \text{٢٠} \overbrace{8}^{\text{٨}} \overbrace{1}^{\text{١}}; \\
 x^3 + 20 &= 12x \dots \text{12} \overbrace{20}^{\text{٢٠}} \overbrace{1}^{\text{١}}; & x^3 + 16 &= 8x \dots \text{8} \overbrace{16}^{\text{١٦}} \overbrace{1}^{\text{١}}; \\
 6x^3 + 12x &= 90 \dots \text{90} \overbrace{6}^{\text{٦}} \overbrace{12}^{\text{12}}; & 4x^3 + 48 &= 32x \dots \text{32} \overbrace{4}^{\text{4}} \overbrace{48}^{\text{48}}; \\
 3x^3 &= 12x + 63 \dots \text{63} \overbrace{3}^{\text{3}} \overbrace{12}^{\text{12}}; & \frac{1}{2}x^3 + x &= 7\frac{1}{2} \dots \text{7} \overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{1}} \overbrace{1}^{\text{1}}.
 \end{aligned}$$

CHAPITRES V ET VI.

FORMULES DE POLYNÔMES.

$$\begin{aligned}
 3x^3 + 5 - 6x &\dots \text{5} \overbrace{3}^{\text{3}} \overbrace{1}^{\text{1}} \overbrace{6}^{\text{6}}; \\
 3 + 4x^2 + 6x^3 - 4x^3 &\dots \text{4} \overbrace{3}^{\text{3}} \overbrace{6}^{\text{6}} \overbrace{1}^{\text{1}};
 \end{aligned}$$

piste, que l'indice superposé au nombre 5 est un ٥ au lieu d'un ٥ ; car, bien que les algébristes arabes emploient aussi le mot جذر pour désigner la 1^{re} puissance de l'inconnue, l'indice de cette puissance est constamment ٥ , dans toutes les formules contenues dans les chapitres de ce traité relatifs à l'algèbre, la formule actuelle seule exceptée.

¹ Le manuscrit de la Bibliothèque impériale porte $\text{٥٤} \overbrace{10}^{\text{١٠}} \overbrace{1}^{\text{١}}$; les trois points $\therefore$ superposés au nombre 10 sont évidemment un reste du ٥ qui s'y trouvait originairement.

² Dans cette formule, le ٥ superposé au nombre 8 est remplacé dans le manuscrit de M. Reinaud par un simple trait.

³ Le manuscrit de M. Reinaud porte $\frac{7}{2}$, au lieu de $\frac{1}{2}$, ce qui est évidemment une erreur du copiste.

$$\begin{aligned} 8 + 7x^2 + 2x^3 - 6x \dots \text{ش } \gamma \text{ | } \text{ك } \gamma \text{ ش }^1; \\ 8x^2 - 5 \dots \text{ف } \gamma \text{ | } \text{ك } \gamma; \quad 6x^3 - 3x \dots \text{ح } \gamma \text{ | } \text{ك } \gamma; \\ 3x + 8x^3 - (5 + 6x^2) \dots \text{ك } \gamma \text{ | } \text{ش } \gamma^2. \end{aligned}$$

CHAPITRE VII.

MULTIPLICATION (DES POISSANCES ALGÈBRIQUES).

« L'opération (de cette multiplication) consiste à multiplier l'un des deux nombres (coefficients) par l'autre, et à additionner leurs deux ass; ce qui résulte (de cette addition) est l'ass du produit de la multiplication. »

¹ Voici comment ces trois formules sont figurées dans le manuscrit de la Bibliothèque impériale :

$$\gamma \text{ | } \gamma \text{ ش }^{\text{ك}}, \quad \text{ك } \gamma \text{ | } \text{ك } \gamma \text{ ش }^{\text{ك}}, \quad \text{ك } \gamma \text{ | } \text{ش }^{\text{ك}} \gamma.$$

Dans le manuscrit de M. Reinaud, les deux premières formules sont : $\text{ك } \gamma \text{ | } \text{ش }^{\text{ك}} \gamma$ et $\text{ش }^{\text{ك}} \gamma \text{ | } \text{ك } \gamma$. Le texte, dans lequel ces polynômes sont énoncés tout au long, et d'après lequel la troisième formule doit être la somme des deux premières, prouve qu'il faut les corriger comme ci-dessus. Cet énoncé est fautif dans le manuscrit de M. Reinaud, mais correct dans le manuscrit de la Bibliothèque impériale.

² Ces trois formules sont figurées dans le manuscrit de la Bibliothèque impériale comme il suit :

$$\text{ش }^{\text{ك}} \gamma \text{ | } \text{ك } \gamma, \quad \text{ك } \gamma \text{ | } \text{ش }^{\text{ك}} \gamma, \quad \text{ك } \gamma \text{ | } \text{ش }^{\text{ك}} \gamma.$$

FORMULES.

$$8x - 4 \dots = \frac{1}{8} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}}; \quad 6x^2 - 3x \dots = \frac{1}{6} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}};$$

$$12x + 48x^2 - 48x^2 \dots = \frac{1}{12} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}}.$$

CHAPITRE VIII.

DIVISION (DES PUISSANCES ALGÈBRIQUES).

« L'opération consiste à retrancher l'ass du diviseur de l'ass du dividende; ce qui reste est l'ass du résultat (quotient). »

FORMULES.

$$48x^3 - 18x^3 \dots = \frac{1}{48} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}}; \quad 6x^3 \dots = \frac{1}{6} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}};$$

$$8x^3 - 3x \dots = \frac{1}{8} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}}.$$

CONCLUSION.

PREMIÈRE SECTION.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS.

$$3x^2 - 36 = 3x - x^2 \dots = \frac{1}{3} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}};$$

$$4x^2 = 3x + 36 \dots = \frac{1}{4} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}}.$$

¹ Manuscrit de la Bibliothèque impériale : $\frac{1}{8} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}}.$

² Que telle soit la forme correcte de la formule, c'est ce qui résulte du texte du manuscrit de la Bibliothèque impériale, et de ce que la troisième formule doit être le quotient de la première par la seconde. Le manuscrit de M. Reinaud porte : $\frac{1}{12} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}};$ le manuscrit de la Bibliothèque impériale : $\frac{1}{12} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}}.$

³ Manuscrit de la Bibliothèque impériale : $\frac{1}{12} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}} \frac{\dot{\bar{X}}}{\bar{X}}.$

REMARQUE.

On a pu observer qu'à l'occasion de plusieurs des formules précédentes, j'ai dû faire quelques corrections, même au texte du manuscrit de M. Reinaud, et l'on pourrait trouver ce procédé un peu hasardeux dans une question aussi délicate que l'est celle d'une notation; mais je fais remarquer que, si d'un côté il est très-dangereux, sans doute, de corriger trop arbitrairement des textes au moyen desquels on veut prouver une vérité, l'altération des textes par la négligence des copistes est, de l'autre côté, un fait très-réel et dont il faut tenir compte; car, en s'attachant, par une réserve malentendue, trop péniblement à la lettre d'un mauvais texte, on ne fait que compliquer inutilement une question, à moins qu'on n'arrive à des résultats positivement faux. Au reste, je n'ai fait ces corrections qu'en en prévenant le lecteur, en indiquant les raisons qui me semblaient les nécessiter, et en donnant en même temps la leçon originale du manuscrit.

II.

Ce qui précède fera mieux comprendre la portée d'un passage des *Prolégomènes* d'Ibn Khaldoun, dans lequel il est fait mention de notations, employées ou exposées dans des traités d'arithmétique arabes, semblables, très-probablement, au traité d'arithmétique dont on vient de lire des extraits.

Ce passage est contenu dans le chapitre des Pro-
légomènes qui traite des sciences mathématiques,
et dont la seconde section est relative au calcul,
c'est-à-dire à l'arithmétique pratique¹.

Voici maintenant le texte et la traduction du
passage dont il s'agit :

ومن احسن التواليف المبسوطه فيها لهذا العهد بالمغرب
كتاب الحصار الصغير ولابن البنا المراكشي فيه تلخيص
ضابط لقوانين اعماله مفيد ثم شرحه بكتاب سماه رفع
الحجاب وهو مستغلق على المبتدى بما فيه من البراهين
الوثيقة المباني وهو كتاب جليل القدر ادركننا المشيخة
تعظمه وهو كتاب جدير بذلك وانما جاءه الاستغلاق
من طريق البرهان وساق فيه المؤلف رحمه الله تعالى
كتاب فقه الحساب لابن المنعم² والكامل للاحدب ولخص
براهينها وغيرها من اصطلاح الحروف فيها الى علل
معنوية ظاهرة وفي سر العبارة بالحروف وزيدتها وفي كلها
مستغلقة وانما جاءها الاستغلاق من جهة البرهان شان
علوم التعاليم لان مسائلها واعمالها واضحة كلها واذا قصد
شرحها فانما هو اعطاء العلل في تلك الاعمال وفي ذلك من
العسر على الفهم ما لا يوجد في اعمال المسائل

¹ Voir l'édition ci-dessus citée de l'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi,
la note au bas de la page 6 de la traduction.

² Le manuscrit porte *منعم*, ce qui ne paraît être qu'une
faute de copie.

« Parmi les ouvrages étendus traitant de cela (savoir de l'art du calcul, صناعة الحساب), et composés en ce temps dans le Maghreb, un des meilleurs est l'ouvrage intitulé : *Al-hiçârou 'l-çaghîr* (La petite selle). Ibn Albannâ, le Marocain¹, en a fait un abrégé qui renferme les règles des opérations, ouvrage utile; puis il a commenté le même traité dans l'ouvrage qu'il intitula *Raf'ou 'l-hidjâb* (Le soulèvement du rideau). Cet ouvrage est difficile pour les commençants, à cause des démonstrations solidement construites (c'est-à-dire rigoureuses et détaillées) qu'il renferme. C'est un ouvrage d'une grande valeur, et nous avons vu les chaïkhs en faire beaucoup de cas, ce dont l'ouvrage est digne; la difficulté y vient seulement de la méthode des démonstrations. L'auteur (que Dieu, dont le nom soit exalté, soit miséricordieux envers lui!) a pris pour guide dans cet ouvrage le traité intitulé *Fikhou*

¹ Le véritable nom de ce géomètre, dont Ibn Albannâ n'est que le surnom, est Aboûl-abbâs Ahmed Ben Mohammed Ben Othmân Alazâdi, أبو العباس أحمد بن محمد بن عثمان الأزدي المعروف. Il était originaire de Grenade, et enseignait avec éclat les différentes branches des sciences mathématiques au Maroc, où il publia aussi, en 1222, sous le titre de منهاج الطالب لتعديل الكواكب, des tables astronomiques dont un exemplaire figure dans le catalogue de la bibliothèque de l'Escurial, par Casiri (t. I, p. 344). Ces tables sont aussi citées par Ibn Khaldoun, dans le chapitre des Prolégomènes qui traite des sciences mathématiques, et dont la dernière section est relative aux tables astronomiques. Une copie de son كتاب تلخيص الحساب, dont il est question dans le passage ci-dessus, est également enregistrée par Casiri, dans son Catalogue (t. I, p. 359).

'*l-hiçâb* (La science du calcul), par Ibn Almon'ani¹, et le traité intitulé *Al-qâmil* (Le parfait), par Alahidab². Il résuma les démonstrations de ces deux ouvrages, et autre chose encore en fait de ce qui concerne l'emploi technique des signes³ dans ces démonstrations, servant à la fois pour le raisonnement abstrait et pour la représentation visible (figurée), ce qui est le secret et l'essence de l'explication (des théorèmes du calcul) au moyen des signes⁴. Tout cela est difficile, mais la difficulté n'y vient que de la part des démonstrations, particularité propre aux sciences mathématiques, parce que leurs problèmes et leurs opérations sont toutes évidentes (faciles à comprendre); mais, si l'on en désire l'explication, alors il s'agit de donner les raisons de ces opérations, et c'est là qu'il se présente pour l'entendement des difficultés qu'on ne trouve pas dans la pratique des problèmes.»

S'il paraît résulter de ce passage d'Ibn Khaldoun que des notations algébriques ont été employées par les Arabes, déjà antérieurement au xiii^e siècle, cette conclusion est corroborée par un passage d'un document très-important, dont on doit la connaissance

¹ Comparer Hadji Khalfa, édition de Fluegel, vol. IV, p. 459, n° 9176.

² Comparer Hadji Khalfa, édition de Fluegel, vol. V, p. 27, n° 9739, où le titre est un peu plus complet, savoir, الكامل في الحساب.

³ Ou bien : «des lettres de l'alphabet»; voir, ci-dessus, p. 365, note 1.

⁴ Idem.

au prince dom Balthasar Boncompagni. C'est la traduction latine d'un traité d'algèbre arabe, faite par Gérard de Crémone, célèbre traducteur du xii^e siècle (1114-1187); et publiée par M. Boncompagni, d'après un manuscrit du Vatican, dans un ouvrage sur la vie et les œuvres de Gérard de Crémone¹, travail qui offre un haut intérêt pour l'histoire des sciences, grâce à la richesse des matériaux qu'y a rassemblés son savant auteur.

Voici le passage de ce traité d'algèbre relatif aux notations :

« QUALITER FIGURENTUR CENSUS, RADICES ET DRAGMÆ.

« Porro omnis computus qui in restauratione diminuti vel partitione superabundantis exercetur, ad aliquod horum sex capitulorum² convertibilis est. Quod ut levius fiat discenti : quædam scribendi et multiplicandi præcepta damus, quibus integer et res ad invicem, nec non res, quibus diminuitur vel superabundat numerus, aut quæ diminuuntur vel superabundant numero, multiplicentur hoc præsupposito, quod ex ductu rei in rem provenit tantum census, et ex ductu rei in numerum, non nisi rerum multitudo.

¹ *Della vita e delle opere di Gherardo cremonese traduttore del secolo duodecimo e di Gherardo da Sabbionetta astronomo del secolo decimotercio. Notizie raccolte da Baldassarre Boncompagni. Roma 1851.* — Le texte latin du traité d'algèbre dont il s'agit s'y trouve p. 28 et suiv. et le passage relatif aux notations, p. 36 et suiv.

² C'est-à-dire à une des six formes suivantes des équations du premier et du second degré : $x^2 = ax$, $x^2 = a$, $x = a$, $x^2 + ax = b$, $x^2 + a = bx$, $x^2 = ax + b$.

« In scribendo enim hæc regula teneatur, numero
 « censuum littera c, numero radicum littera r, deor-
 « sum virgulas habentes, subterius apponantur.
 « Dragma vero sine litteris¹ virgulas habeant, quo-
 « tiens hæc sine diminutione proponuntur. Verbi
 « gratia, duo census, tres radices, 4 dragmæ sic figu-
 « rentur :

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ c & r & d \\ \hline \end{array}$$

« Duæ tertiæ census, tres quartæ radices, quatuor
 « quintæ unius dragmæ hoc modo figurentur :

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ c & r & d \\ \hline \end{array}$$

« Quotiens autem ex aliquo istorum diminutum
 « quod ponitur, aliud ei subscribatur habens punc-
 « tum loco virgulæ diminutionem indicans. Verbi
 « gratia, duo census minus tribus radicibus, duo cen-
 « sus minus 4 dragmis, quinque radices minus duo-
 « bus censibus, quinque radices minus quatuor drag-
 « mis sic notantur :

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 5 & 5 \\ c & c & r & r \\ \hline 3 & 4 & 2 & 4 \\ r & d & c & d \end{array}$$

¹ Ce dernier détail n'est pas observé dans les exemples figurés, ceux-ci indiquant, comme on voit, les nombres simples ou dragmes (dirhems) par un d.

III.

Je passe maintenant à l'explication du tableau ci-contre, dans lequel on trouve les puissances de l'inconnue algébrique désignées par des notations analogues, jusqu'à un certain point, aux signes employés par Diophante.

Celui-ci représente, comme on sait, la 1^{re} puissance de l'inconnue par s' (dernière lettre de *ἀριθμός*), son carré (*δύναμις*) par $\delta\bar{s}$, son cube (*κύβος*) par $\kappa\bar{s}$, son carré-carré (*δυναμοδύναμις*) par $\delta\delta\bar{s}$, ses puissances 5^e et 6^e (*δυναμόκυβος* et *κυβόκυβος*) par $\delta\kappa\bar{s}$ et $\kappa\kappa\bar{s}$ respectivement; enfin, il figure le terme constant en donnant le nombre respectif pour coefficient au signe $\mu\bar{s}$, abréviation de *μονάδες* « unités »¹.

Relativement à la notation des valeurs réciproques des puissances, Diophante pose la règle suivante : « Chacune d'elles prendra son signe du nombre qui lui est homonyme (c'est-à-dire de la puissance qu'elle a pour dénominateur), ce signe étant marqué d'un trait pour distinguer l'espèce (de l'espèce dont elle est la valeur réciproque) »². Conformément à cette règle, nous trouvons³ que

¹ Voir la seconde définition du I^{er} livre des *Arithmetica*.

² *Ibid.* Définition 3, à la fin : *ἔξει δὲ ἕκαστον αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ σημείον γραμμῆν ἔχον διαστέλλουσιν τὸ εἶδος*. Bachet traduit comme s'il y avait *γράμμα* au lieu de *γραμμῆ*. En outre il s'est trompé, dans le commentaire qui accompagne cette définition, sur la signification des « parties homonymes » de Diophante; mais il a corrigé cette erreur, p. 451 de son édition.

³ *Ibid.* Définition 7, édition de Bachet, p. 7. On voit que la no-

$\frac{1}{x^3}$ est désigné par $\delta\zeta''$ ($\delta\nu\nu\alpha\mu\sigma\tau\acute{o}\nu$), $\frac{1}{x^2}$ par $\kappa\zeta''$ ($\kappa\nu\beta\sigma\tau\acute{o}\nu$),
 $\frac{1}{x}$ par $\delta\delta\zeta''$ ($\delta\nu\nu\alpha\mu\delta\nu\nu\alpha\mu\sigma\tau\acute{o}\nu$), $\frac{1}{x^3}$ par $\delta\kappa\zeta''$ ($\delta\nu\nu\alpha\mu\kappa\nu\beta\sigma\tau\acute{o}\nu$), $\frac{1}{x^4}$ par $\kappa\kappa\zeta''$ ($\kappa\nu\beta\sigma\kappa\nu\beta\sigma\tau\acute{o}\nu$).

Cette notation de l'algébriste grec est formée presque d'après le même principe que la notation du tableau dont il s'agit, si ce n'est que celle-ci emploie, comme on verra, toujours les lettres finales.

Le manuscrit dans lequel j'ai rencontré ce tableau est le n° 169 de l'ancien fonds persan. Il renferme un grand nombre de traités mathématiques, la plupart en persan, mais auxquels se trouvent mêlés aussi quelques morceaux arabes, et dont l'époque remonte en partie jusqu'au x^e siècle de notre ère. Tous ces traités sont écrits de la même main, et, probablement, par une personne qui formait ce recueil pour son propre usage; c'est en vain que j'y ai cherché un post-scriptum indiquant la date de la copie d'un de ces morceaux. Ce manuscrit a appartenu à la bibliothèque de Melchisédech Thévenot, et paraît, d'après son papier et son écriture, être âgé au moins de trois cents ans. Ce sont là malheureusement les seuls éléments pour déterminer l'époque à laquelle appartiennent le tableau en question et la notation qu'il présente; car ce tableau se trouve complètement isolé sur une page (fol. 107 v^o) du manuscrit, et n'est accompagné d'aucun texte explicatif.

tation n'est pas rigoureusement conforme à la lettre de la règle. Mais aussi est-il peu probable que ces notations n'aient pas été al-

Voici maintenant la signification du tableau :

Chacun de ses bords contient dans onze cases les noms des onze ordres (المنازل), ou puissances suivantes de l'inconnue :

اموال الكعب	Quadrato-cubes.....	x^8
اموال الاموال	Carrés-carrés.....	x^4
الكعب	Cubes.....	x^3
الاموال	Carrés.....	x^2
الجزور	Racines.....	x
الاحاد	Unités.....	1
اجزاء الجزور	Fractions des racines.....	$\frac{1}{x}$
اجزاء الاموال	Fractions des carrés.....	$\frac{1}{x^2}$
اجزاء الكعب	Fractions des cubes.....	$\frac{1}{x^3}$
اجزاء اموال الاموال	Fractions des carrés-carrés.....	$\frac{1}{x^4}$
اجزاء اموال الكعب	Fractions des quadrato-cubes....	$\frac{1}{x^5}$

Puis le carré intérieur du tableau est divisé en onze colonnes verticales et autant de colonnes horizontales, correspondantes aux cases du bord, ce qui donne lieu à onze fois onze, ou cent vingt et une petites cases carrées.

Le long des onze cases du bord supérieur est écrit le mot *multiplicande* (المضروب), le long du bord droit

térées en traversant les siècles qui séparent les premières copies des œuvres de Diophante de celles qui ont servi à Bachet:

le mot *multiplieateur* (المضروب فيه), ce qui s'explique de la manière suivante : si nous descendons une colonne verticale à partir d'une case quelconque du bord supérieur, puis si nous suivons une colonne horizontale à partir d'une case quelconque du bord droit, jusqu'à la petite case carrée de l'intérieur où les deux colonnes se croisent, cette case intérieure contiendra la puissance qui est de l'ordre du produit des puissances contenues dans les cases des deux bords.

De même, si nous partons de deux cases du bord gauche et du bord inférieur respectivement, la petite case carrée où se croisent les deux colonnes contiendra la puissance qui est de l'ordre du quotient de la puissance du bord gauche par la puissance du bord inférieur; c'est pourquoi, le long du bord gauche se trouve le mot *dividende* (المقسوم), et le long du bord inférieur, le mot *diviseur* (المقسوم عليه).

Il reste seulement à expliquer comment les signes contenus dans les cases du carré intérieur désignent les puissances de l'inconnue, ce qui est en même temps le point qui nous intéresse ici particulièrement.

Or on reconnaît que l'auteur du tableau a formé ces signes en prenant pour les unités la dernière radicale د (d) du mot *آحاد* « unités », pour les racines la dernière lettre radicale ر (r) du mot *جذور* « racines »; puis en combinant pour les puissances supérieures les dernières radicales ل (l) et ب (b) des mots *اموال* « carrés » et *كعاب* « cubes », d'une ma-

nière analogue à la manière dont les noms des puissances supérieures sont formés en arabe au moyen de ces deux mots. De là résulte la notation suivante :

Unités.....	د	(d).....	x
Racines.....	ر	(r).....	x
Carrés.....	ل	(l).....	x^2
Cubes.....	ب	(b).....	x^3
Carrés-carrés.....	لل	(ll).....	x^4
Quadrato-cubes.....	لب	(lb).....	x^5
Cubo-cubes.....	بب	(bb).....	x^6
Quadrato-quadrato-cubes.....	لللب	(llb).....	x^7
Quadrato-cubo cubes.....	لبب	(lbb).....	x^8
Cubo-cubo-cubes.....	بيب	(bbb)...	x^9
Quadrato-quadrato cubo-cubes....	لللبب	(llbb)...	x^{10}

Quant aux fractions des puissances, ou, comme nous disons, valeurs réciproques des puissances, ou puissances négatives, elles sont représentées par les signes des puissances positives correspondantes précédés d'un ا (a), dernière radicale du mot اجزاء « parties » ou « fractions ». De cette manière, les valeurs réciproques des puissances sont désignées comme il suit :

Fractions des racines.....	ار	(ar).....	$\frac{1}{x}$
Fractions des carrés.....	ال	(al).....	$\frac{1}{x^2}$

Fractions des cubes..... $اب$ (ab).... $\frac{1}{x^3}$,

Fractions des carrés-carrés..... $ال$ (all).... $\frac{1}{x^2}$,

et ainsi des autres.

IV.

J'ai eu l'occasion de signaler déjà dans l'Extrait du Fakhri¹ deux problèmes d'algèbre contenus dans le recueil de problèmes joint à ce traité, et dans la solution desquels l'auteur fait usage de deux inconnues.

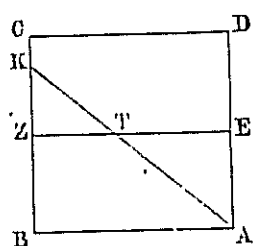
La première inconnue est désignée naturellement par le mot $شيء$ « chose », terme technique ordinaire des algébristes arabes pour désigner la 1^{re} puissance de l'inconnue. La seconde inconnue est désignée, dans l'un des deux problèmes du Fakhri, par le mot $قسم$ « partie », et dans l'autre, par le mot $تسط$ « mesure ».

J'ai à faire connaître, actuellement, un nouvel exemple de cet emploi de deux inconnues, exemple tiré d'un manuscrit de la bibliothèque de Leyde (n° 168 du legs Warnérien), lequel renferme une suite de traités et de problèmes relatifs aux différentes branches des mathématiques cultivées par les Arabes. Ces morceaux sont, en partie, d'auteurs connus, et en partie anonymes, mais paraissent tous appartenir à la première moitié du xi^e siècle, ou être

¹ P. 11, et 139 et suiv.

antérieurs à cette époque. On y rencontre notamment des problèmes proposés par Albîrounî à des géomètres contemporains, et des traités composés par Alsîdjî, géomètre qui vivait à Chiraz, dans la dernière moitié du x^e siècle.

On y trouve, folios 89 et suivants de ce manuscrit, la discussion de trois problèmes, dont les deux premiers se rapportent à la trisection de l'angle et à la construction de deux moyennes proportionnelles, et dont le troisième est ainsi conçu :



« Étant donné un carré ABCD divisé en deux parties égales par la droite EZ, parallèle au côté AB, couper par une transversale issue du sommet A, un triangle KTZ dont la surface soit à celle du carré entier dans un rap-

port donné. »

Ce problème y est résolu de différentes manières, géométriquement et algébriquement. La solution qui nous intéresse ici est la troisième, et se trouve au folio 94. En voici la traduction :

« Revenons maintenant à la figure, savoir au carré et aux deux lignes EZ et ATK seulement. Que KZ soit chose (شيء) et TZ partie (قسم)¹. La chose sera à la partie comme la ligne BK, qui est chose plus

$$KZ = x, TZ = y; \quad \left| \quad \frac{x}{y} = \frac{BK}{AB} = \frac{x+5}{10} \right.$$

cinq¹, est à AB, qui est dix. Donc le produit du premier par le quatrième, qui est dix *choses*, sera égal au produit du second par le troisième, qui est cinq *parties* et *chose* multiplié en *partie*. Mais *chose* multiplié en *partie*, qui est le produit de KZ par TZ, est seize; donc cinq *parties* et seize est égal à dix *choses*, et conséquemment cinq *parties* sont égales à dix *choses* moins seize. Donc une *partie*² est égale à deux *choses* moins trois et un cinquième. Multipliez en cela la *chose*, il vient deux *carrés* moins trois *choses* et un cinquième de *chose*. Donc, si nous réintégrons (les quantités négatives) et opposons (c'est-à-dire supprimons les quantités positives et égales), un *carré* est égal à huit unités et une *chose* et trois cinquièmes d'une *chose*. Donc, multipliez

$$\begin{array}{l|l}
 10x = 5y + xy; & x = \frac{4}{5} + \sqrt{8 + \frac{16}{5}} = KZ; \\
 xy = KZ \cdot TZ = 16, & KZ \cdot TZ = 16, \\
 5y + 16 = 10x, & \\
 5y = 10x - 16; & \\
 y = 2x - 3\frac{1}{5}; & TZ = \sqrt{34 + \frac{16}{5}} - 1\frac{3}{5}; \\
 xy = 2x^2 - \left(3\frac{1}{5}\right)x, & KT = \sqrt{TZ^2 + KZ^2}. \\
 x^2 = 8 + \left(1\frac{3}{5}\right)x; &
 \end{array}$$

¹ Dans la seconde solution du problème, qui est algébrique aussi, l'auteur avait assigné aux quantités données, AB et surface de KTZ, les valeurs déterminées, 10 et 8 respectivement.

² Le texte porte *chose*, ce qui n'est évidemment qu'une erreur de copiste.

la moitié du nombre des racines en elle-même, etc. »

Le reste de la solution ne contient plus que la résolution de l'équation du second degré à une inconnue par la méthode ordinaire, et finalement la détermination des trois côtés du triangle KTZ, d'où il suit que ce triangle est connu. Tout cela n'est que d'un intérêt secondaire; ce qu'il m'importe seulement de constater ici, c'est l'emploi si remarquable de deux inconnues dans la partie de la solution que je viens de traduire.

ADDITION.

Ayant eu à parler longuement, dans ce qui précède, du Traité d'Alkalçâdî, je profite de cette occasion pour mentionner quelques procédés énoncés dans ce Traité, et ayant pour but la détermination d'une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré exact.

Soit le nombre proposé $n = a^2 + r$, a^2 étant le plus grand carré contenu dans n .

Si $r \leq a$, l'auteur fait $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$; mais, si $r > a$, il propose comme une valeur plus exacte

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r+1}{2a+2}.$$

Il a donc su que, pour $r > a$, il est

$$\sqrt{a^2 + r} < a + \frac{r+1}{2a+2} < a + \frac{r}{2a}.$$

En effet, on voit aisément que $a + \frac{r+1}{2a+2} < a + \frac{r}{2a}$,
 ou $\frac{r+1}{a+1} < \frac{r}{a}$, ou $ar + a < ar + r$, si $a < r$. Et, d'un
 autre côté, l'inégalité $\sqrt{a^2 + r} < a + \frac{r+1}{2a+2}$ équivaut
 à $r(2a+2)^2 < 2a(r+1)(2a+2) + (r+1)^2$, ou à
 $2(r-2a) < (2a-r)^2 + 1$. Mais cette inégalité a lieu
 tant que $r \leq 2a$; et du moment que l'on aurait $r > 2a$,
 donc au moins $r = 2a + 1$, donc $n = a^2 + r = (a+1)^2$,
 a ne serait plus le plus grand carré contenu dans n .

Mais, en outre, l'auteur propose une troisième
 valeur, pour rendre encore plus exacte l'évaluation
 $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$, savoir :

$$\sqrt{a^2 + r} = \left(a + \frac{r}{2a}\right) - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)},$$

ce qui équivaut à $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{4a^2 r + r^2}{8a^3 + 4ar}$.

Or on sait que, si l'on pose $\sqrt{a^2 + r} = a + x$,
 donc $r = 2ax + x^2$, il suit $x = \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}$; et, en s'ar-

rêtant au troisième quotient, on a précisément

$$\frac{\frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}}{2a + \frac{r}{2a}} = \frac{4a^2 r + r^2}{8a^3 + 4ar}.$$

MATHÉMATIQUE. — *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par M. le prince Balthasar Boncompagni, et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des arabes par M. F. Woercke* (*).

II.

Traduction du traité d'arithmétique

d'Aboul Haçan Ali Ben Mohammed Alkalçâdî (**)

Louange à Dieu: Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre seigneur et maître Mohammed, sur sa famille et sur ses compagnons.

Ali Ben Mohammed Ben Mohammed Ben Ali, le Koraïchite, connu sous le nom d'Alkalçâdî, Albasthi, le pauvre esclave devant Dieu (que Dieu lui pardonne par sa grâce et sa générosité) dit :

Louange à Dieu qui est prompt dans ses comptes dans le livre de Dieu (***), qui répand abondamment des bienfaits, qui ouvre les portes. Que la bénédiction et le salut soient sur le seigneur des deux mondes, le prophète envoyé aux hommes et aux génies.

Pour en venir au fait, ceci est un abrégé assez étendu et riche en matière, également éloigné de l'insuffisance et de la prolixité, que j'ai extrait de mon ouvrage intitulé : « Soulèvement du vêtement de la science du cal-

(*) Continuazione V. T. X. Sessione IV del 1 marzo 1857 pag. 236.

(**) M. Reinaud possède un manuscrit de ce traité, qu'il a eu l'extrême obligeance de me communiquer, et dont il m'a permis de prendre copie. Je m'empresse de lui en témoigner ma reconnaissance. C'est de cette copie que je me suis servi pour la traduction que je publie ici. Ayant quitté Paris, comme je pensais d'abord pour quelques semaines seulement, mais me voyant ensuite empêché d'y retourner, je n'ai pu collationner ma copie, comme je l'aurais désiré, avec un autre manuscrit du même traité conservé à la Bibliothèque Impériale. J'ai donné quelques notices sur les deux manuscrits dont je viens de parler, ainsi que sur le nom et l'époque de la mort d'Alkalçâdî (1477 ou 1486 de notre ère) dans un mémoire publié dans le Journal asiatique, Cahier d'Octobre — Novembre 1854, pag. 348 et suiv.

(***) Voir sourate II, 198; III. 17, 199; V, 6; XIII. 41; XIV, 81; XXIV, 39; XL, 17. En citant cette expression du Koran qui signifie à la lettre que Dieu est prompt au calcul, l'auteur fait allusion, par un jeu de mot familier aux écrivains arabes, à la science qui est l'objet de son traité.

cul » (*). Cet abrégé est destiné à offrir une ample provision à une partie des étudiants, et à servir de manuel à ceux qui sont doués d'une intelligence supérieure. Je l'ai intitulé SOULÈVEMENT DES VOILES DE LA SCIENCE DU GORËË, et je prie Dieu de m'accorder son appui et de me guider pour que je marche dans le chemin droit de son assistance et de sa direction, dans ce monde et dans la vie future; je le supplie de placer ce travail parmi les oeuvres qui ne sont pas interrompues par la mort, et dont l'auteur n'est pas menacé par le malheur d'une fin subite. Ce traité se compose d'une introduction, de quatre parties et d'une conclusion. Chaque partie comprend huit chapitres.

INTRODUCTION.

Quant à l'introduction, elle traite de la manière de poser ces signes, et de ce qui s'y rapporte: ce sont neuf figures différentes (**) dont la première est l'unité, ensuite vient le deux, (et ainsi de suite) jusqu'au neuf. Posez d'abord l'unité, et au-dessous d'elle le deux, (et ainsi de suite) jusqu'au dernier de ces signes de la manière suivante :

Si vous avez dix, alors posez un zéro (***), c'est à dire un petit cercle, et après lui (****) l'unité, ainsi: 10. Et si vous avez vingt, posez un zéro et après lui le deux, ainsi: 20. Et de même allez jusqu'à quatre-vingt dix en observant la même forme, ainsi :

∴ 90 ∴ 80 ∴ 70 ∴ 60 ∴ 50 ∴ 40 ∴ 30 ∴

1
2
3
4
5
6
7
8
9

Si vous avez onze, posez une unité et après elle une seconde unité, ainsi: 11. Si vous avez douze, posez d'abord le deux et après lui une unité, ainsi: 12; et de même jusqu'à dix-neuf.

(*) D'après le ms. de M. Reinaud qui intercale encore le mot *madnt* entre *gachf* et *al-djilbab*, ce titre serait: « Révélation des significations du vêtement de la science du calcul ». Le mot *ma'nan* (plur. *madnt*) dénote en général la signification, le sens, le fond, la nature intérieure d'une chose par opposition à sa forme extérieure.

(**) Quant à la forme de ces chiffres, elle se trouve exactement reproduite dans le mémoire déjà cité, publié dans le Journal asiatique. Voir loc. laud. pag. 362 et suiv.

(***) Je fais observer que le ms. porte constamment *safron* (avec *sfu*) qui signifie « vestige, trace », et non *cifron* (avec *fd*) qui signifie « vide ».

(****) C'est à dire à gauche de lui, les Arabes écrivant de droite à gauche.

Si vous avez des unités, des dizaines et des centaines, posez les unités au premier rang, les dizaines au second, et les centaines au troisième. Par exemple lorsqu'on vous dit : posez (*) cent onze, posez cela ainsi : 111; parceque l'unité au premier rang signifie un , au second dix , et au troisième cent. Et si l'on vous dit : posez sept cent quarante trois, posez cela ainsi : 743. Et si l'on vous dit : posez neuf cent vingt cinq, posez cela ainsi : 925.

Si vous avez des mille , placez-les au quatrième rang. Par exemple si l'on vous dit : posez sept mille cinq cent soixante treize, posez cela ainsi : 7573.

Si dans quelques-uns des rangs il ne se trouve pas de nombre, posez-y un zéro qui servira à conserver ce rang. Par exemple si l'on vous dit : posez trois cent cinq, posez d'abord le cinq, après lui un zéro, et après celui-ci le trois, ainsi : 305. Et si l'on vous dit : posez huit mille vingt, posez cela ainsi : 8020.

PREMIÈRE PARTIE.

DU NOMBRE ENTIER

CHAPITRE PREMIER.

DE L'ADDITION.

L'addition est l'action de réunir les nombres les uns aux autres de telle manière qu'on puisse les énoncer au moyen d'un seul mot. Il se présente en cela nécessairement trois cas. Le premier c'est que des deux nombres additionnés il provient seulement des unités; le second , qu'il en provient des dizaines; le troisième, qu'il en résulte des unités et des dizaines.

La pratique de cette opération consiste à placer les deux nombres qu'il s'agit d'additionner sur deux lignes et à mener au-dessus d'eux un trait; ensuite à placer le résultat, si ce sont des unités, au-dessus des deux nombres additionnés. Si au contraire ce sont des dizaines, posez un zéro au-dessus des deux nombres additionnés et faites entrer le signe de l'unité après cela (**). Si enfin le résultat est formé d'unités et de dizaines, posez les unités au-dessus des deux nombres additionnés et les dizaines après.

(*) C'est à dire : écrivez.

(**) C'est à dire : placez une unité dans le rang suivant en allant vers la gauche.

Par exemple, si l'on vous dit : ajoutez quatre cent trente deux à deux cent trente un, posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 432 \\ 231 \\ \hline \end{array}$$

Ensuite ajoutez l'unité au deux; il résulte trois, ce que vous poserez au-dessus des deux nombres additionnés. Ajoutez le trois au trois; il résulte six; placez-le au-dessus de la ligne. Enfin ajoutez le deux au quatre; il résulte six, posez-le pareillement au-dessus des deux nombres additionnés. Le résultat sera six cent soixante trois; ainsi : 663.

Et si l'on vous dit : ajoutez cent vingt huit à trois cent soixante onze, posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 128 \\ 371 \\ \hline \end{array}$$

Ensuite ajoutez l'unité au huit; ce sera neuf; placez-le au-dessus des deux nombres additionnés. Ajoutez le sept au deux; il résultera neuf; placez-le pareillement au-dessus des deux nombres additionnés. Puis ajoutez le trois à l'unité; il vient quatre; posez-le également au-dessus des deux nombres additionnés. Le résultat sera quatre cent quatre-vingt dix-neuf; ainsi : 499.

Et si l'on vous dit : ajoutez trois cent vingt à cinq cent deux , posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 320 \\ 502 \\ \hline \end{array}$$

Ensuite ajoutez le zéro au deux; ce sera deux; posez-le au-dessus de la ligne. Ajoutez le zéro au deux; ce sera deux; placez-le au-dessus de la ligne. Enfin ajoutez le cinq au trois; il résulte huit; placez-le également au-dessus des deux nombres additionnés. Le résultat sera huit cent vingt deux, ainsi : 822.

Exemples de l'opération si ce qui provient des deux nombres additionnés, sont des dizaines. Si l'on vous dit : ajoutez vingt quatre à soixante seize , posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 24 \\ 76 \\ \hline \end{array}$$

Ensuite ajoutez le six au quatre; il résulte dix; posez au-dessus des deux nombres additionnés un zéro, et l'unité au-dessous du sept. Ensuite ajoutez-la à celui-ci et au deux; il résulte dix; posez pareillement un zéro et l'unité après. Il résulte cent, ainsi: 100.

Et si l'on vous dit: ajoutez deux mille trois cent vingt quatre à sept mille six cent soixante seize, posez cela ainsi:'

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 2\ 4 \\ 7\ 6\ 7\ 6 \end{array}$$

Ensuite ajoutez le six au quatre, il résulte dix; posez un zéro au-dessus des deux nombres additionnés, placez l'unité au-dessous du sept et ajoutez-la à celui-ci et au deux; il résulte dix; posez de nouveau un zéro au-dessus des deux nombres additionnés et l'unité au-dessous du six, (et ainsi de suite) jusqu'à la fin de l'opération. Le résultat sera dix mille, ainsi: 10000.

Exemples de l'opération si le résultat est formé d'unités et de dizaines. Si l'on vous dit: ajoutez quarante huit à quatre-vingt dix-sept, posez cela ainsi:

$$\begin{array}{r} 4\ 8 \\ 9\ 7 \end{array}$$

Ensuite ajoutez le sept au huit; il résulte quinze; posez le cinq au-dessus des deux nombres additionnés, faites entrer l'unité au-dessous du neuf, et ajoutez-la à celui-ci et au quatre; il provient quatorze; posez le quatre au-dessus des deux nombres additionnés et le dix (*) après. Le résultat sera cent quarante cinq, ainsi: 145.

Et si l'on vous dit: ajoutez soixante huit mille sept cent soixante cinq à quarante six mille cinq cent soixante dix-neuf, posez cela ainsi:

$$\begin{array}{r} 6\ 8\ 7\ 6\ 5 \\ 4\ 6\ 5\ 7\ 9 \end{array}$$

Ensuite ajoutez le neuf au cinq; il résulte quatorze; posez le quatre au-dessus des deux nombres additionnés, faites entrer l'unité au-dessous du sept et ajoutez-la à celui-ci et au six; il résulte de nouveau quatorze; posez le quatre

(*) C'est à dire l'unité qui représente le dix



au-dessus des deux nombres additionnés et l'unité au-dessous du cinq , et ajoutez-la à celui-ci et au sept ; il résulte treize ; posez le trois au-dessus des deux nombres additionnés et l'unité au-dessous du six, et ajoutez-la à celui-ci et au huit; il résulte quinze; posez le cinq au-dessus des deux nombres additionnés et l'unité au-dessous du quatre, et ajoutez-la à celui-ci et au six; il résulte onze ; posez une unité au-dessus de la ligne et l'unité après. Le résultat sera cent quinze mille trois cent quarante quatre, ainsi: 115344. (*)

CHAPITRE DEUXIÈME.

DE LA SOUSTRACTION. (**)

La soustraction consiste à connaître l'excédant (***) entre deux nombres dont l'un est plus petit et l'autre plus grand.

La pratique de cette opération consiste à placer le nombre dont on retranche sur une ligne et au-dessous de lui le nombre retranché , à mener au-dessus d'eux un trait, à retrancher chaque rang du rang correspondant, et à poser le reste au-dessus de la ligne. Le reste sera la quantité cherchée.

Par exemple , si l'on vous dit : retranchez six cent cinquante trois de neuf cent soixante dix-huit; posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 978 \\ 653 \\ \hline \end{array}$$

Ensuite retranchez trois de huit ; il reste cinq ; posez-le au-dessus de la ligne; puis retranchez cinq de sept; il reste deux; posez-le pareillement au-dessus de la ligne, et retranchez six de neuf; il reste trois; posez-le de même au-dessus de la ligne. Le reste sera trois cent vingt cinq, ainsi : 325.

(*) Voici cette opération figurée au complet à la manière arabe

$$\begin{array}{r} 115344 \\ 68765 \\ 46579 \\ 1111 \\ \hline \end{array}$$

(**) Le nom arabe de la soustraction , *tarhoun* , vient du verbe *taraha* « projicere , abjicere ».

(***) C'est à dire la différence.

Et si l'on vous dit : retranchez sept mille six cent vingt quatre de neuf mille sept cent vingt six, posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 9\ 7\ 2\ 6 \\ 7\ 6\ 2\ 4 \end{array}$$

Ensuite retranchez quatre de six ; il reste deux ; posez-le au-dessus de la ligne ; puis retranchez le deux du deux ; il ne reste rien ; posez au-dessus des deux nombres retranchés l'un de l'autre un zéro ; après cela retranchez six de sept ; il reste un ; posez-le au-dessus des deux nombres retranchés l'un de l'autre ; ensuite retranchez le sept du neuf ; il reste deux ; posez-le au-dessus des deux nombres retranchés l'un de l'autre. Alors le reste sera deux mille cent deux, ainsi : 2102.

Mais si dans quelques-uns des rangs le nombre dont on retranche est plus petit que le nombre retranché, alors ajoutez dix au nombre dont on retranche, et retranchez de la somme le nombre qu'il s'agit de retrancher.

Par exemple, si l'on vous dit : retranchez trois cent quatre-vingt six de sept cent vingt cinq ; posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 7\ 2\ 5 \\ 3\ 8\ 6 \end{array}$$

Ensuite retranchez le six du cinq ; on ne le peut pas ; donc ajoutez au cinq dix ; il résulte quinze ; retranchez-en le six ; il reste neuf ; posez-le au-dessus de la ligne. Puis ajoutez le dix sous la forme d'une unité au huit ; il résulte neuf ; retranchez-le du deux ; cela ne se peut pas ; donc ajoutez au deux dix ; il résulte douze ; retranchez-en neuf ; il reste trois ; posez-le au-dessus de la ligne. Alors le reste sera trois cent trente neuf, ainsi : 339.

Et si l'on vous dit : retranchez trois mille neuf cent soixante dix-huit de cinq mille sept cent deux, posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 5\ 7\ 0\ 2 \\ 3\ 9\ 7\ 8 \end{array}$$

Ensuite-retranchez le huit du deux ; cela ne se peut pas ; donc ajoutez dix au deux ; il résulte douze ; retranchez-en le huit ; il reste quatre ; posez-le

au-dessus de la ligne. Après cela ajoutez une unité au sept; il résulte huit; retranchez-le du zéro; cela ne se peut pas; donc ajoutez dix au zéro et retranchez-en le huit; il reste deux; posez-le au-dessus de la ligne. Puis ajoutez une unité au neuf; il résulte dix; retranchez-le du sept; on ne le peut pas; donc ajoutez dix au sept; il résulte dix-sept; retranchez (le dix) de la somme; il reste sept; posez-le au-dessus de la ligne. Ensuite ajoutez une unité au trois; il résulte quatre; retranchez-le du cinq; il reste un; placez-le au-dessus de la ligne. Le reste sera donc mille sept cent vingt quatre, ainsi : 1724.

CHAPITRE TROISIÈME.

DE LA MULTIPLICATION.

La multiplication est l'action de faire résulter un nombre inconnu de deux nombres connus. Elle se fait de différentes manières.

La multiplication inclinée. (*) La pratique de cette opération consiste à placer le multiplicateur sur une ligne et au-dessous de lui le multiplicande, de telle sorte que le premier rang du multiplicande se trouve au-dessous du dernier rang du multiplicateur, [à multiplier] par ce rang tous les rangs du multiplicande, à faire ensuite reculer celui-ci d'un rang, à le multiplier tout entier par ce rang (du multiplicateur) qui précède le rang par lequel on vient de multiplier, et à continuer ainsi jusqu'à ce que l'opération soit terminée.

Par exemple, si l'on vous dit: multipliez soixante treize par cinquante deux (**), posez cela ainsi: (***)

$$\begin{array}{r} \overline{52} \\ 73 \end{array}$$

(*) La multiplication du *madjnah*; *madynah* = « locus, quo inclinatur », du verbe *djahanah* « inclinavit, propendit ».

(**) Textuellement: multipliez cinquante deux en soixante treize.

(***) Voici une représentation de l'opération décrite dans les lignes suivantes:

$$\begin{array}{r} 3796 \\ \hline 6 \\ 14 \\ 15 \\ 35 \\ \hline \overline{52} \\ 73 \\ 73 \end{array}$$

et placez au-dessus de ces nombres une ligne brisée. Ensuite multipliez le sept par le cinq; il résulte trente cinq; posez le cinq au-dessus du sept et le trois après. Puis multipliez le trois également par le cinq; il résulte quinze; posez le cinq au-dessus des deux nombres multipliés l'un par l'autre et l'unité après, au-dessus du cinq. Ensuite faites reculer le trois au-dessous des unités et le sept dans le rang des dizaines, et multipliez le sept par le deux; il résulte quatorze; posez le quatre au-dessus du multiplicande et l'unité après. Puis multipliez le trois par le deux, ce qui donne six; posez cela au-dessus des deux nombres multipliés l'un par l'autre. Ensuite tirez une ligne au-dessus de ce qui résulte (des multiplications précédentes) et additionnez-le au-dessus de cette ligne, ce sera trois mille sept cent quatre-vingt seize; posez cela ainsi : 3796.

Et si l'on vous dit : multipliez neuf mille sept cent trente six par cinq cent quatre-vingt deux, posez cela ainsi (*) :

$$\begin{array}{r} \text{-----} | 5 \ 8 \ 2 \\ 9 \ 7 \ 3 \ 6 \end{array}$$

Ensuite multipliez tout le multiplicande par le cinq, et placez ce qui provient de chaque nombre au-dessus de celui-ci. Puis faites reculer le multi-

(*) Voici l'opération décrite dans les lignes suivantes :

$$\begin{array}{r} 5 \ 6 \ 6 \ 6 \ 3 \ 6 \ 2 \\ \text{-----} \\ 1 \ 2 \\ 6 \\ 1 \ 4 \\ 1 \ 8 \\ 4 \ 8 \\ 2 \ 4 \\ 6 \ 6 \\ 7 \ 2 \\ 3 \ 0 \\ 1 \ 6 \\ 3 \ 6 \\ 4 \ 6 \\ \text{-----} | 5 \ 8 \ 2 \\ 9 \ 7 \ 3 \ 6 \\ 9 \ 7 \ 3 \ 6 \\ 9 \ 7 \ 3 \ 6 \end{array}$$

plicande tout entier d'un rang, et alors multipliez-le tout entier par huit en plaçant de nouveau ce qui provient de chaque nombre au-dessus de celui-ci. Ensuite faites de nouveau reculer le multiplicande, encore d'un rang, et multipliez-le tout entier par deux en plaçant ce qui provient de chaque nombre au-dessus de celui-ci. Après cela tirez au-dessus de tout cela une ligne, et additionnez au-dessus d'elle tous les résultats. Il viendra le nombre cherché, à savoir cinq millions six cent soixante six mille trois cent cinquante deux (*), ainsi: 5666352.

*La multiplication au moyen des nombres de position (**).* La pratique de cette opération consiste à placer les deux nombres qu'il s'agit de multiplier l'un par l'autre, sur deux lignes qui se correspondent, c'est à dire les unités [sous les unités], les dizaines sous les dizaines, et de même pour les rangs suivants. Ensuite multipliez rang après rang de l'un des deux nombres proposés par l'autre tout entier, et placez (constamment) le résultat où l'exige le rang des nombres de position. C'est qu'on ajoute le nombre de position du multiplicande [à celui du multiplicateur], qu'on retranche constamment l'unité de la somme, et qu'on place le résultat de la multiplication là (où l'indique le nombre de position ainsi obtenu).

Par exemple, si l'on vous dit: multipliez trois cent vingt et un par quatre cent trente deux, posez cela ainsi

$$\begin{array}{r} 432 \\ 321 \end{array}$$

et menez au-dessus des deux lignes un trait. Ensuite multipliez l'unité par le deux, il résulte deux. Posez cela au-dessus des deux nombres multipliés l'un par l'autre, parce que le nombre de position (***) des deux nombres multipliés l'un par l'autre est deux, et si de cela on retranche l'unité, il reste un, ce qui indique le premier rang. Après cela multipliez le deux par le

(*) Textuellement: deux et cinquante et trois cent et six et soixante mille et six cent mille et cinq mille mille.

(**) Le mot *ass* que je traduis ici par « nombre de position » signifie proprement « fondement, principe, trace ». Nous verrons plus loin, dans la quatrième partie de ce traité, qui a pour objet l'algèbre, que ce mot sert à désigner exactement ce que nous appelons aujourd'hui l'exposant d'une puissance algébrique.

(***) Il serait plus exact de dire: la somme des nombres de position.

deux, il résulte quatre. Posez-le au second rang, parce que le nombre de position des deux nombres multipliés l'un par l'autre est quatre. Ensuite mettez un point au-dessus du deux, pour signifier qu'on a fini d'opérer avec lui, et passez au trois. Multipliez. par lui l'unité, ce qui donne trois. Posez-le au second rang. Multipliez le deux par le trois, il résulte neuf; posez cela au quatrième rang. Ensuite marquez le trois, passez au quatre, et multipliez par lui l'unité, ce qui donne quatre. Posez-le au troisième rang. Multipliez le deux par le quatre; il résulte huit; posez-le au quatrième rang, parce que le nombre de position des deux nombres multipliés l'un par l'autre est cinq, et le reste, si l'on en retranche un, quatre. Puis multipliez le trois par le quatre; il résulte douze. Placez-le au cinquième rang. Ensuite additionnez les résultats. Il viendra le nombre cherché, à savoir cent trent huit mille six cent soixante douze, ainsi : 138672 (*).

Et si l'on vous dit : multipliez soixante quinze mille vingt par trois cent quatre, posez cela ainsi : (**)

$$\begin{array}{r} 1304 \\ 75020 \end{array}$$

Ensuite multipliez le multiplicande tout entier par le trois, et posez ce qui provient de chaque nombre au-dessus de celui-ci. Après cela faites reculer le multiplicande (de deux rangs, multipliez-le) tout entier par quatre (**), et po-

(*) Voici l'opération figurée :

$$\begin{array}{r} 138672 \\ 12 \\ \hline 8 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ \hline 432 \\ 321 \end{array}$$

(**) Cet exemple appartient évidemment à l'espèce précédente de la multiplication. Il paraît avoir été placé ici par erreur.

(***) Le texte du manuscrit est très-corrompu en cet endroit.

sez ce qui provient de chaque nombre au-dessus de celui-ci. Puis additionnez cela comme ci-dessus. Il résultera le nombre cherché, à savoir vingt deux millions huit cent six mille quatre-vingt, ainsi : 22806080.

Et si l'on vous dit : multipliez sept mille huit cent cinquante deux par mille cinq cent quarante trois, alors posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 4\ 3 \\ 7\ 8\ 5\ 2 \end{array}$$

Ensuite multipliez toute la ligne inférieure, rang après rang, par chaque rang de la ligne supérieure, et posez les résultats où l'exige le rang des nombres de position. Puis additionnez les résultats. Vous aurez le nombre cherché, à savoir: douze millions cent quinze mille six cent trente six, ainsi: 12115636.

La multiplication avec demi-transposition (*). Elle s'applique exclusivement à deux nombres égaux.

La pratique de cette opération consiste à poser l'un des deux nombres qu'il s'agit de multiplier l'un par l'autre, sur une ligne, et à placer entre chacun de ses rangs (et le rang suivant) un point. Ensuite vous multipliez le dernier rang par lui-même, et posez au-dessus de lui le résultat. Puis vous ajoutez à ce multiplicateur un nombre qui lui est égal, et vous placez la somme à l'endroit où se trouve le point. Vous multipliez ce nombre redoublé par le nombre du rang précédent, et vous placez le résultat au-dessus de celui-là. Vous multipliez le nombre qui se trouve dans ce rang par lui-même, et posez au-dessus de lui le résultat. Ensuite vous ajoutez le nombre qui se trouve dans ce rang à lui-même, et vous posez la somme à l'endroit où se trouve le (second) point, en faisant passer le premier nombre redoublé, tel qu'il est, dans la place du nombre qu'on vient de doubler. Après cela vous multipliez par le nombre qui se trouve dans le rang précédent, tous les rangs des nombres redoublés et ce nombre lui-même, et vous posez ce qui provient de chaque nombre au-dessus de celui-ci. On opère de la même manière si les rangs (du nombre proposé) sont nombreux.

(*) On reconnaîtra facilement que cette méthode n'est autre chose qu'une application pratique de la formule

$$(a + b + c + \dots)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + \dots$$

Par exemple, si l'on vous dit : multipliez quatre cent trente huit par lui-même, posez cela ainsi : (*)

$$4 : 3 : 8$$

Ensuite multipliez le quatre par lui-même; il résulte seize; posez le six au-dessus du quatre et l'unité après. Puis doublez le quatre; il résulte huit, ce que vous poserez au-dessous des points. Vous le multipliez par le trois, il résulte vingt quatre. Posez le quatre au-dessus des points et le deux après. Ensuite multipliez le trois par lui-même; il résulte neuf; posez-le au-dessus du trois. Après cela doublez le trois; ce sera six; posez-le au-dessous des points qui précèdent le trois, et faites passer le huit sous le trois. Ensuite multipliez, par le huit, le huit, le six et le huit lui-même; posez ce qui provient de chaque nombre au-dessus de celui-ci. Après cela additionnez les résultats; vous aurez le nombre cherché. C'est cent quatre vingt onze mille huit cent quarante quatre, ainsi : 191844.

Si le résultat du redoublement est dix, posez à l'endroit des points un zéro et l'unité après.

Par exemple, si l'on vous dit : multipliez cinq cent cinquante six par lui-même, posez cela ainsi : (**)

$$\begin{array}{r}
 \text{(*)} \quad \begin{array}{r}
 191844 \\
 \hline
 6 \\
 48 \\
 64 \\
 9 \\
 24 \\
 16 \\
 \hline
 4.3.8 \\
 886 \\
 \hline
 309136 \\
 \hline
 36 \\
 6 \\
 6 \\
 25 \\
 5 \\
 25 \\
 \hline
 5.5.6 \\
 1010 \\
 1
 \end{array} \\
 \text{(**)} \quad \begin{array}{r}
 5 : 5 : 6 \\
 \hline
 6 \\
 48 \\
 64 \\
 9 \\
 24 \\
 16 \\
 \hline
 4.3.8 \\
 886 \\
 \hline
 309136 \\
 \hline
 36 \\
 6 \\
 6 \\
 25 \\
 5 \\
 25 \\
 \hline
 5.5.6 \\
 1010 \\
 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Ensuite multipliez le cinq par lui-même : il résulte vingt cinq; posez-le au-dessus de la ligne. Après cela doublez le cinq; il résulte dix; posez un zéro au-dessous des points et l'unité après, sous le cinq. Ensuite multipliez par le cinq qui signifie cinquante, l'unité et le cinq lui-même, et posez les résultats pareillement au-dessus de la ligne. Puis doublez ce cinq; il résulte dix; posez un zéro au-dessous des points et l'unité après, sous le cinq. Ensuite déplacez le produit du (premier) redoublement qui se trouvait d'abord sous le cinq, et dans lequel le zéro n'a pas de valeur, de manière à mettre l'unité à la place du zéro. Après cela multipliez, par le six, les unités qui se trouvent au quatrième et au troisième rang et le six lui-même, et posez les résultats au-dessus de la ligne. Ensuite additionnez. Il résultera le nombre cherché, à savoir trois cent neuf mille cent trente six, ainsi : 309136.

Si le résultat du redoublement est composé d'unités et de dizaines, posez les unités à l'endroit des points et les dizaines après.

Par exemple, si l'on vous dit : multipliez sept cent quatre-vingt six par lui-même, posez cela ainsi : (*)

$$7 \div 8 \div 6$$

Ensuite multipliez le sept par lui-même; il résulte quarante neuf; posez-le au-dessus de la ligne. Après cela doublez le sept; ce sera quatorze; posez le quatre au-dessous des points et l'unité après, sous le sept. Ensuite multipliez, par le huit, l'unité, le quatre, et le huit lui-même, et posez les résultats au-dessus de la ligne. Après cela doublez le huit; il résulte seize; posez le six au-dessous des points et l'unité au-dessous du huit; ajoutez à celle-ci le qua-

(*)

$$\begin{array}{r}
 6 \ 1 \ 7 \ 7 \ 9 \ 6 \\
 \hline
 3 \ 6 \\
 3 \ 6 \\
 3 \ 0 \\
 6 \\
 6 \ 4 \\
 3 \ 2 \\
 8 \\
 4 \ 9 \\
 \hline
 7 \ . \ 8 \ . \ 6 \\
 1 \ 4 \ 1 \ 6 \\
 1 \ 5 \ 6
 \end{array}$$

tre, ce qui donne cinq, et faites passer l'autre unité à la place du quatre. Ensuite multipliez tout cela par le six, et multipliez aussi le six par lui-même. Posez les résultats au-dessus de la ligne. Puis additionnez tout cela, et vous aurez le nombre cherché. C'est six cent dix-sept mille sept cent quatre-vingt seize, ainsi : 617796.

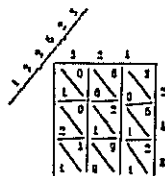
La multiplication au moyen du tableau (*). La pratique de cette opération consiste à prendre une surface carrée, à la partager en petits carrés, et à diviser chacun de ceux-ci en deux parties égales. Ensuite posez le multiplicateur au-dessus de cette figure et le multiplicande à sa droite; multipliez chaque rang de l'un par l'autre tout entier, et placez les unités du résultat dans l'une des moitiés du (petit) carré, et les dizaines dans l'autre. Puis additionnez les résultats. Vous obtiendrez le nombre cherché.

Par exemple, si l'on vous dit : multipliez soixante quatre par trois, posez cela ainsi :



Ensuite multipliez le quatre par le trois; il résulte douze; posez le deux dans la moitié du carré qui est à droite, et le dix (**) dans l'autre moitié. Puis multipliez le six par le trois, et faites la même chose. Il résulte le nombre cherché, à savoir cent quatre vingt douze, ainsi : 192.

Et si l'on vous dit : multipliez trois cent quarante deux par cinq cent trente quatre, posez cela ainsi :



(*) Le mot *djadwal* que je traduis ici par « tableau », est aussi le terme employé de préférence pour désigner des tables de quantités mathématiques, par exemple des tables de sinus, de longitude et de latitude, etc. La méthode de multiplication dont il s'agit ici, est aussi appelée par les Arabes la méthode du réseau, *chabagah*.

(**) C'est à dire l'unité qui représente le dix.

Ensuite multipliez le deux par le quatre; il résulte huit; posez-le dans le carré qui est à droite. Après cela multipliez le quatre par le quatre; il résulte seize; posez le six dans la moitié du carré qui se trouve près du quatre qui est le multiplicande, et l'unité dans l'autre moitié. Puis multipliez le trois par le quatre; il résulte douze; posez le deux dans la moitié du carré qui se trouve près du trois, et l'unité dans l'autre moitié. Ensuite passez, dans le multiplicateur, au trois, et multipliez par lui le deux; il résulte six; posez-le dans la moitié du carré qui se trouve près du trois. Puis multipliez le quatre par le trois, il résulte douze; posez le deux dans la moitié du carré où se rencontrent deux lignes droites menées des deux nombres multipliés l'un par l'autre; et posez l'unité dans l'autre moitié. Faites de même pour le reste de l'opération. Ensuite additionnez au-dessus du sommet gauche du carré ce qui se trouve entre les lignes de séparation. Le résultat sera cent quatre-vingt deux mille six cent vingt huit, ainsi: 182628.

§.

Il est indispensable de savoir par coeur la multiplication des unités les unes par les autres.

Si l'on vous dit: deux fois deux, dites: le résultat est quatre; et deux fois trois est six. Répétez l'un des deux nombres multipliés l'un par l'autre autant de fois qu'il est contenu d'unités dans l'autre. Il en est de même pour le trois, le quatre et le cinq.

Et si l'on vous dit: multipliez six par lui-même, dites: le résultat est trente six; six fois sept est quarante deux; six fois huit est quarante huit; six fois neuf est cinquante quatre; six fois dix est soixante.

Sept multiplié par lui-même est quarante neuf; sept fois huit est cinquante six; sept fois neuf est soixante trois; sept fois dix est soixante dix.

Huit fois huit est soixante quatre; huit fois neuf est soixante douze; huit fois dix est quatre-vingt.

Neuf fois neuf est quatre-vingt un; neuf fois dix est quatre-vingt dix.

Dix multiplié par lui-même est cent. Onze multiplié par lui-même est cent vingt un. Douze multiplié par lui-même est cent quarante quatre. Treize multiplié par lui-même est cent soixante neuf.

§.

Ajoutons encore à ce chapitre plusieurs règles fondamentales dont on peut se contenter dans un certain nombre de cas.

Tout nombre multiplié par zéro produit zéro.

Tout nombre multiplié par l'unité produit ce nombre même.

Pour multiplier un nombre quelconque par deux, ajoutez-le à lui-même.

Pour multiplier un nombre quelconque par trois, ajoutez-le à son double.

Pour multiplier un nombre quelconque par quatre, doublez-le deux fois.

Pour multiplier un nombre quelconque par cinq, faites-le précéder d'un zéro, et prenez de cela la moitié.

Par exemple, si l'on vous dit: multipliez seize par cinq, faites précéder le seize d'un zéro, ce sera cent soixante, prenez-en la moitié, quatre vingt, c'est le nombre cherché.

Et si l'on vous dit: multipliez treize par cinq, faites précéder le treize d'un zéro, ce sera cent trente; prenez-en la moitié, soixante cinq, c'est le nombre cherché.

Pour multiplier un nombre quelconque par six, ajoutez-le à la moitié de son produit par dix ().*

Par exemple, si l'on vous dit: multipliez seize par six, ajoutez le seize à la moitié de son produit par dix, à savoir, à quatre-vingt, vous aurez quatre-vingt seize, ce qui est le nombre cherché.

Pour multiplier un nombre quelconque par sept, faites-le précéder d'un zéro, et retranchez son triple de son produit par dix.

Par exemple, si l'on vous dit: multipliez douze par sept, retranchez trente six de cent vingt; il reste quatre-vingt quatre, ce qui est le nombre cherché.

Pour multiplier un nombre quelconque par huit, faites le précéder d'un zéro et retranchez son double de son produit par dix.

Par exemple, si l'on vous dit: multipliez quatorze par huit, retranchez vingt-huit de cent quarante; il reste cent douze, ce qui est le nombre cherché: ainsi; 112.

(*) Le mot arabe que je traduis par « produit par dix » est 'ikd.

Pour multiplier un nombre quelconque par neuf, faites-le précéder d'un zéro, et retranchez-le de nouveau du résultat; alors vous aurez le nombre cherché.

Par exemple, si l'on vous dit : multipliez vingt quatre par neuf, faites précéder le multiplicande d'un zéro; vous aurez deux cent quarante; retranchez-en vingt quatre, il reste deux cent seize, ce qui est le nombre cherché; ainsi : 216.

Pour multiplier un nombre quelconque par quatre-vingt dix-neuf, faites-le précéder de deux zéros et retranchez-le de nouveau du résultat.

Par exemple, si l'on vous dit : multipliez deux cent cinquante quatre par quatre-vingt dix-neuf, faites précéder le multiplicande de deux zéros, ainsi : 25400. Ensuite retranchez le multiplicande du résultat *); il reste vingt cinq mille cent quarante six, ainsi : 25146.

Pour multiplier un nombre quelconque par dix, faites-le précéder simplement d'un zéro; pour le multiplier par cent, de deux zéros.

*Pour multiplier un nombre quelconque par onze, additionnez-le à lui-même avec changement d'un rang **).*

Par exemple, si l'on vous dit : multipliez trois cent cinquante deux par onze, posez le multiplicande sur une ligne, et posez-le encore une fois au-dessous, de telle sorte que les unités de la ligne inférieure se trouvent au-dessous des dizaines de la ligne supérieure, ainsi :

$$\begin{array}{r} 352 \\ 352 \end{array}$$

Ensuite additionnez les deux lignes, il résultera le nombre cherché, à savoir trois mille huit cent soixante deux, ainsi : 3872.

Pour multiplier un nombre quelconque par douze, placez sous ce nombre le même nombre de manière que les rangs se correspondent; ensuite placez-le encore une troisième fois sous les deux autres, mais de manière que les unités du troisième correspondent aux dizaines des deux autres. Additionnez tout cela, le résultat sera le nombre cherché.

Par exemple, si l'on vous dit : multipliez trente quatre par douze, posez cela ainsi :

(*) Le mot arabe *djoulah*, qui est employé ici, signifie proprement « agrégat, somme ».

(**) C'est à dire en additionnant deux à deux non pas les chiffres du même ordre, mais ceux dont les ordres diffèrent d'une unité.

3 4
3 4
3 4

Ensuite additionnez; il résultera le nombre cherché, à savoir quatre cent huit; ainsi : 408.

Et si l'on vous dit : multipliez trois cent vingt trois par douze, posez cela ainsi :

3 2 3
3 2 3
3 2 3

Ensuite additionnez cela; il résultera le nombre cherché, à savoir trois mille huit cent soixante seize; ainsi : 3876.

Pour multiplier un nombre quelconque par quinze, ajoutez-le à sa moitié et faites-le précéder d'un zéro, s'il est pair; et s'il est impair, retranchez-en l'unité, ajoutez-le à la moitié du reste, et faites-le précéder d'un cinq.

Par exemple, si l'on vous dit: multipliez vingt quatre par quinze, ajoutez douze au vingt quatre, il résulte trente six; faites-le précéder d'un zéro; ce sera trois cent soixante; ainsi: 360.

Et si l'on vous dit: multipliez vingt neuf par quinze, ajoutez quatorze au multiplicande, et faites précéder la somme d'un cinq; vous aurez le nombre cherché, à savoir quatre cent trente cinq; ainsi: 435.

Pour multiplier un nombre quelconque par un nombre formé de deux rangs égaux, multipliez le nombre par l'un de ces derniers, et ajoutez le résultat à lui-même avec changement d'un rang.

Par exemple, si l'on vous dit: multipliez trente et un par vingt deux, multipliez le trente et un par deux, et ajoutez le résultat, qui est soixante deux, à lui-même avec changement d'un rang; il résultera le nombre cherché à savoir six cent quatre-vingt deux; ainsi: 682.

Et si l'on vous dit: multipliez cinq cent trente quatre par quatre-vingt huit, multipliez le multiplicande par l'un des huit, et ajoutez le résultat à lui-même avec changement d'un rang; il résultera le nombre cherché, à savoir quarante six mille neuf cent quatre-vingt douze; ainsi 46992.

CHAPITRE QUATRIÈME

DE LA DIVISION.

La division est la décomposition du dividende en des parties égales dont le nombre est égal au nombre qui est le diviseur. L'unité est au résultat (de la division) comme le diviseur est au dividende.

La pratique de cette opération (*) consiste à placer le dividende sur une ligne, et à placer le diviseur sous le dernier rang du dividende, s'il est égal à ce rang ou plus petit. Ensuite vous chercherez un nombre qui, multiplié par le diviseur, anéantit ce qui se trouve au-dessus de celui-ci, ou laisse un reste plus petit que le diviseur. Après cela vous faites reculer le diviseur et vous continuez de la même manière jusqu'à la fin de l'opération.

Par exemple, si l'on vous dit: divisez huit cent cinquante six par quatre, posez cela ainsi:

$$\begin{array}{r} 856 \\ 4 \end{array}$$

Ensuite cherchez un nombre que vous placerez sous le quatre, que vous multipliez par celui-ci, et qui anéantira alors le huit; vous trouverez que ce nombre est deux. Après cela faites reculer le quatre de manière qu'il soit placé sous le cinq; cherchez un nombre à multiplier par quatre, vous trouverez que c'est l'unité, et vous aurez pour reste une unité que vous placerez au-dessus du cinq. Puis faites reculer le quatre de manière qu'il soit placé sous le seize et cherchez un nombre à multiplier par quatre, vous trouverez que c'est quatre. Alors le résultat sera deux cent quatorze (**); ainsi: 214.

Et si l'on vous dit: divisez neuf cent vingt quatre par six, posez cela ainsi:

$$\begin{array}{r} 924 \\ 6 \end{array}$$

(*) Textuellement: « La pratique de ce chapitre ».

(**) -

$$\begin{array}{r} 1 \\ 886 \\ 444 \\ \hline 214 \end{array}$$

Ensuite cherchez un nombre que vous placerez sous le six, et que vous multipliez par celui-ci. Vous trouverez que ce nombre est un, et il reste trois que vous placerez au-dessus du neuf. Faites reculer le six de manière qu'il soit placé sous le deux, et faites comme précédemment. Il résultera cent cinquante quatre (*), ainsi: 154.

§.

Si le dernier rang (du dividende) est plus petit que (**) le diviseur, reculez celui-ci vers la droite.

Par exemple, si l'on vous dit: divisez deux cent quatre-vingt huit par six, posez cela ainsi:

$$\begin{array}{r} 288 \\ 6 \end{array}$$

et faites en sorte que le six se trouve au-dessous du vingt huit. Ensuite cherchez un nombre à multiplier par six. Vous trouverez que c'est quatre et vous aurez pour reste quatre; posez-le au-dessus du huit. Après cela faites reculer le six de manière qu'il soit placé sous le premier huit, et cherchez un nombre à multiplier par le six. Vous trouverez que c'est huit. Le résultat sera donc quarante huit (***), ainsi: 48.

§.

S'il vous reste (à la fin de l'opération) un nombre plus petit que le diviseur, faites-en une fraction ayant pour dénominateur le diviseur (****).

$$\begin{array}{r} (*) \qquad \qquad \qquad 32 \\ \qquad \qquad \qquad 924 \\ \qquad \qquad \qquad 666 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 154 \end{array}$$

(**) Textuellement: ne supporte pas.

$$\begin{array}{r} (***) \qquad \qquad \qquad 4 \\ \qquad \qquad \qquad 288 \\ \qquad \qquad \qquad 66 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 48 \end{array}$$

(****) Textuellement: faites en une portion par rapport à lui.

Par exemple, si l'on vous dit : divisez cinq cent soixante dix-neuf par huit, posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 579 \\ 8 \end{array}$$

Ensuite cherchez un nombre que vous placerez au-dessous du huit, et que vous multipliez par celui-ci; vous trouverez que c'est sept. Vous aurez pour reste un, que vous poserez au-dessus du sept. Après cela faites reculer le huit de manière qu'il soit placé sous le neuf, et cherchez un nombre que vous multipliez par le huit; vous trouverez que c'est deux, et vous aurez pour reste trois. Écrivez le trois au-dessus du huit en tirant entre les deux une ligne. Le résultat sera soixante douze et trois huitièmes (*), ainsi: $\frac{3}{8}$ 72.

§.

Si le diviseur est formé de plus d'un rang, décomposez-le, si vous voulez, dans les facteurs (**) dont il est composé, et divisez (le dividende) par ceux-ci, l'un après l'autre.

Par exemple, si l'on vous dit: divisez sept mille trois cent soixante cinq par quinze, posez cela ainsi: 7365. Ensuite décomposez le diviseur en cinq et trois, et divisez par trois, il résultera deux mille quatre cent cinquante cinq, ainsi: 2455. Puis divisez ce résultat par cinq; il résultera quatre cent quatre-vingt onze, ce qui est le nombre cherché, ainsi 491.

§.

Pour diviser un nombre quelconque par dix, placez au-dessus du dix le

$$\begin{array}{r} \text{---} \\ (*) \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 579 \\ 88 \\ \text{---} \\ \frac{3}{8} 72 \end{array}$$

(**) Le mot arabe que je traduis par « facteur » est *imdm* = « praeses, praepositus, dux, canon ». Il s'emploie seulement des facteurs d'un dénominateur, et signifie souvent « dénominateur » simplement.

nombre qui se trouve au rang des unités, et ce qui vient après ce nombre (*) sera le résultat.

Par exemple, si l'on vous dit: divisez sept cent quarante trois par dix, posez cela ainsi: 743. Ensuite placez le trois au-dessus du dix; ce sera trois dixièmes, et le résultat sera soixante quatorze et trois dixièmes, ainsi: $\frac{3}{10}$ 74.

Pour diviser par dix un nombre dans le premier rang duquel il se trouve un zéro, supprimez ce zéro, il restera le nombre cherché.

Par exemple, si l'on vous dit: divisez cinq mille trois cent soixante par dix, supprimez-en le zéro; et dites: ce qui résulte pour chacun des dix (**), est cinq cent trente six; ainsi: 536.

CHAPITRE CINQUIÈME.

DE LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES DANS LES FACTEURS DONT ILS SONT COMPOSÉS.

Il faut que celui qui étudie cette science ait une sûreté parfaite dans (la théorie de) ce chapitre, parce que toutes les opérations reposent sur lui, de sorte qu'il est pour elles comme l'axe qui les fait tourner, et comme le soleil qui les éclaire.

La pratique de cette opération consiste à réduire (***) le nombre, s'il est pair, par neuf. Si le nombre se réduit, il a un neuvième, un sixième et un tiers (****), comme trent six. S'il en reste trois ou six, il a un tiers et un sixième, comme quarante huit et soixante dix-huit. S'il ne se réduit pas, et s'il n'en reste ni trois, ni six, réduisez-le par huit. S'il se réduit, il a

(*) Plus la fraction qu'on vient de former.

(**) Cette tournure un peu inattendue s'explique par le verbe arabe, qui signifie « diviser par (dix) », et qui signifie en même temps « distribuer parmi (dix personnes) ».

(***) Le mot *taraha* (voir ci-dessus, page 235, note 2.°) est employé dans le chapitre actuel d'une manière particulière. Suivi de deux numératifs qu'il régit tous les deux à l'accusatif, il signifie: rejeter ou soustraire l'un des nombres de l'autre autant de fois qu'il est possible, en d'autres termes, former le résidu de l'un par rapport à l'autre comme module. Pour me conformer autant que possible à la tournure de la phrase arabe, je traduirai ce mot par « réduire (un nombre par un autre nombre) ». Employé au passif ou à la septième forme le verbe arabe signifie ici que le premier nombre, si l'on en rejette le plus grand multiple possible du second, est complètement épuisé, que le reste est nul. Je traduirai cela par « se réduire ».

(****) C'est à dire le nombre est divisible par neuf, six et trois.

un huitième et un quart, comme deux cent quatre-vingt seize. S'il en reste quatre, le nombre a un quart, comme quatre vingt douze. S'il ne se réduit pas, et qu'il n'en reste pas quatre, réduisez-le par sept. S'il se réduit, il a un septième, comme quatre-vingt dix-huit. S'il ne se réduit pas, il n'a que la moitié, comme quarante six ; cherchez alors si sa moitié a d'autres (*) parties, dont la première est onze.

Si le nombre est impair, on le réduit par neuf, S'il se réduit par neuf, il a un neuvième et un tiers, comme soixante trois. S'il en reste trois ou six, il a seulement un tiers, comme quatre-vingt treize et quatre-vingt sept. S'il ne se réduit pas, et qu'il n'en reste ni trois, ni six, réduisez-le par sept. S'il se réduit, il a un septième, comme quarante neuf, et comme cinq cent trente neuf pareillement. S'il ne se réduit pas, cherchez parmi les parties, comme pour le nombre cent vingt et un (**), et pour le nombre deux cent trente neuf (***) pareillement.

Si le nombre commence par cinq, il a un cinquième; et s'il commence par le zéro, il a un dixième, un cinquième et une moitié.

DE LA MANIÈRE D'EXÉCUTER PRATIQUEMENT LA RÉDUCTION.

Quant à la réduction par neuf, vous additionnez les parties (****) du nombre les unes aux autres, comme si c'étaient des unités, et vous réduisez (la somme) par neuf (*****).

Par exemple, si l'on vous dit : réduisez deux cent trente quatre, posez cela ainsi : 234. Ensuite ajoutez le quatre au trois et au deux ; vous aurez

(*) Le texte arabe ne porte pas « d'autres » mais seulement « des parties ». L'usage arabe justifie cette omission. En effet, pour désigner les fractions formées au moyen des nombres jusqu'à dix, les Arabes disent, comme nous, une moitié, un tiers, un dixième. Mais à partir de là, si le dénominateur n'est pas décomposable dans des facteurs qui se trouvent par les nombres jusqu'à dix, ils emploient le mot *partie*. Ainsi, pour exprimer deux quinzièmes, il disent deux tiers d'un cinquième. Mais pour exprimer cinq dix-septièmes, ils diront : cinq parties de dix sept parties de l'unité.

(**) Le nombre est divisible par onze.

(***) Le nombre est premier. Mais peut-être il se trouve ici par une erreur de copie (*thaldthodna* au lieu de *thamdnoûna*) à la place de deux cent quatre-vingt neuf, qui est divisible par dix sept.

(****) C'est à dire les chiffres.

(*****). Car $a+10b+100c+1000d+... = a+b+c+d+... + 0b+11c+111d+...$

neuf, ce qui se réduit. Le nombre aura donc un neuvième, un sixième et un tiers.

Et si l' on vous dit : réduisez trois mille sept cent quatre-vingt six , posez cela ainsi: 3786. Opérez comme précédemment ; il vous restera six. Donc ce nombre n'a pas de neuvième, mais il a un tiers et un sixième.

Et si l'on vous dit : réduisez trois cent dix-huit, posez cela ainsi: 318. Opérez comme précédemment; il vous restera trois. Vous direz donc que ce nombre a un tiers et un sixième.

Et si l' on vous dit : réduisez mille huit cent vingt sept , posez cela ainsi : 1827. Faites de nouveau la somme du nombre , comme si c' étaient des unités. Il en résultera dix-huit, ce qui se réduit. Vous direz donc que ce nombre a un neuvième et un tiers , mais qu' il n'a pas de sixième , car ce dernier se trouve seulement chez les nombres pairs.

Et si l' on vous dit : réduisez trois mille neuf cent vingt et un, posez cela ainsi: 3921. Opérez comme précédemment, vous aurez pour reste six, et vous direz que ce nombre a seulement un tiers.

Et si l' on vous dit : réduisez quatre cent cinquante trois , posez cela ainsi : 453. Opérez comme précédemment, vous aurez pour reste trois; donc vous direz que ce nombre a seulement un tiers.

Et si l' on vous dit : réduisez mille huit cent vingt trois , posez cela ainsi : 1823. Ensuite faites comme ci-dessus; il restera cinq. Vous direz donc que ce nombre n'a ni de tiers, ni de neuvième.

Quant à la réduction par huit, négligez les centaines, si elles sont paires, parce qu'elles sont (en ce cas) réduisibles: multipliez par deux le nombre qui se trouve au rang des dizaines , ajoutez le résultat au nombre qui se trouve au rang des unités , et réduisez la somme. Si elle se réduit par huit, le nombre a un huitième et un quart, et s' il en reste quatre, il a un quart (*).

Par exemple, si l'on vous dit : réduisez quatre cent trente deux, posez cela ainsi : 432. Ensuite multipliez le nombre qui se trouve au rang des dizaines par deux, et ajoutez le résultat au nombre qui se trouve au rang des unités; il résulte huit, ce qui se réduit. Conséquemment le nombre proposé a un huitième et un quart.

(*) La justesse de cette règle suit de l'identité

$$a+10b+100(2c)+1000d+\dots = a+2b+8 \{b+25c+125d+\dots\}$$

Et si l'on vous dit : réduisez six cent douze, posez cela ainsi: 612. Ensuite multipliez les dizaines par deux, et ajoutez le résultat aux unités. La somme est quatre [donc le nombre a un quart].

Si les centaines sont impaires, leur reste est quatre; ajoutez quatre aux unités et à ce qui provient des dizaines (*).

Par exemple, si l'on vous dit : réduisez cinq cent douze, posez cela ainsi : 512. Ensuite ajoutez le quatre qui reste du cent au deux qui se trouve au rang des unités, et au deux qui provient des dizaines. Vous obtiendrez huit, ce qui se réduit. Conséquemment le nombre proposé a un huitième et un quart.

Quant aux mille et aux rangs suivants, il n'est pas nécessaire d'y avoir égard, parce qu'ils sont réduisibles par huit.

Quant à la réduction par sept, considérez le dernier rang du nombre proposé comme des dizaines et ajoutez-y le nombre qui se trouve au rang précédent en le considérant comme des unités; réduisez la somme par sept. Ensuite ajoutez le reste, en le considérant de nouveau comme des dizaines, au nombre du rang précédent, et continuez à réduire de cette manière (**).

Par exemple, si l'on vous dit: réduisez cinq mille deux cent trente six, posez cela ainsi : 5236. Ensuite posez pour le dernier rang cinquante, et ajoutez-y le rang précédent, ce sera cinquante deux; on en rejette quarante neuf; le reste est trois. Faites-en trente et ajoutez-y le rang précédent. Ce sera trente trois; on en rejette vingt huit; le reste est cinq. Faites-en des dizaines et ajoutez-y le rang précédent. Vous aurez cinquante six, ce qui se réduit. Donc le nombre proposé a un septième.

Si vous avez reconnu que le nombre a un neuvième, ou un huitième, ou un septième, ou un sixième, divisez d'abord par le dénominateur correspondant, et ensuite réduisez de nouveau le résultat en continuant de la même manière.

(*) En effet, on a

$$a+10b+100(2c+1)+1000d+\dots = a+2b+4+8\{b+25c+12+125d+\dots\}$$

(**) La justesse de cette règle suit de l'identité

$$a+10b+100c+1000d+\dots = a+10\{b+10\{c+10\{d+\dots\}\}\}.$$

CHAPITRE SIXIÈME.

DE LA DÉNOMINATION.

La signification de ce terme est: la division d'un petit nombre par un grand nombre.

La pratique de cette opération consiste à décomposer le nombre d'après lequel on dénomme (le dénominateur) dans les facteurs dont il est composé, à les placer sous une ligne, et à diviser ensuite le nombre qu'il s'agit de dénommer (le numérateur) par ces facteurs l'un après l'autre. Vous obtiendrez alors le résultat cherché (*).

(*) Les indications données dans les lignes précédentes sont insuffisantes pour faire connaître l'exécution pratique de l'opération dont il s'agit ici, et pour faire obtenir le résultat sous la forme qu'exige l'usage de l'arithmétique arabe.

Soit proposé la fraction $\frac{M}{N}$

où $M < N$, $N = a \cdot b \cdot c \cdot d$, $a > b > c > d$.

et soit (1) $\frac{M}{N} = \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{ab} + \frac{m_3}{abc} + \frac{m_4}{abcd}$,

où $m_1 < a$, $m_2 < b$, $m_3 < c$, $m_4 < d$;

on aura (2) $M = m_1 \cdot bcd + m_2 \cdot cd + m_3 \cdot d + m_4$.

Les arithméticiens arabes divisent d'abord M par d , et obtiennent pour reste m_4 et pour quotient $\frac{M - m_4}{d}$. Ils divisent ce quotient par c , et obtiennent pour reste m_3 et pour quotient

$$\frac{\frac{M - m_4}{d} - m_3}{c} = \frac{M - m_4 - m_3 \cdot d}{cd}$$

Enfin ils divisent ce quotient-ci par b , et obtiennent pour reste m_2 et pour quotient m_1 . Si ce procédé est juste, il faut que le dernier quotient

$$\frac{\frac{M - m_4 - m_3 \cdot d}{cd} - m_2}{b} = \frac{M - m_4 - m_3 \cdot d - m_2 \cdot cd}{bcd}$$

soit égal à m_1 . Mais c'est ce qui suit immédiatement de l'équation (2). Les arithméticiens arabes mettent le résultat, c'est à dire le second membre de l'équation (1), sous la forme suivante :

$$\frac{m_4}{d \cdot c \cdot b \cdot a} + \frac{m_3}{c \cdot b \cdot a} + \frac{m_2}{b \cdot a} + \frac{m_1}{a}$$

Par exemple, si l'on vous dit : dénommez dix-neuf d'après trente cinq, décomposez le dénominateur en sept et cinq , et placez au-dessus de ces nombres une ligne. Divisez ensuite le numérateur par cinq , il résulte trois et il reste quatre. Posez le reste au-dessus de cinq, et le résultat (le quotient) au-dessus de sept , parceque ces nombres sont plus petits que les autres. Vous aurez le résultat cherché, à savoir: trois septièmes et quatre cinquièmes d'un septième, ainsi : $\frac{4}{3} \frac{4}{7}$.

Et si l' on vous dit: dénommez soixante quinze d'après cent quarante quatre, décomposez le dénominateur en neuf, huit et deux, et divisez le numérateur d'abord par le deux; il résulte trente sept, et il reste un que vous poserez au-dessus du deux. Divisez le quotient par huit; il résulte quatre; posez le quatre au-dessus de neuf. Le résultat sera quatre neuvièmes et cinq huitièmes d'un neuvième et la moitié d' un huitième d'un neuvième. Posez cela ainsi: $\frac{1}{2} \frac{5}{8} \frac{4}{9}$.

Et si l'on vous dit: dénommez cent quatre-vingt seize d'après trois cent quatre-vingt cinq, décomposez le dénominateur dans ses facteurs; ce sont onze, sept et cinq. Divisez par ceux-ci le numérateur; vous obtiendrez le résultat cherché, c'est cinq parties de onze et quatre septièmes d'une partie de onze et un cinquième d'un septième d'une partie de onze, ainsi: $\frac{1}{5} \frac{4}{7} \frac{5}{11}$.

CHAPITRE SEPTIÈME

DU PARTAGE DES PORTIONS.

La pratique de cette opération consiste à additionner toutes les parties, à décomposer ce qui en provient dans les facteurs dont c'est composé, et à placer ceux-ci en réserve dans la troisième colonne. Ensuite posez la quantité qu'il s'agit de diviser dans la seconde colonne qui vient après la colonne de la somme des portions. Après cela multipliez la portion de chacun par la quantité qu'il s'agit de diviser, et divisez le résultat par les facteurs placés en réserve. Vous obtiendrez le résultat cherché.

Par exemple, si l'on vous dit: de trois hommes l'un a vingt deux dinars (pièces d'or), l'autre dix-neuf et le troisième sept; ils font du commerce, et

ils gagnent douze dinârs. Alors additionnez ces portions; vous aurez quarante huit , ce qui est composé de huit et de six. Posez ces nombres après la colonne de la propriété (*), c'est à dire du gain. Ensuite multipliez la portion de chacun par le gain, à savoir par douze, et divisez le résultat d'abord par six, et ce qui provient de cette division par huit. Le premier recevra cinq et quatre huitièmes, le second quatre et six huitièmes et le troisième un et six huitièmes. Après cela additionnez les huitièmes; il en provient deux entiers. Posez-les sous la colonne du douze, ainsi:

6	8	12	48	
0	4	5	22	Zaïd
0	6	4	19	Omar
0	6	1	7	Boqr

Si vous remarquez que les parties ont toutes un facteur commun, supprimez-le et réduisez chaque portion à la partie correspondante au facteur commun. Ensuite multipliez par la propriété.

Par exemple , si l'on vous dit : de trois hommes l'un a soixante trois (dinârs), l'autre trente cinq et le troisième vingt et un; ils font du commerce, et ils gagnent cinquante un dinârs. La portion de chacun a un septième; donc réduisez chaque portion à son septième. Alors le premier aura neuf, le second cinq et le troisième trois; la somme est dix-sept, et tel est le facteur (**). Multipliez chacune des parties réduites par la propriété, et divisez le résultat par le facteur, à savoir par dix-sept. Il viendra pour le premier vingt sept dinârs, pour le second quinze, et pour le troisième neuf; ainsi :

(*) Le mot arabe est *mdl*.

(**) La somme étant un nombre premier il n'y a dans ce cas qu'un seul facteur à placer dans la dernière colonne.

17	51	17	119	
00	27	09	63	Zaïd
00	15	05	35	Omar
00	09	03	21	Beqr

Si vous voulez, divisez le gain, à savoir cinquante un, par la somme des portions, à savoir dix-sept; vous aurez trois, ce qui est la partie du lot. Multipliez pour chacun par ce nombre.

Si les parties des portions renferment toutes ou en partie des fractions, cherchez le plus petit nombre qui contienne (comme facteurs) les dénominateurs des fractions, multipliez le numérateur total (*) de chaque portion par ce nombre et divisez le résultat par le dénominateur; alors vous aurez ce que vaut cette portion.

Par exemple, si l'on dit: de trois hommes l'un a deux dinârs et un tiers, l'autre trois et un demi, et le troisième sept, ils font du commerce, et gagnent dix dinârs; alors le plus petit nombre qui ait un tiers et une moitié est six. Conséquemment multipliez par lui, c'est à dire par six, le numérateur total du premier à savoir sept, et divisez le résultat par son dénominateur; alors le premier aura quatorze. Pour le second il résulte vingt un, et pour le troisième quarante deux; parce que ce dernier n'a pas de dénominateur. Après cela vous trouvez que toutes ces portions ont sept pour facteur commun. Donc vous réduirez chaque portion à son septième. Leur somme sera onze, et tel est le dénominateur par lequel vous divisez. Ensuite multipliez la portion de chacun par dix et divisez le résultat par le dénominateur (**). Il résultera pour le premier un dinâr et neuf parties de onze, pour le second deux dinârs et huit parties de onze, et pour le troisième cinq et cinq parties de onze, ainsi:

(*) Le mot arabe que je traduis par « numérateur total », est *bast*, de *baçata* « expandit », et signifie le numérateur qu'on obtient en convertissant en fraction un nombre mixte.

(**) Par onze.

11	10	11	77	6	
09	01	02	14	$\frac{1}{3} 2$	Zaïd
08	02	03	21	$\frac{1}{2} 3$	Beqr
05	05	06	42	07	Omar

CHAPITRE HUITIÈME.

DE LA PREUVE.

Pour l'addition, l'opération (de la preuve) consiste à réduire (*) chacun des deux nombres additionnés, à en additionner les deux résidus, et à réduire de même cette somme. Ce qui reste alors est la réponse. Ensuite vous réduirez le résultat (**), (le résidu de celui-ci) sera identique à la réponse. Par exemple, si l'on vous dit: ajoutez trente quatre à cinquante trois, posez cela ainsi:

$$\begin{array}{r} 53 \\ 34 \\ \hline \end{array}$$

Ensuite additionnez conformément aux règles précédemment données. Vous obtiendrez la somme, à savoir quatre-vingt sept, ainsi: 87. Si vous réduisez par sept le nombre ajouté (***); le reste est six; le reste du nombre auquel vous avez ajouté (****) est quatre; la somme des deux restes est six, et son reste trois, ce qui est la réponse. Et tel est aussi le reste du résultat (*****).

Pour la soustraction l'opération consiste à réduire le nombre dont on retranche par sept ou par un autre nombre, et à placer le reste en réserve; à réduire ensuite le nombre retranché par la même réduction et à soustraire le reste de celui qu'on a placé en réserve. Ce qui reste alors est la réponse. Et le résidu du reste de la soustraction (proposée) sera le même.

(*) Voir la première note du chapitre cinquième.

(**) C'est à dire le résultat de l'addition proposée dont il s'agit de faire la preuve.

(***) 34.

(****) 53.

(*****) 87.

Par exemple, si l'on vous dit : retranchez vingt trois de cinquante quatre, posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 54 \\ 23 \end{array}$$

Ensuite opérez d'après les règles précédemment données ; vous aurez pour reste trente un, ainsi : 31. Après cela réduisez le nombre duquel vous avez retranché par sept ; il en reste cinq ; placez-le en réserve. Puis réduisez le nombre retranché ; il en reste deux. Retranchez celui-ci du reste placé en réserve ; vous aurez pour reste trois, ce qui est la réponse ; et tel est aussi le résidu du reste (de la soustraction).

Explication additionnelle. Si le résidu du nombre dont on retranche est plus petit que celui du nombre retranché, ajoutez au résidu du nombre dont on retranche un nombre égal à celui par lequel vous réduisez (*), et soustrayez de la somme de le résidu du nombre retranché.

Par exemple , si l'on vous dit : retranchez deux cent vingt un de cinq cent trente trois, posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 533 \\ 221 \end{array}$$

Ensuite faites comme précédemment. Il restera trois cent douze, ainsi : 312. Après cela réduisez le nombre dont on retranche, vous aurez pour reste un, ce que vous placerez en réserve. Puis réduisez le nombre retranché ; il en reste quatre, ce qu'on ne peut pas soustraire d'un. Donc ajoutez à celui-ci sept ; il résulte huit ; vous en retrancherez le quatre, et il reste quatre, ce qui est la réponse ; et tel est aussi le résidu du reste de la soustraction.

Vous opérerez de la même manière , s'il ne reste rien du nombre dont on retranche (**).

Par exemple, si l'on vous dit : retranchez cent vingt trois de neuf cent dix-sept, posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 917 \\ 123 \end{array}$$

(*) C'est à dire ajoutez 7 , si vous faites la preuve par 7 ; ajoutez 9 , si vous faites la preuve par 9, etc.

(**) C'est à dire si ce nombre est un multiple exact du nombre par rapport auquel on fait la preuve.

Ensuite faites comme précédemment. Le reste sera sept cent quatre-vingt quatorze, ainsi : 794; et la réponse du problème sera trois. Car le résidu du nombre retranché est quatre, ce que vous soustrairez de sept, parce qu'il ne reste rien du nombre dont on retranche.

Pour la *multiplication* vous réduisez chacun des deux nombres multipliés l'un par l'autre, vous multipliez le reste de l'un par le reste de l'autre, et vous réduisez le produit. Ce qui reste est la réponse. Ensuite vous réduisez le produit de la multiplication. (Le reste) sera identique à la réponse.

Par exemple, si l'on vous dit: multipliez dix-huit par douze, posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 12 \\ 18 \\ \hline \end{array}$$

et opérez d'après les règles précédemment données. Vous obtiendrez deux cent seize, ainsi : 216. Ensuite réduisez le multiplicateur par sept, il en reste cinq; et du multiplicande il reste quatre. Formez le rectangle de ces deux nombres (*), il résultera vingt, ce dont le reste est six; et tel est aussi le reste du produit.

Pour la *division* l'opération consiste à réduire le dividende; ce qui en reste est la réponse. Ensuite vous réduirez le résultat (de la division) et le diviseur, vous multipliez le reste de l'un par celui de l'autre, et vous réduirez le produit. Le reste sera égal à la réponse.

Par exemple, si l'on vous dit : divisez deux cent quatre-vingt huit par dix-huit, posez cela ainsi :

$$\begin{array}{r} 288 \\ 18 \\ \hline \end{array}$$

Ensuite opérez d'après les règles précédemment données; vous obtiendrez seize. Après cela réduisez le dividende; il en reste un; placez-le en réserve, c'est la réponse. Puis réduisez le résultat (le quotient), il en reste deux; et du diviseur il reste quatre; le rectangle formé de ces deux nombres est huit et de cela le reste est un, ce qui est égal à la réponse.

Pour la *dénomination* l'opération consiste à considérer le nombre qu'il s'agit de dénommer comme un dividende, et le nombre d'après lequel on

(*) C'est à dire multipliez cinq par quatre.

dénomme comme un diviseur. Vous réduisez le nombre d'après lequel on dénomme et le résultat (de la dénomination), et vous multipliez le reste de l'un par celui de l'autre. Le reste qu'on obtient après avoir réduit le produit, est la réponse. Ensuite réduisez le nombre dénommé, et convertissez le reste dans l'espèce de la réponse en le multipliant par les dénominateurs du résultat (de la dénomination). Après cela vous réduirez ce produit; (le reste) sera identique à la réponse.

Par exemple, si l'on vous dit : dénommez quatre d'après douze, le résultat (de la dénomination) sera un tiers, et le résidu de celui-ci un. En effet, vous décomposez douze dans les facteurs dont il est composé, lesquels sont trois et quatre; en divisant d'abord par quatre vous obtenez un, que vous placerez au-dessus du second facteur, et vous aurez un tiers. Le résidu du nombre d'après lequel vous dénommez (*) est cinq. Donc multipliez le résidu de l'un par celui de l'autre, la réponse du problème sera cinq. Mais ces cinq sont des tiers; vous devez donc nécessairement convertir le reste du nombre dénommé, c'est à dire le quatre même qu'il s'agissait de dénommer, en tiers. Conséquemment multipliez le quatre par trois qui est le dénominateur du tiers; il résultera douze, dont le reste est cinq, ce qui est égal à la réponse.

Si vous aviez changé l'ordre des facteurs, et mis le quatre à la première place, vous auriez obtenu un quart et un tiers d'un quart. En ce cas le résidu (**) est quatre (***), et le résidu du nombre d'après lequel on dénomme cinq. Multipliez le résidu de l'un par celui de l'autre; il résulte vingt, dont le reste est six, ce qui est la réponse. Mais ces (six) sont des quarts de tiers ou des tiers de quarts (****). Il faut donc nécessairement convertir le nombre dénommé suivant ce rapport, c'est à dire il faut multiplier le quatre par les facteurs (du dénominateur); vous obtiendrez quarante huit, donc le reste est six, ce qui est égal à la réponse.

(*) Le résidu de douze.

(**) Du résultat de la dénomination.

(***) C'est le numérateur obtenu en convertissant un et un tiers en tiers;

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{4}{3}}{4}.$$

(****) Le texte qui est évidemment corrompu en cet endroit, porte: « ce sont quatre tiers et trois « quarts ».

Si vous aviez pris pour facteurs (du dénominateur) six et deux, il serait résulté deux sixièmes. En ce cas le résidu (du résultat de la dénomination) est deux, et le résidu du nombre d'après lequel on dénomme cinq. Le résidu du rectangle formé de ces deux nombres est trois, ce qui est la réponse. Mais ces trois sont des sixièmes; donc il faut nécessairement convertir le nombre dénommé en sixièmes; il résultera vingt quatre, dont le reste est trois, ce qui est égal à la réponse. C'est cette manière d'opérer qu'il faut prendre pour règle.

Et si l'on vous dit : dénommez quarante cinq d'après quatre-vingt seize, vous décomposerez le nombre d'après lequel il s'agit de dénommer en huit, six et deux; vous diviserez par ceux-ci, et il résultera trois huitièmes et quatre sixièmes d'un huitième et la moitié d'un sixième d'un huitième, ainsi : $\frac{1}{2} \frac{4}{6} \frac{3}{8}$. Le reste du numérateur total (*) de ce résultat est trois. Multipliez-le par le reste du nombre d'après lequel on dénomme, à savoir par cinq. Le reste du rectangle formé de ces deux nombres est un, ce qui est la réponse. Mais ce sont des moitiés de sixième de huitièmes; donc il faut nécessairement convertir de la même manière le reste du nombre dénommé qui est trois, en le multipliant par tous les facteurs (du dénominateur). Le reste (du produit) est un, ce qui est (égal à) la réponse.

DEUXIÈME PARTIE.

DES FRACTIONS.

INTRODUCTION.

DES NOMS DES FRACTIONS ET DE CE QUI S'Y RAPPORTE.

Les fractions ont dix noms, depuis la moitié jusqu'à la partie (**). La figure de la moitié est une unité au-dessus du deux, ainsi : $\frac{1}{2}$; de même

(*) C'est à dire de quarante cinq.

(**) C'est à dire: il y a dix mots qu'on emploie pour énoncer les fractions, à savoir une moitié, un tiers, un quart, un cinquième, jusqu'à un dixième, et enfin le mot partie qui sert à énoncer toutes les fractions dont les dénominateurs ne sont pas décomposables dans les nombres depuis deux jusqu'à dix.

celle du tiers une unité au-dessus d'un trois : ainsi : $\frac{1}{3}$; et pareillement celle de la partie un de onze ainsi : $\frac{1}{11}$.

Il y a cinq espèces de fractions : les fractions simples, les fractions divisées en parties, les fractions relatives, les fractions hétérogènes et les fractions soustractives.

Les fractions simples sont celles dont il vient d'être question. Le numérateur total d'une (fraction de cette espèce) est (le nombre) qui se trouve (écrit) en haut, que ce soit une unité, comme (dans) un neuvième, ou (un nombre) plus grand, comme (dans) huit neuvièmes. Il en est de même si les facteurs (du dénominateur) sont en plus grand nombre, comme (dans) trois quarts d'un neuvième.

(On trouve) le numérateur total de la fraction divisée en parties en multipliant les uns par les autres (les nombres écrits) au-dessus de la ligne. Les fractions divisées en parties sont celles dans lesquelles le rapport est exprimé jusqu'au dernier des facteurs du dénominateur sans faire usage de la particule de la liaison (*).

Par exemple, si l'on vous dit : convertissez trois quarts de quatre cinquièmes de sept huitièmes, posez cela ainsi : $\frac{7}{8} | \frac{4}{5} | \frac{3}{4}$. Ensuite multipliez le trois par le quatre, et le résultat par le sept. Il résulte quatre-vingt quatre , ce qui est le numérateur total du problème, ainsi : 84.

Quant au numérateur total de la fraction relative , l'opération pour la (trouver) consiste à multiplier ce qui se trouve au-dessus du premier facteur (du dénominateur) par ce qui vient après le facteur correspondant, à ajouter au résultat ce qui se trouve au-dessus de ce (dernier facteur) , et à multiplier pareillement par le troisième facteur et les autres.

Par exemple, si l'on vous dit : convertissez quatre cinquièmes et trois septièmes d'un cinquième et cinq huitièmes d'un septième d'un cinquième , posez cela ainsi : $\frac{5}{3} | \frac{3}{7} | \frac{4}{5}$. Ensuite multipliez le quatre par le sept ; il résulte vingt huit. Ajoutez-y le trois , ce sera trente et un , et multipliez cela par

(*) C'est à dire la particule « et ». L'auteur veut caractériser une fraction telle que « un tiers d'un quart », par opposition à une fraction telle que « un quart et un tiers d'un quart ».

la huit. Vous aurez deux cent quarante huit. Ajoutez-y le cinq, vous aurez pour somme deux cent cinquante trois, ce qui est le numérateur total du problème, ainsi: 253.

L'opération (pour trouver) le numérateur total de la *fraction hétérogène* consiste à multiplier le numérateur total de chaque rangée par les facteurs (du dénominateur) de l'autre et à additionner les résultats.

Par exemple, si l'on vous dit : convertissez sept neuvièmes et deux tiers et quatre cinquièmes d'un tiers, posez cela en deux rangées ainsi; $\frac{7}{9} \frac{2}{3} \frac{4}{5}$.

Ensuite multipliez le sept par le trois, et le résultat par le cinq; vous aurez cent cinq. Réservez cela. Après cela multipliez le numérateur total de l'autre rangée, qui est quatorze, par le neuf; vous aurez cent vingt six. Ajoutez cela à (la quantité) réservée. Vous obtiendrez deux cent trente un, ce qui est le (nombre) cherché, ainsi 231.

Quant au numérateur total de la *fraction soustractive*, si elle est séparée, multipliez le numérateur total de chacun des deux (termes dont elle est composée), par les facteurs (du dénominateur) de l'autre, et retranchez le plus petit (des deux produits) du plus grand.

Par exemple, si l'on vous dit : convertissez huit neuvièmes et un quart d'un neuvième moins deux cinquièmes et trois quarts d'un cinquième, posez cela ainsi : $\frac{8}{9}$ moins $\frac{2}{5}$. Ensuite multipliez le numérateur total de (la fraction) dont on retranche, lequel est trente trois, par les facteurs (du dénominateur) de la (fraction) retranchée. Vous aurez six cent soixante. Réservez cela. Ensuite multipliez le numérateur total de la (fraction) retranchée, lequel est onze, par les facteurs (du dénominateur) de (la la fraction) dont on retranche. Vous aurez trois cent quatre-vingt seize. Soustrayez cela de (la quantité) réservée. Vous aurez pour reste deux cent soixante quatre, ce qui est le numérateur total du problème, ainsi: 264.

Et si (la fraction soustractive) est *continue* (*), multipliez le numé-

(*) L'auteur entend par cette expression que le second des deux termes de la différence est considéré comme dépendant du premier; c'est à dire en écrivant $\frac{a}{b}$ moins $\frac{d}{c}$, il entend dire, dans ce cas, $\frac{a}{b}$ moins $\frac{c}{d}$ de $\frac{a}{b}$; de sorte que la valeur de cette différence sera $\frac{a}{b} \cdot \frac{d-c}{d} = \frac{ad-ac}{bd}$.

rateur total de (la fraction) dont on retranche par les facteurs (du dénominateur) de la (fraction) retranchée, et réservez le résultat. Ensuite multipliez le numérateur total de la (fraction) retranchée par le numérateur total de (la fraction) dont on retranche, et soustrayez le résultat de la (quantité) réservée. Vous aurez pour reste le numérateur total.

Par exemple, si l'on vous dit: convertissez cinq septièmes et un tiers d'un septième moins un huitième et quatre cinquièmes d'un huitième, posez cela ainsi: $\frac{4}{5} \frac{1}{8}$ moins $\frac{1}{3} \frac{5}{7}$. Ensuite multipliez le numérateur total de (la fraction) dont on retranche, lequel est seize, par les facteurs (du dénominateur) de la (fraction) retranchée. Vous aurez six cent quarante. Réservez cela. Ensuite multipliez le numérateur total de la (fraction) retranchée, lequel est neuf, par le numérateur total de (la fraction) dont on retranche, lequel est seize. Il résultera cent quarante quatre. Soustrayez cela de la (quantité) réservée. Vous aurez pour reste le numérateur total, à savoir quatre cent quatre-vingt seize, ainsi : 496.

§.

Si le nombre entier se trouve (combiné) avec une fraction, et qu'il la précède (*), on le multiplie par les facteurs (du dénominateur), et on ajoute (le produit) au numérateur total (de la fraction).

Par exemple, si l'on vous dit : convertissez quatre et trois cinquièmes et un tiers d'un cinquième, posez cela ainsi : $\frac{4}{3} \frac{3}{5}$ 4. Ensuite multipliez le cinq par le quatre, ajoutez au résultat le trois, et multipliez la somme par le sept. Vous obtiendrez cent soixante un, ce qui est le numérateur total du problème, ainsi : 161.

Si le nombre entier se trouve au milieu (entre deux fractions) étant rapporté à la première des deux fractions, l'opération est pareille à ce qui a lieu pour les fractions hétérogènes. C'est à dire que vous multipliez le numérateur total de la dernière fraction, et que vous réservez le résultat. Ensuite vous multipliez le numérateur total de la dernière fraction, par les facteurs (du dénominateur) de la première fraction, et vous ajoutez le résultat à la (quantité) réservée.

(*) Il faut se rappeler que l'écriture arabe procède de droite à gauche.

Par exemple, si l'on vous dit: convertissez quatre huitièmes et un tiers d'un huitième de quatre, et sept huitièmes; posez cela ainsi: $\frac{7}{8} 4 \frac{1}{4}$. L'une des deux parties sera les sept huitièmes, et l'autre partie tout ce qui précède. Ensuite multipliez le numérateur total de la première fraction, lequel est treize, par le quatre. Il résulte cinquante deux. Multipliez cela par le huit. il résulte quatre cent seize. Réservez cela. Ensuite multipliez le sept par les facteurs (du dénominateur) de la première fraction; vous obtiendrez cent soixante huit. Ajoutez cela à la (quantité) réservée. Il résultera cinq cent quatre-vingt quatre, ce qui est le numérateur total du problème, ainsi: 584.

Si le nombre entier est rapporté à la seconde fraction, l'opération est pareille à celle qui a lieu pour les fractions divisées en parties, c'est à dire que vous multipliez le numérateur total de l'une des deux parties par le numérateur total de l'autre.

Par exemple, si l'on vous dit: convertissez cinq huitièmes et trois quarts d'un huitième, du cinq et quatre neuvièmes: posez cela ainsi: $\frac{5}{9} 5 \frac{3}{4}$. L'une des deux parties sera le nombre entier et ce qui le suit, et l'autre partie sera la première fraction. Ensuite multipliez le cinq par le neuf, et ajoutez au résultat le quatre; ce sera quarante neuf. Multipliez cela par le numérateur total de la première fraction, qui est vingt trois. Vous obtenez mille cent vingt sept, ce qui est le numérateur total du problème, ainsi: 1127.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'ADDITION DES FRACTIONS.

La pratique de cette opération consiste à multiplier le numérateur total de chacune des deux (fractions) additionnées par les facteurs (du dénominateur) de l'autre, à additionner les deux résultats, et à diviser la (somme) par l'ensemble des facteurs (des dénominateurs).

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez cinq sixièmes et trois quarts d'un sixième à trois septièmes et un cinquième d'un septième, posez cela ainsi :

$$\frac{3}{4} \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{5} \frac{1}{7}$$

Ensuite convertissez la quantité ajoutée, c'est à dire multipliez le cinq par le quatre, et ajoutez au résultat le trois; ce sera vingt trois. Multipliez cela par les facteurs de l'autre rangée, vous aurez huit cent cinq. Réservez cela. Puis convertissez la quantité à laquelle vous ajoutez, c'est à dire multipliez le trois par le cinq et ajoutez au résultat l'unité; ce sera seize. Multipliez cela par les facteurs de l'autre rangée; vous aurez trois cent quatre-vingt quatre. Ajoutez cela à la quantité réservée. Il résultera mille cent quatre-vingt neuf, ainsi: 1189. Divisez ce résultat par les facteurs (des dénominateurs), ce qui se fait de la manière suivante. Rangez au-dessous d'une ligne d'abord le sept et après cela le six, le cinq et le quatre. Ensuite vous commencez par diviser (le nombre 1189) par le quatre. Vous écrivez au-dessus de celui-ci le reste (obtenu), et vous divisez le (quotient) qui résulte (de cette première division) par le cinq. Vous continuez ainsi jusqu'à la fin de l'opération (*). Le résultat sera une unité entière et deux septièmes et cinq sixièmes d'un septième et deux cinquièmes d'un sixième d'un septième et un quart d'un cinquième d'un sixième d'un septième; ainsi: $\frac{1}{4} \frac{2}{5} \frac{5}{6} \frac{2}{7} 1$.

CHAPITRE DEUXIÈME.

DE LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS

La pratique de cette opération consiste pareillement à multiplier le numérateur total de chacune des deux (fractions) dont on retranche l'une de l'autre, par les facteurs (du dénominateur) de l'autre, à soustraire le plus pe-

(*) Voici cette opération complète :

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 1189} \quad 1 \\ 5 \overline{) 297} \quad 2 \\ 6 \overline{) 59} \quad 5 \\ 7 \overline{) 9} \quad 2 \\ 1 \end{array}$$

tit du plus grand des deux résultats, et à diviser ce qui reste par tous les facteurs (des dénominateurs).

Par exemple, si l'on vous dit: retranchez cinq septièmes et un tiers d'un septième de huit neuvièmes et quatre cinquièmes d'un neuvième, posez cela ainsi:

$$\frac{4}{5} \frac{8}{9}$$

$$\frac{1}{3} \frac{5}{7}$$

Ensuite multipliez le numérateur total de la (fraction) dont on retranche, à savoir quarante quatre, par les facteurs (du dénominateur) de la (fraction) retranchée. Il résultera neuf cent vingt quatre. Réservez cela. Ensuite multipliez le numérateur total de la (fraction) retranchée, à savoir seize, par les facteurs (du dénominateur) de la (fraction) dont on retranche. Il résultera sept cent vingt. Retranchez cela de la quantité réservée. Vous aurez pour reste deux cent quatre. Divisez cela par l'ensemble des facteurs (des dénominateurs). Il résultera un neuvième et six septièmes d'un neuvième et trois cinquièmes d'un septième d'un neuvième (*), ainsi: $\frac{9}{3} \frac{3}{5} \frac{6}{7} \frac{4}{9}$.

CHAPITRE TROISIÈME.

DE LA MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

La pratique de cette opération consiste à multiplier le numérateur total de l'une des deux (fractions) multipliées l'une par l'autre par le numérateur total de l'autre et à diviser le résultat par les facteurs (des dénominateurs).

Par exemple, si l'on vous dit: multipliez trois quarts et cinq sixièmes d'un quart et trois septièmes d'un sixième d'un quart par cinq septièmes et

(*) Voici l'opération par laquelle on trouve cette expression:

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 2040} \\ 5 \overline{) 683} \\ 7 \overline{) 136} \\ 9 \overline{) 11} \\ 0 \end{array}$$

trois quarts d'un septième et un tiers d'un quart d'un septième; posez cela ainsi:

$$\frac{3}{7} \frac{5}{6} \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3} \frac{3}{4} \frac{5}{7}$$

Ensuite convertissez le multiplicande, ce que vous faites en multipliant le trois par le six, en ajoutant au résultat le cinq, en multipliant la somme par le sept, et en ajoutant au résultat le trois. Vous obtiendrez cent soixante quatre. Multipliez cela par le numérateur total du multiplicateur, lequel est soixante dix. Il résultera onze mille quatre cent quatre-vingt, ainsi: 11480. Divisez ce résultat par les facteurs (des dénominateurs); il résultera cinq septièmes et quatre septièmes d'un septième et cinq sixièmes d'un septième d'un septième et deux quarts d'un quart d'un sixième d'un septième d'un septième et deux tiers d'un quart d'un quart d'un sixième d'un septième d'un septième, ainsi : $\frac{2}{3} \frac{2}{4} \frac{0}{4} \frac{5}{6} \frac{4}{7} \frac{5}{7}$.

§.

Et si l'on vous dit : prenez d'un nombre et d'une fraction une certaine fraction, alors multipliez le numérateur total de (la quantité mixte) dont vous prenez (la fraction) par le numérateur total de la (fraction) prise, et divisez le résultat par l'ensemble des facteurs (des dénominateurs).

Par exemple, si l'on vous dit : de quatre et trois cinquièmes prenez six septièmes et un tiers d'un septième, posez cela ainsi :

$$\frac{3}{5} 4$$

$$\frac{1}{3} \frac{6}{7}$$

Ensuite convertissez (la quantité) dont vous prenez (la fraction), ce que vous faites en multipliant le quatre par le cinq et en ajoutant au résultat le trois. Il résultera vingt trois. Multipliez cela par le numérateur total de la (fra-

ction) prise, lequel est dix-neuf. Il résultera quatre cent trente sept, ainsi : 437. Divisez ce résultat par les facteurs (des dénominateurs). Vous aurez pour résultat quatre entiers et un septième et deux tiers d'un cinquième d'un septième, ainsi : $\frac{2}{3} \frac{0}{5} \frac{4}{7}$ 4.

CHAPITRE QUATRIÈME.

DE LA DIVISION DES FRACTIONS.

La pratique de cette opération consiste à multiplier le numérateur total de chacune des deux (fractions) divisées l'une par l'autre par les facteurs (du dénominateur) de l'autre, et à diviser le produit du dividende par celui du diviseur, après avoir décomposé ce (dernier produit) dans les facteurs dont il est composé.

Par exemple, si l'on vous dit : divisez trois quarts et cinq septièmes d'un quart par deux cinquièmes et six septièmes d'un cinquième, posez cela ainsi :

$$\frac{3}{7} \frac{5}{4}$$

$$\frac{6}{7} \frac{2}{5}$$

Ensuite multipliez le numérateur total du dividende, lequel est vingt six, par les facteurs (du dénominateur) du diviseur. Vous aurez pour résultat neuf cent dix. Réservez cela. Après cela multipliez le numérateur total du diviseur, lequel est vingt, par les facteurs (du dénominateur) du dividende; vous aurez pour résultat cinq cent soixante. Décomposez ce (nombre) dans les facteurs dont il est composé ; ce sont dix , huit et sept ; et divisez par ceux-ci la (quantité) réservée. Vous aurez pour résultat un entier et six dixièmes et deux huitièmes d'un dixième, ainsi : $\frac{0}{7} \frac{2}{8} \frac{6}{10}$ 1.

CHAPITRE CINQUIÈME.

DE LA DÉNOMINATION DES FRACTIONS.

La pratique de cette opération est pareille à celle de la division (des

fractions), si ce n'est que vous dénommez le produit de la (fraction) dénommée d'après le produit de la (fraction) d'après laquelle vous dénommez (*).

Par exemple, si l'on vous dit : dénommez trois quarts d'après six septièmes, posez cela ainsi.

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{6}{7}$$

Ensuite multipliez le trois par le sept, il résultera vingt un. Réservez cela. Après cela multipliez le six par le quatre, il résultera vingt quatre. Décomposez ce résultat dans (les facteurs) dont il est composé, à savoir huit et trois. Divisez par ceux-ci la quantité réservée. Vous aurez pour résultat la (quantité) cherchée, à savoir sept huitièmes, ainsi : $\frac{9}{8}$.

CHAPITRE SIXIÈME.

DE LA RESTAURATION (**) DES FRACTIONS.

La pratique de cette opération consiste à diviser la (quantité) à laquelle il s'agit de parvenir par la restauration, laquelle est celle qui suit (le mot) « pour », par la (quantité) restaurée, laquelle est celle qui précède ce (mot). Ce qui résulte est la (quantité) cherchée, et si cela est multiplié par la (quantité) restaurée, il résulte la (quantité) à laquelle on parvient par la restauration.

Par exemple, si l'on vous dit : par quelle quantité restaurez-vous quatre neuvièmes pour que cela devienne deux tiers ? alors posez cela ainsi :

$$\frac{4}{9} \quad \text{pour} \quad \frac{2}{3}.$$

Ensuite divisez les deux tiers par les quatre neuvièmes, conformément à ce qui précède, c'est à dire en multipliant le deux par le neuf, d'où il résulte dix-huit, ce qui est le résultat du dividende. Réservez cela. Puis multipliez

(*) Au lieu de diviser le produit du dividende par celui du diviser.

(**) Le terme arabe que je traduis par « restauration », est le mot *djabr*, qui est, comme on sait, l'un des deux termes qui forment ensemble le nom arabe de l'algèbre.

le quatre par le trois ; il résulte douze. Décomposez-le en quatre et trois , et divisez (par ces nombres) le dix-huit. Vous obtiendrez un entier et deux quarts , ainsi : $\frac{9}{3} \frac{2}{4}$ 1. Et si vous multipliez un et deux quarts par quatre neuvièmes, conformément à ce qui vous a été exposé précédemment sur la multiplication des fractions ; je veux dire, si vous multipliez, après avoir converti (la quantité mixte), le numérateur total par quatre, et que vous divisez le résultat par quatre et neuf seulement, il résultera six neuvièmes, ce qui est deux tiers, ainsi : $\frac{9}{4} \frac{6}{9}$.

CHAPITRE SEPTIÈME.

DE L'ABAISSEMENT DES FRACTIONS.

La pratique de cette opération consiste à dénommer la (quantité) à laquelle on abaisse d'après la (quantité) abaissée. Ce qui résulte est la (quantité) cherchée.

Par exemple , si l'on vous dit : par quelle quantité abaissez-vous sept huitièmes pour que cela devienne un demi ? alors posez cela ainsi :

$$\frac{7}{8} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} .$$

Ensuite multipliez le numérateur total de la (quantité) à laquelle on abaisse, lequel est un, par le dénominateur de la (quantité) abaissée. Il résulte huit. Réservez cela. Après cela multipliez le numérateur total de la (quantité) abaissée, lequel est sept, par le dénominateur de la (quantité) à laquelle on abaisse, lequel est deux. Il résulte quatorze, ce qui est composé de sept et de deux. Posez ces (nombres) au-dessous d'une ligne, et divisez par les mêmes le huit réservé. Vous aurez pour résultat quatre septièmes, ainsi : $\frac{9}{2} \frac{4}{7}$. Et si vous multipliez quatre septièmes par sept huitièmes , il résulte après la division par les facteurs (des dénominateurs), lesquels sont sept et huit, quatre huitièmes, ce qui est un demi. C'est d'après cette méthode (qu'on procède aussi dans toute autre opération de ce genre).

CHAPITRE HUITIÈME.

DE LA TRANSFORMATION DES (FRACTIONS).

La transformation est le passage de la fraction d' un nom à un autre nom.

La pratique de cette opération consiste à multiplier le numérateur total de la (fraction) transformée par les facteurs (du dénominateur) de la (fraction) en laquelle on transforme , et à diviser d'abord ce qui en provient par les facteurs (du dénominateur) de la (fraction) transformée, et ensuite le résultat par ceux de la (fraction) en laquelle on transforme.

Par exemple , si l' on vous dit : cinq septièmes et une moitié d' un septième, combien sont-ce de tiers d' un huitième ? alors posez cela ainsi :

$$\frac{1}{2} \frac{5}{7} \text{ combien } \frac{1}{3} \frac{1}{8}$$

Ensuite multipliez le numérateur total de la (fraction) transformée , lequel est onze , par les facteurs (du dénominateur) de la (fraction) en laquelle on transforme. Il résulte deux cent soixante quatre, ainsi : 264. Divisez ce résultat par les facteurs (des dénominateurs) de manière que les facteurs de la (fraction) en laquelle on transforme précèdent, et que ceux de la (fraction) transformée suivent. Vous aurez pour résultat six huitièmes et six septièmes d' un tiers d' un huitième, ainsi: $\frac{6}{2} \frac{6}{1} \frac{6}{3} \frac{6}{8}$.

JOURNAL ASIATIQUE.

DÉCEMBRE 1859.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

SUR KALAÇADI,

MATHÉMATICIEN ARABE DU XV^e SIÈCLE,

PAR M. A. CHERBONNEAU.

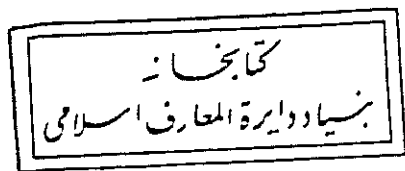
On a fait honneur aux Arabes de l'invention de l'arithmétique et de l'algèbre. Il ne faut point exagérer les choses. Ce qui est certain, c'est qu'au II^e et au III^e siècle de l'hégire ils recueillirent avec soin les ouvrages des mathématiciens grecs, les traduisirent dans leur langue en s'aidant la plupart du temps d'interprètes étrangers, et cherchèrent à les éclairer par des commentaires. Bien que les auteurs connus des orientalistes n'aient mis au jour qu'un petit nombre de théories nouvelles sur le calcul, et qu'ils se soient arrêtés à la solution des équations du premier et du second degré, il faut leur savoir gré de s'être faits les continuateurs de l'antiquité savante, d'avoir sauvé de l'oubli des sciences que les temps d'ignorance menaçaient d'engloutir. Une seule théorie nouvelle nous a été signalée jusqu'à présent : c'est celle que Thâbit ben Korrah a ajoutée à l'arithmétique spéculative des Grecs. La traduction

XIV.

30

en a été donnée par M. Wœpcke, dans le *Journal asiatique* (oct. nov. 1852, p. 421). Il y a peut-être encore des découvertes de ce genre à faire dans les écrits des auteurs qui ont illustré l'Espagne et l'Afrique pendant le moyen âge. Je sens moi-même que j'aurais tort d'en douter; car il est impossible qu'une nation aussi intelligente que la nation arabe, et qui, à une certaine époque, marchait à la tête du mouvement intellectuel de l'Europe, n'ait pas vu naître un seul homme de génie capable de reculer les bornes de la science. C'est donc en vue d'ouvrir une mine féconde, que j'ai compulsé les Recueils d'El-Karafi et d'Ahmed-Baba, si remplis de détails curieux et entièrement inédits sur les travaux littéraires et scientifiques des docteurs malékites. Mon choix tombe naturellement sur Kalaçâdi, que l'on a surnommé le dernier arithméticien de l'Espagne. La biographie de ce personnage, que je publie ici, est extraite du *Tekmilet ed-Dibadj*. On remarquera toutefois que Kalaçâdi n'avait point absorbé les forces de son intelligence dans une spécialité, la connaissance des mathématiques; il avait approfondi les lois qui régissent la société musulmane, et nous avons de lui un commentaire de Sidi Khelil, qui jouit d'une certaine estime.

L'événement politique auquel il est fait allusion dans le récit d'El-Beloui *ما حدث بوطنه* et qui détermina Kalaçâdi à se réfugier en Tunisie, se rattache, selon toute apparence, aux guerres civiles



qui désolèrent la ville de Grenade pendant la ré-
volte d'Abou Abd-Allah (Boabdil) contre son père.

ترجمة القلصادي، على بن محمد بن محمد بن علي القرشي
البسطي شهر بالقلصادي العالم الفرضي المؤلف آخر من له
التواليف الكثيرة من اهل الاندلس قال السخاوي في الضوء
اللامع في اخبار اهل القرن التاسع درس على ابن مرزوق
التفسير والحديث والفقه والغرايض والنحو والمعارف والبيان
والهندسة وبتونس على ابن عقاب التفسير والحديث والفقه
وروى عنه كتب شيخه ابن عرفة والقلصادي بقاء وصاد
ولام مفتوحات انتهى، ووصفه ابن الازرق بالشيخ الفقيه
الاستاذ العالم المتفتن المصنف الراوية الرحلة الحاج الصالح
وقال الملاي كان عالماً فاضلاً صالحاً شريفاً الاخلاق سليم
الضد له تواليف أكثرها في الحساب كشرحه للحسن على
تلخيص ابن البنا وشرحه للحسن على الجولي انتفع به كثير
واخذ عنه شيخنا الامام السنوسي الغرايض والحساب
واجازه عامة وقرأ عليه جم غفير من الناس، وقال تلميذه
احمد بن داود البلوي شيخنا الامام العالم الصالح خاتمة
الحساب والفرضيين تفقه ببلده بسطة على شيخ طبقة على
الغرناقي ثم وطن غرناطة فاخذ عن جلة شيوخها الاستاذ
ابن فتوح والامام السرقسطي وغيرها ولقي بالشرق كثيرا

وانتفع به اخذ بتلمسان عن الائمة كقاسم العقبات وابن
مرزوق والصوفي احمد بن زاغوا وغيرهم وبتونس عن الائمة
كاحمد بن عقاب واحمد القلشاني وابي العباس احمد
حلولوا وغيرهم وفتح ولقي اعلاما وعاد لغرناطة فوطنها ثم
خرج منها لما حل بوطنه ما حل فمات بباجة افريقية
نصف ذي الحجة عام احد وتسعين وثمانمائة وكان على قدم
في الاجتهاد ومواظبة الاقراء والتدريس ومن تواليفه اشرف
المسالك الى مذهب مالك رحمه الله تعالى وشرح مختصر
خليل وشرح الرسالة والتلقيين وهداية الانام في شرح
مختصر قواعد الاسلام شرحا مفيدا وشرح رجز القرطبي
وشرح رجز السرار وشرح حكم ابن عطاء الله وشرح
رجز القاضي ابن عمرو بن منظور في اسمائه صلى الله عليه
وسلم وشرح البردة وشرح رجز ابن بزي وشرح رجز ابن
فتوح في النجوم وشرح رجز ابن مقرعة وتنبيه الانسان
الى علم الميزان في المدخل للضريري وشرح ايساغوجي في
المنطق وشرح الانوار السنية في الحديث والنصيحة في
السياسة العامة والخاصة وهداية النظائر في تحفة الاحكام
والاسرار وكشف الجلباب عن علم الحساب وكشف الاسرار
عن علم الغبار والتبصرة وقانون الحساب في قدر التلخيص
وشرحه وشرحا للتلخيص كبير وصغير وشرح ابن

الياسمين في الجبر والمقابلة ومختصره وكليات الفرائض
 وشرحها والضروري في المواريت والمستوفى لمسائل الخوف
 وشرحان للتلمسانية كبير وصغير وشرح فرائض صالح بن
 شريف وشرح فرائض ابن المشاط وشرح فرائض مختصر
 خليل وشرح فرائض التلقين وشرح فرائض ابن الحاجب
 والغنية في الفرائض وغنية النكاة وشرحها كبير وصغير
 وتقريب المواريت ومنتهى العقول البواحت وشرح مختصر
 العقباني لم يتم ومدخل الطالبين ومختصر مفيد في
 النكاح وشرح الغية ابن مالك وشرح بجل الزجاء وشرح
 الملحمة وشرح الخرجية ومختصر في العروض ورحلته ٥

TRADUCTION.

Ali ben Mohammed ben Mohammed ben Ali el-Korachi, plus connu sous le nom de *Kalaçadi*, était de Bastha¹, ville de la province de Jaen. C'est le dernier des écrivains féconds que vit naître l'Espagne. Ses travaux les plus importants ont pour objet le système de l'hérédité.

Sekhâoui, dans son recueil biographique, qui a pour titre *La Lumière éclatante*, ou Notice sur les hommes illustres du ix^e siècle de l'hégire, s'exprime ainsi : « Kalaçadi, dont le nom s'écrit avec un *fatha* sur les trois premières lettres, commença ses études

¹ Chez les Romains *Basti*, et aujourd'hui *Baza* (voir la Géogr. d'Abou'l-Féda, trad. de M. Reinaud, t. II, 1^{re} part. p. 253).

à Tlemcen, sous le docte Ibn Merzoug, qui lui expliqua l'interprétation du Koran, les traditions mohammediennes, le droit musulman, le partage des successions, la grammaire, la rhétorique et la géométrie.

« A Tunis, Ibn O'kkâb lut avec lui les ouvrages de son maître Ibn Arafâ, et lui donna des leçons de jurisprudence, de hadîs et de Koran. »

Ibn el-Azrak lui prodigue les titres de professeur, de juriste, de coryphée de la science, d'écrivain érudit, de disciple des grands maîtres et de savant, vers lequel on voyageait pour le consulter. Il nous apprend en outre qu'il avait fait le pèlerinage avec sainteté.

Au rapport d'El-Mellâli, le cheikh Kalaçâdi joignait à une science profonde et à une piété exemplaire toute les qualités d'une âme pure. En parlant de ses œuvres, il ajoute que la plupart concernent l'arithmétique, par exemple son excellent Commentaire du *Telkhîss*, d'Ibn el-Benna, et ses Développements sur le livre d'El-Djouli, qui sont devenus classiques¹.

L'imam Senouci² est un des élèves les plus célèbres qu'il ait formés. Il apprit sous sa direction la science du calcul, ainsi que le code des successions, et reçut de sa main une licence générale³. Un grand nombre d'individus étudièrent aussi sous Kalaçâdi.

¹ Dans bien des cas on peut traduire *moufid* par *classique*.

² Voir dans le Journ. asiat. fév. 1854, p. 175 et suiv. les Documents inédits sur Es-Senouci, son caractère et ses écrits.

³ C'est-à-dire l'autorisation d'enseigner toutes les sciences.

Ahmed ben Daoud el-Belaoui, qui nous a laissé quelques renseignements sur Kalaçâdi, nous apprend que ce pieux et savant professeur, le sceau des mathématiciens et le plus habile des juristes en matière de successions¹, avait étudié le droit à Bastha, auprès d'Ali el-R'arnâki, le docteur par excellence en ce temps-là. Il quitta sa ville natale pour aller à Grenade suivre les cours de ses plus illustres professeurs, le docteur ben Fotouh et l'imam Sarakosthi. De là il passa en Orient, où il perfectionna son instruction près des maîtres les plus renommés. Il alla ensuite à Tlemcen et à Tunis. Dans la première de ces villes, il écouta les leçons de Kâcem el-Okbâni, d'Ibn Merzoug et d'Ahmed ben Zar'ou, qui avait voué sa vie aux rigueurs de l'ascétisme. A Tunis, il se fit l'élève de Mohammed ben O'kkab, d'Ahmed el-Kalchâni² et d'Abou'l-Abbas Ahmed el-Heuloulou³. Après avoir

¹ On lit dans le Lexique de M. Freytag, au mot *فرص* « Peritus » *statutorum Dei*; mais ici le sens est plus restreint et tout à fait spécial. Il ne s'agit point des pratiques d'obligation divine, en général; il est question seulement de la science des *ferâidh* ou système de l'hérédité dans l'islam.

² Ahmed el-Kalchâni fut cadi de Djema'a, à Constantine, à partir de l'année 822 (de J. C. 1420), et mourut dans cette ville. On voyait son tombeau à la mosquée de la Casba. Il était élève d'El-R'abrini, l'auteur du *Ennouan el-diraïa fi mechaïekkh Bidjaïa*. On lui doit un commentaire d'Ibn el-Hadjeb, en sept volumes; une explication de la *Mondawana*, et d'excellentes notes sur la *Riçâla* d'Ibn Abi-Zeid. Kalaçâdi lui a consacré un article très-élogieux dans sa *Rihla*.

³ Ahmed Heuloulou a composé deux commentaires du *Mokhtâgar* de Sidi Khelil, le grand en six volumes, et le petit en deux volumes; on a encore de lui un abrégé des *Fetwas* de Birzéli.

accompli le pèlerinage, il revint à Grenade, où il fixa sa résidence; mais, la guerre qui désolait ce pays l'ayant forcé d'en sortir, il retourna en Ifrikia (Tunisie) et finit ses jours à Badja¹, le 14 de dhoul hidja, l'an 891 (de J. C. 1486). C'était un homme toujours animé d'un zèle extrême pour l'enseignement. Voici la liste des ouvrages qu'il a composés :

1° *Le Chemin le plus honorable pour suivre le rite de l'imam Malek*².

2° *Commentaire du Précis de Sidi Khelil*³.

3° *Commentaire de la Riçala*, d'Ibn abi Zeid el-Kairouâni (jurisprudence).

¹ Anciennement *Vacca*.

² La secte malékite est prépondérante en Algérie. Mon Essai sur la littérature arabe du Soudan a démontré qu'elle était suivie à Tombouctou, à Takrou et dans tout l'intérieur de l'Afrique.

³ Si les musulmans de l'Algérie ont accueilli avec faveur le texte du *Mokhtafar*, imprimé par M. Reinaud, les Européens n'admirent pas moins l'excellente traduction que nous devons au docteur Perron.

A part le Koran et les Hadis, il existe peu de livres classiques dans le monde musulman qui aient vu naître, et pour mieux dire, qui aient nécessité autant de commentaires, d'observations et d'éclaircissements que le *Précis de Sidi Khelil*, soit à cause de la difficulté de la matière, soit à cause de la concision extrême du style. On en compte au moins soixante commentaires, qui méritent d'être cités. Ceux qui sont en possession de la vogue dans les medrasas de la Tunisie, du Maroc et de l'Algérie, ont pour auteurs Abd-el-Bâki; El-Kharchi; Tataï; Brâhim ech-Chebrakhiti; El-Houdjoughri (?); Daoud el-Feltâoui; Ibn-Merzoug; Ahmed ibn-Mouhibb; El-Yezlîtni; Zerrouk; Er-Rezzâk; Ben Saïd es-Sebt; ibn Helal, de Constantine; El-Filali de Sidjilmaça; Bahram ed-Damîri; Salem es-Senhouri; Ali ben Djibril; Abd-Allah ed-Dartarni; Abd-errahman el-R'ariâni; Abd-errahman ben Kâcem; Abd-el-Aziz el-Lemtaï; Abd-el-Kader es-Sadi; El-Mr'ili; Mohammed Bar'ir'ou; Ahmed ben Mohammed Akit, et Ahmed Baba. Ces trois derniers appartiennent à la race noire.

4° Commentaire sur les *Lçons de droit*, du cadi Abd elwahhab el-Bar'dadi.

5° *Le Guide des créatures*, commentaire classique d'un livre intitulé *Exposition abrégée des principes fondamentaux de l'islamisme*.

6° Éclaircissements sur le *Redjez* d'El-Korthôbi¹, qui traite des pratiques religieuses.

7° Commentaire du *Redjez* de Serrâr², sur le même sujet.

8° Développement de *La Morale pratique* d'Ibn-Atha-Allah, au point de vue des soufis³, علم التصوف.

9° Explication du poème du cadi Abou Amr ben Manzhour, sur les noms et les attributs du Prophète⁴.

10° Commentaire du *Borda*, poème en l'honneur de Mahomet.

11° Explication du *Redjez* d'Ibn-Berri, sur la manière de lire correctement le Koran, d'après les leçons d'Ibn Nafé, de Warch et de Kalaoun.

12° Commentaire du *Redjez*, d'Ibrahim ben l'outouh, sur les astres.

13° Développements sur le traité en vers d'Ibn-

¹ Le cheikh El-Korthôbi mourut à Bougie.

² El-Karâfi, dans son *Tuuchiî el-Dibaulj*, écrit الشرح.

³ Dans le Catalogue raisonné de la bibliothèque de St-Bachterzi, j'ai signalé l'existence de trois autres commentaires de cet ouvrage, rédigés par Zerrouk, El-Menaoui et Ibn-Abbâd. (Voir le Journ. asiat. oct. nov. 1854, p. 442.)

⁴ Le mètre *redjez* a été appliqué par les Arabes à un grand nombre d'ouvrages didactiques.

Mokraa, qui a pour sujet la constitution du ciel et le mouvement des astres¹.

14° *Avertissement donné à l'homme pour le guider dans les sciences astronomiques* : c'est une étude sur le *Medkhal* de Dhourāiri.

15° *Commentaire du Traité de la logique*, ou *Yça-ghoudji (Isagoge)*.

16° *Explication du livre intitulé Les lueurs brillantes*, sur les traditions mohammediennes.

17° *De l'éducation des hommes en général*; traité de morale pratique.

18° *Le Guide des gens studieux*, ou l'Explication gracieuse des principes de la morale et des secrets².

19° *Enlèvement du voile qui obscurcit la science du calcul*; traité d'arithmétique devenu classique³.

20° *Explication des secrets que renferme la science de la numération* (ou des chiffres).

21° *Explications sur l'arithmétique*.

22° *L'art de calculer*, accompagné d'un texte explicatif; ouvrage non moins volumineux que le *Telkhiss*.

23° *Grand et petit commentaire du Telkhiss*, ou Arithmétique abrégée, par Ibn el-Benna⁴.

¹ *Journ. asiat.* oct. nov. 1854, p. 443, et oct. nov. 1855, p. 405.

² Le mot *asrar* n'est mis là que pour la rime. Ibn-Accem a écrit aussi un *Tauhfet el-Ahkām*, qui est fort estimé.

³ Les exemplaires en sont très-répandus en Algérie. M. Reinaud en possède une copie exécutée à Constantine.

⁴ Ibn el-Benna, qui était le fils d'un simple maçon, عروق, doit la célébrité dont il jouit en Afrique à une série considérable de volumes qu'il a écrits sur les différentes branches de la science, et en particulier sur l'astronomie, l'astrologie judi-

24^e *L'Algèbre d'Ibn-Yacemin*, expliquée par Kalaçadi.

25^e Rédaction abrégée de l'Algèbre d'Ibn-Yacemin.

26^e Considérations générales sur la législation des héritages; avec des notes¹.

27^e Annotations au code des héritages, du cheikh Ed-Diorouri.

28^e Solution des *Questions d'El-Haifi*, sur les parts héréditaires afférentes aux divers héritiers que reconnaît la loi musulmane².

29^e Deux commentaires sur la *Tlemçania*; l'un d'eux comporte d'assez grands détails; où sont mis en évidence les préceptes de Mahomet par rapport aux successions.

30^e Éclaircissements sur le livre de Saleh ben Chérif, intitulé *Droits de succession*.

31^e Commentaire de l'ouvrage d'Ibn el-Mech-ohâth (même sujet).

32^e Explication des *Feraïdh* de Sidi Khelil (répartition des héritages).

33^e Éclaircissements sur le chapitre du *Talkin* (voir n° 4) relatif au partage des successions.

34^e Commentaire des *Feraïdh* d'Ibn el-Hadjeh (même sujet).

cinire, les sciences occultes, l'arithmétique et le soufisme. J'en ai compté cinquante-trois dans le *Tekmilat ed-Dibaije*.

¹ Les livres qui régissent la matière chez les Malékites sont le Précis de Sidi Khelil, la *Tlemçania* et la *Rahbia*.

² Senouci a écrit, à l'âge de dix-neuf ans, une étude sur le même livre, qu'il a intitulée *El-Moukurrib el-Moustaufi ala El-Haifi*. (*Journ. asiat.* févr. 1854, p. 177.)

35° *La Bonne acquisition*; traité de la quotité des héritages.

36° *La Richesse suffisante des grammairiens*, avec un grand et un petit commentaire.

37° *L'Offrande des successions et le but suprême des intelligences curieuses*.

38° Commentaire (inachevé) du Précis d'El-Okbâni, le Tlemcénien.

39° *L'Entrée facile des étudiants* (٧).

40° Traité sommaire des études grammaticales.

41° Commentaire de l'*Alfia*, d'Ibn Malek ¹.

42° Éclaircissements sur le Compendium grammatical du docteur Ez-Zedjadji.

43° Observations développées sur le *Moulha* de Hariri, traité de haute philologie.

44° Commentaire de la *Khazradjia*, poème en vers redjèz, sur la métrique des Arabes.

45° Petit traité de prosodie, contenant les règles de la quantité et la connaissance des différents mètres.

46° *Itinéraire*, de Kalaçâdi ².

¹ Voir ce que dit de cet ouvrage classique M. Pavet de Courteille (*Journ. asiat.* juin 1853, p. 576).

² C'est à tort que le biographe El-Karâfi écrit مقلحة. Le véritable titre de l'ouvrage est ملحة الأعراب. Voici ce qu'en disent MM. Reinaud et Derenbourg, dans l'introduction qui précède la deuxième édition des *Séances* de Hariri, p. 27 : « Le *Moulhat-al-Irab* ou les *Délices de la syntaxe* est très-court, et il a été rédigé en vers, afin que les élèves se le gravassent plus facilement dans la mémoire. Comme à ce double titre il présente de grandes obscurités, Hariri a pris la peine de l'accompagner d'un commentaire en prose. »

³ Il y a trois *rihla* dont j'ai poursuivi la recherche avec activité,

VERMISCHE NOTIZEN. — MÉLANGES.

Sur une formule d'approximation des racines carrées donnée par Alkalsadi.

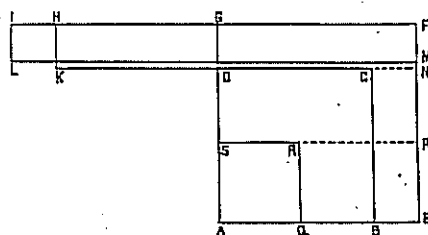
On sait que le géomètre arabe ALKALSADI a indiqué¹ les deux formules d'approximation:

$$(1) \quad \sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a} \quad (b \leq a)$$

$$(2) \quad \sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b + 1}{2a + 1} \quad (b > a)$$

La première de ces formules était très connue chez les anciens; quant à la seconde, on semble admettre ordinairement² qu'elle a été obtenue par ALKALSADI en posant $a + 1$ au lieu de a et $b + 1$ au lieu de b , dans le second terme de la formule (1).

Cependant, il me paraît plus probable que le géomètre arabe ait déduit la formule (2) immédiatement par une considération géométrique semblable à celle de THÉON d'Alexandrie.



Soit en effet le carré $ABCD = a^2 + b$ ($2a + 1 > b > a$); le carré $AIEG = (a + 1)^2$, le carré $AQRS = a^2$, et faisons $GH = AB$, $GI = GF$. Construisons maintenant le rectangle $FHKN$ en prolongeant DC et faisons le rectangle $FILM$ égal à $FHKN$.

Parce que $FI > FH$ il faut que $FM < FN$, et, par conséquent, M est situé entre N et F . EM est donc une valeur plus approchée

de $EN (= AB)$ que EF , et on peut poser approximativement

$$AB = \sqrt{a^2 + b} = EM = EF - FM \\ = a + 1 - FM.$$

Mais, les rectangles $FILM$ et $FHKN$ étant égaux, on a

$$FI \cdot EM = \text{le rectangle } FHKN \\ = (a+1)^2 - (a^2 + b),$$

ou

$$2(a+1) \cdot FM = 2a + 1 - b,$$

d'où

$$FM = \frac{2a + 1 - b}{2(a+1)}$$

et

$$\sqrt{a^2 + b} = a + 1 - \frac{2a + 1 - b}{2(a+1)} \\ = a + \frac{2a + 2 - 2a - 1 + b}{2(a+1)} \\ = a + \frac{b+1}{2a+2}.$$

Il est bon de remarquer que cette construction est identique avec celle de COM-MANDINO, sous la dernière forme qu'y a donnée BUZENGEIGER;³ il faut seulement y supposer le côté du carré extérieur égal à $a+1$.

On voit de suite d'où il vient que, par ce procédé, on obtient une valeur un peu trop grande. En effet, on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 - BEFGDCB = \overline{AE}^2 - FHKN \\ = \overline{AE}^2 - FILM \\ = \overline{EM}^2 - \overline{FM}^2;$$

EM n'est donc pas la racine carrée exacte de $\overline{AB}^2$, mais plutôt de $\overline{AB}^2 + \overline{FM}^2$, et on a par conséquent négligé le carré $\overline{FM}^2$.

La déduction géométrique que nous venons d'exposer, peut être très facilement traduite en langue algébrique. Posons

$$\sqrt{a^2 + b} = a + 1 - x,$$

on a

$$a^2 + b = (a+1)^2 - 2(a+1)x + x^2,$$

d'où en négligeant x^2

$$x = \frac{(a+1)^2 - a^2 - b}{2(a+1)},$$

et par conséquent

$$\sqrt{a^2 + b} = a + 1 - \frac{(a+1)^2 - a^2 - b}{2(a+1)} \\ = a + \frac{b+1}{2a+2}.$$

Il est très facile de voir pourquoi AL-KALSADI admettait cette méthode pour le cas où $b > a$. De fait, si a et b sont des nombres entiers, la condition $b > a$ équivaut à celle-ci

$$b \geq a + 1,$$

d'où il suit que

$$b > a + \frac{1}{4},$$

et que, par conséquent,

$$\sqrt{a^2 + b} > \sqrt{a^2 + a + \frac{1}{4}} = a + \frac{1}{2}.$$

Cet inégalité met en évidence que dans l'équation

$$\sqrt{a^2 + b} = a + x,$$

x est $> \frac{1}{2}$, tandis que dans l'équation

$$\sqrt{a^2 + b} = a + 1 - x,$$

x est $< \frac{1}{2}$. Si l'on veut négliger x^2 , la dernière équation est donc plus avantageuse comme point de départ parce qu'on négligera seulement une quantité $< \frac{1}{4}$. Cela

peut être aussi démontré sans difficulté géométriquement, et on trouve ainsi que si $b > a$, le point N doit être plus voisin du point F que du point P , où la ligne SR atteint la ligne EF .

Avant de terminer, je dois mentionner que M. HEILERMANN⁴ a déduit la formule d'ALKALSADI en posant

$$\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{(a+1)^2 - (2a+1-b)}$$

et en appliquant ensuite la formule

$$\sqrt{a^2 - \beta} = a - \frac{\beta}{2a}.$$

Pour un géomètre du 19^{ème} siècle, ce procédé ne diffère pas essentiellement de celui qui vient d'être exposé. Cependant, il me semble peu probable qu'ALKALSADI ait suivi cette voie, et par conséquent je ne puis non plus accepter la conclusion de M. HEILERMANN que la formule d'ALKALSADI prouve l'existence d'une méthode des fractions continues chez les géomètres arabes.

¹ WOEPCKE, *Traduction du traité d'arithmétique d'Aboul Hacan Ben Mohanuned Alkalsadi*. Atti dell' accademia pontificia de' Nuovi Lincei 12, 1859, p. 403.

² Voir p. e. GÜNTHER, *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden*. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 4, 1882, p. 45. D'après M. GÜNTHER, ALKALSADI voulait «der allzu-grossen Vermehrung des Nenners durch eine entsprechende Vermehrung des Zählers ein Gegenwicht bieten». Comparez aussi le mémoire cité de M. GÜNTHER, p. 60, lignes 3—6, ainsi que WOEPCKE, *Note sur des notations algébriques employées par les arabes*. Journal asiatique 4, 1854, p. 383—384.

³ BOZENGEIGER, *Methode der griechischen Geometer, um für Wurzeln solcher Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, annähernde rationale Brüche zu finden*. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften 5, 1818, 88—89.

⁴ HEILERMANN, *Bemerkungen zu den irrationalen Näherungswerten der Archimedischen Quadratwurzeln*. Zeitschrift für Mathematik und Physik 26, 1881; Hist.-Lit. Abtheil. p. 124—125.

Stockholm.

G. ENESTRÖM.

ÉTUDES ORIENTALES
PUBLIÉES PAR L'INSTITUT FRANÇAIS D'ARCHÉOLOGIE
DE STAMBOUL
SOUS LA DIRECTION DE M. ALBERT GABRIEL

VI

MOLLÂ LUTFÎ'L MAQTÛL

BIBLIOTHÉCAIRE DU SULTAN MAHOMET II

LA DUPLICATION
DE L'AUTEL
(PLATON ET LE PROBLÈME DE DÉLOS)

TEXTE ARABE PUBLIÉ

PAR

ŞEREFETTIN YALTKAYA

Professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Stamboul

TRADUCTION FRANÇAISE ET INTRODUCTION

PAR

ABDULHAK ADNAN ET HENRY CORBIN

Chef de travaux à l'École Nationale
des Langues Orientales vivantes

Bibliothécaire à la Bibliothèque Nationale
Membre de l'Institut français de Stamboul

E. DE BOCCARD, ÉDITEUR
1, RUE DE MÉDICIS, 1
PARIS

1940

113

TABLE DES MATIÈRES

Partie française

INTRODUCTION.

I.— Biographie de Luṭfi'l Maqtûl	1
II.— Le contenu de l'opuscule	5
III.— La position du problème	7
IV.— La tradition	17
V.— Les lacunes	29

LE TRAITÉ DE LA DUPLICATION DE L'AUTEL.

CHAPITRE I.

Prolégomènes par lesquels il est indispensable de commencer ce traité	35
--	----

CHAPITRE II.

Sur le but de ce traité, qui est d'analyser la sentence du divin Platon.	44
---	----

Partie arabe

Préface de l'éditeur	٢ - ٦
Texte de l'opuscule	٧ - ٢٢

INTRODUCTION

I. BIOGRAPHIE DE LUṬFÎ'L MAQTÛL

L'auteur de l'opuscule que nous présentons ici n'a peut-être pas encore obtenu dans l'histoire des idées le rang qu'il mérite. Il fut au nombre de ces savants qui, au lendemain de la chute de Constantinople, assurèrent l'essor culturel de la Turquie des XV^e et XVI^e siècles ; théologiens, philosophes ou historiens se servant de la langue arabe, ils enrichirent cette littérature de leurs pacifiques créations spirituelles. Mollâ Luṭfi (1), de son nom complet Luṭfallâh al Tûqâtî, auquel les biographes ajoutent encore le surnom de Şarî, « le blond », (à moins que ce ne soit le « pâle » ou le « jaune ») était né à Tokat, en Asie Mineure, dans la première moitié du XV^e siècle, à une date que l'on ne peut exactement préciser. Pour avoir été celle d'un philosophe et d'un bibliothécaire, sa carrière n'en fut pas moins assez tumultueuse, à supposer que sa double qualité ne fut pas

(1) Cf. Brockelmann, *Geschichte der arabischen Literatur*, II, 285, et *Suppl.* II, 330. Pour sa biographie, cf. principalement Ṭaşkôprûzâdeh, *Şağâ'iq al nu'maniya*, trad. turque de Mehmed Mejdi (Istanbul, 1269), t. I, p. 295, cf. aussi la monographie que lui a récemment consacrée M. Şerefettin Yaltkaya : *Luṭfi Mollâ (Publications de la Faculté des Lettres de l'Université d'Istanbul)*. Istanbul, 1938.

précisément l'origine de ces vicissitudes, qu'un dénouement tragique devait dignement couronner.

On sait, entre autres choses certaines, qu'il fut l'élève de Sinân Pâšâ (1), le savant bien connu qui fut vizir sous Mahomet II le conquérant, après avoir été professeur à Andrinople, et qui, tombé en disgrâce, fut envoyé à Siwri Hışâr, d'où Bâyezid II, le fils et successeur du Conquérant, devait le rappeler. Sinân Pâšâ fut l'auteur d'ouvrages traitant aussi bien de mathématiques et d'astronomie, que de métaphysique et d'éthique, ou même d'hagiographie. On lui doit notamment un commentaire de la célèbre encyclopédie philosophique et théologique d'al-Ījī, savant persan de Shirâz (ob. 756/1355) : *Šarḥ al Mawâqif fi 'ilm al Kalâm* (2), commentaire qui est peut-être celui auquel réfère Luṭfi au début de l'opuscule qu'on lira plus loin. On lui doit également un commentaire sur le traité d'astronomie de Čaġmini, autre savant persan (ob. 618/1221), dont l'œuvre, comme celle d'al-Ījī, a trouvé d'infatigables glossateurs (3). Pour ce *Šarḥ-i-Čaġmini*, Luṭfi fut d'ailleurs le collaborateur actif de son maître. C'est que, grâce à la fonction de bibliothécaire à laquelle l'avait appelé le sultan Mahomet II, Luṭfi avait tout loisir de se consacrer à l'étude, aussi bien à l'étude des Sciences de Tradition (*'ulûm naqliya*) qu'à celle des sciences philosophiques et rationnelles (*'ulûm 'aqliya*). Sa nomination de bibliothécaire, il la devait à la recommandation d'un savant non moins encyclopédique, 'Alī Qûsji. Ce savant avait étudié à Samarkand, et collaboré aux nouvelles tables astronomiques et au catalogue d'étoiles, qu'une équipe d'astronomes préparait sous les ordres d'Ulûġ Beg, lequel avait fait construire à cette fin un célèbre observa-

(1) Cf. Brock., *Suppl.* II, 327, et *Encycl. de l'Islâm*, s. v., I.

(2) Cf. Brock. II, 208 et *Suppl.* II, 289 ; *E. I.* loc. cit.

(3) Cf. Brock. I, 473 et *Suppl.* I, 865.

toire. Après la mort de son maître, 'Alî Qûsji, sur la recommandation de l'émir de Tabriz, vint à Istanbul, où il fut nommé par Mahomet II professeur à Aya Sofia (1). C'est là qu'il devait mourir (879/1474), mais son arrivée à Istanbul avait été pour Luţfi l'occasion de se consacrer plus profondément aux sciences mathématiques et astronomiques.

Telles sont quelques-unes des figures qui composent l'entourage spirituel de Luţfi. Quant à son œuvre personnelle, elle est d'une étendue très honorable, se composant d'une bonne douzaine d'ouvrages et de commentaires, principalement de contenu philosophique ou mystique. S'inscrit en tête une œuvre de caractère encyclopédique, dédiée à Bâyezid II, « Les problèmes théologiques concernant l'objet des sciences » (*Al Maţâlib al ilâhiya fi mauvdu'ât al 'ulûm*) ; puis viennent quelques dissertations sur « Les degrés des êtres », « L'essence du Verbe créateur » (*fi nafs al amr*), « L'existence purement logique » (*fi'l wujûd al dhihni*), « La définition de la philosophie » (*fi ta'rif al Hikmat*) etc. Quelques commentaires, principalement un commentaire partiel sur la grande encyclopédie d'al-Îjî, celle-là même que Sinân Pâşâ commenta de son côté (2) ; un livre consacré à sept questions du philosophe Jûrjâni (ob. 816/1413), enfin un commentaire sur le propre commentaire ajouté par ce philosophe au grand ouvrage de logique d'al-Urmawî (ob. 682/1283), *Maţâli' al anwâr* (L'aurore des lumières sur la science de la logique). Encadré de ces travaux, le court opuscule

(1) Cf. Brock. I, 234-235 et Suppl. II, 329-330. Sur cette importante figure de l'histoire des sciences, et le contexte de ses rapports avec Molla Luţfi, cf. Abdulhak Adnan, *La Science chez les Turcs Ottomans*, Paris, 1939, pp. 33-35 et 43-47.

(2) Selon Brock. II, 209, Luţfi n'aurait commenté que le début du 2^e livre ; un seul mss. en contenant un extrait est signalé : Escurial², 237.

« De la Duplication de l'autel » prendra sa signification : moins celle d'un écrit occasionnel que d'une question dont l'auteur assure qu'il est le premier à la traiter en langue arabe, et à laquelle le bibliothécaire-philosophe finit par rattacher plusieurs thèmes essentiels de sa vision du monde.

Cette activité scientifique n'eut pas néanmoins pour support une vie de tout repos. Lorsque son maître Sinân Pâşâ, tombé en disgrâce, fut relégué à Siwri Hışâr, Luṭfi l'accompagna. C'est Bâyezid II qui, après son accession au trône, l'appela comme professeur successivement à Brousse, à Andrinople et à Istanbul. Mais Luṭfi était, au témoignage de ses biographes, un esprit libéral et prompt à saisir l'ironie des choses et des situations. Quelques-unes de ses réparties manifestent son humour et sa vivacité. Il se trouve toujours en pareil cas, des contemporains à l'esprit un peu trop lent pour goûter ces saillies, mais d'autant plus prompts à s'estimer offensés. Une chose vint mettre le comble à l'indignation. Par la faveur de Bâyezid II, Luṭfi fut nommé professeur d'une des huit fameuses Madrasas de Fâtih. C'était plus qu'il n'en fallait pour que des confrères ulcérés de cette faveur, déjà mortellement offensés par ses critiques mordantes et jugeant par là même la religion en péril, n'en vinssent à une petite conspiration qui devait, hélas ! trop bien réussir. A leur tête se distingua Ibrâhîm Khâtîb Zâdeh (ob. 901/1495) ; cet homme avait été successivement professeur à Iznîk et à Istanbul, puis déposé d'une charge de confiance près de Mahomet II à la suite d'une réponse inconvenante. On organisa un grand conseil qui interrogea Luṭfi, inculpé d'hérésie et d'athéisme ; finalement, Khâtîb Zâdeh rendit une *felwâ* par laquelle son exécution devenait légitime. Le sultan éprouva beaucoup d'hésitations avant de ratifier ce jugement ; il s'y résigna enfin, et l'infortuné bibliothécaire-professeur fut décapité à l'hippodrome d'Istanbul, le 29 Rabi' al awwal, l'an 900 de l'Hégire (1494). Plusieurs

savants protestèrent avec véhémence contre cette condamnation inique et les poètes composèrent différents « chronogrammes ». Mais Luṭfi devait passer à la postérité avec le surnom de *Maqtûl*, évoquant sa fin tragique ; ce n'est pas exactement le « martyr », le *shahid* ou témoin de la foi, mais le bibliothécaire « assassiné » (1).

II. LE CONTENU DE L'OPUSCULE

La présente publication se doit d'invoquer un motif qui sera en même temps, nous l'espérons, son excuse. Entièrement élaborée à Istanbul, et de plus en une période de communications difficiles, où l'accès même des manuscrits n'est pas toujours aisé, il n'a pas été possible d'apporter au texte tous les commentaires historiques et techniques qui eussent été souhaitables. Devant les difficultés insurmontables pour rassembler le « matériel » nécessaire, il a fallu se résigner à une présentation très sommaire, en pensant que le malheur des temps ne devait pas retarder indéfiniment toute production scientifique. Tel quel, l'opuscule de Luṭfi'l Maqtûl s'offre déjà comme une intéressante contribution à l'histoire

(1) Ce surnom il le partage avec un *chaikh* qui occupe une place éminente dans le mouvement des idées philosophiques et mystiques en Islam : Suhrawardî d'Alep, le *chaikh maqtûl*, exécuté en 587/1191, en des circonstances qui ne sont pas sans rappeler le procès intenté à Luṭfi. Il est vrai que les disciples de Suhrawardî, le docteur de la philosophie *ishrâqî*, lui ont franchement décerné le titre de *chaikh Shahid*, cf. H. Corbin. *Suhrawardî d'Alep, fondateur de la doctrine illuminative*, Paris, 1939. Détail bibliographique à signaler ici, le mss. qui a servi de base pour la présente édition du *Taḍwîf al-madhibah* (Université d'Istanbul, AY. 1458), contient également (fol. 194^b-206^a) la copie d'un important traité de Suhrawardî Maqtûl, le *Kitâb al-awâh al-'Imâdiyya* (Les Tablettes dédiées à 'Imâd al-Dîn ; édition en préparation).

des sciences en général ; plus particulièrement, il indique un moment de la longue carrière parcourue par les motifs platoniciens, ou plutôt de tous les motifs dont Platon était considéré comme le prophète, combinés avec l'arithmologie néo-pythagoricienne, dans le monde culturel de langue arabe, lequel recueillit l'héritage des savants grecs ; il a sa place dans le *corpus* qui a pu être désigné sous le terme générique de *Plato Arabus*.

Quelques brèves indications sur la généalogie du motif de l'opuscule ont été données ici dans la préface du texte arabe. La relation établie entre Platon et les habitants de l'île de Délos évoque peut-être spontanément en premier lieu dans l'esprit du philosophe, une autre mention platonicienne de l'île célèbre : l'exorde du *Phédon*, racontant comment la mort de Socrate fut retardée de trente jours après le prononcé du jugement, en raison du pèlerinage que la Cité athénienne envoyait annuellement à Délos, pour exécuter le vœu fait à Apollon en commémoration de l'exploit de Thésée (1). Le *Phédon* fut d'ailleurs un des dialogues platoniciens tôt traduits en arabe. Mais c'est d'une toute autre relation qu'il s'agit ici ; une relation traditionnellement établie entre Platon et un problème célèbre dans les annales des mathématiques. Sans doute, l'histoire y perd-elle ses droits, et le « fait » qui va être rappelé appartient-il plutôt à l'« hagiographie » de Platon.

Deux rapports précis, l'un de Plutarque sur lequel nous insisterons plus loin, l'autre de Théon de Smyrne (2) d'après Eratosthène, nous informe qu'une peste ayant éclaté dans l'île de Délos, les habitants consultèrent l'oracle du dieu Apollon sur le moyen de la faire cesser. L'oracle leur enjoignit de doubler l'autel qui était dans leur temple : c'était leur

(1) Cf. *Phédon* 58 B.

(2) Cf. Théon de Smyrne, trad. Dupuis, p. 5.

imposer un spécieux devoir de mathématiques, puisque, fut-il précisé ensuite, cet autel avait la forme d'un cube. Bref, ni architectes, ni géomètres n'y réussirent. C'est pour-quoi on alla implorer le secours de Platon. De la consultation de Platon, deux choses ressortent : d'abord la solution du problème mathématique, puis un enseignement spirituel qu'il est possible de développer en multiples variations, dont Plutarque et Luṭfi 'l Maqtûl vont nous fournir deux édifiants exemples. De l'un à l'autre, seul le rôle de Platon comme prophète restera en pleine lumière. Chez le savant turc, le nom de Délos présent chez Théon et chez Plutarque, et que la tradition consacre en mentionnant le problème comme « problème de Délos », aura disparu ; le temple même d'Apollon aura reçu une affectation étrange, où l'on ne peut plus bien démêler de quel culte il s'agit. La transformation s'était déjà accomplie dans le texte de l'intermédiaire arabo-persan que l'on peut ici donner comme source : chez Qazwini (XIII^e siècle)(1), déjà Platon est chargé d'interpréter non plus l'oracle d'un prophète d'Apollon, mais celui d'un prophète d'Israël. Toutes ces confusions, dont résulte un humour qui s'ignore, ne font d'ailleurs rien à l'affaire. Chacun des moments de la tradition nous met en présence de deux choses : il y a d'abord un problème technique à traiter, puis un enseignement à interpréter qui, à travers toutes les variations, reste celui d'une thérapeutique spirituelle. Tels sont les deux aspects de l'opuscule sur « la duplication de l'autel », qu'il nous faut brièvement exposer et analyser.

III. LA POSITION DU PROBLÈME

Traiter de cette duplication imposait à l'auteur une double série de considérations : la première, technique,

(1) Cf. le texte ici, dans la préface arabe.

devait exposer l'opération mathématique ou la construction géométrique que requiert la duplication du cube. La seconde devait porter sur les circonstances spirituelles entourant le fait qui fut à l'origine du problème, ou découlant de lui. C'est que dans sa réponse, l'oracle cachait des intentions qu'il appartenait non plus au mathématicien pur de saisir et encore moins de résoudre, mais au sage, lequel dispose d'autres moyens et entend d'autres leçons. Ces deux ordres de considérations fournissent les grandes divisions de l'opuscule.

Le cube, on le sait, est l'un des « cinq corps platoniciens », appelés ainsi à cause de la fonction de ces cinq figures cosmiques dans le *Timée*, mais dont trois : le cube, la pyramide et le dodécaèdre sont de Pythagore, tandis que l'octaèdre et l'icosaèdre sont de Théétète, l'ami de Socrate et de Platon (1). C'est la figure de ce solide élémentaire que présentait précisément l'autel du temple de Délos, ou en tout cas l'autel dont la duplication mit les géomètres à si rude épreuve. Le premier chapitre de l'opuscule de Luṭfi est consacré à l'exposé de prolégomènes qu'il juge indispensables pour bien apprécier toute la portée de l'oracle : Ces prolégomènes définissent le carré, le cube, et les opérations nécessaires pour engendrer le double de chacune de ces figures. La mise en garde contre les tromperies que l'imagination courante peut apporter dans la réussite de ces opérations, est illustrée par l'intervention classique de qādis, sur le compte desquels on met toujours tant de choses. C'est seulement après avoir décrit les opérations mathématiques de la duplication du carré et de celle du cube, que Luṭfi fait intervenir la notion et les propriétés des *proportions*. Il

(1) C'est du moins ce que mentionnent les *Scholies d'Euclide*, XIII. Cf. l'excellente notice de A. Rivaud en tête de son édition du *Timée*, p. 82 (*Collection des Universités de France*).

anticipe ainsi sur les résultats qu'il apportera au chapitre II, dans les 6^e, 8^e et 9^e questions. Il y a peut-être lieu de s'étonner que la question des *proportions* et des *moyennes proportionnelles* ne soit ainsi traitée que postérieurement, en somme, à la réalisation de la duplication, puisque cette opération consiste précisément à trouver les moyennes proportionnelles entre deux cubes donnés. Mais d'autre part, ce sont les notions sous-jacentes à cette construction des moyennes proportionnelles, qui vont permettre à l'auteur de passer du problème purement mathématique à l'interprétation de la sentence rendue par Platon, et cela au moyen d'une déduction arithmologique de source néopythagoricienne, mais revue et élaborée par la science arabe.

C'est pourquoi il nous paraît indispensable ici de ne pas procéder par allusions, mais de rappeler, au moins très sommairement, comment le problème s'est posé aux géomètres grecs, et comment, à la lumière de cette genèse, s'éclaircissent les essais de solution (1). On ne prétend naturellement pas traiter ici ce problème en mathématicien ; le texte de Lutfi offre des difficultés qu'une confrontation d'ensemble pourrait mieux résoudre, mais que quelques rapprochements suffiront à faire apparaître en vue d'une utilisation de cette partie de l'opuscule par l'historien des sciences.

(1) On n'est pas en mesure d'apporter ici, comme il a été dit plus haut, un commentaire développé historique ou technique. On renvoie, pour l'essentiel, aux deux excellents articles de Hultsch, dans la *Realencyclopädie* de Pauly-Wissowa : art. *Arithmetica*, notamment §§ 26-29, 33, et art. *Geometria* §§ 8-12. On a dégagé de ces deux articles les indications qui ont paru indispensables pour situer la partie technique de l'opuscule de Lutfi ; leur devant l'essentiel, on n'a pas répété chaque fois la référence. D'autre part, ces deux articles indiquent en détail aussi bien les textes classiques grecs que la bibliographie des travaux modernes concernant ces textes. C'est donc là qu'on devra les chercher.

Si le « problème de Délos » consistait essentiellement à rechercher deux moyennes proportionnelles, quelle est sa place dans l'ensemble des travaux des géomètres grecs sur les « médiétés » et les proportions ? Nous voyons ici Luṭfi'l Maqtūl opérer en toute certitude la duplication du carré et du cube ; nous n'en avons pas la démonstration, mais nous sommes avertis que l'opération ne consiste pas, comme se l' imagine le vulgaire, à mettre une seconde figure à côté de la première ; non, l'opération est telle que le carré doublé doit contenir 4 fois le carré primitif, et le cube doublé doit contenir 8 fois le cube primitif. On a donc affaire à une proportion qui dans le premier cas est de 1 à 4, et dans le second cas, de 1 à 8. Seulement, il semble bien que cette notion de proportion soit dans l'opuscule, une constatation faite après coup ; la proportion résulte de l'opération, et l'auteur n'y touche à fond qu'au moment d'expliquer la sentence de Platon, lequel avait déclaré que l'opération ne pourrait réussir qu'une fois trouvées deux moyennes proportionnelles entre deux nombres donnés. Platon, en outre, aurait parlé en similitudes selon son habitude qui est d'user d'énigmes et de paraboles, et l'interprétation arithmologique consécutive semble non moins importante aux yeux de Luṭfi. Mais il se passe ceci, que lorsqu'il mentionne les « lignes » dont se servaient les géomètres grecs pour représenter les nombres (linéaires, plans ou solides), on ne retrouve pas exactement les équivalences que l'on aurait attendues, marquant les stades de l'opération. On nous fera remarquer que précisément le problème tel qu'il était posé par les géomètres grecs, en termes géométriques, n'était pas soluble, et que tout cela intervient après que Luṭfi a déjà réussi son opération. Entre eux et lui, il s'est donc passé quelque chose. C'est cela que l'on voudrait indiquer ici, sans plus.

La relation qu'un nombre quelconque a avec un autre, est désignée en grec par le terme de λόγος. Si la même rela-

tion se répète entre plus de deux nombres, ou de deux membres ($\delta\rho\sigma\iota$), ces couples se comportent $\acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}$ λόγον et la concordance dans les rapports s'appelle $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda\omicron\gamma\iota\alpha$, par exemple chez Aristote (*Eth. Nicom.* V, 31 a-31 b) et chez Euclide (*Elem.* V, def. 3-8). Les équivalences latines de ces termes furent respectivement *ratio* ou *portio*, *pro portione*, et *proportio*. Maintenant, pour constituer une « analogie » ou proportion, il faut au moins trois termes ; le moyen terme clôt alors le premier rapport et ouvre le second. Tel est le cas de la *proportion continue* ou $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda\omicron\gamma\iota\alpha$ $\sigma\upsilon\nu\eta\mu\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$ ou $\sigma\upsilon\nu\epsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$. Mais, si tous les membres diffèrent les uns des autres, si donc l'on a deux moyens termes ou deux « médiétés », la proportion est dite *proportion brisée* ou $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda\omicron\gamma\iota\alpha$ $\delta\iota\epsilon\zeta\upsilon\gamma\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$. Ces deux distinctions sont bien entendu parfaitement énoncées par Lutfi, ici à la fin du chapitre I^{er}.

Si la proportion est représentée comme l'égalité de deux différences, on a la proportion arithmétique (v. g. $3-2 = 2-1$). Mais la proportion peut reposer aussi bien sur la division ; elle est même, dans ce cas, plus facile à transposer sur d'autres grandeurs, à condition que celles-ci soient, par leur origine, des « grandeurs homogènes », et comme la transposition la plus ancienne et la plus répandue se rapportait au domaine géométrique, on appela cette proportion $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda\omicron\gamma\iota\alpha$ $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta}$, *proportion géométrique*. Le terme était déjà usuel au temps d'Archytas, le philosophe pythagoricien de Tarente (IV^e s. av. J. C.). Il définissait la proportion géométrique *continue* comme l'égalité des rapports du premier au second membre, et du second au troisième membre. Euclide (*Elem.* V, def. 1-8) en donna la fixation rigoureuse, s'agissant non plus de nombres mais de grandeurs en général. On trouve le terme chez Aristote (*Eth. Nicom.* V 1131 b 12), et chez Platon (*Timée* 31 C et 32 D), c'est l' $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda\omicron\gamma\iota\alpha$ tout court. Il y aura précisément à revenir sur ce passage de Platon. Bien entendu, ici encore c'est de cette proportion que Lutfi entend

analyser l'essence et les propriétés. On n'a pas à parler ici de la troisième proportion, la *proportion harmonique*, simplement mentionnée dans notre texte au rappel de l'œuvre de Pythagore.

Ceci posé, et reconnu que la proportion géométrique sous sa forme « continue » est telle que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, et sous sa forme « brisée », telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, nous pouvons progresser dans la genèse du « problème de Délos ». La proportion géométrique trouve une application particulière dans le cas des *nombres plans* (ἐπίπδοι ἀριθμοί) et des *nombres solides* (στερεοί ἀριθμοί), à condition que ceux-ci soient semblables les uns aux autres, c'est-à-dire si leurs facteurs sont tour à tour proportionnels les uns aux autres. Les premiers sont définis (Eucl., *Elém.* VIII, def. 17) comme les produits de deux nombres, et parmi eux ressortent particulièrement les *nombres carrés* ; les seconds, comme les produits de trois nombres, et parmi eux jouissent d'un rang spécial les κυβικοί ἀριθμοί, les *nombres cubiques*. Une autre considération de structure est capitale à retenir, car c'est en elle que trouvera son appui tout le raisonnement de Lulfi, c'est-à-dire le passage de la construction géométrique à la considération arithmologique. Tandis que le *nombre plan* fut comparé à un *carré* ou à un *rectangle*, le *nombre solide* fut comparé soit à un *cube* soit à un *parallélépipède rectangulaire*. À leur tour, les facteurs proportionnels de ces nombres furent regardés comme correspondant aux côtés homologues de ces figures. D'après Euclide — selon une affirmation correspondant à celle du *Timée* — deux nombres plans semblables comportent *une* moyenne géométrique, tandis que deux nombres solides semblables comportent *deux* moyennes géométriques. Si maintenant l'on cherche la moyenne géométrique des nombres carrés, elle résulte immédiatement de la formule de la proportion géométrique, car les racines des deux carrés étant respectivement a et b , la $\sqrt{a^2 b^2} = ab$, et cette racine est la moyenne

entre les deux nombre a^2 et b^2 . De même, pour trouver les deux moyennes proportionnelles de deux nombres cubiques, il faudra procéder à partir de leurs $\sqrt[3]{}$, que l'on désignera respectivement encore par a et b . Entre a^3 et b^3 il résulte immédiatement les membres intermédiaires a^2b et ab^2 , car on a : $\frac{a^3}{a^2b} = \frac{a^2b}{ab^2} = \frac{ab^2}{b^3}$.

Poursuivre cette tâche, cela consistait à considérer deux nombres quelconques comme des nombres solides et à les comparer d'après leur racine cubique. On peut dire que la question a été posée de bonne heure, mais à l'exception de Philon de Byzance qui semble avoir déjà utilisé le procédé arithmétique (vers 120 av. J. C.), jamais la tâche n'a été résolue par une voie directe. Les vicissitudes du problème de la duplication du cube, l'ingéniosité d'esprit qui fut dépensée pour résoudre le « problème de Délos » tiennent à cela. La question se ramenait au problème de calculer pour l'arête d'un cube donné, l'arête d'un cube deux fois plus grand. Au lieu d'évaluer le $\sqrt[3]{2}$ par la méthode arithmétique, c'est par différentes constructions géométriques, ou même par des moyens mécaniques, que l'on tenta de trouver entre deux droites données, deux moyennes proportionnelles. Ici même, dans l'opuscule de Lutfi, le jugement péremptoire du qâdî géomètre est fondé sur une vérification empirique, il n'en rend pas « raison » arithmétiquement ; l'opération pourtant est menée sans hésitation sur *tel* carré ou sur *tel* cube donné.

Evoker la série de ces tentatives, c'est nécessairement rencontrer ici la légende qui en indique la source. Or, cette légende qui fait de Platon l'initiateur de la solution, s'est développée en motifs dont le sens n'est plus purement mathématique ; c'est pourquoi il en sera parlé plus loin, puisqu'aussi bien, c'est elle qui d'Eratosthène à Plutarque est passée par des voies encore indiscernées chez Qazwini,

et c'est sa signification quasi-religieuse qui en définitive a motivé l'opuscule de Luṭfi.

Observons simplement pour la situation technique du problème, que pour doubler un cube donné, on supposait comme données, outre la droite qui représentait l'arête du cube donné, la droite deux fois plus grande. Si alors on découvrait les deux moyennes proportionnelles entre ces deux droites, la première moyenne proportionnelle représentait l'arête du cube cherché, deux fois plus grand. En dehors de tout ce qui se rattache à l'oracle de Délos, Hipparque de Chio, au dire d'Eratosthène, avait déjà résolu en effet le problème de doubler un cube donné. C'est lui qui aurait découvert que pour construire un cube deux fois plus grand qu'un cube donné, on devait intercaler entre les grandeurs 1 et 2, deux moyennes proportionnelles ; le cube de la première moyenne proportionnelle serait alors le cube cherché. Aucune difficulté dans la tâche de construire un cube huit fois plus grand, puisqu'entre 1 et 8 les deux moyennes proportionnelles sont 2 et 4, et $2^3=8$. Mais si d'autres nombres étaient proposés, les anciens géomètres renonçaient à la solution arithmétique directe ; ils n'évaluèrent donc pas, comme l'exigeait le problème de Délos, la grandeur $\sqrt[3]{2}$, mais ils cherchèrent par différentes voies, en supposant les grandeurs 1 et 2 comme des droites, à construire entre elles les deux moyennes proportionnelles, et à démontrer que le cube de la première proportionnelle était le double du cube primitif.

Comme on le verra ici au chapitre II, 6^e question, l'usage que fait Luṭfi de la construction des moyennes proportionnelles après avoir affirmé la nature de la duplication et réussi son opération sur *tel* cube donné, ne se montre pas exactement comme une application de ce qui vient d'être exposé. Dans la mesure où l'état du texte permet de se prononcer, on supposera, entre les deux, l'intervention d'autres

facteurs qu'il appartiendra à l'histoire des sciences dans le monde byzantin ou dans le monde arabe de préciser un jour. Les essais ont été nombreux dans le monde grec, recourant soit à des constructions géométriques, soit à d'ingénieuses inventions mécaniques. Parmi celles-ci le *μεσολάβος* d'Eratosthène(1) (mot construit d'après le terme *ἀστρολάβος*), tel que par le déplacement de deux tablettes rectangulaires mobiles parallèles à la verticale d'une autre tablette rectangulaire fixe, un peu d'habileté suffisait pour faire apparaître deux moyennes proportionnelles à deux droites données (cp. ici le mouvement abstrait qu'opère Lutfi pour expliquer la génération du nouveau cube). Parmi les autres solutions, la plus intéressante se présente comme liée à la théorie des sections du cône (Ménéchme, Apollonios de Perga). Si Platon a été présenté comme l'initiateur de cette dernière solution, il y a là l'interprétation spirituelle d'un fait ; nous voulons dire une interprétation qui, découlant du caractère même de la philosophie platonicienne, transpose en parabole le fait qu'historiquement parlant les sections coniques apparaissent tout d'abord comme appliquées à la solution du problème de Délos (2).

Tel n'est d'ailleurs pas le seul aspect qui associe étroitement le nom de Platon à cette affaire, et qui justifie l'insertion de l'opuscule de Lutfi dans le *Plato Arabus*. Dans ce qui a été indiqué précédemment au sujet de la construction des deux moyennes proportionnelles, un point doit tout particulièrement retenir l'attention. C'est que chaque *nombre* doit valoir en général comme *grandeur* au sens d'Euclide, et peut être considéré aussi bien comme représentant une ligne ou comme représentant une surface que comme représentant un cube. En termes généraux, le principe de la

(1) Cf. Wissowa, *Realencycl.* art. *Geometria*, § 11.

(2) Cf. Paul Tannery *La géométrie grecque*, Paris 1887, pp. 78-79.

proportionnalité peut s'énoncer ainsi : Entre deux nombres, ou deux droites, ou deux surfaces, ou deux corps donnés, peuvent être intercalés plusieurs nombres proportionnels, ou plusieurs droites, ou plusieurs surfaces ou plusieurs corps proportionnels, en une *analogie continue* (1). Non seulement cela est sous-entendu dans l'énoncé des proportions chez Luṭfi (chap. I *in fine*) mais l'importance majeure du principe ainsi formulé est qu'il écarte certaines objections, mentionnées par Proclus, contre l'affirmation de Platon dans le *Timée* (2). Même si l'on choisit des nombres, 1 et 8 par exemple, ces mêmes nombres aussi bien que leurs moyennes proportionnelles 2 et 4, sont à considérer comme des nombres solides qui s'enchaînent selon la proportion continue $\frac{1}{2}$. Mais il est également permis, conformément à l'usage général des anciens géomètres, de choisir pour les grandeurs, 1, 2, 4, 8 précisément des lignes comme symboles, et alors la première moyenne proportionnelle, élevée à la troisième puissance, donnera la grandeur 8. Proposée ainsi, l'équivalence est telle que la structure est considérée, et elle seule, chaque fois d'un point de vue *formel* ; qu'il s'agisse d'un développement inadmissible ou non, c'est par cette équivalence que Luṭfi passera précisément de l'opération de la duplication du cube, au « carré magique » de 100×100 , dont l'essence et les propriétés lui apparaissent analogues à celles de la

(1) Wissowa. *ibid.* § 10.

(2) A savoir, que le corps du Cosmos, étant solide, suppose deux médiétés. Par contre, Démocrite soutenait qu'entre deux nombres cubiques il peut arriver que s'insère *une seule* moyenne proportionnelle ; entre deux nombres plans, il peut arriver que s'insèrent deux ou même plusieurs moyennes proportionnelles. Cf. *Timée* 31^b-32^c, et la notice de Rivaud, *éd. cit.* pp. 72 sq. Cf. encore Hultsch, *art. cit.*, *ibid.*

duplication du cube. En effet, de même que 2, première moyenne proportionnelle entre 1 et 8, donne à sa troisième puissance : 8, de même 100 représente la première moyenne proportionnelle d'une analogie continue entre 10 et 10.000 (cf. chap. II, 8^e question). Le fait de bloquer ainsi ce prolongement arithmologique sur le problème de Délos, constitue pour le moment, la physionomie propre de l'opuscule de Lutfi. Elle ne doit pourtant pas être sans précédent, mais on doit se limiter ici à fournir ce document. Quoi qu'il en puisse être, la possibilité de ce prolongement est liée à la légende même du problème de Délos, qui fait de sa donnée non pas une initiative des hommes, mais la révélation d'un oracle. Il s'agit d'une origine religieuse entraînant la considération de causes célestes ou de conséquences morales. C'est sur quoi il nous faut insister maintenant.

IV. LA TRADITION

D'Eratosthène (276-196 av. J. C.), le célèbre président de la bibliothèque d'Alexandrie sous Ptolémée Evergète, déjà invoqué comme étant au principe de la tradition concernant l'intervention de Platon en exégète de l'oracle de Délos, on peut en vérité distinguer deux témoignages. Dans sa *Lettre à Ptolémée*, Eratosthène montre le problème de la duplication du cube déjà célèbre à Athènes, bien avant l'oracle rendu aux Déliens. Un poète tragique, non nommé, le porta même sur la scène. Minos, voulant élever un monument à son fils Glaukos, dit à l'architecte :

*Pour un tombeau royal, tu le prends bien petit ;
Il faut doubler le cube et ne pas t'y tromper (1).*

S'il n'est pas mentionné dans ce passage que Platon ait

(1) Cit. in Tannery, *la Géométrie grecque*, p. 110.

été mêlé au problème, par contre, dans son *Platonicien* (1) il racontait déjà que c'était au chef de l'Académie que s'étaient adressés les Déliens embarrassés par la réponse de l'oracle, après avoir consulté celui-ci sur les moyens de mettre fin à une peste terrible. Platon aurait rendu cet arrêt : « Si le dieu a fait cette réponse, ce n'est pas qu'il ait besoin d'un autel double, mais il a voulu reprocher aux Grecs de négliger les mathématiques, les blâmer de leur dédain pour la géométrie ».

Engagée dans cette direction, qui l'offrait immédiatement aux prises d'une herméneutique inépuisable en transpositions allégoriques ou tropologiques, l'édifiante légende devait aller se développant progressivement. Ce que nous trouvons chez Luṭfi en représente un stade très tardif, puisque l'exégèse opérée sur la base des correspondances et des similitudes rencontre non seulement une arithmologie d'inspiration néo-pythagoricienne, mais une fille bâtarde de celle-ci, qui aspire à des fins immédiatement et empiriquement contrôlables, la « science des carrés magiques ». En attendant, c'est à Platon lui-même que l'on finit par attribuer la solution pratique du problème. D'après Jean Philopon(2), c'est Platon qui aurait ramené la duplication du cube à l'invention de deux moyennes proportionnelles, réduction que cependant Eratossthène avait de son côté attribuée à Hippocrate de Chios. L'attribution expresse de cette solution à Platon figure également chez le géographe persan Qazwini ; nous la retrouverons chez Luṭfi'l Maqtûl. Il resterait à préciser la transmission de Philopon à Qazwini.

Mais le plus fin et le plus circonstancié des témoignages se rencontre chez Plutarque qui est revenu sur la question à plusieurs reprises. D'abord, pour ne parler que de l'aspect

(1) Théon de Smyrne, *Arithm.*, cap. 1.

(2) In *Aristot. Analyt. priora*, I, 7.

technique du problème de la duplication du cube, et de la seule solution qui fût digne du caractère de la philosophie platonicienne. Comme il a été rappelé plus haut, cette exigence est capitale, puisque la légende apparaît alors comme la projection de son sens spirituel dans l'histoire : c'est ici l'esprit qui engendre le fait. Bref, Platon aurait blâmé Eudoxe, Archytas et Ménechme d'avoir recouru, pour la duplication du cube, à des instruments et à des dispositions mécaniques, « d'avoir ainsi rabaissé jusqu'aux objets sensibles une science dont les spéculations doivent être exclusivement abstraites » (1). Si Platon est glorifié d'avoir séparé définitivement la géométrie de la mécanique et d'avoir réduit celle-ci au rôle secondaire qu'elle devait garder jusqu'à Archimède, il est à peine besoin d'observer quels blâmes le malheureux Lutfi aurait encourus de Plutarque, pour les pratiques suspectes qu'il se permet de rattacher ensuite à ce problème de Délos, en passe de devenir le mythe de l'âme oublieuse de la pure contemplation des Nombres purs.

Deux autres textes ont une importance capitale quant à l'exhaussement de la réponse de l'oracle de Délos, sinon à la hauteur d'un mythe de l'âme, du moins au rang d'une parabole, d'un pressant *rappel* spirituel. Dans le premier de ces textes (2), il est question des excellences de la dialectique, de son appartenance en propre au *logos* humain et, conformément au thème général du dialogue, du rôle de la conjonction *Si* dans cette dialectique, d'où la vérité doit

(1) Plutarque, *Quaest. conviv.* VIII, qu. 2, c. 1 ; *Vita Marcelli*, c. 14, V. cit. in Tannery, *op.cit.*, p. 79. Pour le caractère paradoxal de ce reproche, étant donné que la solution attribuée à Platon supposait précisément l'emploi d'un instrument, alors que celles d'Archytas et de Ménechme étaient aussi théoriques que possible, cf. Tannery, *ibid.*

(2) *De Ei Delphico* 386 E (*Plutarchi Scripta moralia*, ed. Didot, p. 472).

éclore. L'un des personnages du dialogue, Théon (1), assure alors que le dieu Apollon lui-même est souverainement expert en dialectique, comme l'attestent les difficultés rencontrées pour résoudre la plupart de ses oracles. Nous avons ainsi une première clef : il va s'agir d'une exégèse dialectique, du passage du Même à l'Autre, retrouvant l'Autre dans le Même. En effet Théon poursuit immédiatement en invoquant l'exégèse que donne Platon de la réponse de l'oracle aux Déliens. Ceux-ci avaient reçu l'ordre de rendre leur autel deux fois plus grand, opération qui exigeait, remarquait-il, une souveraine expérience des choses géométriques. Mais ce n'est pas l'autel que le dieu désignait ; il entendait exhorter les Grecs à *être* vraiment géomètres. « En rendant des oracles ambigus, le dieu exalte et confirme la dialectique, comme une nécessité pour ceux qui sont destinés à vraiment le comprendre ».

Mais qu'est-ce qu'*être* vraiment géomètre ? La pleine signification de cette exhortation mise au jour par la dialectique, est réservée à un dernier texte où la réponse de l'oracle manifeste en effet une portée spirituelle immense (2). Cette fois, il y a toute une mise en scène, et le jugement rendu par Platon verra sa source remonter jusqu'à la sagesse d'un prophète égyptien. Le personnage qui prend la parole à ce moment du dialogue, Simmias, raconte que le roi de Sparte Agésilas avait dérobé dans le tombeau d'Alcmène une tablette couverte d'un texte en caractères inconnus ; il envoya alors un messenger, Agétoridas, à Memphis, près de Khonouphis le prophète, afin d'obtenir, si possible, le déchiffrement de ce texte. Le messenger arriva en Egypte à une époque où précisément y séjournaient, philosophant de concert, le

(1) Sur ce personnage des dialogues de Plutarque, cf. Wissowa, art. *Theon*, col. 2059 sq.

(2) *De Genio Socratis*, VII, 579 B (*ed. cit.*, p. 693).

narrateur, Platon lui-même et Ellopion de Peparèthos. Khonouphis consacra trois jours entiers à des recherches que nous appellerions « paléographiques », et réussit à forcer le secret du texte. Les caractères étaient, paraît-il, ceux de cette grammaire que pratiquait Héraklès fils d'Amphytrion, sous le règne de Protée. Mais l'essentiel était le contenu : ordre était donné aux Grecs de célébrer des concours en l'honneur des Muses. Dieu leur signifiait par les lettres du texte, d'en finir avec les guerres, de déposer les armes, pour ne plus connaître d'autres combats que ceux de la philosophie, et ne plus mener d'autre vie que celle conforme au *logos*. Evidemment, la sentence de Khonouphis le prophète frappa d'autant plus nos trois philosophes que leur profession les mettait d'avance en accord avec elle. Les voici naviguant ensemble, toujours tous les trois, sur la route du retour. C'est alors qu'un messager des habitants de Délos les rencontre au voisinage de la Carie. Il s'adresse à Platon, comme au suprême expert dans les choses géométriques, pour lui confier l'embarras où l'oracle les avait mis. Ils avaient fait des essais ridicules, mis un second autel à côté du premier, ignorant tout de la proportion de 1 à 8. Platon précisément alors se remémore la sagesse du prophète égyptien. Trait significatif pour l'arrière-fonds spirituel sur lequel se projette dorénavant le problème, et rien de surprenant pour nous, puisque cela fait partie de la vaste élaboration d'où surgirent le *Corpus* hermétique et tous ces pseudépigraphes qui devaient ensuite poursuivre leur carrière dans le monde arabe.

C'est donc conformément à l'inspiration de Khonouphis, que Platon va rendre sa sentence. Elle concorde parfaitement avec ce que nous savons déjà. Le dieu a voulu faire honte aux Déliens de leur négligence de la géométrie. Le problème qu'il leur a imposé n'est pas en effet de ceux dont on improvise empiriquement la solution, avec un entendement

à courte vue. Il présuppose la connaissance de la nature et des propriétés des lignes, puisqu'il exige que l'on trouve la véritable proportion par laquelle seule une figure cubique peut être doublée, toutes ses dimensions recevant un accroissement égal. Certes, on peut leur trouver des géomètres sachant réussir cette opération : Eudoxe de Knide par exemple, ou Helicon de Cyzique, mais en vérité Apollon se moque bien de ces travaux de maçonnerie. Ce qu'il a voulu, c'est ordonner à tous les Grecs d'en finir avec leurs guerres et les misères qu'elles engendrent pour toute la Grèce, d'en finir avec les passions turbulentes et les ambitions, pour vivre les uns avec les autres dans la paix et les travaux de l'esprit.

L'essentiel de ces éléments, leur esprit en tout cas, nous les retrouvons au XIII^e siècle, dans la géographie arabe de Qazwini(1). Un accident pourtant s'est produit. Il n'est plus question de Délos ni de l'oracle d'Apollon ; c'est un prophète d'Israël qui est consulté par les contemporains de Platon, lesquels ne sont pas davantage déterminés. Chez Luṭfi'l Maqṭûl, même modification, avec cette précision que c'est dans le temple que la peste éclate. Comme il est dit que ce temple avait été bâti par le prophète David, on a l'impression que la graphie arabe aura pu être cause, à un moment donné, de la confusion chez un copiste peu éclairé. Mais comme Luṭfi, en plein XV^e siècle, précise qu'il y avait un grand orgue dans le temple, et comme d'autre part jamais l'Orthodoxie orientale n'a admis l'orgue dans les églises mêmes, on ne discerne pas très bien par quelle voie s'amoncellent les confusions chez notre auteur, dont l'humour est d'autant plus savoureux. En tout cas, à ces deux stades tardifs de la tradition, XIII^e et XV^e siècle, la situation est

(1) *Athar al bilâd*, ed. Wüstenfeld, p. 45. Cf. Le texte ici dans la préface arabe de M. Şerefeddin Yaltkaya.

constante : c'est au sage grec, à Platon, que l'on vient demander d'éclaircir la sentence inapplicable d'un prophète d'Israël.

Suivons de plus près le développement de Luṭfi. Les données techniques du problème et la solution pratique sont exposées comme prolégomènes dans le premier chapitre. Le début du chapitre second expose la situation des habitants d'une cité anonyme et leur recours à Platon, tout cela conformément à la tradition. La réponse de Platon se complique quelque peu : une altération sensible dans la composition du *trivium*, substitué aux *quatre* sciences propédeutiques et dans lequel figure la science des « carrés magiques ». La conséquence va en être décisive, lorsqu'il s'agira de trouver, à l'imitation lointaine de Plutarque, le sens tropologique de la sentence. Mais avant de passer à cette exégèse, Luṭfi fait très honnêtement le catalogue des questions à traiter. Avec un bon sens désarmant, il les traite toutes également, texte en main. Il faut d'abord savoir pourquoi cette peste s'était produite dans le temple (la question était en effet nouvelle), puis pourquoi le fait d'avoir manqué la duplication du cube amena par contre le redoublement de la peste. N'attendons pas une insinuation subtile : par exemple, que le quart de renoncement aux passions et aux guerres que représentait cette opération engendrant misérablement un quart du cube exigé, loin de faire éclore la paix spirituelle du renoncement total, ne faisait que déchaîner des maux nouveaux. Non, Luṭfi raisonne à la fois avec un sens tout positif et la conscience d'un médecin à qui toutes ces pratiques sacrificielles sont d'une hygiène suspecte. Certaines observations fort justes, permettraient d'ailleurs de remonter ici à Avicenne, source intarissable de la médecine en Orient. Complétant ces observations d'ordre positif, fait suite la 6^e question expliquant pourquoi Platon mentionne les moyennes proportionnelles, mais de telle façon que nous ne sommes pas bien sûrs que Luṭfi fasse clairement comprendre

comment il en comprenait lui-même la relation avec le problème primitivement posé. C'est seulement après tout cela que se dessine le couronnement de l'opuscule : l'explication de ce que Platon a voulu signifier par énigme, à savoir l'établissement d'un carré magique de 100×100 (*wafq*) et son insertion dans l'édifice. Cette interprétation est appelée par la mention de la science du *wafq* dans le *trivium*, et est soutenue par cette loi d'équivalence de structure formelle mentionnée ici au paragraphe précédent ; loi qui permet de considérer un nombre produit de trois facteurs, soit comme nombre cubique, soit comme représentant la figure correspondante (ici un « carré » magique cubique).

Est-ce dans cette association que se manifeste essentiellement l'originalité de Luṭfi ? Comme nous ne connaissons pas encore de traité antérieur équivalent, on peut le dire. Dès lors, la 8^e et la 9^e question vont comporter des développements plus longs, et prendre un ton plus solennel. Le principe est simple ; puisqu'il s'agissait de la cessation totale de la peste, il fallait agir non seulement sur les causes terrestres et physiques, mais sur les causes célestes et divines, cette distinction ayant été déjà établie par Avicenne. Pour agir sur les secondes, il fallait, en vertu de la grande loi des « correspondances » universelles, une opération « analogue » à la première ; découvrir celle-ci, c'était réaliser l'herméneutique du sens caché dans la sentence de Platon. Le souci de considérer les choses « célestes et divines » est conforme, certes, à l'enseignement de Plutarque, et pourtant il va se borner à engendrer ici une « technique » prolongeant celle qui agit sur les causes physiques. Un sentiment initiatique ne l'en inspire pas moins, tout comme chez Plutarque la sentence de Platon était directement inspirée par la sagesse du prophète égyptien. La science invoquée par Luṭfi, remonte à une initiation primitive donnée par Dieu même au premier homme. A celui-ci se suspend la chaîne, l'*isnad* des

prophètes et des Sages : Abraham, Moïse, Salomon, Pythagore, Thalès, Archimède, Dorothéos. Rien de surprenant non plus dans cette filiation. Elaborée dans les cercles hermétiques hellénistiques, elle correspond en gros à une vision de « l'histoire de la philosophie » semblable à celle que nous offre Šahrazûri, comme on le signalera au passage, notamment quant au rôle de Pythagore.

Démêler l'évolution des motifs néo-pythagoriciens dans le monde arabe ne peut entrer dans notre propos ; c'est déjà une tentative presque désespérée lorsqu'il s'agit du monde grec. La science du *wafq* ou carré magique, c'est-à-dire du carré en échiquier divisé en compartiments dans lesquels sont disposés, suivant des règles déterminées, des nombres, des lettres ou même des mots, est représentée par toute une littérature (1). Dans l'encyclopédie des Frères de Bašra (*Ikhwân al Šafâ*) le remplissage en est décrit au moyen de l'indication de coups d'échecs. Comme le suggère le rapport établi entre les carrés et les planètes, il faut sans doute remonter à Thâbit ibn Qurra (826-901) et aux Sabéens de Ḥarrân. Les sceaux planétaires sont traités chez al-Bûni, dont le livre est probablement utilisé par Luṭfi (8^e question), et cette conjugaison des carrés avec les planètes et les métaux nous conduit en Occident jusqu'à l'*Occulta Philosophia* d'Agrippa von Nettesheim (1533) et à la *Practica Arithmetica* de Cardan. Mais pour en rester à notre texte, on notera essentiellement le rôle central reconnu à Pythagore (cf. 9^e question), condisciple des élèves de Salomon et à qui est attribuée finalement la dignité de prophète. Il faudrait ici faire la soudure avec l'« hagiographie » grecque de Pythagore.

Certes, nous connaissons quelques uns des dogmes pythagoriciens fondamentaux : le culte de la *tétractys* ; la théologie

(1) Cf. l'art. *wafq* de J. Ruska, in *Encycl. de l'Islam*. Bibliogr. in fine.

arithmétique basée sur les correspondances de chacun des nombres de la *décade* avec le nom et l'essence des divinités ; la relation de la tétractys avec l'oracle de Delphes par l'intermédiaire de la légende des Sirènes, parce que celles-ci seraient des êtres prophétiques et omniscients dont l'œuvre est l'harmonie des sphères, considérée elle-même comme la suprême révélation de l'oracle de Delphes(1). Multiplier ces rappels ne serait utile que s'il s'agissait d'un dépouillement comparatif des sources grecques et des textes arabes. Nous considérons fermement que le philosophe a ici une tâche sérieuse à mener à bien, à la condition de procéder en philosophe et d'en finir avec les interprétations trop souvent données comme des faits ; qu'on renonce à dire, par exemple, que les conceptions scientifiques de l'Antiquité s'expliquent par le folklore ; qu'au lieu de réduire à des « origines » qu'on suppose, on s'applique à conserver et à analyser « ce qui se montre ». L'intuition pythagoricienne du Nombre donne lieu à la rapide esquisse par Luṭfi'l Maqtûl, dans le traitement de sa 9^e et dernière question, d'un *déchiffrement* de l'histoire, le mot étant à prendre ici littéralement. Le secret du Nombre, qui est le secret du Nom Sublime de Dieu, du Nom qui n'est pas révélé, est déposé en chacun des Sages qui se le transmettent ; Alexandre le Grand et, après lui, les rois Sassanides de Perse, le connaissent. Puis apparaît le révélateur du Nom Sublime, le prophète Moḥammad ; il brise le « charme » inscrit sur l'étendard des Sassanides, comme Parsifal les « charmes » de Klingsor. Est-ce si sûr ? Le carré magique réapparaîtra sur l'étendard de l'Islam. Finalement, l'opuscule s'achève en dévoilant l'arrière-pensée proprement

(1) Cf. A. Delatte, *Etudes sur la littérature pythagoricienne* Paris, 1915, p. 260 sq. — On sait que le *Kitâb al-milal* de Šahrastâni (ob. 469/1071) est une grande source d'information concernant la transmission en arabe de ces spéculations sur le Nombre.

philosophique de son auteur. Les degrés de l'Être répètent les degrés de la hiérarchie des Nombres ; les purs concepts, les universaux, ont été également créés d'après elle, de même que les pures Intelligences, c'est-à-dire les Anges qui régissent chacune des sphères célestes. Alors, dernière application de l'enseignement tiré du problème de Délos : une pensée qui se multiplie par soi-même. Il faut considérer chaque fois chaque être avec la totalité de sa série, chaque degré d'être avec la totalité des degrés. Le carré — dont ici le nombre est un nombre cubique ! — représente donc la vision cosmique complète. Chaque être y est présent avec toutes les relations qui le multiplient ; chaque relation qui le définit est une multiplication de lui-même par l'Autre. Il est vraiment regrettable que Luṭfi'l Maqtûl n'ait pas insisté davantage !

Pourtant, on ne peut pas ne pas marquer la longue distance qui sépare les *Theologoumena arithmetica* en général (1) et toutes les « techniques », médicales ou autres, que l'on prétend en tirer, bref la déchéance d'une interprétation métaphysique du monde en un attirail de laboratoire suspect ; déchéance qui peut être contemporaine du règne même de la vision métaphysique, ou lui succéder après des siècles, cela n'y fait rien. Chez Luṭfi, comme chez tant d'autres, nous rencontrons les vestiges d'une interprétation philosophique du monde par son « chiffre », jointe à des pratiques et à un empirisme qui n'ont plus rien à voir avec la sagesse « théorétique », tant il s'en faut qu'elles en soient l'origine. Le paradoxe, et l'infirmité, de cette coexistence impose au philosophe comme à l'historien en souci du phénomène de la science et des sciences, une analyse *phénoménologique*.

Le Nombre était considéré comme l'essence du Monde,

(1) Cf. par ex. in Delatte, *op. cit.*, pp. 231-245, le si intéressant fragment de Clément d'Alexandrie.

et de l'Ame du Monde, à la fois présent en ce monde qu'il anime et ordonne en un *Kosmos*, et différent de lui puisque ce *Kosmos* lui est soumis ; c'est là un bien commun à toute pensée qui s'est nourrie du *Timée*, aux écrits des derniers néo-platoniciens et à l'arithmologie néo-pythagoricienne en général. Mais il se produira ensuite une déchéance du Nombre en une existence autonome comme celle d'un *objet*, non pas qu'il fût repoussé dans l'En-soi de sa transcendance, ni même qu'on ait voulu l'incarner enfin en quelque chose de sensible, puisque déjà il était présent au *Kosmos*. Non, le processus est autre. L'effort de l'entendement vise à saisir ce Nombre dans sa qualité spécifique, à l'isoler de la réalité ordonnée par lui, pour à son tour le soumettre et disposer de lui, en l'ordonnant à quelque matière ou objet confectionné par une technique qui ira en se développant. On voudra, en somme, produire techniquement les effets métaphysiques du Nombre idéal. Cette conception étrange, que n'ont découragée ni l'insuccès ni l'absurdité, présuppose la dégradation totale de l'intuition mythique première. Mais en même temps, par cette dégradation même, elle représente une transition vers la *technique*, puisque le propre de celle-ci est de « désenchanter le monde », de substituer aux volontés d'anges ou d'âmes administrant le *kosmos*, un système de causes mécaniques dont le déclenchement puisse être assuré. Pourtant, ce n'est pas si sûr. Il est vrai que l'on « excuse » l'alchimie, par exemple, en disant qu'elle fut l'enfance de la chimie moderne. En fait, elle poursuivait une fin qui lui fut propre, si même elle ne fut pas, très souvent, la notation mystérieuse dont la clef n'est livrée finalement qu'à l'initié, capable de saisir que l'âme est elle-même la Magie, celle qui transmue toutes choses, et que le monde est ce que le fait la connaissance. Le cas n'est guère différent pour deux autres *sciences*, telles que l'astrologie ou l'arithmologie : l'âme étant elle-même un Nombre qui se meut,

dans l'harmonie du monde et ses « organes » doivent se retrouver les nombres correspondant au Nombre de l'âme. Chaque fois qu'advient une situation-limite, où l'on perd la force et la vérité de cette intuition métaphysique pure, sans vouloir renoncer pourtant au monde qui vient « après la *physis* », l'esprit enfante l'absurde et assiste à sa propre déroute. Le curieux mélange dont l'opuscule de Luṭfi'l Maqtūl est un cas typique, retient autant l'attention du philosophe que de l'historien.

V. LES LACUNES

Pour que le contexte historique de cet opuscule fût mis en une lumière vraiment satisfaisante, il faudrait répondre à d'autres questions. Il faudrait l'éclairer depuis les débuts des travaux mathématiques en langue arabe, depuis la transmission des œuvres des mathématiciens grecs, qui fut assurée par des traducteurs tels qu'al-Ḥajjāj ibn Maṭar et Qoṣṭa ibn Lūqā (220/835) (1). Deux grandes observations ont été faites. La première, c'est que la connaissance du « problème de Délos » n'était pas parvenu jusqu'aux Arabes (2). Inutile d'y insister. La seconde concerne le caractère général de la

(1) On sait qu'après vingt-deux ans d'interruption, l'édition de la traduction arabe d'Euclide par Ibn Maṭar, commencée jadis par Besthorn et Heiberg, a pu être poursuivie. Cf. *Codex Leidensis 399. I. Euclidis Elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum commentariis al-Narizii*. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt G. Junge, J. Raeder, W. Thomson, Partis III. fasc. II. Hauniae, 1932. Les circonstances ne nous ont malheureusement pas permis de confronter notre texte avec cette édition qui contient précisément la théorie des proportions.

(2) Par ex. Lippert. Cf. ici préface arabe. A cette dénégation répond, en attendant mieux, le témoignage formel de Qazwini.

culture au début de l'empire ottoman, et la littérature de langue arabe éclore en cette période. Que la science islamique ait été déjà alors quelque peu pétrifiée et qu'il ne faille plus en attendre une très grande originalité, cela ne soulève guère de polémique. Un point fort important reste en suspens. Une influence quelconque de la science byzantine sur la science islamique de cette époque est-elle démontrable ? Si elle ne peut l'être jusqu'ici en toute certitude, elle apparaît vraisemblable, en particulier chez le libre esprit que fut notre bibliothécaire-philosophe ; l'ensemble de ses écrits mériterait d'être étudié en ce sens (1). Vue leur dispersion, on a dû se limiter ici à un opuscule et ajourner la démonstration à plus tard.

Posée ainsi, la question est d'ailleurs enfermée en un cadre trop étroit ; il faut penser à un processus beaucoup plus large et beaucoup plus complexe, attestant nettement en tout cas un processus inverse de retransmission. A Byzance, l'époque des Paléologues fut particulièrement féconde en travaux de mathématiques et d'astronomie, et l'on assiste à un des plus remarquables exemples de restitution littéraire (2). Chose curieuse, les Grecs redécouvrirent, dans ce domaine technique s'entend, la science de leurs propres ancêtres par l'intermédiaire des travaux arabo-persans. C'est vers la fin du XIII^e siècle que les Grecs furent en contact avec la science persane. Des textes entiers furent traduits : entre Byzance et la Perse, jouèrent un rôle précieux d'intermédiaires plusieurs savants de l'empire de Trébizonde, tels Grégoire Chioniadès, et Manuel, prêtre de Trébizonde, qui fut le maître de Georges Chrysokolokès. Mais ce fut en même temps

(1) Cf. la question posée par Brockelmann, II, 223.

(2) Cf. Krumbacher, *Geschichte der byzantinischen Literatur*, 2^e Aufl. p. 622 sq.

l'occasion de remonter aux sources ; on lut Théon et Ptolémée dans l'original, et on lisait aussi les œuvres persanes en traduction. Si passionnantes que soient les recherches en ce domaine où s'enchevêtrent et se fécondent deux cultures, il faut avouer qu'elles sont tout juste esquissées. Elles devraient progresser simultanément « par les deux bouts ». Nous manquons encore d'éditions et d'un exposé systématique pour l'ensemble des œuvres de ce géant, à la fois théologien et astronome, philosophe, mathématicien et mystique, que fût le persan Nâsir al-Din Tûsî (ob. 672/1273). Quant à un contact personnel du bibliothécaire de Mahomet II avec les hellénistes de Constantinople, il y a pour en rendre vraisemblable l'hypothèse, l'entourage même du sultan, tel que l'explique son goût pour la littérature grecque traduite en arabe et en persan, goût mentionné par son biographe Kri-toboulos d'Imbros. Ici encore nous rencontrons un savant de Trébizonde, Georges Amyroulzés, théologien byzantin fort connu par ailleurs († 1479). Georges Amyroulzés était un haut dignitaire de la cour du dernier basileus de Trébizonde, David Comnène, au moment où cet empire tomba entre les mains des Turcs (1460). Il fut emmené par eux, et travailla dorénavant comme helléniste chez le Grand Seigneur. Notamment, pendant l'été 1461, il aida Mahomet II dans l'étude de la *Géographie* de Ptolémée, dont il établit vers 1465, une traduction en arabe (1).

Quoi qu'il soit, le cas d'une telle retransmission ou réinvention n'est pas unique. Les Arabes n'ont-ils pas en somme retransmis à leur tour à l'Occident le savoir qui leur avait été préalablement transmis par les Chrétiens d'Orient, grâce aux traductions faites du grec en syriaque au IX^e siècle ? Le problème d'une influence de la science byzantine

(1) Sur cette intéressante activité, cf. A. Adnan, *op. cit.*, pp. 26 sq.

chez Luṭfi et ses contemporains turcs, se complique donc de ces échanges antérieurs tels que les échanges entre la Perse et Byzance, mais en même temps ceux-ci le simplifient en montrant d'ores et déjà le terrain commun. Bien entendu, ces influences ne jouent jamais en sens unique. Pour ne parler que de la « science des carrés magiques », il y eut aux confins des XIV^e et XV^e siècles, un savant byzantin, Manuel Moschopoulos, qui s'en était activement occupé (1). C'est leur complexité écrasante qui a retardé jusqu'ici l'élaboration de ces « matériaux » multiples (2). Il faut que se trouvent réunis intérêts et sympathies en même temps que compétences diverses ; lorsqu'elles s'enchevêtrent, il est parfois difficile de satisfaire également aux exigences du philologue, du philosophe et du mathématicien (3). Le second exigera surtout l'analyse des *structures*, l'insertion de chaque élément dans sa vérification, c'est-à-dire dans « ce qui le rend-vrai », la participation commune à un même « phénomène ».

Il faut alors ajouter ceci. Le concept d'une « philosophie arabe » offre tant de difficultés et d'équivoques que beaucoup ont renoncé à ce terme ; mais le terme de « philosophie musulmane » n'est pas beaucoup plus heureux pour

(1) Cf. Krumbacher, *ibid.*, p. 624.

(2) Comme type d'excellente enquête, portant, en un domaine limité, sur la matérialité des données, il faut citer : W. Eichner, *Die Nachrichten über den Islam bei den Byzantinern*, in *Der Islam* 1936, pp. 133-162 et 197-244.

(3) Cf. la thèse, fort soutenable d'ailleurs, de Max Krause, in *Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker*, que le travail essentiel dans les recherches de mathématiques et d'astronomie islamiques, incombe en premier lieu au philologue. L'arabisant est d'accord, mais l'historien des mathématiques aura quelques objections. (cf. la recension de K. Garbers, in *Der Islam*, 1937, pp. 322 sq). Faut-il, pour traduire, retrouver toujours les équivalences du lexique technique moderne ? On dira que notre question sous-entend peut-être une apologie personnelle anticipée !

désigner le même phénomène que celui auquel on pensait par le premier terme. Parallèlement, il s'en faut encore de beaucoup, que le concept de « philosophie byzantine », infiniment plus légitime et facile à délimiter, le soit déjà parfaitement. Il a fallu, il faudrait peut-être encore, se libérer du « classicisme » étroit qui a fait négliger systématiquement, sauf exception, les productions philosophiques de l'antiquité tardive, celles des derniers néo-platoniciens notamment. On a perdu de vue la continuité entre la « grécité » classique et celle de Byzance. Pourtant, c'est la vérification dans le détail, des différences pressenties à l'égard de la scolastique latine, qui permettra d'en restituer la signification historique et la valeur durable (1). Semblablement, toute confrontation entre « scolastique arabe » et « scolastique latine », qui tendrait à délinir par exemple, platonisme ou aristotélisme au Moyen-Age, en omettant la situation philosophique et théologique contemporaine à Byzance, commettrait délibérément un vice d'enquête. — On dira que toutes ces réflexions ont surtout le caractère d'un « programme ». Mais il appartient à un homme tel que Luṭfi'l Maqtûl, placé au carrefour des univers spirituels grec-byzantin, persan, arabe et turc, d'en susciter d'assez ambitieux (2).

Istanbul, avril 1940

(1) Cf. Vlăd. Valdenberg, *Sur le caractère général de la philosophie byzantine* (*Revue d'Hist. de la Philos.* 1929, III). cf. rec. de K. Praechter in *Byzantinische Zeitschrift*, 1929, pp. 313-315.

(2) Le mss. qui a servi de base à l'édition du texte, est le cod. Univ. Istanbul AY. 1458, fol. 122^b-125^b. C'est un important recueil de grand format : 36 × 21 (25, 5 × 11, 5), 29 lignes par page, de date récente (1236 H.), contenant une cinquantaine de traités, principalement de contenu philosophique et mystique. Seul le mss. Leyde 1229 est mentionné dans *Brock.*, II, 235.— Le mss. provenant de la bibliothèque de feu Ismaïl Saïb Efendi est d'époque récente.

TRAITÉ DE LA DUPLICATION DE L'AUTEL

PAR

MOLLÂ LUTFI'L MAQTÛL

Gloire à Dieu, Seigneur des mondes ; la *Prière* soit sur Son prophète Moḥammad et sur toute sa famille.

CHAPITRE PREMIER

**Prolégomènes par lesquels il est indispensable
de commencer ce traité.**

Le *carré* est une surface comprise entre quatres côtés égaux et parallèles. Deux lignes sont parallèles, lorsque leur position réciproque est telle qu'il ne peut y avoir de rencontre entre elles, ni par l'une ni par l'autre de leurs extrémités, même si on les prolongeait, par l'une quelconque de leurs extrémités, jusqu'à l'infini.

Le *cube* est un solide compris entre six surfaces égales, conformément à la description donnée dans le Commentaire des *Mawâqif* (1). Mais il est préférable de le définir en disant

(1) Comme il a été dit dans l'introduction § 1, il s'agit vraisemblablement du commentaire que Sinân Pâšâ, le maître de Luṭfi'l Maqtûl, écrivit sur la grande encyclopédie d'al-Ījī. Mais il a été rappelé également que Luṭfi avait, lui aussi, partiellement commenté cette encyclopédie (le début du 2^e livre seul). En outre il en existe, parmi plusieurs autres, un commentaire de Khâṭib Zâdeh, celui-là même qui rendit la *fatwâ* entraînant la mort de Mollâ Luṭfi.

que le cube est un solide à trois dimensions égales ; — préférable, parce que la réalité du cube est ainsi représentée selon son essence, tandis que dans le premier cas, elle n'est représentée que par son aspect accidentel. Par exemple, une maison de dix coudées de longueur, de largeur et de hauteur est un cube.

Multiplier une ligne par une autre signifie engendrer une surface dont deux des côtés parallèles représentent la ligne multiplicande, les deux autres côtés également parallèles représentant la ligne multiplicatrice. Par exemple, lorsque nous multiplions la ligne AB par la ligne CD , la surface $ABCD$ est engendrée (fig. 1).



Fig. 1

Cela s'explique de la manière suivante : la multiplication d'un nombre par un autre nombre consiste en ce que chaque unité du premier corresponde une à une avec les unités de l'autre. Ainsi, le multiplicande est répété autant de fois que le multiplicateur a d'unités ; par exemple, la multiplication de 3×4 consiste en ce que chacune des unités formant le nombre 3, corresponde à chacune des unités formant le nombre 4, si bien que toutes les trois se trouvent répétées chacune quatre fois ; de la sorte se produit le nombre 12. Par analogie, nous dirons que la multiplication d'une ligne par une autre ligne consiste également en ce que l'une des deux lignes rencontre l'ensemble de la quantité qui est dans l'autre. Seulement, il n'est pas possible d'appliquer les lignes l'une à l'autre dans l'ordre de la largeur, puisque la ligne n'a pas de largeur ; de la sorte, l'une des lignes s'évanouirait dans l'autre. La quantité ne serait pas davantage accrue par cette application dans l'ordre de la largeur, puisque cela reviendrait à multiplier ce qui est absolument sans quantité par quelque chose qui possède une quantité. Or, la multiplication d'un ordre dépourvu de

quantité n'est d'aucun profit pour engendrer une quantité ; c'est comme multiplier 1×1 . Non, ce qu'il faut c'est supposer l'une des lignes, telle que la ligne A B, et abaisser à son extrémité une perpendiculaire telle que la ligne C D.

On déplace alors la ligne C D perpendiculairement à la ligne A B jusqu'à l'autre extrémité de celle-ci, tout en imaginant qu'elle demeure fixe en sa position première. On fait de même pour la ligne A B, je

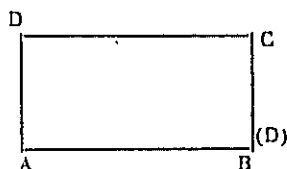


Fig. 2

veux dire qu'on la fait progresser perpendiculairement à la ligne C D jusqu'à l'extrémité de celle-ci, tout en imaginant qu'elle demeure fixe en sa position première. De la sorte, chacune des deux lignes aura rencontré l'ensemble de la quantité qui est dans l'autre, ce qui répond au concept de la multiplication. Ainsi se trouve engendrée la surface A B C D.

Procède de façon analogue à la multiplication de la surface par la surface, pour le produit qui en est le solide. Le solide est engendré lorsque l'on place les deux surfaces perpendiculairement l'une à l'autre par l'extrémité, et qu'on les fait ainsi glisser l'une au long de l'autre, selon le procédé que nous venons de décrire plus haut. Mais le solide ne serait pas engendré par l'application des surfaces l'une à l'autre dans l'ordre de la profondeur, car la surface n'ayant pas de profondeur, l'une des surfaces s'évanouirait dans l'autre. Il faut dire encore que la multiplication de la surface par la hauteur engendre un solide présentant six surfaces ; les deux lignes parallèles dans chaque surface représentent la hauteur, et les deux autres lignes parallèles représentent le côté de la surface multiplicatrice, ou le côté de la surface.

Le *carré*, c'est ce qui est engendré par la multiplication de la ligne par elle-même.

Le *cube*, c'est ce qui est engendré par la multiplication de la surface carrée par elle-même.

Le *volume du solide*, c'est le produit obtenu en multipliant d'abord sa longueur par sa largeur, et ensuite la surface ainsi obtenue, par la hauteur.

La *duplication*. Doubler une chose signifie la faire devenir deux fois telle qu'elle était. Cela ne peut s'entendre que de ce qui est quantité. Le *doublé* peut former une quantité discrète ou une quantité continue. Doubler la quantité discrète, c'est-à-dire le nombre, signifie faire devenir les unités qui la composent deux fois telles qu'elles étaient, par exemple porter le nombre 5 au nombre 10. Quant à la quantité continue, c'est-à-dire l'étendue et la dimension, elle présente ou bien une dimension unique, c'est-à-dire la longueur, telle que la ligne; ou bien deux dimensions sans plus, c'est-à-dire la longueur et la largeur, tel le cas de la surface; ou bien trois dimensions, c'est-à-dire la longueur, la largeur et la profondeur, et tel est le solide mathématique. La duplication de toutes ces quantités consiste à les rendre deux fois égales à ce qu'elles étaient, dans leurs dimensions respectives. Pour ce qui ne présente qu'une seule dimension, la duplication porte sur cette dimension, c'est-à-dire que l'on rend cette dimension unique deux fois équivalente à ce qu'elle était. Pour ce qui présente deux dimensions, la duplication porte sur ces deux dimensions, c'est-à-dire que l'on rend deux fois égale à elle-même la totalité de ces deux dimensions, en tant qu'elles constituent toutes deux une totalité. Donc si nous ajoutions un carré de cinq coudées de côté à un autre carré dont le côté serait également de cinq coudées, nous n'aurions nullement ainsi la duplication du carré, car la duplication ne porterait que sur la dimension d'un seul des côtés, ou plutôt la somme de ces deux carrés n'équivaldrait qu'à la moitié du double du carré considéré.

C'est pour cette raison qu'un qâdî ignorant la géométrie commit une erreur dans un cas semblable. On raconte

qu'une certaine personne avait acheté à une autre une surface de terrain qui devait mesurer quarante coudées de longueur sur quarante coudées de largeur. Le vendeur livra un terrain mesurant vingt coudées de longueur sur vingt coudées de largeur, et y ajouta un autre terrain mesurant également vingt coudées de longueur sur vingt coudées de largeur. L'acheteur n'étant pas satisfait, tous deux allèrent devant le qâdi et lui expliquèrent leur cas. Le qâdi déclara à l'acheteur : « Ce que le vendeur t'a livré, représente bien la totalité de ton droit ». Mais il y avait près du qâdi un géomètre. Celui-ci intervint : « Pas du tout, dit-il, ce n'est là que la moitié de son droit ! Ce que le vendeur a livré à l'acheteur ne vaut que pour une seule dimension, mais non point pour les deux dimensions prises ensemble. Ce qu'il a livré ne mesure pas quarante coudées sur quarante, total exigé par le droit de l'acheteur. C'est d'une parfaite évidence pour quiconque se représente exactement la chose ». Le qâdi retira alors sa sentence.

Soit donc un carré donné (fig. 3). Si tu mets à côté de lui un autre carré de dimension égale (fig. 4), tu ne le dou-

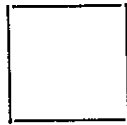


Fig. 3

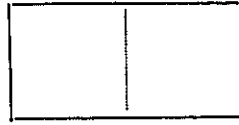


Fig. 4

bles pas, puisque tu ne fais que l'agrandir du double dans une seule de ses dimensions. Certes, le commun des gens s'imaginent que la duplication du carré consiste à mettre à côté du carré que l'on veut doubler, un autre carré d'égale dimension, parce qu'ils s'imaginent que la duplication d'une seule dimension est suffisante pour doubler le carré lui-même. En vérité, pour que le carré soit doublé, il faut que tu le rendes deux fois égal à lui-même quant à ses deux dimensions prises ensemble (fig. 5). Par là, on reconnaît que la duplication d'un carré renferme quatre fois le premier carré, ce qui revient à dire que la duplication porte sur chacune de

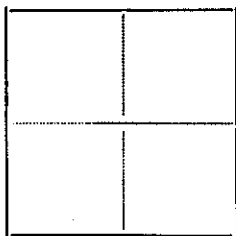


Fig. 5

ses deux dimensions. De même, le double d'une ligne renferme deux fois l'équivalent de cette ligne, la duplication portant dans ce cas sur une dimension unique. La méthode pour doubler une surface carrée consiste à multiplier le double de l'un de ses côtés par le côté lui-même. De cette façon on rend le carré deux fois plus grand dans chacune de ses deux dimensions. C'est d'une parfaite évidence pour quiconque possède une faculté de représentation exacte.

Quant à ce qui possède trois dimensions, je veux dire le solide, sa duplication consiste à le rendre deux fois ce qu'il était, dans la totalité de ses trois dimensions. Si, à un cube dont les surfaces mesurent quatre coudées de côté, est adjoint un autre cube de dimension égale, la duplication du cube n'est nullement réalisée. C'est qu'en effet tu n'aurais pas ainsi rendu chacune des trois dimensions deux fois égale à elle-même, tu n'aurais rendu telle qu'une seule des dimensions ; aussi, la somme des deux cubes mis l'un à côté de l'autre ne représente que la moitié de la moitié du double des deux cubes.

Voilà pourquoi un qâdi géomètre, cette fois, rendit un jugement fixant le taux d'un salaire au quart du salaire prévu. On raconte en effet qu'un homme avait engagé un architecte afin qu'il doublât sa maison, moyennant une somme de huit cent mille dirhems. Cette maison mesurait dix coudées de longueur, dix coudées de largeur et dix coudées de hauteur. Or, l'architecte en porta bien la longueur à vingt coudées, mais il laissa en l'état la hauteur et la largeur ; puis il réclama la totalité des honoraires convenus. Mais le propriétaire refusa, et ils allèrent tous deux devant le qâdi. Celui-ci ordonna le versement d'un quart des honoraires, sans plus, en déclarant à l'architecte : « Si tu as porté

la longueur de la maison à vingt coudées, tout en laissant intactes la largeur et la hauteur, le produit ainsi obtenu ne représente que la moitié du double, c'est-à-dire le quart (de ce qu'aurait été la maison réellement doublée). Ton droit ne dépasse donc pas le quart de la somme convenue ».

L'employeur avait également engagé l'architecte pour lui construire une maison dont la longueur, la largeur et la hauteur mesureraient respectivement dix coudées. Or, l'architecte bâtit une maison dont la longueur, la largeur et la hauteur mesuraient respectivement cinq coudées ; le travail terminé, il réclama la moitié de ses honoraires. Mais l'employeur refusa, et tous deux en appelèrent au qâdi géomètre. Celui-ci décida que seul le huitième des honoraires devait être versé, et il déclara à l'architecte : « Lorsque tu as pris la moitié de la hauteur, tu as alors diminué la maison de moitié une première fois ; lorsque tu as pris la moitié de la longueur, tu as diminué la maison de moitié une seconde fois ; enfin, lorsque tu as pris la moitié de la largeur, tu l'as encore diminuée de moitié une troisième fois. Ce que tu as bâti ne représente donc que la moitié de la moitié de la moitié de la maison pour laquelle le marché avait été conclu. Or, la moitié de la moitié de la moitié d'une maison, cela ne fait que le huitième de cette maison. Donc, ton droit ne dépasse pas non plus le huitième des honoraires qui avaient été convenus » (1).

(1) Ces deux anecdotes font inévitablement penser à la mésaventure de Charès de Rhodes, le constructeur du fameux Colosse. Cf. Albert Gabriel, *La construction et l'emplacement du Colosse de Rhodes*, in *Bulletin de Correspondance Hellénique*, 56^e année, 1932, pp. 331-359. On en doit le récit à Sextus Empiricus (*Adv. Math.*, VII, 107). « Charès ayant établi un premier devis pour une statue de dimensions déterminées, les Rhodiens lui demandèrent combien coûterait une statue deux fois plus grande. Il répondit que la dépense serait également double, alors qu'il aurait dû exiger une

On reconnaît maintenant que pour diminuer de moitié une quantité qui possède plus d'une dimension, il suffit de diminuer de moitié l'une des dimensions, quelle qu'elle soit. On reconnaît également, à la suite de ce que nous avons relaté, que le double d'un cube renferme huit cubes semblables au cube primitif. En effet, lorsque tu le rends d'abord deux fois plus grand selon deux de ses dimensions seulement, il renferme quatre cubes semblables (au cube primitif), comme dans le cas du double du carré ; mais lorsque tu l'augmentes du double dans sa troisième dimension, en opérant de même que pour la première et la seconde dimension, le cube ainsi engendré renferme huit fois le cube primitif. Si, par exemple, on double un cube pesant un quintal, ce cube une fois doublé pèsera huit quintaux.

Voici donc jugée la duplication de l'ensemble des solides. Tout ce que nous avons mentionné s'offre avec une parfaite évidence à quiconque possède une faculté de représentation exacte, et dont l'intelligence pénétrante sait s'abstraire des imaginations familières et des jugements portés par habitude. Doubler un cube dont les surfaces mesurent cinq coudées de côté, consiste à porter d'abord cette surface à 10×10 , en lui donnant dix coudées de longueur sur dix coudées de largeur. Ensuite, on multiplie encore par 10 ce produit de 10×10 , en ce sens que l'on donne à ce cube une longueur et une largeur mesurant respectivement dix coudées, sur une hauteur également de dix coudées. Voilà en quoi consiste la duplication du cube ; elle ne consiste pas à mettre un cube semblable à côté du premier.

Pour y arriver, la méthode est la suivante. Si l'on multiplie le double du côté de la surface du carré par lui-

somme huit fois plus forte. Les Rhodiens acceptèrent et Charès, dans l'impossibilité de tenir parole, se donna la mort. » *Ibid.*, p. 344.

même, on obtient ainsi un carré dont la surface est le double de la surface du carré primitif. Ensuite, on multiplie le côté du carré ainsi obtenu par le double de la hauteur du cube. On reconnaît en même temps que doubler le carré, c'est multiplier le double de son côté par lui-même, ce n'est pas mettre à côté de lui un autre carré égal. Ainsi la duplication d'un carré de 5×5 donne un carré de 10×10 .

Le *rapport de proportion*, c'est-à-dire ici la manière d'être de l'un des deux cubes par rapport à l'autre. — Le rapport de proportion dans les grandeurs proportionnelles consiste en ce que le rapport du premier membre avec le second soit comme le rapport du troisième avec le quatrième. Si le troisième membre est le même que le second, on dit qu'il s'agit d'une série de trois nombres proportionnels, et ces nombres proportionnels comportent une médiété unique, par exemple le groupe de 2, 4 et 8, parce que le rapport de 2 à 4 est comme le rapport de 4 à 8. Mais si le troisième membre n'est pas le même que le second, on dit qu'il s'agit d'une série de quatre nombres proportionnels, et ces nombres proportionnels comportent alors deux médiétés, par exemple le groupe de 2 : 4 : : 3 : 6, parce que le rapport de 2 à 4 est comme le rapport de 3 à 6. Dans le cas de la proportion qui comporte deux médiétés, si le rapport du premier membre au second est comme le rapport du second (au troisième, et le rapport du second au troisième comme le rapport du troisième au) (1) quatrième, on dit qu'il s'agit d'une progression continue, comme le groupe 2 : 4 : : 8 : 16, car le rapport de 4 à 8 y est égal au rapport de 2 à 4. S'il n'en est pas ainsi on l'appelle discontinue, par exemple le groupe 2 : 4 : : 3 : 6.

(1) Le texte porte : « comme le rapport du second au quatrième ». Il faut manifestement suppléer. Cp. ici le passage parallèle, chap. II, 6^e question.

Pour la progression continue (1), il faut au moins quatre choses, d'abord parce que l'existence du rapport proportionnel n'est possible qu'entre trois choses ; ensuite, pour la progression continue de ce rapport proportionnel, il faut au moins encore une autre chose, parce que la progression continue du rapport comporte la répétition de la proportion du rapport, par exemple du rapport $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, c'est-à-dire la proportion de ce rapport une première fois ; ensuite, pour la progression de ce rapport il faut qu'il soit répété au moins une autre fois ; ainsi l'on ajoute $\frac{4}{8} = \frac{8}{16}$, et ainsi de suite, dans le sens de la multiplication de la progression.

CHAPITRE II

Sur le but de ce traité, qui est d'expliquer la sentence
du divin Platon.

On raconte qu'une terrible peste s'était déclarée en un certain temple des Grecs. C'était, dit-on, le temple de David le

(1) Le schéma de Luṭfi ne coïncide pas exactement avec la division rappelée ici dans l'introd. § 3. Le premier cas considéré est celui de la proportion géométrique continue, telle que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$: c'est l'ἀναλογία συνεχής ; comme il n'y a qu'une seule médiété, les nombres proportionnels y ont la nature de l'« impair » (*al-fard*). Le second cas est celui de la proportion géométrique « brisée », telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: c'est l'ἀναλογία διεξευγμένη ; comportant deux médiétés, les nombres proportionnels y ont la nature du « pair » ou du « couple » (*al-zawj*). Mais c'est seulement ensuite que Luṭfi fait intervenir la notion de « continuité », en considérant le cas d'une proportion à deux médiétés, telle que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. C'est précisément la formule de la proportion entre deux solides, ou deux nombres solides semblables, c'est-à-dire tels que leurs facteurs soient tour à tour

prophète, temple qu'il avait fait bâtir et où il avait fait mettre un grand orgue. (1) Un prophète d'Israël fut consulté sur le moyen de mettre fin à ce fléau. Dieu leur révéla que dès qu'ils auraient doublé l'autel qui était dans leur temple et

proportionnels les uns aux autres (cf. la formule du *Timée* 31 c — 32 d, Rivaud, *Notice*, pp. 72-73). Nous n'avons malheureusement pu disposer des références utiles ici.

(1) Nous ne revenons pas sur cette description vraiment surprenante. Mais cette évocation de l'orgue nous conduit à mentionner ici comment certains motifs finirent par s'orchestrer en une légende qui dégage toute une expérience spirituelle ; l'orgue joue précisément un rôle central dans cette combinaison non encore observée jusqu'à présent. On connaît toute l'importance de l'orgue dans le cérémonial de la cour byzantine. Cf. Constantin VII Porphyrogénète, *Le Livre des Cérémonies* (Coll. Byzantine, Guill. Budé) Livre I, chap. I, R 14 ; chap. V, R 47, et *passim*. Sans aucun doute, le merveilleux instrument produisait-il une grande impression sur les étrangers qui avaient occasion de l'entendre. Comment en est-il venu à se combiner avec un motif particulièrement cher à la mystique persane ? D'Aḥmad Ghāzālī (ob. 520/1126) au grand poète Farīdaddīn 'Aṭṭār (ob. 616/1229) en passant par Suhrawardī (ob. 587/1191), l'oiseau mystique *Simorgh* ou *'Anqa* est le symbole de la Divinité, vers laquelle se dirige le mystique, pour n'apprendre qu'au terme du voyage qu'elle était d'ores et déjà là, et que son propre *moi* était le seul espace le séparant de l'union. Un autre nom désigne encore cet oiseau merveilleux (par ex. chez Suhrawardī et Šadr al-Dīn Šīrāzī) ; c'est le terme de *qūqnūs*, désignant communément le *phénix*, mais qui est une transcription du grec *κύκνος* désignant le *cygne*. Or, dans le *Phédon* (84^e-85^e), Socrate proclame que si le chant du cygne, l'oiseau d'Apollon, est plus éclatant que jamais lorsqu'il sent venir la mort, ce n'est pas de douleur, mais de la joie d'être sur le point de rejoindre le Dieu. Nous devons avoir là le motif de transition vers le symbole de l'union mystique. Pour clore le cycle en question, voici ce que mentionne Šāhrazūri (VII^e/XIII^e s.) le disciple et biographe enthousiaste de Suhrawardī, dans sa grande encyclopédie philosophique *al-Šajarat al-ilāhiya* (Mss. Istanbul, Saray Ahmet III 3223, fol. 223 b.). Venant à parler du *qūqnūs*, dans la

qui avait la forme d'un cube, la peste s'éloignerait d'eux. Ils dressèrent alors un autre autel et le placèrent à côté du premier. Mais la peste ne fit qu'augmenter. Le prophète fut de nouveau consulté sur la cause de ce malheur. Dieu leur révéla qu'ils n'avaient pas doublé leur autel, mais qu'ils avaient simplement produit un autre autel semblable au premier ; ce n'était nullement là réaliser la duplication du cube. On demanda alors le secours de Platon. Celui-ci déclara : « Vous vous êtes écartés du *trivium*, c'est-à-dire de ces trois sciences (qui forment le seuil) de la philosophie : l'arithmétique, la géométrie et la science des carrés magiques. (1) Si Dieu vous a éprouvés par la peste, c'est comme par un châtimement en retour, car les sciences philosophiques ont leur importance devant Dieu ». Ensuite il fit connaître à ses disciples ce qui suit : « Dès qu'il vous sera possible de tirer deux lignes entre deux lignes selon une progression continue [c'est-à-dire de construire deux moyennes proportionnelles], vous parviendrez à la duplication de l'autel.

partie du livre consacré à la physique, il marque d'abord quelques hésitations, car on a raconté tant de choses ; finalement il déclare : « C'est un oiseau, dit-on, qui vit dans les îles du golfe de Constantinople. Il a une voix splendide, et c'est d'après cette voix que l'on a construit l'instrument appelé orgue. » C'est toute une philosophie de la musique, que le philosophe persan esquissait ainsi en retrouvant dans le Simorgh, ou dans le chant de triomphe du cygne, l'origine de l'instrument byzantin. Cette indication sommaire sera développée ailleurs. (H. C.)

(1) On attendrait plutôt le *quadrivium*, comportant, comme dans l'antiquité classique, les quatre sciences propédeutiques ou mathématiques, à savoir les disciplines de l'arithmétique, de la géométrie, de l'astronomie et de la musique. Cf. par exemple, l'écrit de Théon de Smyrne pour servir de guide à l'étudiant de la philosophie platonicienne (Wissowa, art. *Théon*, col. 2070-2072). La modification introduisant ici la « science du *Wafq* » est essentielle pour l'exégèse que donne Lutfi de la sentence prêtée à Platon.

Aucun stratagème ne peut vous y conduire, en dehors de la construction de ces deux lignes. Efforcez-vous donc de les produire, jusqu'à ce que vous couronniez le travail de cette construction par la duplication de l'autel. Puis, déposez un carré de dix mille cases renfermant dix mille nombres dans leur suite naturelle ». — Ici finit la sentence de Platon.

Pour moi, je dis : l'explication de cette sentence ne peut être menée à bien, qu'à la condition d'expliquer tout ce qui figure dans cette histoire. Cela comporte : 1^o) l'exégèse des termes qui en ont besoin ; 2^o) expliquer pourquoi la peste fut provoquée par suite de l'exiguïté de l'autel ; 3^o) donner la raison de l'aggravation de la peste, du fait qu'un autre autel ait été adjoint au premier ; 4^o) expliquer pourquoi l'adjonction d'un autre autel ne réalisait pas la duplication du cube ; 5^o) expliquer le rapport des trois sciences mentionnées avec la duplication de l'autel ; 6^o) expliquer la construction des deux moyennes proportionnelles, et comment cela permet d'arriver à la duplication de l'autel ; 7^o) expliquer pourquoi la duplication de l'autel amena la cessation de la peste ; 8^o) expliquer le rapport entre la duplication de l'autel et le carré magique 100×100 auquel réfère Platon en disant : « Et déposez un carré de dix mille cases. . . » ; 9^o) pourquoi la peste s'éteignit grâce à la construction de ce carré magique de 100×100 . — Cela fait neuf questions à traiter. Nous allons les prendre une par une et les expliquer d'une manière qui dissipera toute ombre de doute.

1^{re} QUESTION. *Exégèse de certains termes.*

Il est dit dans le *Ṣaḥāḥ* que *Haykal* (temple) désigne « la maison des idoles », cela s'entendant du temple en général.

Le *Madhbah* (autel), c'est l'excavation dans laquelle on

immolait les victimes ; la célébration des sacrifices et des offrandes, dans les temples de la Mekke et de Jérusalem, et dans d'autres encore parmi les temples de grande renommée tels que le Temple de la Lumière, le Temple de Mercure (1) et le Temple d'Apollon (2), voilà ce dont on prenait grand soin en chacune des affaires graves dont l'occurrence était fréquente. Dans le temple en question, celui où la peste était apparue, on avait disposé un autel en forme de bassin cubique, pour y faire couler le sang des animaux sacrifiés et y jeter leurs déchets.

Le cube : l'explication en a été donnée ici au cours du chapitre 1^{er}.

Quant à ce que l'on entend par les « nombres dans leur suite naturelle », c'est celle qui correspond à l'énumération qu'exige leur nature alors que l'on compte dans cet ordre, en disant par exemple : un, deux, trois, quatre, cinq, etc...

2^e QUESTION. *Pourquoi la peste fut-elle provoquée par suite de l'exiguïté de l'autel.*

Notre opinion est que la peste éclata par suite de l'infection de l'air. Parmi les causes qui amènent l'infection de l'air, il y a la décomposition des cadavres, du sang putride, des matières fécales ou autres espèces de déchets, dans les espaces resserrés ; leur accumulation répétée amène inévitablement l'infection, comme cela a été exposé en son lieu. L'autel étant de dimensions exiguës, ce qui s'y accumulait finit par produire une accumulation excessive, dégageant des miasmes putrides. L'air en fut infecté et engendra la peste.

(1) Il s'agit vraisemblablement de temples sabéens.

(2) *Al Qolynos* ; lire *Al Folynos* (Apollonios).

3^e QUESTION. *La raison de l'aggravation de la peste, du fait qu'un autre autel ait été adjoint au premier.*

Nous disons ceci : comme l'infection de l'air qui fut l'agent de la peste, provenait de la décomposition des matières qui étaient dans l'autel, en raison de leur accumulation répétée dans son étroit espace, — il n'y a aucun doute que multiplier de tels espaces trop exigus revient inévitablement à multiplier les lieux d'accumulation de détritus. On multiplie ainsi les foyers d'infection, et on en multiplie du même coup les inévitables conséquences. Pour en donner un exemple décisif : dans la fièvre quarte, lorsque les humeurs se décomposent en un seul endroit du corps, la fièvre apparaît tous les trois jours ; si la décomposition siège en deux endroits différents du corps, la fièvre apparaît deux jours sur trois ; enfin, si la décomposition siège en trois endroits, la fièvre apparaît chaque jour, telle la fièvre intermittente. Le médecin ignorant la confond avec la fièvre intermittente ; il ne s'aperçoit pas qu'il s'agit d'une fièvre quarte composée de deux quartes. Mais c'est une des choses que savent reconnaître les médecins habiles.

4^e QUESTION. *Pourquoi l'adjonction d'un autre autel ne réalisait pas la duplication du cube.*

Nous l'avons suffisamment expliqué au chapitre 1^{er}, pour qu'il soit superflu d'y revenir ici. Reporte-toi donc à ce chapitre.

5^e QUESTION. *Le rapport des trois sciences mentionnées avec la duplication de l'autel.*

Ce rapport apparaîtra au cours de la vérification des questions suivantes. Il n'est donc pas besoin de traiter cette question séparément.

6^e QUESTION. *De la construction des deux moyennes proportionnelles, et comment cela permet d'arriver à la duplication de l'autel.*

Tu as appris dans le chapitre 1^{er} le moyen d'obtenir la duplication du carré : c'est de multiplier par lui-même le double du côté de la surface du carré. Il en résulte un carré qui est le double de la surface du carré primitif. Ensuite, on multiplie le côté du carré obtenu, lequel est le double du côté du carré primitif, par le double de la hauteur du cube donné. Tu sais d'autre part que l'on n'arrive à la duplication du cube qu'en construisant deux lignes (*deux moyennes proportionnelles*) entre deux autres lignes données, selon une proportion continue. La première ligne est le double du côté du carré multiplicande ; la seconde ligne est ce double multiplicateur (1) ; la troisième ligne est le côté du carré obtenu après la multiplication, lequel est également le double du côté du premier carré ; la quatrième ligne est le double de la hauteur de l'autel cubique. Et ces lignes sont dans une proportion continue, parce que le rapport de la première à la seconde est comme le rapport de la seconde à la troisième, et le rapport de la seconde à la troisième est comme le rapport de la troisième à la quatrième. C'est qu'en effet, dans le cas présent, les quatre lignes sont égales entre elles (2). D'où, la

(1) Nous lisons : *al maḍrûb fihi*.

(2) Tout cela n'est pas sans présenter quelque difficulté. En fait, tout se passe comme si Luṭfi connaissait déjà le principe et la méthode, et ayant réalisé son opération au chapitre 1^{er}, ne faisait que vérifier après coup l'état de ses conditions. Les quatre *lignes* représentent selon Luṭfi des grandeurs déjà égales les unes aux autres, à savoir les dimensions respectives du nouveau cube et ce par quoi il a fallu multiplier l'arête de l'ancien cube, c'est-à-dire le propre double de cette arête, pour obtenir la surface de chaque plan du nouveau cube. La duplication du cube est comprise, interprétée et menée conjointement avec celle du carré. Dès lors, il n'y

proportion continue dans les quatre lignes qui se succèdent dans la proportion qu'il est absolument nécessaire de construire en vue de doubler les solides, qu'ils soient cubes ou non, cette proportion est ici un rapport d'égalité. Elle appartient proprement au cube dont les surfaces comportent des côtés égaux ; mais dans les solides autres que le cube, ce rapport d'égalité ne se trouve pas. La construction de ces quatre lignes, lorsqu'il s'agit du cube, s'obtient en mesurant son arête, ensuite en doublant celle-ci. Platon n'a pas mentionné en détail ce procédé pour réaliser la duplication du cube, mais parlant en similitudes, il en a indiqué la base. C'est d'ailleurs l'habitude de Platon de parler en similitudes et par énigmes, comme le sait quiconque est familier avec ses livres.

7^e QUESTION. *Pourquoi la duplication de l'autel amena la cessation de la peste.*

Nous disons : puisque l'infection est due à une accumulation rendue excessive par l'étroitesse du lieu, toutes les fois que ce lieu sera agrandi en longueur et en largeur, l'accumulation diminuera ; et toutes les fois que l'on en agrandira la profondeur, il s'y produira un plus fort mouvement d'air, si bien que l'emprisonnement qui est une cause d'infection, cessera. L'air y étant plus abondant, ne sera plus soumis à cette cause d'infection, puisque, s'agissant de l'infection de ce qui se trouve dans l'autel, par exemple une grande quantité d'eau, eh bien ! une faible quantité de choses amères ne pourra la rendre amère, alors qu'elle suffirait peut-être à corrompre cette eau prise en petite

a plus de *lignes* pour représenter respectivement comme chez les anciens géomètres, l'arête du cube donné et l'arête du cube deux fois plus grand. Il n'y a pas une *théorie* ; le procédé par construction, est d'ores et déjà connu. Evidemment, il nous manque ici un chaînon.

quantité. Témoin, le proverbe arabe populaire : « Le chien ne salit pas la mer ».

8^e QUESTION. *Le rapport entre la duplication de l'autel et le carré magique de 100×100 .*

Voici ce que nous disons. Les Sages ont coutume, lorsqu'ils fondent des temples ou d'autres édifices, de déposer dans les fondations ou dans les murs, dans la toiture ou dans la terrasse, ou dans quelque autre lieu encore, un carré magique correspondant à leurs buts et à leurs besoins. Dans le livre intitulé *Šams al-Āfāq fi ma'rifat al-Awfaq* (1), il est déclaré qu'Abraham fut le premier à parler de la science du carré magique (*Wafq*) ; il déposa un carré de 100×100 dans les fondations de la Mekke. De son côté, le philosophe Thalès en déposa un dans le Temple de Mercure ; on raconte même qu'il avait construit ce carré sous l'inspi-

(1) Référence probable à al-Būnī, le grand maître de la science du *Wafq* (Cf. Ruska, art. cit. in *Encycl. de l'Islam.*) et des sciences occultes en général (ob. 622/1225). Malgré la variante, ou l'estropiage du titre, Luṭfi doit renvoyer ici au livre intitulé *Šams al Ma'ārif wa-laṭā'if al-awārif*, où la partie consacrée aux carrés magiques dénote plusieurs innovations, en même temps qu'un emploi « correspondant aux tendances les plus diverses et qui présuppose une assez longue histoire ». Cf. mss. et édit. in *Brock*. I. 497 et *Suppl.* I, 910. Pour la partie alchimique de l'ouvrage, cf. J. Ruska *Die Alchemie ar-Rāzi's*, in *Der Islam*, XXII, 1935, pp.307-310. — D'après une communication verbale du regretté Ismaïl Saïb Efendi, bibliothécaire de la Umumi Kütüphane, à Bayazıt, le titre mentionné dans notre texte correspondrait plutôt, en le prenant littéralement, à celui d'un ouvrage de 'Abd al-Raḥmān al-Bisṭāmī (ob. 858/1454). Mais précisément l'attribution de ce dernier ouvrage a été revendiquée en faveur d'al-Būnī (cf. *Brock*. II, 231/232, n. 21, et *Suppl.* II, 323-324). Les difficultés actuelles ont empêché ici une confrontation opportune des manuscrits du *Šams al-Āfāq* et du *Šams al-Ma'ārif*.

ration divine. Le même livre qui vient d'être mentionné parle encore d'établir à l'encre sur une tuile, lors de l'exaltation de Saturne, un carré de 6×6 , et de le déposer dans les fondations de l'édifice, dans chaque angle et à la base de chaque colonne, et cela au moment où Saturne entre dans le signe du Capricorne. Longue sera la durée de cet édifice ; il gardera toute sa beauté et sera la résidence de nobles personnages, à tel point que voulût-on même le ruiner, on ne saurait aucunement y parvenir. Si l'on jette cette tuile dans un puits, l'eau en deviendra extrêmement abondante. Il est mentionné également dans les *Histoires des Grecs* que lorsque l'on construisit les Pyramides d'Egypte, on déposa à la base une brique cuite au soleil sur laquelle était établi un carré de 6×6 .

Il faut savoir maintenant que la peste arrive aussi bien pour des causes terrestres et naturelles, que pour des causes célestes et divines. C'est ce que le prince des savants, Ibn Sinâ, a mis en lumière dans son *Canon*. Or, l'élargissement de l'autel par sa duplication fait bien cesser les causes terrestres, mais non pas les causes célestes. Comme la révélation divine avait annoncé que la peste cesserait de façon absolue par la duplication de l'autel, il fallait nécessairement qu'à cette duplication s'ajoutât une chose qui lui fût analogue, et qui fût efficace pour mettre fin aux causes célestes de la peste, pour que la duplication, complétée par son opération analogue, mit véritablement fin à la peste de façon absolue. De cette opération analogue, l'oracle divin contenait précisément une indication, outre celle de la duplication. Les choses étant ainsi, les disciples de Platon interprétèrent la similitude dont il avait usé par sa prescription de déposer un carré de 100×100 , en construisant selon leur coutume, c'est-à-dire en déposant dans les édifices des carrés correspondant à leurs desseins. Or, leur dessein, cette fois, était d'amener la cessation de la peste. Point

d'autre moyen donc que de déposer le carré de 100×100 , puisqu'ils n'avaient pas de carré qui correspondit à la duplication de l'autel, en mettant fin à la peste, autre que le carré de 100×100 . Ainsi, ils déposèrent ce carré pour faire cesser la peste en tant qu'advenue par des causes célestes, de sorte que l'action de la duplication fût parfaite et définitive, quant à la cessation des deux sortes de causes. C'est que l'efficacité des carrés est une efficacité divine, qui a pouvoir de mettre fin aux causes célestes et divines. La science des carrés magiques est en effet une science initiale que Dieu créa lui-même ; jamais ensuite les prophètes et les saints n'ont cessé de se la transmettre par héritage, de même que les Sages, d'un maître à l'autre.

Nous avons affirmé que le carré magique de 100×100 correspond à la duplication du cube. En effet le nombre des compartiments qui le constituent, résulte de la multiplication de 10×10 , ensuite de la multiplication du produit, c'est-à-dire 100, par lui-même. De même, la duplication du cube est le produit de la multiplication du double du côté de la surface du carré par lui-même, ensuite de la multiplication du côté du carré obtenu après la duplication, par le double de la hauteur du cube, double qui est égal à ce côté, le résultat en étant sa multiplication par lui-même en hauteur. Ainsi, dans chacune de ces opérations est répété ce fait d'être multiplié par soi-même. D'autre part, de même que dans la duplication, s'agissant de lignes en une progression continue, chacune des lignes de cette progression est multipliée par elle-même ; de même, dans le carré-magique de 100, s'agissant de nombres en une progression continue, chacun des nombres de cette progression est multiplié par lui-même, c'est-à-dire 10, 100, 1000 et 10000, car le rapport de 10 à 100 est comme le rapport de 100 à 1000, et le rapport de 100 à 1000 est comme le rapport de 1000 à 10.000. Or, ce dernier produit résulte de la multiplication de 10 par lui-

même, puis de la multiplication du produit de cette multiplication, c'est-à-dire 100, par lui-même. Ainsi, chacun de ces deux nombres, dans ces quatre nombres en progression continue, se multiplie par soi-même dans ce carré. Le carré magique de 100×100 répond donc à la duplication du cube, dans son essence et dans ses propriétés. C'est pourquoi l'indication invitant à la duplication, impliquait du même coup une indication de ce carré magique, deux choses étant considérées, à savoir : la coutume de déposer ces carrés dans les édifices, et d'autre part le fait que certaines des causes de la peste étant des causes célestes, seules des choses divines pouvaient faire cesser ces causes. En conséquence, les disciples de Platon comprirent l'allusion à ce carré et parachevèrent leur opération. Ce que nous avons dit met en pleine lumière la correspondance parfaite entre ce carré et la duplication du cube.

9^e QUESTION. *Pourquoi la peste s'éteignit grâce à la construction du carré magique de 100×100 .*

Nous parlerons d'abord brièvement de ce qui concerne la science du carré magique et la vérification des effets qui en émanent. Nous disons donc : comme nous avons déjà eu précédemment l'occasion de le mentionner, la science du carré magique est une science initiale que Dieu a créée. Il a initié lui-même Adam à cette science ; puis tour à tour, ses prophètes parmi les prophètes, les saints et les Sages, de maître en maître, se la sont transmise en héritage, jusqu'à ce que vint le tour d'Abraham. Abraham l'a analysée, il l'a divulguée, il en a fait apparaître en pleine lumière les mystères, et il a expliqué les propriétés des carrés ; il fut vraiment le premier à traiter de l'analyse de cette science. Après qu'il en eut ainsi esquissé l'analyse, un grand empressement se manifesta parmi les hommes à s'en occuper. Puis vint le

tour de Moïse. Moïse également mit en lumière quelques uns des secrets et des propriétés de cette science ; il établit même le carré de 6×6 sur un feuillet d'or, et grâce à lui fit émerger des profondeurs du Nil le cercueil de Joseph. Une des propriétés du carré de 6×6 est la suivante : si on le dispose dans un corps de matière fine au moment de l'exaltation de Mercure, alors que cette planète est libre des influences néfastes, de la combustion dans la lumière du soleil et du nadir de Mars, au moment de la conjonction de la Lune et de Jupiter et de l'ascendant de la Vierge et des Gémeaux, alors celui qui porte ce carré ne disputera contre personne sans sortir vainqueur et triomphant ; Dieu le Très-Haut le dotera de la force du cœur et de la facilité du langage jointe à l'éclat et à l'éloquence. Il interprétera la loi de l'univers et les mystères ; c'est à lui que les Sages rendront honneur, en disant : « En lui est le secret du Nom Sublime ».

Puis, le tour échut à Salomon. Salomon donna ses soins à la science des Nombres et des carrés magiques, et il y initia ses disciples, lesquels à leur tour s'occupèrent de l'analyser et d'en extraire les propriétés. Pythagore, ce sage qui était le fils d'une vierge de même que Jésus le prophète (1), et dont la naissance avait été annoncée par des oracles, acquit des disciples de Salomon l'expérience dans les sciences

(1) Sur les biographies de Pythagore que nous ont conservées notamment les compilations de Porphyre et de Jamblique, cf. Isidore Lévy, *La légende de Pythagore de Grèce en Palestine*, Paris, 1927. Plusieurs indices tendent à faire remonter bien antérieurement à l'école néo-pythagoricienne le fait qu'en Pythagore les disciples aient reconnu Apollon hyperboréen. L'identité de l'essence spirituelle de Pythagore et d'Apollon, en même temps que le nom de Parthénis donné à sa mère, comportent l'idée d'une union telle que celle à laquelle songe Plutarque en parlant « des contacts différents de ceux de l'hymen banal, par où la Divinité (ou le *pneuma* divin) peut s'approcher des mortelles. » *Ibid.*, pp. 5-15.

physiques et théologiques. Ensuite il travailla d'accord avec eux à la science des Nombres et des carrés magiques, et lorsqu'il eut acquis l'expérience dans ces deux ordres, il put extraire, grâce à sa sagacité et à la constance de son effort, les propriétés des nombres, et organisa le *corpus* de la science arithmétique. Il est mentionné au principe de ses livres que tous les universaux ont été créés en observant la hiérarchie des Nombres. Pythagore dépensa tous ses efforts pour indiquer les excellences des Nombres et leurs propriétés, ainsi que la hiérarchie de leurs trois proportions, à savoir la proportion arithmétique, la proportion géométrique et la proportion harmonique. Il assura que l'éclat de sa doctrine, il l'avait emprunté à la lumière qui brille dans la Niche de la Prophétie, et il ordonna à ses élèves d'avoir un culte pour le Nombre, de s'enfoncer dans la révélation de ses secrets. Il déclara enfin : « La science du Nombre est une clarté qui vient du monde spirituel, un tison ardent de la grâce divine. » (1).

Ensuite, le tour échet à Thalès, le Sage de Milet. Thalès déposa un carré de 100×100 au temple de Mercure sur une tablette carrée, et affirma qu'il l'avait découvert sous une inspiration divine. Tous les Grecs en tirèrent bon augure et lui rendirent les plus grands honneurs. Lorsqu'une affaire les mettait en souci, qu'une menace de leurs ennemis ou

(1) Cette rapide esquisse de la figure prophétique de Pythagore correspond à la biographie plus développée que nous trouvons dans le *Nuzhat al arwâḥ* de Šāhrazûrî, trad. persane de Ziyâ' al-Dîn Durri sous le titre de *Kitâb-i-Kanz al-Ḥikmat*, Téhéran 1316, pp. 86-97. Que Pythagore ait été l'élève de Salomon, cela ne fait alors de doute pour personne. Šāhrazûrî le mentionne dès le début (p. 86) en même temps que le propos sur la « Niche de la Prophétie » (Il y a peut-être là aussi un sous-entendu du Qorân 24 : 35), par quoi Pythagore atteste que sa sagesse n'est pas de lui, mais d'une inspiration divine.

quelque autre calamité les couvrait de son ombre, ils allaient chercher près de lui assistance et refuge, demandant à sa bienfaisance de les protéger. Cette tablette subsista parmi eux pendant de longues années, jusqu'à ce que parût le Sage Archimède. Celui-ci l'observa et en mit au jour les propriétés ; il expliqua en quoi consistait la connaissance de ce mystère et révéla le procédé pour composer un tel carré. L'une de ses propriétés bien établies par l'expérience et sur lesquelles tout le monde est d'accord, est la suivante ; lorsqu'il se trouve dans une maison, ni la peste, ni les épidémies, ni les autres maladies graves n'y pénètrent. Le maître de cette maison sera préservé de la lèpre, de la goutte ; de la paralysie faciale, de la colique et de la mort subite. Dieu éloignera de lui les maléfices de toutes les créatures, des animaux venimeux qui secrètent du poison et des autres ; en outre, il recèle un secret étrange pour la cessation de la migraine et des autres douleurs de la tête. Dorotheos le Sage l'a mentionné de son côté, et en lui était le secret du Nom Sublime de Dieu. Quiconque connaît la puissance de ce carré, peut grâce à lui se passer de tout autre secours en fait de thérapeutiques morales.

D'autre part, ce carré est également placé sur les étendards pendant les guerres ; son possesseur va de triomphe en triomphe sur ses ennemis et ses adversaires. Certes, ce carré a connu de multiples épreuves, et des choses étranges sont attestées à son sujet. On l'avait appliqué sur l'étendard d'Alexandre le Grand, et il en advint ce que l'on sait. De même pour Férédoun qui fût l'un des plus grands souverains de la Perse, qui vécut avant Moïse le prophète et régna sur terre pendant cinq cents ans. On avait établi ce carré en observant les positions célestes ascendantes au moment de l'exaltation de Jupiter, sur une pièce de satin jaune où les chiffres étaient tracés avec de l'or et que l'on avait brochée de pierres précieuses de grande valeur. Les rois de Perse se

le sont ensuite transmis en héritage jusqu'à l'époque de Yezdegerd. Lorsque se leva l'empire de l'Islam, son pouvoir fut rompu par la bienheureuse bénédiction de notre prophète Moḥammad, car notre prophète fut le révélateur du Nom Sublime. L'armée (sassanide) fut mise en déroute par l'armée de 'Omar, à tel point même que Yezdegerd fut tué, ayant comme encouru l'interdit (1) de sa dignité royale. Cet étendard tomba entre les mains de l'armée de l'Islam (2) ; on l'envoya à 'Omar, et les experts estimèrent la valeur de ses pierres précieuses à deux millions deux cent mille dinars. Le premier qui, ensuite, ait placé ce carré sur l'étendard de l'Islam, fut 'Ali. On raconte que 'Ali avait envoyé une armée contre une nation d'infidèles ; or, ce carré avait été placé sur le propre étendard de cette nation. Aussi, lorsque se produisit le choc des deux armées, l'armée de l'Islam ne put briser la résistance de l'adversaire. Finalement, la nouvelle parvint à 'Ali de l'existence de ce carré. Il fit alors mettre ce même carré + 1, sur l'étendard des musulmans, puis il mit sur pied une troupe faite pour les raids à laquelle il confia l'étendard. Cette fois, le parti de l'Islam remporta la victoire contre ces mêmes infidèles.

Ainsi, se trouve fondée par l'expérience et par la tradition émanant de témoins dignes de foi, l'efficacité de ce carré qui est le produit de la multiplication du nombre 100 par lui-même ; nombre qui est en même temps le nombre des « plus beaux noms de Dieu », Un Seul excepté, qui est le nom le plus caché aux créatures, car ce Seul est le Nom

(1) Jeu de mots un peu cruel sur *Yezdegerd* et *mazdagard*.

(2) En 651. Les origines de l'épopée iranienne avec la lutte de Feridoun contre *Ḍahhāk*, le Dragon prince du Mal, puis la transmission de l'étendard de *Kaweh* jusqu'au malheureux Yezdegerd, tout cela est suffisamment connu par le *Shāh Nāmah* de Firdoussi pour qu'il y ait lieu d'insister ici.

Sublime, celui qui suffit pour l'existence de toutes choses, et qui rassemble en lui-même l'ensemble des Noms divins. D'où, celui qui comptera le nombre 100, aura compté l'ensemble des Noms divins par degré, synthétiquement et analytiquement. Lorsqu'il aura multiplié ce nombre par lui-même, c'est comme s'il avait énuméré deux fois les noms divins : une première fois un à un, une seconde fois, chacun respectivement avec le nombre de l'ensemble des noms. D'autre part, le nombre 100 est le produit de la multiplication de 10×10 . Or, dix est le nombre des Intelligences qui sont les principes de l'Être; dans la multiplication de 10 par 10 on considère donc respectivement chacune de ces Intelligences avec leur nombre total. Et ce carré en qui sont considérés les Noms divins de cette façon, représente aussi la multiplicité, la composition et la division qui sont les sources des manifestations descendantes de l'existence et des degrés de l'Être. On considère également les sources primitives de l'Être (1) en considérant cette répétition que nous avons expliquée, formant antithèse avec les poisons qui rongent la vie et l'Être. Ce dont on demande le secours contre les poisons mortels, est vraiment un secours dont puissante est l'assistance, lorsque la demande émane d'un cœur pénétrant, pur quant à l'ensemble de ses désirs et l'observance attentive des conditions.

Voilà ce qui du Principe dont émane toute grâce, a émané sur nous pour résoudre la théurgie de Platon et trouver la signification de son énigme, sans qu'aucun des sages

(1) Une note a été ajoutée en marge du mss., portant: « Ainsi dans la considération respective de chacune d'elles selon le Nombre de l'ensemble, est impliquée la considération même de leur ensemble. Comprends le mystère ». Cf. notre *Introduction*, § IV.

de notre temps ait jusqu'à ce jour essayé de l'aborder. Gloire à Dieu qui nous a conduit jusqu'ici. Nous n'aurions pas atteint le but, si Dieu ne nous avait montré la route.

Manifestement, l'opuscule se termine ici : le troisième chapitre forme un appendice contenant d'abord une série de prescriptions relatives aux prières à réciter pour être préservé de la peste ; puis, un ensemble d'indications concernant la genèse de certaines maladies sous l'influence de l'air. Le lien de tout cela avec le fond même de l'opuscule est assez lâche ; nous n'avons pas jugé indispensable d'en donner la traduction.

لم يعرضه مسخن قوى كهواء الحمامات والهواء الذى يهب فيه ريح السموم
وامثال ذلك بارد جداً بالقياس الى المزاج الغريزى للروح فضلاً عن المزاج
الحادث بسبب الاحتقان وغيره فاذا وصل اليه صدمة الهواء وخالطه منعه عن
الاستحالة الى النارية الاحتقانية المؤدية الى هواء المزاج الذى يزول به عن
الاستعداد لقبول التأثير النفساني فيه الذى هو سبب الحياة والى تحليل الجوهر
البخارى الرطب المسمى بالرطوبة الغريزية التى هى مركب الروح الحيوانى
وممده كالدهن للسراج.

تمت الرسالة

ومن قال لا اله الا الله سبحانه انى كنت من الظالمين ١٣٦ مرة يأمن عنه
قال البونى الرقيب المقتدر اذا رسا فى فص خاتم هكذا ال ال
دمق تيت بدر ويحتم به رجل لم يصبه طاعون ما دام حيا .

وقال من نقش الباى الخلاق على باب داره لم يت فيها احد من الطاعون .
ومن قال كل يوم بسم الله خير الاسماء بسم الله رب الارض والسماء بسم
الله الذي لا يضر مع اسمه شىء فى الارض ولا فى السماء وهو السميع العليم
١٣٦ مرة يأمن عن الوباء .

السلام من كبه ١٣٦ مرة على باب دار يوم الاثنين فى ساعة القمر فان
الساكن فيها مسلم عن الوباء .

١٠ المؤمن من ذكره كل يوم ١٣٦ مرة يأمن عنه .
القفار اذا ذكره صاحب الحال والاخلاص ٢١١٢ مرة على ذى العاة
الوبائية يأمن لوقتيا وذهبت لوقتيا .

الحكيم من ذكره كل يوم ٨٨ مرة يأمن عنه
الحفيظ من ذكره كل يوم ٨٩٨ مرة يأمن عنه
١٥ الرقيب من ذكره كل يوم ٣١٢ مرة يأمن عنه
الحى اذا كب فى باب الدار ١٨ فى الساعة الاولى من يوم الجمعة
يأمن عن الطاعون من سكن فيها

الباقى من ذكره كل يوم ١٣٦ مرة يأمن عنه
الكافى من قرأ كل يوم ٧٧٧ مرة يأمن عنه
٢٠ واذا قد بلغنا هذا المبلغ مما يتعلق بامر الوباء فلا بد علينا ان نشبع القول
بما يتعلق به من المباحث الطبية اعلم ان الهواء المحيط بنا مدد يصل الى
ارواحنا ويكون علة لصلاحها بتعديلها بالترويح والتنقيه والترويح هو تعديل
مزاج الروح الحار بالافراط بسبب الاحتقان او غيره وهذا يحصل بالاستنشاق
من الريح ومن مسام منافس النبض المتصلة بالشرابين والهواء المحيط بنا اذا

٨ السلام من كبه ١٣٦ / ١٣١ وفى لو مثله — ٣٠ فلا بد علينا : لو فلا
علينا

مرتبا اجمالا وتفصيلا فاذا ضرب تلك العدد في نفسه فكانت عدد كلاً من
الاسماء الالهية بعدد جميع الاسماء مرتين وايضاً المائة حاصل من ضرب العشرة
في نفسه والعشرة عدد العقول التي هي مبادئ الوجود وفي ضرب العشرة في
العشرة يلاحظ كل من تلك العقول بعدد كلها والوفق الذي يلاحظ فيه
الاسماء الالهية على هذا الوجه من الكثرة والاجمال والتفصيل التي هي منشأ
التنوعات الوجودية والمراتب الكونية ويلاحظ ايضاً مبادئ الوجود [*] على
هذا التكرار الذي يبتاه يضاد السموم [هكذا في النسخ التي بين ايدينا] التي
مهدر الحياة والوجود فالاستمداد به في دفع السموم القتالة مما يعين اعانة قوية
اذا كان عن قلب ذكي خالص يجمع همه ورعاية شرايطه
١٠ هذا ما فاض علينا من المبدأ الفياض في فك طلسم افلاطون وحل ملفظه
ولم يحم حوله الى هذا الآن واحد من حكماء الزمان الحمد لله الذي هدانا
لهذا وما كنا لنهتدي لولا ان هدانا الله.

الباب الثالث في ذكر نبد من الاسماء الالهية التي لها تأثير عظيم في دفع الوباء

١٥ من قال كل يوم ايام الوباء اللهم سكن صدمة قهرمان الجبروت باللطفية
النازلة الواردة من فيضان الملكوت حتى نتشبت باذيال لطفك ونعصم بك
من ازال قهرك يا ذا القدرة الكاملة والقوة الشاملة لا حول ولا قوة الا
بالله العلي العظيم فانه يأمن من الوباء
ومن ذكر كل يوم اللهم يا لطيف استلك اللطف فيما جرت به المقادير
٢٠ يأمن عنه.

ومن قال يادائم لا فناء ولا زوال للملكه كل يوم ١٣٦ مرة يأمن عنه

[*] في هامش النسخ ما يأتي : فكان في ملاحظة كل منها على عدد الجميع ملاحظة
جميعها فافهم السر — ٨) مهدر الحياة : ١) جدر لا يهدم — ١٩) فيما جرت به المقادير : ١
٥٥ مرة

الرأس سرّ بديع ذكره دورطيوس الحكيم وفيه سرّ اسم الله الاعظم ومن عرف قدره استغنى به عن غيره من الموضوعات التصريفية وهو يوضع على الالوية في الحروب ولا يزال صاحبه غالباً على الاعداء والخصوم وقد جربت بذلك مراراً كثيرة وشوهد منه العجاب

٥ وكان هذا الوفق موضوعاً في لواء اسكندر وقد كان منه ما كان وافريدون الذى كان من اعظم ملوك الفرس وكان قبل موسى النبي عليه السلام ملك في الارض خممئة سنة وكان قد وضع هذا الوضع برعاية الطوائع الفلكية في شرف المشتري على ثوب اطلس اصفر وكتب رقومه بآء الذهب ورضعه بالجواهر الغالية الاثمان وتوارثه بعده ملوك الفرس الى زمان ١٠ يزدجرد ولما ظهر الدولة الاسلامية بطل حكمه يمين بركة نينا محمد صلى الله عليه وسلم الذى هو مظهر الاسم الاعظم فانكسر عسكره بجيش العمري حتى قتل يزدجرد وكان عن ملكه كزدرج فوق ذلك اللاوا الى ايدى جيش الاسلام فارسلوه الى عمر رضى الله عنه فقوم المقومون جواهره بالفى الف ومائتى الف دينار.

١٥ واول من وضع هذا الوفق في الاسلام هو على كرم الله وجهه روى ان عليا ارسل جيشا الى طائفة من الكفار وكان هذا الوفق موضوعاً في لواء تلك الطائفة فلما التقاهم جيش الاسلام لم يقدرُوا على مقاومتهم حتى بلغ خبر الوفق الى على رضى الله عنه فوضع الوفق المذكور بزيادة واحد في لواء المسلمين ثم جهز اليهم طائفة من الغزاة ومعهم هذا اللواء فانتصرت الطائفة الاسلامية على تلك الكفرة

ولما ثبت بالتجربة والنقل عن الثقات تأثير هذا الوفق حاصل في ضرب المائة في نفسها التي هي عدد اسماء الله الحسنى مع الواحد المستثنى [*] الذى اخفى عن الخلق اذ هو الاسم الاعظم الكافى في وجود كل شئ والمستجمع بجميع الاسماء الالهية فكان من احصى المائة احصى عدد جميع الاسماء الالهية ٣) وقد جربت : ١ وقد جرب وفي لا مثله — ٤) بذلك : في من ذلك — [*] في هامش النسخ ما حروفه : فيه ايجام لطيف — ٢١) تأثير هذا الوفق حاصل : في من تأثير هذا الوفق في دفع الوباء فنقول هذا الوفق حاصل من ضرب المائة

عطارد وهو سالم عن النحوس والاحتراق وعن نظر المريخ ، والقمر في قران
المشتري والطالع الجوزاء والسنبلة فحامله لا يحتاج احداً الا غلبه وقهره
ورزقه الله تعالى قوة الجنان وجريان اللسان مع الفصاحة والبلاغة وينطق
بالحكم والاسرار وهو الذى كان الحكماء يعظمونه ويقولون بان فيه سر
الاسم الاعظم ثم اذا بلغ النبوة الى سليمان عليه السلام اشتغل بعلم العدد
والاوقاف فعلم اصحابه فاشتغلوا بتفصيله واستخراج خواصه [*]

وذكر في اوائل كتبه ان جميع الكليات خلقت على حسب ترتيب
الاعداد وبالغ في شرح فضائل الاعداد وخواصها وترتيب نسبها الثلاث اعنى
العددية والهندسية والتأليفية وزعم انه اقتبس ذلك من مشكوة النبوة وامر
١٠ تلامذته بتعظيم العدد والتوغل في كشف اسراره وقال علم العدد لمعة من
العالم القدسي وجذوة من الفيض الالهى

ثم لما بلغ النبوة الى ناليس الحكيم الملطى وضع المائة في المائة على هيكل
عطارد في لوح مربع وزعم انه استنبط ذلك بالاهاام الالهى وكان اليونانيون
باجمعهم يتبركون به ويعظمونه غاية التعظيم واذا اهتمهم امر او غشيمهم داهية
١٥ من عدو وغيره لاذوا به وفزعوا اليه واستمدوا من ميامنه فينكشف عنهم
تلك الداهية وبقي ذلك اللوح بينهم سنين متطاولة الى ان ظهر ارشيدس
الحكيم فنظر فيه واستخرج خاصيته وبتن معرفته وكشف طريق وضعه ومن
جملة خواصه المجربة المتفق عليها انه اذا كان في بيت فان الرباء والطواعين
وسائر الامراض الصعبة لا يدخل فيه وصاحبه يكون اميناً من الجذام والنقرس
٢٠ واللقوة والقولنج وموت الفجاءة ويصرف الله تعالى عنه شر جميع الموجودات
والحيوانات الموزية ذوات السموم وغيره وفيه لدفع الشقية وسائر اوجاع

(١) في قران المشتري : ١ في ان المشتري - ٦) واستخراج خواصه : ١ واستخراج
خواص الاعداد والاوقاف وفي لا مثله [*] في ١ ولا بعد هذه الجملة ما نصه : وفيثاغور
ذلك الفاضل الذى ولد من جارية عذراء كيسى النجى ع ، م واخير الكهنة بولادته بعد
ان تمهر في العلوم الطبيعية والأكسية على اصحاب سليمان ع ، م اشتغل عليهم بعلم العدد
والوفى فلما تمهر فيها استخرج بذلك فطرته ودوام رياضته خواص الاعداد ودون علم
الارتماطيقى

خطيها في نفسها كذلك في وفق المائة اعداد على نسبة متوالية مضروبة كل واحد من عدديها في نفسه وهى العشرة والمائة والالف وعشرة آلاف فان نسبة العشرة الى المائة كنسبة المائة الى الالف ونسبة المائة الى الالف كنسبة الالف الى عشرة آلاف وهى حاصلة من ضرب العشرة في نفسها وضرب الحاصل من هذا الضرب اعنى المائة في نفسها فكل واحد من العددين في تلك الاعداد الاربعة المتوالية ضروب في نفسه في هذا الوفق فوفق المائة في المائة على محاذاة تضعيف المكعب في الذات والخاصية فكان الاشارة الى التضعيف اشارة الى هذا الوفق بعد ملاحظة الامرين اعنى دأب وضع الوفق في الابنية وكون بعض اسباب الربا سلاوية لا يدفع الا بالامور الآهية ١٠ ولذلك فجهوا اصحاب افلاطون الاشارة الى هذا الوفق وتتموا العمل وبنا ذكرنا ظهر المناسبة التامة بين هذا الوفق وبين تضعيف المكعب

—المطلب التاسع في بيان لمية اندفاع الربا بوضع المائة في المائة—

ولنكلم اولاً شيئاً يسيراً مما يتعلق بعلم الوفق وتحقيق التأثيرات الوقفية فنقول ان علم الوفق كما ذكرناه اول علم اوجده الله تعالى وعلم آدم عليه السلام فتوارث انبياءه من الانبياء والاولياء والحكماء كابرأ عن كابر الى ان يبلغ النوبة الى ابراهيم عليه السلام ففصله ونشره واظهر مكنوناته وبين خواص الاوقات فانه اول من تكلم في تفصيل هذا العلم فلما فصله بعض التفصيل رغب الناس في اشتغاله الى ان يبلغ النوبة الى موسى عليه السلام فاظهر موسى عليه السلام ايضاً بعضاً من اسراره وخواصه ٢٠ حتى انه وضع ستة في ستة على صحيفة ذهب واستخرج به تايوت يوسف عليه السلام من قعر النيل ومن خاصية الستة في الستة انه اذا وضع في جسم رفيع على شرف

(١) مضروبة كل واحد : لا مضروب كل واحد ١ مضروبه — ٦) في تلك الاعداد الاربعة : ١ في تلك الاعداد اذ الاربعة

وتوسيع المذبح بتضعيفه انما يدفع الاسباب الارضية لا السماوية والوحي
 الالهى كان مخبراً عن دفعه على الاطلاق بتضعيف المذبح فلا بد ان ينضم الى
 التضعيف امر مناسب له وموثر في دفع الاسباب السماوية ليكون التضعيف
 بما يناسبه دافعاً للوباء على الاطلاق ويكون الوحي الالهى اشارة اليه ايضاً
 ٥ بامر التضعيف فاذا كان الامر كذلك فهموا اصحاب افلاطون من رمزه وضع
 وفق المائة في المائة بناء على دأبيهم من وضع الاوفاق في الابنية مناسباً لغرضهم
 وكان غرضهم ههنا دفع الوباء فلا بد ان يوضع وفق المائة في المائة اذ ليس
 لهم وفق يناسبه بتضعيف المكعب ويدفع الوباء غير المائة في المائة فوضعوا
 ذاك [*] لدفع الوباء الحادث من الاسباب السماوية حتى يكون عمل التضعيف
 ١٠ تاماً في دفع كلا نوعى الاسباب اذ تأثير الاوفاق تأثير الهى يؤثر في دفع
 الاسباب السماوية الالهية لان علم الوفق اول علم اوجده الله تعالى بنفسه ولم
 يزَل بعد ذلك يتوارث الانبياء عليهم السلام والاولياء والحكماء كابراً عن
 كابر [*]

وانما قلنا ان وفق المائة في المائة مناسب للتضعيف لان عدد بيوته حاصل
 ١٥ من ضرب الشرة في نفسها ثم ضرب الحاصل وهو المائة في نفسها كما ان
 تضعيف المكعب حاصل من ضرب ضعف ضلع سطح المربع في نفسه ثم
 ضرب ضلع المربع الحاصل بعد التضعيف في ضعف ارتفاع المكعب الذى هو
 مثله ومآله ضربه في نفسه مرتفعاً ففى كل منها تكرار الضرب في النفس
 وايضاً كما ان في التضعيف خطوطاً على نسبة متوالية ضرب كل واحد من

(١) الاسباب الارضية: لا اسبابه الارضية — (٢) ان ينضم: ان يتضمن — (١٠) في
 دفع كلا: هكذا في النسخ — [*] في هامش ل و ا ما حروفه: فعلوا ان الوحي الالهى
 اشارة الى امر آخر يدفع به الاسباب السماوية فلم يجدوا امراً مناسباً للتضعيف بحيث يمكن
 ان يشار به اليه وله تأثير الهى في دفع الاسباب الالهية للوباء غير وفق المائة في المائة
 فعلوا انه من جملة ما اراد الله في تضعيف المذبح فتسوا عمله ايضاً كعمل التضعيف
 فارتفع كلا نوعى اسباب الوباء — [*] في هامش النسخ ما نصه: صرح به الغزالي رحمه
 الله — (١٥) كما ان تضعيف المكعب: اضعف المكعب وفى ل مثله — (١٩) على نسبة
 متوالية ضرب كل: لا مضروب كل

— المطلب السابع بيان سبب اندفاع الوباء بتضعيف المذبح —

فنعول لما كان التعفن بكثرة التراكم بضيق الموضع وكلما وسع الموضع طولاً وعرضاً يقل التراكم وكلما وسع سكا يتحرك فيه الهواء اكثر حركة فلا يجتس كل الاحتباس الذى هو من اسباب التعفن ولان الهواء يكون كثيراً حينئذ فلا يعفنه اذ فى تعفن ما فى المذبح كالماء الكثير فانه لا يمرره قدر قليل من الاشياء المرة الذى ربما يمرر قليلا من الماء مصداقه المثل المشهور بلسان الكلب لا ينجس البحر .

— المطلب الثامن بيان تعلق تضعيف المذبح بوضع المائة فى المائة —

فنعول ان من عادات الحكماء انهم اذا وضعوا معابداً او غيرها وضعوا ١٠ فى اساسها او جدارها او سقفها او سطحها او فى موضع آخر فيها وفقاً مناسباً لاغراضهم وحاجاتهم

قال فى شمس الآفاق فى معرفة الاوقات[*] . ان اول من تكلم فى علم الوفق هو ابراهيم عليه السلام فانه وضع مائة فى مائة فى اساس مكة ووضع هذا الوفق ايضاً ثالث الحكيم فى هيكل عطارى وذكر انه استخرج بالالهام الالهى ١٥ وقال ايضاً من وضع الستة فى ستة فى شرف زحل على اجرة بداد ووضعها فى اساس البناء فى كل زاوية وركن وذلك اذا وصل زحل الى برج الجدى فانه يطول بقاءه ويحسن بناؤه ويصير محل الاكابر ولا يخرب فى المدد الطويلة حتى لو ارادوا ان يخربوه لم يكسد ان يخرب وان القى الاجرة فى بئر فان ما ٥ يزيد زيادة كثيرة . وذكر فى تواريخ اليونان ان اهرام مصر كانت قد بنيت وتحت لينة وضع عليها ستة فى ستة .

ثم ان الوباء كما يحدث من الاسباب الارضية الطبيعية كذلك يحدث من الاسباب السماوية الالهية صرح به الشيخ الرئيس ابن سينا فى القانون

٥ فانه لا يمرره : ا فانه لا يمرنا — [*] لبد الرحمن بن محمد البطامى التوفى بعد سنة ٨٥٨ م . ش — ١٦ ، وذكر انه استخرج : لا استخرجه

— المطلب الخامس بيان مناسبة العلوم الثلاثة بتضعيف المذبح —
وهذا مما يظهر في اثنا. تحقيق سائر المطالب فلا حاجة الى بيانه بالاستقلال.

— المطلب السادس بيان استخراج الخطين بين الخطين —
وكيفية التوصل به الى تضعيف المذبح

٥ فنقول انك لما عرفت في الباب الاول طريق تحصيل تضعيف المربع ان يضرب ضعف ضلع سطح المربع في نفسه ليحصل منه مربع هو ضعف سطح المربع ثم يضرب ضلع المربع الحاصل الذي هو ضعف ضلع المربع الاول في ضعف ارتفاعه عُلِمَت ان تضعيف المكعب لا يتوصل به الا باستخراج خطين بين خطين على نسبة متوالية الخط الاول ضعف ضلع المربع المضروب والخط ١٠ الثاني هذا الضعف المضروب والخط الثالث ضلع المربع الحاصل بعد الضرب الذي هو ايضا ضعف ضلع المربع الاول والخط الرابع ضعف ارتفاع المذبح المكعب وهذه الخطوط على نسبة متوالية لان نسبة الاول الى الثاني كنسبة الثاني الى الثالث ونسبة الثاني الى الثالث كنسبة الثالث الى الرابع لان الخطوط الاربعة متساوية ههنا فيكون النسبة المتوالية في الخطوط الاربعة المتوالية في ١٥ النسبة التي يجب استخراجها في تضعيف الاجسام المسطحة كلها مكعبا كان او غيره على نسبة التساوى انما وقع لخصوصية المكعب الذي يتساوى اضلاعه سطوحه وفي غيرها المكعب من المسطحات لا يكون على نسبة التساوى واستخراج تلك الخطوط الاربعة في المكعب انما يحصل بمساحة ضلعه ثم تضعيفه . وانما لم يذكر افلاطون طريق تحصيل تضعيف المكعب على التفصيل بل ٢٠ رمز الى ما هو العمدة لان دأبه الرمز والالغاز في كلامه على ما يعرفه من يزاول كتبه .

٥ في الباب الاول طريق : لا في الباب الاول ان طريق ان : في من يانه —
١٦ انما وقع لخصوصية : لا بخصوصية — ١٧ وفي غيرها المكعب : لا وفي غير المكعب

مثل الحوض المكعب لاجراء دماء القرايين والقاء روثها فيها
والمكعب قد مرّ تقييره في الباب الاول
والمراد من كون العدد على سير طبيعي وقوعه على وجه التعداد الذي
يقتضى طبعه وتعمده عليه كأن يقول واحد واثنان ثلاثة اربعة خمسة بالغا ما بلغ

٥ - المطلب الثاني في بيان سبب وقوع الوباء من ضيق المذبح -

فنقول ان الوباء يحدث من عفونة الهواء ولعفونة الهواء اسباب من جعلتها
عفونة الجيف والدماء الفاسدة والمزابل وامثالها من سائر الغازورات في المضائق
لكثرة تراكمها الموجب للعفونة على ما بين في موضعه .
فاذا كان المذبح ضيقا يتراكم ما فيه تراكماً شديداً فيتعفن ويعفن الهواء .
١٠ ويحدث الوباء .

- المطلب الثالث في بيان سبب ازدياد الوباء باضافة مذبح آخر -

فنقول لما كان تعفن الهواء المحدث للوباء تعفن ما في المذبح بسبب كثرة
تراكمه اضيقه فلا شك ان تعدد المضائق يوجب تعدد موضع كثرة التراكم
فيتعدد موضع التعفن فيكثر ما يلازمه ومصداقه ان تعفن الاخلاط في حصى
١٥ الربع اذا كان في موضع واحد يحجم يوماً ويومين لا واذا كان التعفن في
موضعين يحجم يومين ويوم لا واذا كان في ثلاثة مواضع يحجم كل يوم كالتأثبة
ويظنّه الطبيب الجاهل نائبة ولا يعرف انه ربع مركب من ربعين وهذا مما
يعرفه حذّاق الاطباء .

- المطلب الرابع بيان اضافة مذبح آخر ليس تضعيفا للمكعب -

٢٠ فنقول قد مرّ في الباب الاول ما يغنيك عن بيانه ههنا فليرجع اليه .

(٢) كان يقول : لعله كان يقال

فأوحى الله إليهم بأنهم لم يضعفوا المذبح بل احدثوا آخر مثله وليس هذا بتضعيف المكتب فاستغاثوا بافلاطون فقال انكم تنفرون عن ثلث اى ثلاثة عاوم من الحكمة وهى الحساب والهندسة والوفى فابتلاه الله الرباء عقوبة لكم فان للعاوم الحكمة عند الله مقداراً ثم انه القى الى اصحابه انكم متى امكنكم استخراج خطين بين خطين على نسبة متوالية توصلتم الى تضعيف المذبح وانه لا حيلة لكم فيه دون استخراج ذلك فاهتوا في استخراجهم حتى تمسوا العمل باستخراجه بتضعيف المذبح وضعوا عشرة آلاف بيت مشحون بعشرة آلاف عدد على سير طبيعى انتهى كلام افلاطون.

اقول حل كلامه لا يتم الا بتفسير ما وقع في هذه الحكاية من الالفاظ التى يجب تفسيرها وبيان سبب وقوع الرباء من ضيق المذبح وبيان سبب ازدياده من اضافة مذبح آخر اليه وبيان ان اضافة مذبح آخر ليس بتضعيف المكتب وبيان مناسبة العاوم الثلاثة بتضعيف المذبح وبيان استخراج الخطين وكيفية التوصل به الى تضعيف المذبح وبيان سبب اندفاع الرباء بتضعيف المذبح وبيان تعلق التضعيف بوضع المائة الذى اشير اليه بقوله ووضعوا عشرة آلاف بيت وبيان سبب اندفاع الرباء بوضع المائة فى المائة فهذه تسعة مطالب ونورد كلاً منها ونبيته على وجه لا يبقى شائبة شبهة.

— المطلب الاول فى تفسير الالفاظ —

قال فى الصحاح الهيكل [*] بيت الاصنام والمراد هنا المعبد مطلقاً.
المذبح الحفرة التى يذبح فيها وكان امر الذبايح والقرايين فى المعابد الشريفة كمكة والقدس الشريف وغيرهما من الهياكل العظام كهيكل النور وهيكل العطاردة وهيكل القلنوس الكبير مما يعتنى شأنه فى كل امر مهم يكثر وقوعها وكانوا قد وضعوا فى هذا الهيكل الذى وقع فيه الرباء مذبحاً

(٣) فابتلاه الله : ١ فابتلاككم الله وفى لا مثله — (٥) توصلتم : فى س وصلتكم —
(٦) فاهتموا فى : ١ فاهتموا با وفى لا مثله — (٨) انتهى كلام افلاطون : هذه العبارة مكتوبة فى النسخ الثلاث فى هذا المحل — [*] الهيكل : كلمة سورية معناها البيت الكبير . م ، ش — (٢٢) وقوعها : لعله وقوعه

الثالث مثل الثاني يستى ثلاثة اعداد متناسبة والاعداد المتناسبة الفرد مثل مجموع الاثنين والاربعة والثمانية لان نسبة الاثنين الى الاربعة كنسبة الاربعة الى الثمانية وان لم يكن الثاني مثل الثالث يسمى اربعة اعداد متناسبة والاعداد المتناسبة الزوج مثل مجموع الاثنين والاربعة والثلاثة والستة لان نسبة الاثنين الى الاربعة كنسبة الثلاثة الى الستة وفي المناسبة الزوج ان كانت نسبة الاول الى الثاني كنسبة الثاني الى الرابع يسمى المتناسبة المتوالية كمجموع الاثنين والاربعة والثمانية وستة عشر فان فيها نسبة الاربعة الى الثمانية كنسبة الاثنين الى الاربعة وان لم يكن كذلك يسمى غير المتوالية كمجموع الاثنين والاربعة والثلاثة والستة واقل ما لا بد منه للنسبة المتوالية هو الاشياء الاربعة ١٠ لان النسبة المتناسبة لا يمكن حصولها الا بين الاشياء الثلاثة فلا بد لتوالي تلك النسبة المتناسبة من شئ آخر لا اقل منه لان توالي النسبة هو تكرار تناسب النسبة مثلاً نسبة الاثنين الى الاربعة كنسبة الاربعة الى الثمانية وهى تناسب النسبة مرة واقل توالي تلك النسبة انما يكون بتكرارها مرة اخرى كان يقال نسبة الاربعة الى الثمانية كنسبة الثمانية الى ستة عشر ثم هلم جراً ١٥ في جانب كثرة التوالى.

الباب الثانى فى المقصود وهو من كلام افلاطون الاول

حكى انه وقع وباء عظيم فى بعض هياكل اهل يونان وقيل وهو هيكـل داود النبى عليه السلام الذى بناه ووضع فيه الارغنون الكبير فآلوا بعض انبياء بنى اسرائيل عن سبب دفعه فاوحى الله اليهم انهم متى ضعفوا المذبح ٢٠ الذى كان لهم على شكل المكتب ارتفع عنهم الباء فآثبتوا مذبجاً آخر واضافوه الى الاول فازداد الباء فستلوا ذلك النبى عليه السلام عن سببه

(١٥) وفى آخر هذا الباب فى الحاشى فى ١ وفى لا ما حروفه: وعلم من هذا ان من قال ان افلاطون قال استخراج الخطين [وفى لا استخراج الخط] بين الخطين على نسبة متوالية زاعماً ان النسبة المتوالية تحصل بين الاشياء الثلاثة لم يشم راحة النسبة الى العلوم الهندسية والحسابية بل الى العلم مطلقاً

طلب نصف الاجرة فالى الآخر فحكما القاضى المهندس فحكم ثمن الاجرة فقال اذا نصفت فى السك فقد نصفت البيت مرة واذا نصفت فى الطول فقد نصفت مرة اخرى واذا نصفت فى العرض فقد نصفت مرة ثالثة فالذى بنيت نصف نصف نصف البيت الذى عقد الاجرة عليه ونصف نصف نصف البيت ٥ ثمنه فحقك ليس الا الثمن.

ومن هذا عليم ان القدر الذى هو اكثر من بعد واحد ففى تنصيفه يكفى تنصيف بعد واحد اى بعد كان وعليم ايضا مما ذكرنا ان مضعف المكعب يشتمل ثمانية امثال المكعب لانك اذا جعلته مثل نفسه مرتين فى بعديه فقط يكون مشتملا على اربعة امثال كضعف المربع فاذا جعلته مثل نفسه مرتين فى بعده الثالث بعد اعتبار ذلك فى بعديه الاول والثانى يكون مشتملا على ثمانية امثاله حتى لو ضعف مكعب ثقله فنظار يكون ثقل مضعفه ثمانية فنظار.

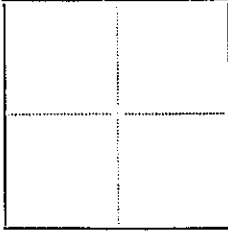
وهكذا حكم تضعيف جميع الاجسام وجميع ما ذكرنا بما لا يخفى على التخيل الصادق عند تجريد النهى الوقادة عن مالفات الوهم واحكام العادة. فتضعيف المكعب الذى اضلاع سطوحه خمسة اذرع جعله عشرا فى عشر ١٥ بان يجعل له عشرة اذرع طول فى عشرة اذرع عرض ثم جعل ذلك العشرة فى العشرة فى عشر آخر بان يجعل له عشرة اذرع طول وعرض فى عشرة اذرع سلك وهذا هو تضعيف المكعب لا وضع مثله فى جنبه.

وطريق تحصيله ان يضرب ضعف ضلع سطح المربع فى نفسه ليحصل منه مربع ضعف سطح المربع ثم يضرب ضلع الحاصل فى ضعف ارتفاعه ومن هذا عليم ان تضعيف المربع بضرب ضعف ضلعه فى نفسه لا بوضع مثله فى جنبه فتضعيف مربع هو خمس فى خمس جعله عشرا فى عشر

النسبة هى مقدار احد المكعبين من الآخر فى الكميات المناسبة هى التى يكون نسبة الاول منها الى الثانى كنسبة الثالث الى الرابع فان كان

- (٨) فاذا جعلته لا فاذا جعلت (١٣) عند تجريد النعى لا عند تجريد النفس —
 (١٨) سطح المربع لا سطحه المربع — (١٨) ليحصل منه مربع ضعف : لا ليحصل منه مربع سطحه ضعف — (٢٢) هى مقدار احد المكعبين : ١ هى مقدار كمية احد المكعبين وفى لا مثله — (٢٣) هى التى يكون : ١ هى التى تكون

ظناً منهم ان تضعيف احد بعده تضعيف له وانما تضعفه اذا جعلته مثل نفسه



مرتين في مجموعى بعده هكذا
ومن هذا عُلِمَ ان تضعيف المربع يشتمل اربعة
امثال المربع الاول لكون التضعيف فيه في كلا
٥ بعده كما ان مضاعف الخط يشتمل على مثلي الخط
بكون التضعيف فيه في بعد واحد.

والطريق الى تضعيف السطح المربع ان يضرب ضعف احد اضلاعه في نفسه وهذا
يجعل المربع مثل نفسه مرتين في كلا بعده كما لا يخفى على من له تحصيل صادق
وما له ابعاد ثلاثة اعنى الجسم فتضعيفه جعله مثل نفسه مرتين في مجموع
١٠ ابعاده الثلاثة فوضع مكعب ضاع سطوحه اربع اذرع جنب مكعب آخر مثله
ليس بتضعيف المكعب لأنك ما جعلت ابعاده الثلاثة مثل نفسها مرتين بل
جعلت بعده الواحد كذلك فهو اى مجموع المكعبين نصف نصف ضعف
المكعبين ولهذا حكم القاضى المهندس في مثل ذلك ربع الاجرة :

حكى ان رجلاً آجر بناء على ان يضعف داره على ثمانية مائة الف درهم
١٥ وكان الدار عشرة اذرع في الطول والعرض والسك وجعل البناء طوله عشرين
ذراعاً مع بقاء العرض والسك على حالهما فطلب البناء تمام الاجرة فابى الآجر
فرجعا الى القاضى فامر القاضى ربع الاجرة فقال ان جعلت الدار عشرين ذراعاً
في الطول فقط دون العرض والسك كان الحاصل نصف المضاعف الذى هو
ربعه فحقك ليس الا ربع الاجرة.

٢٠ وآجر الآجر البناء ايضاً على ان يبنى له بيتاً طوله وعرضه وسمكه عشرة
اذرع فبنى البناء ايضاً بيتاً طوله وعرضه وسمكه خمسة اذرع وبعد اتمامه

(١) احد بعده : مكذافى النسخ — ٦) بكون : في س لكون — ١٥) على ثمانية
مائة الف : في لا ثمانية مائة درهم وفي ١ ثمانية مائة درهم — ١٧) فامر القاضى : في س
فحكم القاضى ربع الاجرة فقال ان جعلت الدار عشرين ذراعاً في الطول والعرض فقط
وفي السك كان الحاصل نصف المضاعف فاذا لم تضعف العرض ايضاً كان الحاصل نصف
نصف المضاعف الذى هو ربعه — ١٩) نصف المضاعف الذى : في ١ نصف المضاعف فاذا لم
تضعف العرض ايضاً كان الحاصل نصف نصف المضاعف الذى هو ربعه . وفي لا مثله

مساحة الجرم وهو يحصل بضرب طوله في عرضه ثم بضرب السطح
الحاصل منه في ارتفاعه.

التضعيف تضعيف الشيء عبارة عن جعله مثل نفسه مرتين وذلك لا يتصور
إلا في الكمّ فالمضاعف أما كمّ منفصل أو متصل وتضعيف الكمّ المنفصل
٥ اعني العدد جعل أحادها مثل نفسها مرتين كجعل الخمسة عشرة.

والكمّ المتصل اعني المقدار والبعد اما بعد واحد اعني الطول كالخط
واما بعدان فقط اعني الطول والعرض كالسطح واما ابعاد ثلاثة اعني الطول
والعرض والعمق كالجسم التعليمي وتضعيف كل منها جعله مثل نفسه مرتين
في بعديته فما هو بعد واحد فتضعيفه في ذلك البعد اعني جعل ذلك البعد
١٠ الواحد مثل نفسه مرتين وما هو بعدان فتضعيفه فيهما اعني جعل مجموعي
البعدين من حيث هما مجموع مثل نفسه مرتين فوضع مربع ضلعه خمسة اذرع
عند مربع آخر ضلعه خمسة اذرع ايضاً ليس بتضعيف للمربع لانه تضعيف له
في بعده الواحد بل مجموع المربعين نصف ضعف المربع ولذا اخطأ القاضي الجاهل
بعلم الهندسة في مثله. حكى ان واحداً اشترى من آخر ارضاً طوله وعرضه
١٥ اربعون ذراعاً فسلم البايع ارضاً طوله وعرضه عشرون ذراعاً وارضاً آخر
طوله وعرضه عشرون ذراعاً ايضاً فلم يرض المشتري فاتيا القاضي فعرفا القضية
فقال القاضي الذي سلمك هو تمام حقتك وكان عند القاضي مهندسى فقال لا
بل هو نصف حقه لأن ما سلمه يساوى في احد بعده لا بعديته جميعاً فلا



يكون ما سلمه اربعين في اربعين الذي هو تمام حقه كما لا يخفى
٢٠ على المتخيل الصادق فرجع القاضي فليكن المربع هكذا

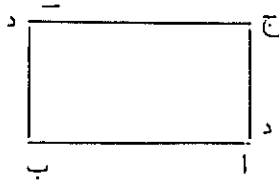


فاذا وضعت عنده مربعاً آخر مثله هكذا
ما ضعفته لانه جعلته مثل نفسه مرتين في بعد واحد
وان العامة يظنون ان تضعيف المربع وضع مثله جنبه

- (١٢) عند مربع آخر ضلعه : ١ عند مربع آخر مثله - لا عند مربع آخر ضلعه -
(١٣) ١ بل مجموعي المربعين - لا بل مجموع المربعين (١٧) مهندسى : لا مهندس -
(١٨) يساوى في احد : ١ يساوى حقه في احد . وهكذا في لا

حتى يتكرر الثلاثة بعدد آحاد الأربعة فيحصل منه اثني عشر وعلى هذا القياس ضرب الخط في الخط فانه عبارة ايضاً عن تلاقى احدهما جميع القدر الذي في الآخر وذلك لا يمكن بتطبيق احدهما على الآخر في جهة العرض اذ لا عرض للخط فيستهلك احدهما في الآخر ولا يزيد القدر بالتطبيق في جهة العرض
 ٥ لانه ضرب ما لا قدر له مطلقاً فيما له قدر

لكن ضرب من جهة لا قدره لا يفيد في
 تحصيل القدر كضرب الواحد في الواحد بل لا
 بد ان يوضع احد الخطين كخط (اب) ويجعل
 خط (جـ د) عموداً على طرفه هكذا



١٠ ويجز خط (جـ د) على وضع العمودية على (اب) الى طرفه الآخر مع
 تحيله ثابتاً في موضعه الاول وهكذا يفعل في خط (اب) اعني يدّ على وضع
 العمودية على خط (جـ د) الى طرفه مع تحيله ثابتاً في موضعه الاول فيلاقى
 كل من الخطين بجميع القدر الذي هو في الآخر على ما هو في معنى الضرب
 فيحصل منه سطح (ابجـ د)

١٥ وقس عليه ضرب السطح في السطح ليحصل منه المجتم فانه انما يحصل
 بجعل احدهما عموداً على طرف الآخر وامرار كل منهما على الآخر على الوجه
 الذي صورناه .

ولا يحصل المجتم بالتطبيق في جهة العمق اقضية الاستهلاك .
 وقد يقال ضرب ضلع السطح في الارتفاع ولكل منهما يحصل جسم
 ٢٠ سطح له ستة سطوح يكون الخطان المتوازيان في كل سطح خط الارتفاع
 والخطان المتوازيان الآخران ضلع السطح المضروب فيه او ضلع السطح .
 المربع انما يحصل بضرب الخط في نفسه .
 والجم المكعب انما يحصل بضرب السطح المربع في نفسه .

٦ لا قدره : في النسخ الثلاث هكذا بالهاء . ولعل الصحيح : كذلك ضرب
 من جهة لا قدر لها لا يفيد . . . (١٩) ضرب ضلع السطح : لا ضرب السطح . —
 (٢١) السطح المضروب : لا السطح المضروب فيه

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة على نبيه محمد وآله اجمعين.

الباب الاول في المفردات التي يجب تصدير الكتاب بها

المربع سطح يحيط به اضلاع اربعة متساوية متوازية.
توازي الخطّين تقابلهما على وجه لا يقع الالتقاء بينهما بكلّ من طرفيهما
٥ وان اخرجنا في اى طرف كان الى غير النهاية.

المكعب جسم يحيط به ستة سطوح متساوية على ما ذكره في شرح
المواقف . واحسن منه [*] ان يقال المكعب جسم متساوى الابعاد الثلاثة
كبيت له عشرة اذرع في الطول والعرض والسمك.

ضرب الخطّ في الخطّ عبارة عن تحصيل

١٠ سطح يكون الخطّ المضروب ضلعيه على التوازي
والخطّ المضروب فيه ضلعيه الآخرين على وجه
التوازي ايضا مثلاً اذا ضربنا خط (اب) في (ج
(جد) يحصل سطح (ابجد) هكذا

وذلك لان ضرب العدد في العدد عبارة عن ان يصادق احدهما كلاً من
١٥ آحاد الآخر على حدة فيتكرر العدد المضروب بعدد آحاد المضروب فيه مثلاً
ضرب الثلاثة في الاربعة عبارة عن مصادقة الثلاثة كلّ واحد من آحاد الاربعة

• يوجد بعد الى غير النهاية في ١ ما نصه : الاجسام المسطحة ما له سطوح ستة متوازية
سواء كانت متساوية ام لا . مثله في لا [*] في هامش النسخ ما حروفه : وانما كان احسن
لان فيه تصوير حقيقته على وجه الكنه بخلاف الاول فانه تصوير بعرضياته — ١٦) لان :
١ ان ؛ لا مثله . — ١٦) يصادق : في من يصادف — ١٦) مصادقة : في من مصادقة

بيان العلامات

- ا — نسخة مكتبة اسعد افندى الكائنة باستنبول تحت عدد ٣٥٩٦
 ب — نسخة لايدن Or. 958. f. 11^a — 17^a, Catalog. Cod. Orient.
 ac. Lugd. Bat., III. 179.

دفتر المخطوطات الشرقية ٣

الصحيفة ١٧٩

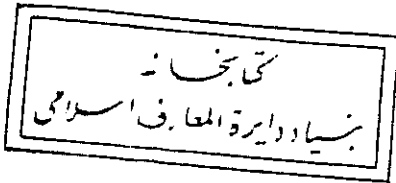
س — نسخة شيخنا المرحوم اسماعيل صائب افندى

استنسخ الاصل من نسخة مكتبة كلية استنبول المرقمة برقم ١٢٥٨

جمع من خيرة اهل العلم والادب طبعها وسألوا منى ان اكتب عليها تصديراً
مع مقابلة النسخ الثلاث التى بين ايدينا فاجبت مسئولهم خدمة للعلم واهله
والله ولى التوفيق وهو نعم المولى ونعم الرقيق

وذلك يوم الاحد التاسع عشر من محرم الحرام لسنة ١٣٥٩ هجرية
الموافق خمسة وعشرين من شباط لسنة ١٩٤٠ مسيحية على صاحبها آلاف تحية
وانا الفقير الى الله تعالى

محمد شرف الدين
احد المدرسين بكلية استنبول



ثم ان هذه المسألة من جملة ما اطلع عليه العرب وان انكر بعض
المستشرقين مثل Julius Lippert في كتابه *Studien auf dem Gebiete der griechisch-arabischen Übersetzungs-Litteratur*.
في الصحيفة الخامسة والاربعين اطلع العرب على هذه الكتب وعلى
المسألة نفسها

قال زكريا بن محمد القزويني في كتابه آثار البلاد واخبار العباد في
الصحيفة الثانية والثمانين وثلاثمائة ما نصه وينسب اليها افلاطون استاذ
ارسطاطاليس فكان حكيماً زاهداً في الدنيا ويقول بالتناسخ فوقع في زمانه
وباء هلك من الناس خلق كثير فتضرعوا الى الله تعالى من كثرة الموت وسألوا
نبيهم وكان من انبياء بني اسرائيل عن سبب ذلك فاوحى الله تعالى اليه
انهم متى ضعفوا مذنباً لهم على شكل المكعب ارتفع عنهم الوباء فظهروا
مذنباً آخر مجنبه و اضافوه الى المذبح الاول فزاد الوباء فعادوا الى النبي عم
فاوحى الله تعالى اليه انهم ما ضعفوا بل قرونوا به مثله وليس هذا تضعيف
المذبح فاستعانوا بافلاطون فقال انكم كنتم تردون الحكمة وتمتنعون عن
الحكمة والهندسة فابالكم الله بالوباء عقوبة لتعلموا ان العلوم الحكيمة
والهندسية عند الله بكانة ثم التقى اصحابه انكم متى امكنكم استخراج
خطين من خطين على نسبة متوالية توصلتم على تضعيف المذبح فانه لا حيلة
فيه دون استخراج ذلك فتعلموا استخراج ذلك فارتفع الوباء عنهم
وذكر حسين بن معين الدين الميبدى نفس المسألة وتاريخها بالفارسية في
اول شرحه لديوان سيدنا على وحلها وكتب ابراهيم افندى الحلبي العريف
براغب باشا خوجا سى رسالة بالعربية بسط فيها ما ذكره حسين الميبدى وجعلها
خدمة لذلك الوزير الفاضل صاحب سفينة الراغب ودفينة المطالب
ورسالة ملا لطفى [١] هذه اقدم وابسط من رسالة الحلبي ولذلك رأى

[١] وللغير رسالة بالتركية في ترجمته ومؤلفاته

نصير

إن مسألة تضعيف المذبح أو المكعب من أقدم المسائل المعلومة لدى
الرياضيين اليونانيين

قال دهبوتى فى الصقيفة الخامسة فى ترجمة كتاب مائه ماتيقا لتهئون
الازميرى ما تعريفه

قال ثدراتوستن فى كتابه المسمى بيلاتونيقيوس ان اها الى جزيرة دهلوس
اصيوا بطاعون جارف فسألوا عما يدفعه عنهم من كهنتهم فاجابوا انهم متى
ضعفوا مذبجاً لهم على شكل المكعب ارتفع عنهم الطاعون فاجتهد البتائون
وصرفوا عنايتهم بتضعيفه فعجزوا عنه فاستغاثوا بافلاطون فقال ان الله تعالى
غنى عن تضعيف المذبح لا يحتاج اليه الا انه اراد ان يواخذكم على ترك
الرياضيات وامتهانتكم بالهندسة

واول من افكر مسألة تربيع الاهلة وتضعيف المكعب هو هيبوقراتس
المصطكى الذى اشتهر قبل ميلاد المسيح بين سنة ٤٣٠ و ٤٥٠ ورجع الثانية
الى وسط متناسب بين خط مستقيم وضعفه وبعد هيبوقراتس المصطكى
صرف العناية بهذه المسألة آرخيتاس الذى اشتهر فى النصف الاول من القرن
الرابع قبل المسيح واراد حلها بسطحين متقاطعين

وبالاحير اخترع ثدراتوستن صاحب كتاب پلاتونيقيوس المتوفى سنة ١٩٢
قبل المسيح آلة لتضعيف المكعب سماها بمسولاوون ونسبها الى افلاطون
وذلك انهم كانوا ينسبون كل ما يكتشفونه الى افلاطون والى غيره من
الاساطين وبين فى كتابه المذكور كيفية استعمال افلاطون لها وكيف توصل
بها الى تضعيف المذبح

وحل ثوتوسيوس القسطنطينى هذه المسألة عملياً كما بين فى شرح كتاب
لارخيد على الاكر والاسطوانات

رسالة تضعيف المذبح لمولانا لطفى المقتول

عني بتصحيحها ونشرها
محمد شرف الدين يالتقايا
احد المدرسين في كلية استبول

ترجمها من اللغة المريية الى اللغة الفرنسية وكتب المدخل عليها

هانرى كوربين و الدكتور عبد المحيى عثمانه
من محافظى الكتب فى مكتبة من منوبى مدرسة الألسنة
باريس الملية الشرقية يباريس

المطبعة الكاثوليكية . بيروت

١٩٤٠

XIV.

Essay on the Binomial Theorem; as known to the Arabs.

By J. TYTLER, Esq.

Communicated by R. TYTLER, M. D.

FOR a long time it was imagined that the discovery of the law which determines the coefficients of the terms of the powers of a Binomial Root, commonly called the Binomial Theorem, was entirely owing to SIR ISAAC NEWTON. My present distance from books and other sources of information compels me, in proof of this, to refer to so common a work, as JOHN WARD's Popular Introduction to Mathematics. He explains the Theorem, in part II. chap. 2 § 5, and concludes with these words: "Now from these considerations it was, that I proposed this method of raising powers in my Compendium of Algebra, page 51, as wholly new (viz. so much of it as was there useful), having then (I profess) neither seen the way of doing it, nor so much as heard of its being done. But, since the writing of that tract, I find in Dr. WALLIS's

History of Algebra, page 319 and 331, that the learned Sir ISAAC NEWTON had discovered it long before: which the doctor sets down in this manner:

Let m be the exponent of the power;

Then $\{ 1 \times \frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} \times \dots$

will be the series of the Unciæ required; but he doth not tell us how they first came to be found out, nor have I met with the least hint of it in any author."

THOMAS SIMSON, also, in the 6th section of his Algebra, attributes it without any hesitation to Sir ISAAC NEWTON. At last, the late Dr. HUTTON, in the 77th page of the Introduction to his excellent Mathematical Tables, edition IVth, shewed that this Theorem, as far as relates to integers, was known before the time of Sir ISAAC, and that his merit consisted in the extension of it to fractions. The passage is not very long, and will save the trouble of a reference, and bring the whole subject at once before the reader; I shall therefore transcribe it.

"FOR assigning the coefficients of the terms in the multiple expressions, our author (BRIGGS) here delivers the construction of figurate or polygonal numbers, inserts a large table of them, and teaches their several uses; one of which is, that every other number, taken in the diagonal lines, furnishes the coefficients of the terms of the general equation by which the sines and chords of multiple arcs are expressed, which he amply illustrates; and another, that the same diagonal numbers constitute the

coefficients of the terms of any power of a Binomial; which property was also mentioned by VIETA, in his *Angulares Sectiones*, Theor. 6, 7; and, before him, pretty fully treated of by STIFELIUS, in his *Arithmetica Integra*, fol. 44 and seq.; where he inserts and makes the like use of such a table of figurate numbers, in extracting the roots of all powers whatever. But it was perhaps known much earlier, as appears by the treatise on figurate numbers by NICOMACHUS, (see MALCOLM's History, p. XVIII.) Though indeed, CARDAN seems to ascribe this discovery to STIFELIUS. See his *Opus Novum de Proportionibus Numerorum*, where he quotes it, and extracts the table and its use from STIFEL's book. CARDAN, in p. 135, &c. of the same work, makes use of a like table to find the number of variations or conjugations, as he calls them. STEVINUS, too, makes use of the same coefficient and method of roots as STIFELIUS. (See his *Arith.* p. 25.) And even LUCAS DE BURGO extracts the cube root by the same coefficients, about the year 1470. But he does not go to any higher roots. And this is the first mention I have seen of this law of the coefficients of the powers of a Binomial, commonly called Sir J. NEWTON's Binomial Theorem; although it is very evident that Sir ISAAC was not the first inventor of it. The part of it properly belonging to him, seems to be, only the extending it to fractional indices, which was indeed an immediate effect of the general method of denoting all roots like powers with fractional exponents, the Theorem being not at all altered. However, it appears, that our author BRIGGS was the first who taught the rule for generating the coefficients of the terms, successively one from another, of any powers of a Binomial, independent of those of any other power. For having shewn, in his

Abacus Παιγνητος (which he so calls on account of its frequent and excellent use, and of which a small specimen is here annexed,) that the numbers in the diagonal directions, ascending from right to left,

ABACUS ΠΑΙΓΝΗΤΟΣ.							
H -(8)	G -(7)	F +(6)	E +(5)	D -(4)	C -(3)	B +(2)	A (1)
9	8 36	7 28 84	6 21 56 126	5 15 35 70 126	4 10 20 35 56 84	3 6 10 15 21 28 36	2 3 4 5 6 7 8 9

are the coefficients of the powers of Binomials, the indices being the figures in the first perpendicular column A, which are also the coefficients of the 2d terms of each power, (those of the first terms being 1, are here omitted); and that any one of these diagonal numbers is in proportion to the next higher in the diagonal, as the vertical of the former is to the marginal of the latter; that is, as the uppermost number in the column of the former is to the first or right hand number in the line of the latter. Having shewn these things, I say, he thereby teaches the generation of the coefficients of any power, independently of all other powers, by the very same law or rule which we now use in the Binomial Theorem. Thus, for the 9th power; 9 being the coefficient of the 2d term, and 1 always that of the 1st, to find the 3d coefficient, we have $2:8::9:36$; for the 4th term, $3:7::36:84$; for the 5th term, $4:6::84:126$; and so on for the rest. That is to say, the coefficients in the terms in any power m , are inversely as the vertical numbers or first line 1, 2,

3, 4, . . . m , and directly as the ascending numbers m , $m-1$, $m-2$, $m-3$, . . . 1, in the first column A; and that consequently those coefficients are found by the continual multiplication of these fractions $\frac{m}{1}$, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$, . . . $\frac{m}{1}$, which is the very Theorem as it stands at this day, and as applied by NEWTON to roots or fractional exponents, as it had before been used for integral powers. This Theorem then being thus plainly taught by BRIGGS about the year 1600, it is surprising how a man of such general reading as Dr. WALLIS was, could possibly be ignorant of it, as he plainly appears to be by the 85th chapter of his Algebra, where he fully ascribes the invention to NEWTON, and adds, that he himself had formerly sought for such a rule but without success: or how Mr. JOHN BERNOUILLI, not half a century since, could himself first dispute the invention with NEWTON, and then give the discovery of it to M. PASCAL, who was not born till long after it had been taught by BRIGGS. See BERNOUILLI's *works*, vol. 4. *pa.* 173. But I do not wonder that BRIGGS's remark was unknown to NEWTON, who owed almost every thing to genius and deep meditation, but very little to reading: and I have no doubt that he made the discovery himself, without any light from BRIGGS, and that he thought it was new for all powers in generals, as it was indeed for roots and quantities with fractional and irrational exponents."

Thus far Dr. HUTTON. Mr. REUBEN BURROWS in the II^d volume of the Asiatic Researches, Appendix No. V. suspects that this rule was known to the *Hindus*. I am now about to show, that it was also known to the *Arabians*. It is to be found in two of their Arithmetical books

viz. the *Miftéh-ul-Hifab*, or key of Arithmetic, composed by JUMSHID BEN MUSA OUD in the reign of ULUGH-BEG, grandson of TIMUR, and in the *Ayoun-ul-Hifab*, or rules of Arithmetic, composed by MUHAMMED BAQIR in the reign of SHAH ABBAS I, about the year 1600. Neither of these works is very generally to be met with, at least in that part of India where I am stationed, and I have not as yet been able to procure more than an extract of each. The author of the *Miftéh-ul-Hifab* declares (I am told) that his rule is not invented by himself, but taken from authors more ancient still. His rule is much more complicated than that in the *Ayoun-ul-Hifab*, and presupposes an acquaintance with former parts of the work, which are not in my possession. I do not therefore transcribe that, but proceed to give the rule as it stands in the *Ayoun-ul-Hifab*, premising that the coefficients of the terms are called *اصول منازل* of the power, which I have translated *Radices Locorum*; and the first power of a number, that is, the number itself considered as a root, is called the *فعل اول* or *فعل* which I have, in like manner, translated *Latus* or *Latus Primum*.

اعلم ان اصول منزلة كل مضلع هي اعداد بازاء الضلع الاول والمضلعات السابقة عليه وطريق في استخراجها ان تثبت اسمي الضلع والمضلعات السابقة على المضلع المقروض مرتبة في سطر طولي وتأخذ عدد منزلة ذلك المضلع وتضع بازاء فعل ثم تنقص منه واحدا وتضرب نصف ما بقي فيما وضع بازاء الضلع او بالعكس وتضع الحاصل بازاء المال ثم تنقص منه اثنين وتضرب ثلث الباقي فيما وضع بازاء المال او بالعكس وتضع الحاصل بازاء الكعب ثم تنقص منه ثلاثة وتضرب ربع الباقي فيما وضع بازاء الكعب او بالعكس وتضع الحاصل بازاء مال المال وهكذا الي ان ينتهي ولا محالة يقع بازاء كل شيئين متقابلين من الجواشي الى الوسطا والوسطين عدد واحد فان شئت فارسم اولا بازاء الاخير وما قبله ايضا ما ترسمه بازاء الضلع وبازاء المال وهكذا

فهذا المضلع من كل عدد مساو لمجموع هذين المضلعين لقسميه واثني عشر مثلاً لكل من القعنين في مال كعب كعب كعب الآخر وصنة وستين مثلاً لال كل منهما في مال مال كعب كعب الآخر وماتين وعشرين مثلاً لكعب كل منهما في كعب كعب كعب الآخر واربعسة مائة وخمسة وتسعين مثلاً لال مال كل منهما في مال كعب كعب الآخر وسبعمائة واثنتين وتسعين مثلاً لال كعب كل منهما في مال مال كعب الآخر وتعمماته واربعة وعشرين مثلاً لكعب كعب كعب كعب في كعب كعب الآخر وعلى هذا القياس غيره

Observe that the Radices Locorum of each power are numbers which are placed opposite the Latus Primum; and the preceding powers (i. e. the powers whose Indices are less than that of the power whose Radices Locorum or coefficients are required), and the method of discovering them is as follows:—Let the names of the Latus, and of the power preceding or lower than the given one; be written in a row of length (i. e. in a row from the top to the bottom of the page), and take the number of the index of this given power, and place it opposite to the name of the Latus; then subtract from it, and multiply $\frac{1}{2}$ of the remainder into the number which is placed opposite the Latus, or the contrary, (i. e. or multiply the remainder into half of that which is placed opposite the Latus), and place the product opposite the name of the square; then subtract 2 from it (viz. from the index of the given power); and multiply $\frac{1}{3}$ of the remainder into that which is placed opposite the square or the contrary, and place the product opposite the cube; then subtract 3 from it; and multiply $\frac{1}{4}$ of the remainder into that which is placed opposite the cube or the contrary, and place the product opposite the biquadrate, and so on to the end, and

then by a necessary consequence the same number will be found in every place, which is equally distant from the middle or the two middle ones; therefore, if you chuse it, write the first found figure, also in the last place, (i. e. in the present instance) that which is written opposite the Latus and square may be written opposite the biquadrate and cube, and so on till it be completed. For example, let it be required to find the Radices Locorum of the cubris cubi cubi cubi. Let us write from the Latus to the quadratics cubi cubi cubi as was directed, and let us write 12 which is the index of the given power opposite the Latus and the last place, and subtract 1 from it, and let us multiply it into the $\frac{1}{2}$ of 12, and write 66 the product opposite the square and the penultimate place, then subtract 2 from it, and multiply 10, which is the remainder, into $\frac{2}{3}$ of what was written opposite the square, and write the product, which is 220, opposite the cube and that place which agrees with it (i. e. which is equally distant from the middle on the other side); then subtract 3 from it, and multiply 9 the remainder into $\frac{3}{4}$ of that which is opposite the cube, and write the product, which is 495, opposite the biquadrate and that which agrees with it, then subtract 4 from it, and multiply 8, the remainder, into $\frac{4}{5}$ of that which is opposite the biquadrate, and write the product, which is 792, opposite the quadratics cubi and that which agrees with it, then subtract 5 from it, and multiply 7 the remainder into 16th of that which is opposite the quadratics cubi, and write the product, which is 924, opposite the cubris cubi, and then these num-

bers, so written, are the Radices Locorum of the cubris cubi cubi cubi, of which this is the table.

<i>Names of the Powers preceding the given Power.</i>	<i>Numbers of Radices Locorum.</i>
Latus	12
Square	66
Cube	220
Biquadrate	495
Quadratics cubi	792
Cubris cubi	924
Quadratics quadrati cubi	792
Quadratics cubi cubi	495
Cubris cubi cubi	220
Quadratics quadrati cubi cubi	66
Quadratics cubi cubi cubi	12

Hence then this power of every number is equal to the sum of the powers of its two parts, and 12 times each of these two parts multiplied into the quadratics cubi cubi cubi of the other; and 66 times the square of each of them into the quadratics quadrati cubi cubi of the other; and 220 times the cubi of each of them into the cubris, cubi cubi of the other; and 495 times the biquadrate of each of them into the quadratics cubi cubi of the other; and 792 times the quadratics cubi of each of them into the quadratics quadrati cubi of the other; and 924 times the cubris cubi of one of them into the cubris cubi of the other, and so of other cases."

FROM this very clear rule it plainly appears, that whatever may have been the case in *Europe*, yet long before the time of BRIGGS the *Arabians* were acquainted with "the rule for generating the coefficients of the terms successively one from another, of any power of a Binomial independently of those of any other power;" and thus proof is added to the many others, that *Musulmans*, before the stimulus of *Muhammed's* newly imbibed doctrines had ceased and their narcotic effects began to appear, were much superior in science to contemporary Christians.

It is but justice that I should add, that my first knowledge of this rule was obtained from the *Khazanut-ul Ilm*, which is a complete system of Arithmetic, Algebra, and Geometry, as far as known to the *Arabians* and *Hindus*, composed in the present day by KHAN JEE, a most intelligent inhabitant of *Patna*. On my requesting to know from what original authors the rule was taken, this gentleman was kind enough to favour me with the above extract. No more I think is required to demonstrate, that his own work highly deserves translation and publication.

II.

AN ESSAY

ON

THE EXTRACTION OF THE ROOTS OF INTEGERS,

AS PRACTISED BY THE ARABS.

BY JOHN TYTLER.

If any integer value greater than unity be assigned to the Symbol 10, and the letters a, b, c, d , &c. be each some integer less than 10 so determined, and n be also some integer, then, as is well known, all finite integers, and some fractions, may be expressed by a series of this form—

$$a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c \cdot 10^{n-2} + d \cdot 10^{n-3} \text{ \&c.}$$

(2.) The value generally assigned to 10 for this purpose, is the number of the human fingers, the integers a, b, c, d , &c. are called Digits ; and fractions expressible by this series, are called Decimal Fractions

(3.) Now the problem which the art of Arithmetic properly so called, proposes to resolve is this, having A and B , two numbers expressed by

P

the above series, it is proposed to express Z , by a similar series, in the following seven equations.

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & A + B = Z. \\
 \text{II.} & A - B = Z. \\
 \text{III.} & A \times B = Z. \\
 \text{IV.} & A \div B = Z. \\
 \text{V.} & A^B = Z. \\
 \text{VI.} & A = Z^B. \\
 \text{VII.} & A^Z = B
 \end{array}$$

All other operations on numbers, belong either to the synthetical or analytical part of Algebra.

(4.) These operations, in the above order, successively become more and more complicated, and hence to form an estimate of the state of arithmetic among any people, it is sufficient to enquire into the method by which they perform the most complicated of these operations with which they are acquainted.

(5.) Conformably to this, I here propose to enquire into the method by which the Arabians, supposing A and B to be integers, express Z in the sixth equation or $A = Z^B$, or in other words, the Arabian method of extracting the Roots of integer powers. This method is contained in the *Ayoun-ul-Hisab*, a book, respecting which the reader will see all that I know in vol. XIII. of the Researches, p. 461. I believe the Arabs never attempted any general method for the seventh equation, which is the foundation of the Theory of Logarithms, except mere tentation. The extent of their knowledge on the subject of negative exponents, may be seen either in Mr. STRACHEY's History of Algebra, published in the Asiatic Researches, vol. XII. p. 177, or in the Calcutta edition of the *Arabico-Persic Kholasut-ul-Hisab*, p. 313, et seq. I do not find any trace of their acquaintance with fractional exponents.

(6.) I am induced to hope that this enquiry may be the more interesting, from not having been able to find it undertaken any where else ; it is neither mentioned in Mr. COLEBROOKE's elaborate translations of Sanscrit Algebra and Arithmetic, nor in Dr. TAYLOR's *Lilawati*. In the *Researches* vol. XII. Mr. STRACHEY gives from the *Kholasut-ul-Hisab*, a full and accurate account of Arabian Arithmetic, as far as Multiplication, but is silent respecting the extraction of Roots. He observes, p. 171—"On the other Rules nothing is delivered differing so much from those contained in our common books of Arithmetic, as to require specific mention." Mr. STRACHEY was probably led into this opinion from his having only consulted the *Kholasut-ul-Hisab*, a work far inferior, as I have reason to believe, either to the *Ayoun-ul-Hisab*, or its predecessor, the *Miftah-ul-Hisab*, and which contains no more than the extraction of the Square Root. To that edition of the *Kholasut-ul-Hisab*, which was printed at Calcutta in 1812, with a Persian translation, by *Mouluee Roshun Alee*, (I presume the same mentioned by Mr. STRACHEY at p. 167, *ibid.*) there is indeed added an Appendix, containing the extraction the Cube Root, by *Nujm-Uddeen Alee Khan*; but this last contains no more than the bare rule, goes to no higher powers, and sets out by declaring, استخراج کعب از منکترین فن حاسب است p. 466. "The extraction of the Cube is one of the greatest difficulties in the science of Arithmetic." And even this rule, as far as I can find, has never been translated into English.

(7.) In the 35th number of the *Edinburgh Review*, Professor PLAYFAIR (I suppose) employs pages 201 and 202 in explaining the method used by the Greeks, for the extraction of the Square Root: and this precedent will, I hope, be a sufficient justification of me for employing so much time upon the present subject.

(8.) For this purpose it will be necessary to have a general demonstration of the extraction of the Roots of all powers, and as it would

perhaps be difficult to refer to a book in which this is detailed so minutely as is required here, I shall endeavour to give one, and shall, accordingly, arrange the present Essay in the following order. There shall be given—

I. A general demonstration of the extraction of the Roots of all powers.

II. An example of this operation after the common European method, exhibiting its conformity to the demonstration.

III. A similar example after the Arabian method, with a similar exhibition.

IV. An extract from the original *Ayoun-ul-Hisab*, containing the Rule, together with a translation and remarks.

(9.) Then to begin orderly—

I. In this demonstration, the symbol $\angle$ shall be used to express less than $>$ to express greater than, and then the following Lemmas must be premised.

Lemma 1. The n^{th} power of 10 is 1 with n cyphers to its right hand.

Thus the first power of 10 is 10, the second is 100, the third is 1,000, the fourth is 10,000, &c. that is 1 with 1, 2, 3, 4, &c. cyphers to its right hand.

Lem. 2. Hence the n^{th} power of 10 contains $n + 1$ figures, and is the least possible number which can do so.

For 10 contains 2, or $1 + 1$ figures and all less numbers contain only one, again 100 contains 3 or $2 + 1$ figures, and all less numbers contain only one or two, again 1000 contains 4 or $3 + 1$ figures, and all less numbers contain only one, two, or three, and $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1,000 = 10^3$, &c.

Lem. 3. Hence the n^{th} power of a Digit, as defined in paragraph 2, cannot contain more than n figures.

For let a be any Digit then $a^n < 10^n$, but 10^n is the least number which contains $n + 1$ figures, hence a^n must contain less than $n + 1$ figures, that is not more than n .

Lem. 4. The greatest number which contains only n figures is $10^n - 1$.

For the greatest number with 2 figures is $99 = 100 - 1 = 10^2 - 1$. The greatest number with 3 figures is $999 = 1,000 - 1 = 10^3 - 1$. The greatest number with 4 figures is $9,999 = 10,000 - 1 = 10^4 - 1$, &c.

Lem. 5. Let a be the number of figures in the integer A . Then the number of figures in A^a is not greater than na , nor less than $n(a-1) + 1$.

For by Lem. 4. since there are a figures in A , so the maximum of A is $10^a - 1$, and maximum of A^a is $\overline{10^a - 1}^a$ which is evidently less than $\overline{10}^{an}$ or 10^{an} . But 10^{an} is by Lem. 2. the least number which can contain $an + 1$ figures. And hence $(10^a - 1)^a$ or A^a must contain less than $an + 1$ figures, that is not more than an .

Again, since there are a figures in A , so by Lemma 2 the minimum of A is 10^{a-1} and minimum of A^a is $\overline{10^{a-1}}^a = 10^{(a-1)a}$ and by Lem. 2 $10^{(a-1)a}$ contains $(a-1)n + 1$ figures.

Q

(10.) It would take up a great deal of room to go on demonstrating the following propositions generally for every value of n . It will be much shorter, and equally legitimate, to fix upon an individual index, and demonstrate the extraction of that Root, and then the demonstration may be easily extended to any other Power whatever, by means of the Binomial Theorem. In doing this, I must endeavour not to assign the value of the index n so high as to render the process unnecessarily prolix and cumbersome, and, on the other hand, it must not be taken so low as to render its extension to higher values, obscure and unsatisfactory. Between these two extremes, I shall chuse the number 6, and, making $n=6$, shall proceed to demonstrate the extraction of the 6th Root.

(11.) By the Binomial Theorem $(x+z)^6 = x^6 + 6x^5z + 15x^4z^2 + 20x^3z^3 + 15x^2z^4 + 6xz^5 + z^6$.

and hence $x+z = \sqrt[6]{x^6 + 6x^5z + 15x^4z^2 + 20x^3z^3 + 15x^2z^4 + 6xz^5 + z^6}$.

Now let s and t be any real numbers, and there be given the number $s^6 + t$, in which s is known, then if there can be found a number such, that

$$\left. \begin{array}{l} 6 \cdot s^5 \times \text{that found number} \\ 15 \cdot s^4 \times \frac{\text{that found number}}{s} \\ 20 \cdot s^3 \times \frac{\text{that found number}^2}{s^2} \\ 15 \cdot s^2 \times \frac{\text{that found number}^3}{s^3} \\ 6 \cdot s \times \frac{\text{that found number}^4}{s^4} \\ \frac{\text{that found number}^5}{s^5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{When all added together, the} \\ \text{sum should be} = t, \text{ then is} \\ s + \text{that found number, the} \\ \text{6th Root of } s^6 + t. \end{array}$$

For let this found number be u , then evidently the above expression becomes

$$6s^5 \times u + 15s^4 \times u^2 + 20s^3 \times u^3 + 15s^2 \times u^4 + 6s \times u^5 + u^6 = t.$$

and then $s^6 + 6s^5u + 15s^4u^2 + 20s^3u^3 + 15s^2u^4 + 6su^5 + u^6 = s^6 + t$

and then $\sqrt[6]{s^6 + t} = \sqrt[6]{s^6 + 6s^5u + 15s^4u^2 + 20s^3u^3 + 15s^2u^4 + 6su^5 + u^6} = s + u$
as above by Binomial Theorem.

(12.) But if no such number can be found then is $s^6 + t$ a surd to the 6th Power. If not, let $s^6 + t$ be Rational, and let $\sqrt[6]{s^6 + t} = v$. Then either v is $<$ or $> s$.

First let $v = s$ then $v^6 = s^6$ and $< s^6 + t$. But by supposition $v = \sqrt[6]{s^6 + t}$ and also $v^6 = s^6 + t$, which is absurd.

Second. Let $v < s$, then by similar reasoning v^6 is $< s^6$ and consequently $< s^6 + t$ and also $= s^6 + t$, which is also absurd.

Third Let $v > s$ and let $v = s + w$. Then $v^6 = (s + w)^6 = s^6 + t = s^6 + 6 s^5 w + 15 s^4 w^2 + 20 s^3 w^3 + 15 s^2 w^4 + 6 s w^5 + w^6$. Hence w answers the conditions of par. 11, which yet by supposition no number can answer, which is also absurd.

(13.) Let then $s^6 + t$ be integers and thus irrational, and let u be the greatest possible integer such that $6 s^5 u + 15 s^4 u^2 + 20 s^3 u^3 + 15 s^2 u^4 + 6 s u^5 + u^6 < t$, then is $s + u$, the greatest integral approximate 6th Root of $s^6 + t$. That is $(s + u)^6 < s^6 + t$ and $(s + u + 1)^6 > s^6 + t$. For if not let v be an integer $> s + u$ and such that $v^6 < s^6 + t$. Then since $v > s + u$ and $s + u > s$ so also $v > s$. Let $v = s + w$ and then as before $v^6 = (s + w)^6 = s^6 + 6 s^5 w + 15 s^4 w^2 + 20 s^3 w^3 + 15 s^2 w^4 + 6 s w^5 + w^6$ and $< s^6 + t$. Subtract s^6 from both sides, there remains $6 s^5 w + 15 s^4 w^2 + 20 s^3 w^3 + 15 s^2 w^4 + 6 s w^5 + w^6 < t$. But since $v > s + u$ and $v = s + w$ so $w > u$, and fulfils the conditions of par. 11, consequently u both is, and is not the greatest number that fulfils these conditions, which is absurd.

(14.) For the same reasons as in par. 10, I shall suppose the present operation to be performed on a number whose 6th Root consists of 6 figures. Let then M be a surd to the 6th power, and let its approximate 6th Root be m , so that $m^6 < M$ and $(m+1)^6 > M$. Then since m consists by supposition of 6 figures, so M will contain not more than 36, nor less than 31 figures.

If not, then either M contains fewer figures than 31, or more than 36.

First, let M contain fewer than 31. Now since m contains 6 figures, so by Lem. 5, m^6 contains at least $6 \times 5 + 1$, or 31 figures, which is absurd.

Second, let M contain more than 36. Now since maximum of m by Lem. 4 is $10^6 - 1$ so maximum of $m + 1$ is 10^6 and hence maximum of $(m+1)^6$ is $10^6 \overline{)}^6$ or 10^{36} which by Lem. 2 is the least number that can contain 37 figures. But $M < (m+1)^6$ by supposition. That is, M must always be less than the least number with 37 figures, and, consequently, cannot contain more than 36.

(15.) As a medium, let us suppose that M contains 33 figures, then by the known properties of the series of par. 1, n will there be = 32, and M may be thus represented, supposing the coefficients of the powers of 10 to be Digits.

$$\begin{aligned} & a \cdot 10^{32} + b \cdot 10^{31} + c \cdot 10^{30} + d \cdot 10^{29} + e \cdot 10^{28} + f \cdot 10^{27} + g \cdot 10^{26} \\ & + h \cdot 10^{25} + i \cdot 10^{24} + j \cdot 10^{23} + k \cdot 10^{22} + l \cdot 10^{21} + m \cdot 10^{20} + n \cdot 10^{19} \\ & + p \cdot 10^{18} + q \cdot 10^{17} + r \cdot 10^{16} + s \cdot 10^{15} + t \cdot 10^{14} + u \cdot 10^{13} + v \cdot 10^{12} \\ & + w \cdot 10^{11} + x \cdot 10^{10} + y \cdot 10^9 + z \cdot 10^8 + \alpha \cdot 10^7 + \beta \cdot 10^6 + \gamma \cdot 10^5 \\ & + \delta \cdot 10^4 + \epsilon \cdot 10^3 + \zeta \cdot 10^2 + \eta \cdot 10 + \theta. \end{aligned}$$

For abbreviation, let ϕ be put $\doteq 10$ and let M be distinguished into parts or periods of 6 figures each, counting from the units place, that is, from θ backwards. Then M will assume this appearance.

$$\begin{aligned} & a \phi^{32} + b \phi^{31} + c \phi^{30} \\ & + d \phi^{29} + e \phi^{28} + f \phi^{27} + g \phi^{26} + h \phi^{25} + i \phi^{24} \\ & + j \phi^{23} + k \phi^{22} + l \phi^{21} + m \phi^{20} + n \phi^{19} + p \phi^{18} \\ & + q \phi^{17} + r \phi^{16} + s \phi^{15} + t \phi^{14} + u \phi^{13} + v \phi^{12} \\ & + w \phi^{11} + x \phi^{10} + y \phi^9 + z \phi^8 + \alpha \phi^7 + \beta \phi^6 \\ & + \gamma \phi^5 + \delta \phi^4 + \varepsilon \phi^3 + \zeta \phi^2 + \eta \phi + \theta \end{aligned}$$

which is equal to

$$\begin{aligned} & (a \phi^2 + b \phi + c) \times \phi^{30} \\ & + (d \phi^5 + e \phi^4 + f \phi^3 + g \phi^2 + h \phi + i) \times \phi^{24} \\ & + (j \phi^5 + k \phi^4 + l \phi^3 + m \phi^2 + n \phi + p) \times \phi^{18} \\ & + (q \phi^5 + r \phi^4 + s \phi^3 + t \phi^2 + u \phi + v) \times \phi^{12} \\ & + (w \phi^5 + x \phi^4 + y \phi^3 + z \phi^2 + \alpha \phi + \beta) \times \phi^6 \\ & + \gamma \phi^5 + \delta \phi^4 + \varepsilon \phi^3 + \zeta \phi^2 + \eta \phi + \theta \end{aligned}$$

Then for abbreviation let there be put

$$\begin{aligned} & a \phi^2 + b \phi + c = A \\ & d \phi^5 + e \phi^4 + f \phi^3 + g \phi^2 + h \phi + i = B \\ & j \phi^5 + k \phi^4 + l \phi^3 + m \phi^2 + n \phi + p = C \\ & q \phi^5 + r \phi^4 + s \phi^3 + t \phi^2 + u \phi + v = D \\ & w \phi^5 + x \phi^4 + y \phi^3 + z \phi^2 + \alpha \phi + \beta = E \\ & \gamma \phi^5 + \delta \phi^4 + \varepsilon \phi^3 + \zeta \phi^2 + \eta \phi + \theta = F \end{aligned}$$

And then M becomes

$$A \phi^{30} + B \phi^{24} + C \phi^{18} + D \phi^{12} + E \phi^6 + F.$$

which a very little consideration will shew may be thus expressed—

$$\boxed{\boxed{\boxed{A\phi^6+B} \quad \phi^6+C} \quad \phi^6+D} \quad \phi^6+E} \quad \phi^6+F$$

in which expression A contains only 3 figures, and B, C, D, E and F each contain 6, and hence by Lem. 4 each of these numbers $\angle \phi^6$.

(17). Now let the highest approximate 6th Root of A be a , so that $a^6 \angle$ and $(a + 1)^6 > A$. Then is a a Digit. If not $a =$ or $> \phi$.

First. Let $a = \phi$, then $a^6 = \phi^6$ and contains 7 figures by Lem. 2, and yet A only contains 3 figures, which is absurd. A fortiori a cannot be $> \phi$.

(18). Let $A - a^6 = R$, then $R \angle 6a^5 + 15a^4 + 20a^3 + 15a^2 + 6a + 1$. If not $R =$ or $> 6a^5 + 15a^4 + 20a^3 + 15a^2 + 6a + 1$.

First, let it be equal. Then $A - a^6 = 6a^5 + 15a^4 + 20a^3 + 15a^2 + 6a + 1$, and $A = a^6 + 6a^5 + 15a^4 + 20a^3 + 15a^2 + 6a + 1 = (a + 1)^6$. And yet by supposition $A \angle (a + 1)^6$ —which is absurd. Second, a fortiori it cannot be greater.

(19.) Since $A - a^6 = R$ and $A = a^6 + R$, so $A \phi^6 + B = (a^6 + R) \phi^6 + B = a^6 \phi^6 + R \phi^6 + B = \overline{a \phi}^6 + (R \phi^6 + B)$. Now since $\frac{1}{6} \overline{a \phi}^6 = a \phi$ so by Par. 13) $a \phi$ will here represent the S and $R \phi^6 + B$ the t of that Paragraph and if b be the greatest possible integer such that $6. \overline{a \phi}^5 b + 15. \overline{a \phi}^4 b^2 + 20. \overline{a \phi}^3 b^3 + 15. \overline{a \phi}^2 b^4 + 6. a \phi. b^5 + b^6$ that is, $6a^5 \phi^5 b + 15a^4 \phi^4 b^2 + 20a^3 \phi^3 b^3 + 15a^2 \phi^2 b^4 + 6a \phi b^5 + b^6$ should be less than $R \phi^6 + B$, then is $a \phi + b$ the highest approximate 6 Root of $\overline{a \phi}^6 + R \phi^6 + B$ or $A \phi^6 + B$. and b will represent the u of Par. 13).

(20.) In this case b when found must be a Digit. If not $b =$ or $> \phi$.

First. Let $b = \phi$. Then $6a^5 \phi^5 b + 15a^4 \phi^4 b^2 + 20a^3 \phi^3 b^3 + 15a^2 \phi^2 b^4 + 6a \phi b^5 + b^6 = 6a^5 \phi^6 + 15a^4 \phi^6 + 20a^3 \phi^6 + 15a^2 \phi^6 + 6a \phi^6 + \phi^6$. Now R by Par. 18 $\angle 6a^5 + 15a^4 + 20a^3 + 15a^2 +$

$6a + 1$, and since R is an integer, so Maximum of R is $6a^5 + 15a^4 + 20a^3 + 15a^2 + 6a$, and Maximum of $R\phi^6$ is $6a^5\phi^6 + 15a^4\phi^6 + 20a^3\phi^6 + 15a^2\phi^6 + 6a\phi^6$. Again by Par. 17). B contains 6 figures and hence by Lem 4). Maximum of B is $\phi^6 - 1$. Hence Maximum of $R\phi^6 + B$ is $6a^5\phi^6 + 15a^4\phi^6 + 20a^3\phi^6 + 15a^2\phi^6 + 6a\phi^6 + \phi^6 - 1$. But $6a^5\phi^6 + 15a^4\phi^6 + 20a^3\phi^6 + 15a^2\phi^6 + 6a\phi^6 + \phi^6$ exceeds $6a^5\phi^6 + 15a^4\phi^6 + 20a^3\phi^6 + 15a^2\phi^6 + 6a\phi^6 + \phi^6 - 1$, by Unit. That is, if $b = \phi$, then $6a^5\phi^5b + 15a^4\phi^4b^2 + 20a^3\phi^3b^3 + 15a^2\phi^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, must exceed $R\phi^6 + B$ at least by 1, and yet is also $\angle R\phi^6 + B$ which is absurd. A fortiori b cannot be $> \phi$.

(21.) Then let $A\phi^6 + B$ be put $= P$ and $a\phi + b = p$, then since p is the approximate Root of P , so $p^6 \angle$ and $(p+1)^6 > P$. Let $P - p^6 = R'$. Then is $R' \angle 6p^5 + 15p^4 + 20p^3 + 15p^2 + 6p + 1$. If not $R' =$ or $> 6p^5 + 15p^4 + 20p^3 + 15p^2 + 6p + 1$.

First. Let it be equal. Then $P - p^6 = 6p^5 + 15p^4 + 20p^3 + 15p^2 + 6p + 1$, and $P = p^6 + 6p^5 + 15p^4 + 20p^3 + 15p^2 + 6p + 1 = (p+1)^6$. And yet by supposition $P \angle (p+1)^6$ which is absurd. Second. A fortiori it cannot be greater.

(22.) Since $P - p^6 = R'$ and $P = p^6 + R'$ so $P\phi^6 + C = \overline{A\phi^6 + B}\phi^6 + C = (p^6 + R')\phi^6 + C = p^6\phi^6 + R'\phi^6 + C = \overline{p\phi}^6 + (R'\phi^6 + C)$. Now since $\sqrt[6]{\overline{P\phi}^6} = p\phi$ so by Par. 13). $p\phi$ will here represent the S and $R'\phi^6 + C$ the t of that Paragraph, and if c be the greatest possible integer such that $6\overline{p\phi}^5c + 15\overline{p\phi}^4c^2 + 20\overline{p\phi}^3c^3 + 15\overline{p\phi}^2c^4 + 6p\phi c^5 + c^6$ that is $6p^5\phi^5c + 15p^4\phi^4c^2 + 20p^3\phi^3c^3 + 15p^2\phi^2c^4 + 6p\phi c^5 + c^6$ should be less than $R'\phi^6 + C$ then is $p\phi + c$ the highest approximate 6th Root of $\overline{p\phi}^6 + R'\phi^6 + C$ or $P\phi^6 + C$ or $\overline{A\phi^6 + B}\phi^6 + C$ and c will represent the u of Par. 13).

(23.) In this case c when found must be a Digit. If not $c =$ or $> \phi$

First, let $c = \phi$ then $6 p^5 \phi^5 c + 15 p^4 \phi^4 c^2 + 20 p^3 \phi^3 c^3 + 15 p^2 \phi^2 c^4 + 6 p \phi c^5 + c^6 = 6 p^5 \phi^6 + 15 p^4 \phi^6 + 20 p^3 \phi^6 + 15 p^2 \phi^6 + 6 p \phi^6 + \phi^6$. Now R' by Par. 21) $\angle 6 p^5 + 15 p^4 + 20 p^3 + 15 p^2 + 6 p + 1$, and since R' is an integer so Maximum of R' is $6 p^5 + 15 p^4 + 20 p^3 + 15 p^2 + 6 p$ and Maximum of $R' \phi^6$ is $6 p^5 \phi^6 + 15 p^4 \phi^6 + 20 p^3 \phi^6 + 15 p^2 \phi^6 + 6 p \phi^6$. Again by Par. 17). C contains 6 figures and hence by Lem 4. Maximum of C is $\phi^6 - 1$. Hence then Maximum of $R' \phi^6 + C$ is $6 p^5 \phi^6 + 15 p^4 \phi^6 + 20 p^3 \phi^6 + 15 p^2 \phi^6 + 6 p \phi^6 + \phi^6 - 1$. But $6 p^5 \phi^6 + 15 p^4 \phi^6 + 20 p^3 \phi^6 + 15 p^2 \phi^6 + 6 p \phi^6 + \phi^6$ exceeds $6 p^5 \phi^6 + 15 p^4 \phi^6 + 20 p^3 \phi^6 + 15 p^2 \phi^6 + 6 p \phi^6 + \phi^6 - 1$ by Unit. That is, if $c = \phi$, then $6 p^5 \phi^5 c + 15 p^4 \phi^4 c^2 + 20 p^3 \phi^3 c^3 + 15 p^2 \phi^2 c^4 + 6 p \phi c^5 + c^6$ must exceed $R' \phi^6 + C$ at least by 1, and yet is also $\angle R' \phi^6 + C$, which is absurd. A fortiori c cannot be $> \phi$.

(24.) Then let $P \phi^6 + C$ be put $= P'$ and $p \phi + c = p'$ then since p' is the greatest approximate Root of P' so $p'^6 \angle P'$ and $(p' + 1)^6 > P'$. Let $P' - p'^6 = R''$. Then by similar reasoning to that by which R' was proved $\angle 6 p^5 + 15 p^4 + 20 p^3 + 15 p^2 + 6 p + 1$, may R'' be proved $\angle 6 p'^5 + 15 p'^4 + 20 p'^3 + 15 p'^2 + 6 p' + 1$. And by continuing with P' and p' the same reasoning that was applied to P and p , there will be found $p' \phi + d$ or p'' the highest approximate Root of $P' \phi^6 + D$ or P'' . That is $\overline{p \phi + c} \phi + d$ or $\overline{a \phi + b} \phi + c \phi + d$ is the greatest approximate Root of $\overline{P \phi^6 + c} \phi^6 + D$ or $\overline{A \phi^6 + B} \phi^6 + c \phi^6 + D$ and $P'' - p''^6$ will be equal to R''' .

(25.) And by a continuation of the same reasoning, there will successively be found—

First. $p''' = p''\varphi + e = \left| \left| \left| \left| a\varphi + b \right| \varphi + c \right| \varphi + d \right| \varphi + e \right|$, the greatest approximate 6th Root of P''' or $P''\varphi^6 + E$, or $\left| \left| \left| \left| A\varphi^6 + B \right| \varphi^6 + C \right| \varphi^6 + D \right| \varphi^6 + E \right|$. And $P''' - p'''$ will be $= R^{iv}$.

Second. $p^{iv} = p''' \varphi + f = \left| \left| \left| \left| \left| a\varphi + b \right| \varphi + c \right| \varphi + d \right| \varphi + e \right| \varphi + f \right|$, the greatest approximate 6th Root of P^{iv} or $P''' \varphi^6 + F$ or $\left| \left| \left| \left| \left| A\varphi^6 + B \right| \varphi^6 + C \right| \varphi^6 + D \right| \varphi^6 + E \right| \varphi^6 + F \right|$, which is the original number M proposed in par. 16). and $P^{iv} - p^{iv} = R^v$. That is $p^{iv} = m$ of par. 14).

(26.) And evidently similar reasoning may be continued to any length. Let it now be proposed to pursue this operation so as to find a certain number of decimal places in the Root, and to avoid as before par. 10), the trouble of a general demonstration let it be proposed to find the Root to 3 decimal places. Then multiply M by $\varphi^6 \times 3$ or φ^{18} , and by the principles of the series in par. 1). $M \varphi^{18}$ will contain $33 + 18$, or 51 figures as by par. 15). And of these, as will easily be perceived, the 18 lowest places are Cyphers. That is by the reasoning of par. 15).

$M \varphi^{18} = A \varphi^{48} + B \varphi^{42} + C \varphi^{36} + D \varphi^{30} + E \varphi^{24} + F \varphi^{18} + 0 \varphi^{12} + 0 \varphi^6 + 0$. and, consequently, by operating according to the principles given above, the approximate Root will be found of this form.

$a \varphi^8 + b \varphi^7 + c \varphi^6 + d \varphi^5 + e \varphi^4 + f \varphi^3 + g \varphi^2 + h \varphi + k$. Let this Root be put $= \mu$ so that $\mu^6 < M$ and $(\mu + 1)^6 > M \varphi^{18}$. Then

evidently $\frac{\mu^6}{\varphi^{18}} < \frac{M \varphi^{18}}{\varphi^{18}}$ that is $< M$. And similarly $\frac{(\mu+1)^6}{\varphi^{18}} > M$. Hence

then $\sqrt[6]{\frac{\mu^6}{\varphi^{18}}}$ or $\frac{\mu}{\varphi^3} < M^{\frac{1}{6}}$ and $\sqrt[6]{\frac{(\mu+1)^6}{\varphi^{18}}}$ or $\frac{\mu+1}{\varphi^3} > M^{\frac{1}{6}}$.

That is $\frac{\mu}{\varphi^3}$ or $\frac{a\varphi^8 + b\varphi^7 + c\varphi^6 + d\varphi^5 + e\varphi^4 + f\varphi^3 + g\varphi^2 + h\varphi + k}{\varphi^3}$

is the approximate 6th Root of M , and is equal to $a\varphi^5 + b\varphi^4 + c\varphi^3 + d\varphi^2 + e\varphi^1 + f\varphi^0 + g\varphi^{-1} + h\varphi^{-2} + k\varphi^{-3}$ which, according to the well known laws of the series of par. 1,) contains 3 decimal places; viz. $g\varphi^{-1} + h\varphi^{-2} + k\varphi^{-3}$.

And since $\frac{\mu+1}{\varphi^3} > M^{\frac{1}{6}}$ so is $\frac{\mu}{\varphi^3}$ the highest approximate Root with 3 decimal places.

(27.) If for 3 decimal places, there be required any other number, then let the number of decimal places required be put $= z$, and then it is obvious that in this reasoning for $M\varphi^{6 \times 3}$ and $\frac{\mu^6}{\varphi^{18}}$ there is to be substituted M^{6z} and $\frac{\mu^6}{\varphi^{6z}}$, and the very same process will give a Root with a z number of decimal places.

(28.) But I have not been able to find that the Arabs were acquainted with this method of approximating to the truth, and I therefore proceed to explain their contrivance for adding a fraction to the integral approximate Root, such that the sum should of course be greater than that integral Root, and yet less than the truth, and consequently should approximate still more nearly to the truth.

Let M be a surd integer to index n , and m its approximate root, so that $m^n < M$ and $(m+1)^n > M$. Let $M - m^n = r$ and $M = m^n + r$. Then

is M always $> m + \frac{r}{(m+1)^n - m^n}$. That is $m + \frac{r}{(m+1)^n - m^n}$ is an approximate n^{th} Root of M , greater than m the integral Root.

For as before, let n be expounded by 6. Then obviously $(m+1)^6 - m^6 = 6m^5 + 15m^4 + 20m^3 + 15m^2 + 6m + 1$. Now since $\sqrt[6]{M} > m$ let $\sqrt[6]{M} = m + x$. Then since $\sqrt[6]{M} < m + 1$, so $x < 1$ and is a proper fraction. Then $M = (m+x)^6 = m^6 + 6m^5x + 15m^4x^2 + 20m^3x^3 + 15m^2x^4 + 6mx^5 + x^6$ and $M - m^6 = 6m^5x + 15m^4x^2 + 20m^3x^3 + 15m^2x^4 + 6mx^5 + x^6 = r$. Hence
$$\frac{r}{(m+1)^6 - m^6} = \frac{6m^5x + 15m^4x^2 + 20m^3x^3 + 15m^2x^4 + 6mx^5 + x^6}{6m^5 + 15m^4 + 20m^3 + 15m^2 + 6m + 1}$$
 Then $x > \frac{r}{(m+1)^6 - m^6}$.

If not, then $x =$ or $< \frac{r}{(m+1)^6 - m^6}$. First let $x = \frac{r}{(m+1)^6 - m^6}$.

Then $x = \frac{6m^5x + 15m^4x^2 + 20m^3x^3 + 15m^2x^4 + 6mx^5 + x^6}{6m^5 + 15m^4 + 20m^3 + 15m^2 + 6m + 1}$ and hence $6m^5x + 15m^4x + 20m^3x + 15m^2x + 6mx + x = 6m^5x + 15m^4x^2 + 20m^3x^3 + 15m^2x^4 + 6mx^5 + x^6$, an equation which is evidently absurd, unless $x = 1$. But x is also a proper fraction, which is absurd.

Secondly, a fortiori x not $< \frac{r}{(m+1)^6 - m^6}$ for then also $6m^5x + 15m^4x + 20m^3x + 15m^2x + 6mx + x < 6m^5x + 15m^4x^2 + 20m^3x^3 + 15m^2x^4 + 6mx^5 + x^6$, which requires x to be > 1 . also absurd.

Then since $x > \frac{r}{(m+1)^6 - m^6}$ so $m+x > m + \frac{r}{(m+1)^6 - m^6}$ and $(m+x)^6$

or M also $> m + \frac{r}{(m+1)^6 - m^6}$ as above.

(29.) Here it is evident, that if any constant value be assigned to m , then if r be small, that is in case the integral Root differ but little from the true Root, then the fraction $\frac{r}{(m+1)^6 - m^6}$ is also small, but if r be large, that is in case the integral Root, differ much from the true Root, then the fraction $\frac{r}{(m+1)^6 - m^6}$ is large. That is, the compensation made by the fraction is proportionate to the error of the integral Root.

(30.) I need scarcely add, that whenever it is required to extend the above demonstration to any other index than 6, then for the individual numbers 6, 15, 20, 15, 6, 1, there are to be substituted the general co-efficients of the binomial theorem $n, \frac{n \cdot n-1}{2}, \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3}, \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ &c. and the same reasoning applied as that given above.

(31.) I now proceed in order:—

II. To exemplify the above demonstration, by the actual extraction of the 6th Root of a given number, according to the directions contained in European books of Arithmetic. I therefore chuse to extract the 6th Root of the number

166, 571, 800, 758, 593, 887, 308, 296, 025, 335, 490.

which consists as in par. 14) of 33 figures. And the operation is thus exhibited.

166, 571, 800, 758, 593, 887, 308, 296, 025, 335, 490. (234567
64
102, 571, 800
84, 035, 889
18, 535, 911, 758, 593
16, 134, 619, 913, 216
2, 401, 291, 845, 377, 887, 308
2, 116, 025, 521, 169, 640, 625
285, 266, 324, 208, 246, 683, 296, 025
255, 443, 315, 383, 323, 683, 729, 856
29, 823, 008, 824, 922, 999, 566, 169, 335, 490
29, 823, 008, 824, 922, 999, 565, 181, 681, 169
987, 654, 321.

(32.) And the Rule given for its performance is as follows :

Article (a). Place a dot over the units place and over every succeeding 6th figure, counting to the left hand, that is, over the 7th, 13th, 19th, 25th, and 31st places. Then beginning at the left hand; call 166 the first period; 571,800 the second period; 758,593 the third period; and so on.

(b). Find the nearest approximate 6th Root of the first period 166. This by trial is 2, For $2^6 = 64$ and < 166 and $3^6 = 729$ and > 166 . Write this 2 separated by a semicircle to the right hand of the given number, and call it the first found figure of the Root.

(c). Call the 6th Power of the first found figure of the Root which is $2^6 = 64$, the first Subtrahend.

(d). Subtract 64, this first Subtrahend from 166 the first period, and call 102 the first Remainder.

(e). To the right hand of the first Remainder annex the second period 571,800, so as to make it 102,571,800. Call this the first Resolvend.

(f). Seek the greatest number with the following properties. That if there be taken—

$$\begin{aligned}
 & 6 \times (\text{ten times the first found figure of the Root})^5 \times (\text{this sought number}) \\
 & + 15 \times (\text{ten times the first found figure of the Root})^4 \times (\text{this sought number})^2 \\
 & + 20 \times (\text{ten times the first found figure of the Root})^3 \times (\text{this sought number})^3 \\
 & + 15 \times (\text{ten times the first found figure of the Root})^2 \times (\text{this sought number})^4 \\
 & + 6 \times (\text{ten times the first found figure of the Root}) \times (\text{this sought number})^5 \\
 & + (\text{this sought number})^6
 \end{aligned}$$

The sum of all these added together may not exceed the first Resolvend 102,571,800.

Then 3 is the number which fulfils these conditions. For since 2 is the first found figure of the Root, if 3 is the sought number, the above expression becomes—

$$\begin{array}{rcl}
 6 \cdot 20^5 \cdot 3 & = & 6 \cdot 3,200,000 \cdot 3 = 57,600,000 \\
 + 15 \cdot 20^4 \cdot 3^2 & = & 15 \cdot 160,000 \cdot 9 = 21,600,000 \\
 + 20 \cdot 20^3 \cdot 3^3 & = & 20 \cdot 8,000 \cdot 27 = 4,320,000 \\
 + 15 \cdot 20^2 \cdot 3^4 & = & 15 \cdot 400 \cdot 81 = 486,000 \\
 + 6 \cdot 20 \cdot 3^5 & = & 6 \cdot 20 \cdot 243 = 29,160 \\
 + 3^6 & & 729 = 729 \\
 \hline
 \end{array}$$

84,035,889, which is $\angle 102,571,800$. And 3 is the greatest number which will answer these conditions. For if 4 be substituted in this expression for the sought number, it will become—

$$\begin{array}{rcl}
 6 \cdot 20^5 \cdot 4 & = & 6 \cdot 3,200,000 \cdot 4 = 76,800,000 \\
 + 15 \cdot 20^4 \cdot 4^2 & = & 15 \cdot 160,000 \cdot 16 = 38,400,000 \\
 + 20 \cdot 20^3 \cdot 4^3 & = & 20 \cdot 8,000 \cdot 64 = 10,240,000 \\
 + 15 \cdot 20^2 \cdot 4^4 & = & 15 \cdot 400 \cdot 256 = 1,536,000 \\
 + 6 \cdot 20 \cdot 4^5 & = & 6 \cdot 20 \cdot 1024 = 122,880 \\
 4^6 & = & 4096 = 4,096 \\
 \hline
 \end{array}$$

127,102,976, which is $> 102,571,800$, and consequently would not answer.

(b'). Place 3, the number now found, to the right hand of 2, the first found figure of the Root, in the semicircle Article *b*.) so as to make it 23. Call 3 the second found figure of the Root, and 23 the found figures of the Root.

(c'). Call 84,035,889 the sum found by Art. f.) the second Subtrahend.

(d'). Subtract 84,035,889 the second Subtrahend from 102,571,800 the first Resolvend, and call 18,535,911 the second Remainder.

(e'). To the right hand of the second Remainder annex the third Period 758,593 so as to make it 18,535,911,758,593. Call this the second Resolvend.

(f'). Seek the greatest number with the following properties. That if there be taken—

$$\begin{aligned}
 & 6 \times (\text{ten times the two first found figures of the Root})^2 \times (\text{this sought number}) \\
 & + 15 \times (\text{ten times the two first found figures of the Root})^4 \times (\text{this sought number.})^2 \\
 & + 20 \times (\text{ten times the two first found figures of the Root})^2 \times (\text{this sought number.})^3 \\
 & + 15 \times (\text{ten times the two first found figures of the Root})^2 \times (\text{this sought number})^4 \\
 & + 6 \times (\text{ten times the two first found figures of the Root}) \times (\text{this sought number.})^5 \\
 & + (\text{this sought number.})^6
 \end{aligned}$$

The sum of all these added together may not exceed the second Resolvend 18,535,911,758,593.

Then 4 is the number which fulfils these conditions. For since 23 are the two first found figures of the Root, if 4 is the sought number, the above expression becomes—

$6 \cdot 230^5 \cdot 4 = 6,643,634,300,000 \cdot$	$4 = 15,447,223,200,000$	
$+ 15 \cdot 230^4 \cdot 4^2 = 15 \cdot 2,798,410,000 \cdot$	$16 = 671,618,400,000$	
$+ 20 \cdot 230^3 \cdot 4^3 = 20 \cdot 12,167,000 \cdot$	$64 = 15,573,760,000$	
$+ 15 \cdot 230^2 \cdot 4^4 = 15 \cdot 52,900 \cdot$	$256 = 203,136,000$	
$+ 6 \cdot 230 \cdot 4^5 = 6 \cdot 230 \cdot$	$1024 = 1,413,120$	
$+ 4^6 =$	$4096 = 4,096$	

16,134,619,913,216, which

is $\angle 18,535,911,758,593$. And 4 is the greatest number which will answer these conditions. For if 5 be substituted in this expression for the sought number, it will become—

$6 \cdot 230^5 \cdot 5 = 6,643,634,300,000 \cdot$	$5 = 19,309,029,000,000$	
$+ 15 \cdot 230^4 \cdot 5^2 = 15 \cdot 2,798,410,000 \cdot$	$25 = 1,049,403,750,000$	
$+ 20 \cdot 230^3 \cdot 5^3 = 20 \cdot 12,167,000 \cdot$	$125 = 30,417,500,000$	
$+ 15 \cdot 230^2 \cdot 5^4 = 15 \cdot 52,900 \cdot$	$625 = 495,937,500$	
$+ 6 \cdot 230 \cdot 5^5 = 6 \cdot 230 \cdot$	$3,125 = 4,312,500$	
$5^6 =$	$15,625 = 15,625$	

20,389,350,515,625, which

is $> 18,535,911,758,593$, and consequently would not answer.

b'. Place 4, the number now found, to the right hand of 23, the two first found figures of the Root in the semi-circle Art. *b*.) so as to make it 234. Call 4 the third found figure of the Root, and 234 the found figures of the Root.

c'. Call 16,134,619,913,216, the sum found by Art. *f'*,) the third Subtrahend.

d'. Subtract 16,134,619,913,216 the third Subtrahend from 18,535,911,758,593 the second Resolvend, and call 2,401,291,845,377 the third Remainder.

e'. To the right hand of the third Remainder annex the fourth Period 887,308, so as to make it 2,401,291,845,377,887,308. Call this the third Resolvend.

And this operation must be analogously continued thus—

f''. Seek the greatest number with the following properties. That if these taken—

$6 \times (\text{ten times the found figures of the Root})^3 \times (\text{this sought number}).$

$+ 15 \times (\text{ten times the found figures of the Root})^4 \times (\text{this sought number})^2.$

$+ 20 \times (\text{ten times the found figures of the Root})^3 \times (\text{this sought number})^3.$

$+ 15 \times (\text{ten times the found figures of the Root})^2 \times (\text{this sought number})^4.$

$+ 6 \times (\text{ten times the found figures of the Root}) \times (\text{this sought number})^5.$

+ (this sought number)⁶.

The sum of all these added together may not exceed the last Resolvend.

(*b'''*.) Place the number now found to the right hand of the found figures of the Root in the semicircle Art. *b*). Call the number now found the last found figure of the Root, and the whole of the figures in the semicircle, the found figures of the Root.

(*c'''*.) Call the sum found by Art. *f'''* the last Subtrahend.

(*d'''*.) Subtract the last Subtrahend from the last found Resolvend, and call the Result the next Remainder.

(*e'''*.) To the right hand of this Remainder annex the next Period, and continue this circle of operations till there be no period in the original given number so to annex.

And thus it will be found that—

The fourth figure of the Root is 5.

The fourth Subtrahend is—

$$6 \cdot 2340^5 \cdot 5 + 15 \cdot 2340^4 \cdot 5^2 + 20 \cdot 2340^3 \cdot 5^3 + 15 \cdot 2340^2 \cdot 5^4 + 6 \cdot 2340 \cdot 5^5 + 5^6 \\ = 2,116,025,521,169,640,625.$$

The fourth Remainder is 285,266,324,208,246,683.

Then the fifth figure of the Root is 6.

The fifth Subtrahend is 255,443,315,383,323,683,729,856.

The fifth Remainder is 29,823,008,824,922,999,566,169.

Then the sixth figure of the Root is 7.

The sixth Subtrahend is 29,823,008,824,922,999,565,181,681,169.

And the sixth Remainder, with which the operation concludes, is 987,654,321.

(33). I now proceed to show the conformity of this Rule, with the demonstration given in Par. 11). et seq. and for this purpose must premise the following—

Lemma 6. If to the right hand of a Row of a figures another Row consisting of an n^{th} number of places be annexed, this is equivalent to multiplying the first Row by 10^n and adding to the product the number expressed by the second Row.

Thus let 9,876 be a Row of figures, and 123,456 a second Row. In this second Row there are 6 figures, then if it be written to the right hand of, and in one line with the first Row, it will become $9,876,123,456 = 9,876,000,000 + 123,456 = 9,876 + 10^6 + 123,456$. This is too evident to require farther illustration.

(34.) Now M (Par. 15.) is expounded in the present example by the number 166,571,800,758,593,887,308,296,025,335,490, so placing the dots over every 6th place, as directed in Par. 22, Art. a). distinguishes it by Lem. 6 as follows :

$$\begin{array}{r}
 166,000,000,000,000,000,000,000,000. \\
 + 571,800,000,000,000,000,000,000,000. \\
 + 758,593,000,000,000,000,000,000. \\
 + 887,308,000,000,000,000. \\
 + 296,025,000,000. \\
 + 335,490.
 \end{array}$$

That is equal to

$$166 \cdot 10^{30} + 571,800 \cdot 10^{24} + 758,593 \cdot 10^{18} + 887,308 \cdot 10^{12} + 296,025 \cdot 10^6 + 335,490.$$

Then evidently by Par. 16.)

166 consists of 3 figures, and expounds A.

571,800 consists of 6 figures, and expounds B.

758,593 similarly expounds C.

887,308 similarly expounds D.

296,025 similarly expounds E.

335,490 similarly expounds F.

And hence, by the reasoning of Par. 16) M becomes equal to,
(ϕ being put = 10)

$$\boxed{\boxed{\boxed{166 \phi^6 + 571,800} \phi^6 + 758,593} \phi^6 + 887,308} \phi^6 + 296,025 \\ \phi^6 + 335,490.$$

And hence in succession—

A $\phi^6 + B$ or P is expounded by $166 \phi^6 + 571,800$, or $166,571,800$ by Lem. 6.

$\boxed{A \phi^6 + B} \phi^6 + C$ or P $\phi^6 + C$ or P' by $\boxed{166 \phi^6 + 571,800} \phi^6 + 758,593$,
or $166,571,800,758,593$.

$$\boxed{\boxed{A \phi^6 + B} \phi^6 + C} \phi^6 + D \text{ or P' } \phi^6 + D \text{ or P' by } \\ \boxed{\boxed{166 \phi^6 + 571,800} \phi^6 + 758,593} \phi^6 + 887,308, \text{ or } 166,571,800,758, \\ 593,887,308$$

$$\left[\left[\left[A\phi^6 + B \right] \phi^6 + C \right] \phi^6 + D \right] \phi^6 + E \text{ or } P'' \phi^6 + E \text{ or } P''' \text{ by}$$

$$\left[\left[\left[166\phi^6 + 571,800 \right] \phi^6 + 758,593 \right] \phi^6 + 887,308 \right] \phi^6 + 296,025, \text{ or}$$

166, 571,800,758,593,887,308,296,025.

And hence $P''' \phi^6 + F$ or P'' by the same number as M (Par. 25.)

(b.) Now the highest approximate Root of 166 or A is 2. Hence 2, the first found figure of the Root, expounds a (Par. 17).

(c.) Then $2^6 = 64 =$ first Subtrahend, expounds a^6 .

(d.) Then $166 - 64 = 102$ expounds $A - a^6$ or R and is first Remainder.

(e.) Since B is expounded by 571,800 and consists of 6 figures, so 102,571,800 by Lem. 6 expounds $R \phi^6 + B$, and is first Resolvend.

(f.) Since a is expounded by 2, so $a \phi$ is expounded by 20, and $a^2 \phi^2$ or $\overline{a \phi}^2$ by 20^2 , and $a^3 \phi^3$ or $\overline{a \phi}^3$ by 20^3 , &c. hence $6a^5 \phi^5 + 15a^4 \phi^4 + 20a^3 \phi^3 + 15a^2 \phi^2 + 6a \phi + 1$ is expounded by $6 \cdot 20^5 + 15 \cdot 20^4 + 20 \cdot 20^3 + 15 \cdot 20^2 + 6 \cdot 20 + 1$, and since 3 substituted as directed produces by the sum $6 \cdot 20^5 \cdot 3 + 15 \cdot 20^4 \cdot 3^2 + 20 \cdot 20^3 \cdot 3^3 + 15 \cdot 20^2 \cdot 3^4 + 6 \cdot 20 \cdot 3^5 + 3^6$ a number 84,035,889 smaller than 102,571,800 or $R \phi^6 + B$, and since 3 is the greatest number which will do so, so 3 expounds the b of the sum $6a^5 \phi^5 b + 15a^4 \phi^4 b^2 + 20a^3 \phi^3 b^3 + 15a^2 \phi^2 b^4 + 6a \phi b^5 + b^6$ as by Par. 19).

(b'.) Then 3, the second found figure of the Root, expounds b (Par. 20) and since 2 expounds a , and there is but one figure in b , so by Lem. 6) $a\phi + b$ is expounded by 23. And since p by Par. 21) $= a\phi + b$ so p is expounded by 23. And hence 23 is the highest approximate Root of $A\phi^6 + B$ or P or 166,571,800, the two first periods of the given number.

As is easily tried, for $23^6 = 148,035,889$, which is less, and $24^6 = 191,102,976$, which is greater than 166,571,800.

(c'.) Then 84,035,889 the second Subtrahend expounds $6a^5\phi^5b + 15a^4\phi^4b^2 + 20a^3\phi^3b^3 + 15a^2\phi^2b^4 + 6a\phi b^5 + b^6$.

(d'.) Since by Par. 19.) $A\phi^6 + B = a^6\phi^6 + R\phi^6 + B$ so $A\phi^6 + B - a^6\phi^6 = R\phi^6 + B$. Subtract from both sides of this equation the second Subtrahend by Art. c',) and it becomes $A\phi^6 + B - a^6\phi^6 - 6a^5\phi^5b - 15a^4\phi^4b^2 - 20a^3\phi^3b^3 - 15a^2\phi^2b^4 - 6a\phi b^5 - b^6 = R\phi^6 + B - (6a^5\phi^5b + 15a^4\phi^4b^2 + 20a^3\phi^3b^3 + 15a^2\phi^2b^4 + 6a\phi b^5 + b^6) = A\phi^6 + B - (a^6\phi^6 + 6a^5\phi^5b + 15a^4\phi^4b^2 + 20a^3\phi^3b^3 + 15a^2\phi^2b^4 + 6a\phi b^5 + b^6) = (A\phi^6 + B) - (a\phi + b)^6 =$ by Par. 21) to $P - p^6 = R'$. Then since $R\phi^6 + B$ is expounded by 102,571,800 and $6a^5\phi^5b + 15a^4\phi^4b^2 + 20a^3\phi^3b^3 + 15a^2\phi^2b^4 + 6a\phi b^5 + b^6$ is expounded by 84,035,889 so $(R\phi^6 + B) - (6a^5\phi^5b + 15a^4\phi^4b^2 + 20a^3\phi^3b^3 + 15a^2\phi^2b^4 + 6a\phi b^5 + b^6)$ or $P - p^6$ or R' is expounded by $102,571,800 - 84,035,889 = 18,535,911$ the second Remainder.

(e'.) Since C is expounded by 758,593 and consists of 6 figures, so by Lemma 6,) 18,535,911, 758,593 expounds $R'\phi^6 + C$, and is the second Resolvend.

(f'.) Since $a\phi + b$ or p is expounded by 23, so $p\phi$ is expounded by 230 and $p^2\phi^2$ or $\overline{p\phi}^2$ by 230² and $p^3\phi^3$ or $\overline{p\phi}^3$ by 230³, &c. hence $6p^5\phi^5$

+ $15 p^4 \phi^4 + 20 p^3 \phi^3 + 15 p^2 \phi^2 + 6 p \phi + 1$ is expounded by $6 \cdot 230^5 + 15 \cdot 230^4 + 20 \cdot 230^3 + 15 \cdot 230^2 + 6 \cdot 230 + 1$, and since 4 substituted as directed, produces by the sum $6 \cdot 230^5 \cdot 4 + 15 \cdot 230^4 \cdot 4^2 + 20 \cdot 230^3 \cdot 4^3 + 15 \cdot 230^2 \cdot 4^4 + 6 \cdot 230 \cdot 4^5 + 4^6$ a number 16,134,619,913,216 smaller than 18,535,911,758,593 or $R' \phi^6 + C$, and since 4 is the greatest number which will do so, so 4 expounds the c of the sum $6 p^5 \phi^5 c + 15 p^4 \phi^4 c^2 + 20 p^3 \phi^3 c^3 + 15 p^2 \phi^2 c^4 + 6 p \phi c^5 + c^6$ as by Par. 22.)

(b'' .) Then 4, the third found figure of the Root, expounds c (Par. 23.) and since 23 expounds $a \phi + b$ or p , and there is but one figure in c , so by Lem. 6.) $(a \phi + b) \phi + c$ or $p \phi + c$ is expounded by 234. And since p' by Par. 24 = $p \phi + c$ so p' is expounded by 234. And hence 234 is the highest approximate Root of $\sqrt[A \phi^6 + B]{\phi^6 + C}$ or $P \phi^6 + C$ or P' , or 166,571,800,758,593 the three first periods of the given number.

As is easily tried, for $234^6 = 164,170,508,913,216$, which is less, and $235^6 = 168,425,239,515,625$, which is greater than 166,571,800,758,593.

c'' . Then 16,134,619,913,216, the third Subtrahend, expounds $6 p^5 \phi^5 c + 15 p^4 \phi^4 c^2 + 20 p^3 \phi^3 c^3 + 15 p^2 \phi^2 c^4 + 6 p \phi c^5 + c^6$ by Par. 23.)

d'' . Since by Par. 22) $P \phi^6 + C = p^6 \phi^6 + R' \phi^6 + C$ so $P \phi^6 + C - p^6 \phi^6 = R' \phi^6 + C$. Subtract from both sides of this equation the third Subtrahend by Art. c''). And it becomes $P \phi^6 + C - p^6 \phi^6 - 6 p^5 \phi^5 c - 15 p^4 \phi^4 c^2 - 20 p^3 \phi^3 c^3 - 15 p^2 \phi^2 c^4 - 6 p \phi c^5 - c^6 = R' \phi^6 + C - (6 p^5 \phi^5 c + 15 p^4 \phi^4 c^2 + 20 p^3 \phi^3 c^3 + 15 p^2 \phi^2 c^4 + 6 p \phi c^5 + c^6) = (P \phi^6 + C) - (p \phi + c)^6 =$ (by Par. 21.) $P' - p'^6 = R''$. Then since $R' \phi^6 + C$ is expounded by 18,535,911,758,593, and $6 p^5 \phi^5 c + 15 p^4 \phi^4 c^2 + 20 p^3 \phi^3 c^3 + 15 p^2 \phi^2 c^4 + 6 p \phi c^5 + c^6$ is expounded by 16,134,619,913,216, so $R' \phi^6 + C - (6 p^5 \phi^5 c + 15 p^4 \phi^4 c^2 + 20 p^3 \phi^3 c^3 + 15 p^2 \phi^2 c^4 + 6 p \phi c^5 + c^6)$

$+ 6 p \phi c^5 + c^6$) or $P' - p'^6$ or R'' is expounded by 18,535,911,758,593, — 16,134,619,913,216, or 2,401,291,845,377 the third Remainder.

And by a continuation of analogous reasoning, it will be found that d is expounded by 5, the fourth found figure of the Root.

$6 p'^5 \phi^5 d + 15 p'^4 \phi^4 d^2 + 20 p'^3 \phi^3 d^3 + 15 p'^2 \phi^2 d^4 + 6 p' \phi d^5 + d^6$ is expounded by 2,116,025,521,169,640,625, the fourth Subtrahend.

$p' \phi + d$ or p'' by 2,345, and that is the approximate sixth Root of 166,571,800,758,593,887,308, the four first periods of the given number.

$P'' - p''^6$ is expounded by 285,266,324,208,246,683, the fourth Remainder or R''' .

e is expounded by 6, the fifth found figure of the Root.

$6 p''^5 \phi^5 e + 15 p''^4 \phi^4 e^2 + 20 p''^3 \phi^3 e^3 + 15 p''^2 \phi^2 e^4 + 6 p'' \phi e^5 + e^6$ is expounded by 255,443,315,383,323,683,729,856, the fifth Subtrahend.

$p'' \phi + e$ or p''' by 23,456, and that is the approximate sixth Root of 166,571,800,758,593,887,308,296,025, the five first periods of the given number.

$P''' - p'''^6$ is expounded by 29,823,008,824,922,999,566,169, the fifth Remainder or R^{iv} .

f is expounded by 7, the sixth found figure of the Root.

$6 p'''^5 \phi^5 f + 15 p'''^4 \phi^4 f^2 + 20 p'''^3 \phi^3 f^3 + 15 p'''^2 \phi^2 f^4 + 6 p''' \phi f^5 + f^6$ is expounded by 29,823,008,824,922,999,565,181,681,169, the sixth Subtrahend.

$p''' \phi + f$ or p^{iv} by 234,567, and that is the approximate sixth Root of the given number, 166,571,800,758,593,887,308,296,025,335,490. That is $p^{iv} = m$.

$P^{iv} - p^{iv6}$ is expounded by 987,654,321 the last Remainder, and since by Par. 25). $P^{iv} = M$ so $P^{iv} - p^{iv6} = R^v = M - m^6 = r$ of Par. 28.)

And it is evident this reasoning may be continued to any number of periods.

(35.) I now proceed in order to—

III. Exhibit this operation as directed by the Arabian Arithmeticians, and then explain its conformity to the original Demonstration. This operation occupies a much more extended space, and is delineated in the annexed Diagram.—(See Lithographized Figure.)

(36.) The outlines which constitute the upper part of this Diagram, and are there called the Rank of the Number, and contain the same figures as in the European Operation of Par. 31), are technically called by the Arabian Arithmeticians شكل منبري Shukloon Mimbureeoon, or Pulpit Diagram or Figure, from its fancied resemblance to the ascending steps which constitute a Mohammadan Pulpit. This term will perhaps sound oddly in European ears, but we shall be less inclined to deride the quaintness of

the expression when we recollect how many of our own technical phrases, if literally translated would, to an Arab, appear equally worthy of ridicule. How would an Anatomist defend the Carpet of the Eye, the Boat and Moon bones of the Wrist, the greater and lesser Couriers of the Thigh, the Bedpost processes of the Scull, and the dancing Net of the Brain; and innumerable other names equally fantastic. Nor is even the severe Science of which we are now treating, quite exempt from this censure. What shall we say of the Forefinger of a Power, or the Chain of a Root?

(37.) Then divide the given number into Periods by dots, as directed in Par. 32 Art. a). Draw a Pulpit Diagram, ascending to the left hand, having as many steps as there are periods in the given number. From each step draw longitudinal lines down the page, so as to have in each step a place for each figure of the corresponding period, between the interstices of each two longitudinal lines. Write the figures of each period regularly in the highest part of each of these interstices, in the several corresponding steps, and immediately under the line which constitutes the upper boundary of the Pulpit. Produce these longitudinal lines as far as convenient. Then divide the whole figure thus constituted by cross lines into as many divisions, nearly equal, as there are units in the Index of the Root to be extracted.

(38.) That is in the present case, make a Pulpit Diagram of 6 steps, divide the highest and left hand step by longitudinal lines into 3 interstitial spaces, in which write the 3 figures of the first period, as in Par. 31). Then divide each lower step into 6 interstitial spaces, in which write the figures of their corresponding periods. Divide the whole figure by cross lines into 6 divisions of nearly equal length. For distinction I have, in the example, made the cross lines, which are the boundaries of these divisions, double. Call the lowest of these divisions the Rank of the Latus,

or first Rank ; the next upper division the Rank of the Square ; the next the Rank of the Cube ; the next the Rank of the Biquadrate ; the next the Rank of the Quadratus Cubi ; and the next, which constitutes the Pulpit Diagram, call the Rank of the Number. This I have divided from the other Ranks by a triple cross line. Again, in reverse order, call the Rank of the Quadratus Cubi, also the last Rank or second Rank of the Number ; and call the Rank of the Biquadrate, also the second last Rank or third Rank of the Number ; and call the Rank of the Cube, also the third last Rank or fourth Rank of the Number ; and call the Rank of the Square, also the fourth last Rank or fifth Rank of the Number ;

Before proceeding farther, two phrases are yet to be explained.

(39.) When, in this operation, one number is said to be written opposite to another, it is hereby meant, that whatever be the distance between these two numbers, yet with respect to the interstices formed by the whole length of the longitudinal lines, the units of the one number are written in the same interstice as the units of the other, the tens of the one number in the same interstice as the tens of the other, the hundreds of the one number in the same interstice as the hundreds of the other, and so on ; all the higher corresponding degrees of the two numbers being respectively in the same interstice.

Thus in the Rank of the Biquadrate, at the letter of reference χ' , the number 986,144,576 is written opposite the number 18,535,911,758,593, which is at the letter i' in the Rank of the number or Pulpit Diagram, for 6, the units of the first number is written in the same interstice of the longitudinal lines as 3, the units of the second ; and the tens of both numbers, viz. 7 and 9, are in the same interstice to the left of the units, and the hundreds of both numbers, viz. 5, and 5, are in the same interstice to the left of the tens, and so of the thousands 4 and 8, &c.

(40). When a number is said to be transferred any number of places to the right hand, it is hereby meant that a copy of this number should be made immediately above itself with this condition, that counting from the units of the number said to be transferred as many interstices to the right hand as the number of places which it is said to be transferred, the units of the transferred number are to be written in the last or most right hand of these interstices, and the tens of the transferred number are to be written in the interstice immediately to the left hand of that last, and the hundreds in the interstice next to the left of the tens, and the thousands in the interstice next to that, and so on through all the degrees, so that each degree of the number in question should be copied as many interstices to the right hand, as the number of places which it is said to be transferred.

Thus in the Rank of the Quadratus Cubi at the letters t and u , the number 192 is transferred one place to the right hand, for the unit 2 is copied above it one interstice to the right hand of the original 2, the tens 9 is copied one interstice to the right hand of the original 9, and so of 1.

And in the Rank of the Biquadrate at the letter β' and γ' the number 4,197,615 is transferred 2 places to the right hand, for the unit 5 is copied above it two interstices to the right hand of the original 5, the tens 1 is copied two interstices to the right hand of the original 1, the hundreds 6 is copied two interstices to the right of the original 6, and so of 7, 9, 1, and 4.

And in the Rank of the Cube at the letter θ'' and ι'' the number 256,258,080 is for similar reasons said to be transferred 3 places to the right hand, and so in the Rank of the Square at the letter μ'' and ν'' 821,340 is transferred 4 places, and in the Rank of the Latus at the letter π''' and ξ''' 140,736 is transferred 5 places to the right hand.

(41.) I now proceed with the Arabian Rule.

Seek the greatest number with the following conditions—

1. That if it be written at the bottom of the Rank of the Latus, that is completely at the bottom of the whole figure and opposite the first period, that is in the same interstice as 6 the units of 166 Par. 38.)

2. And if it be multiplied into itself, and the product written in the Rank of the Square again opposite the first period.

3. And if it be again multiplied in this product, and the second product written in the Rank of Cube again opposite the first period.

4. And if it be again multiplied into this second product, and the third product written in the Rank of the Biquadrate again opposite the first period.

5. And if it be again multiplied into this third product, and the fourth product written in the Rank of the Quadratus Cubi again opposite the first period.

6. And if it be again multiplied into this fourth product that the fifth product be not greater than the first period of the given number.

Then 2 will be found the number answering these conditions, for

a. Write 2 in the bottom of the Rank of the Latus, as by Art. 1.)

b. Multiply this 2 into itself, and write the product 4 in the Rank of the Square, as by Art. 2.)

c. Multiply the 2 again into this 4, and write the product 8 in the Rank of the Cube, as by Art. 3.)

d. Multiply the 2 again into this 8, and write the product 16 in the Rank of the Biquadrate, as by Art. 4.)

e. Multiply the 2 again into this 16, and write the product 32 in the Rank of the Quadratus Cubi, as by Art. 5.)

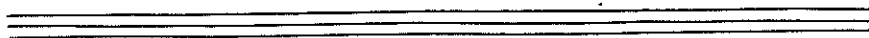
f. Multiply the 2 again into this 32, and the product is 64, which is less than 166, as by Art. 6.)

And 2 is the highest number which will answer these conditions. For let 3 be substituted in these operations and they will successively become $3 \times 3 = 9$, $9 \times 3 = 27$, $27 \times 3 = 81$, $81 \times 3 = 243$, $243 \times 3 = 729$, which last product is greater than 166.

g. Call this last product 64, which answers the condition, the first Subtrahend, write it opposite to and immediately under 166, the first period.

h. Write the found figure 2 above 6, the units of the first period, and exterior to and immediately above the Pulpit, or as it may be called the Anabathroidal Diagram. This is the first figure of the Root.

i. Subtract the first Subtrahend from the first period, and 102 is the first Remainder.



j. Write 102, the first Remainder, on a line with the figures of the second period in the next descending right hand step of the Pulpit Diagram, so as to form the number 102,571,800. This is the first Resolvend.

k. Add 2, the first found figure of the Root, to itself, and write the sum 4 in the Rank of the Latus opposite to and immediately above the 2 formerly written there by Art. *b*). This 4 is now the upper number in the Rank of the Latus.

l. Multiply 2, the first found figure of the Root, into this 4, and write the product 8 in the Rank of the Square opposite to and immediately above the 4 formerly written there by Art. *c*).

m. Add together in the Rank of the Square this 8 and 4, and write the sum 12 opposite to and immediately above them. This 12 is now the upper number in the Rank of the Square.

n. Multiply 2, the first found figure of the Root, into this 12, and write the product 24 in the Rank of the Cube opposite to and immediately above the 8 formerly written there by Art. *d*).

p. Add together in the Rank of the Cube this 24 and 8, and write the sum 32 opposite to and immediately above them. This 32 is now the upper number in the Rank of the Cube.

q. Multiply 2, the first found figure of the Root, into this 32, and write the product 64 in the Rank of the Biquadrate opposite to and immediately above the 16, formerly written there by Art. *e*.)

r. Add together in the Rank of the Biquadrate this 64 and 16, and write the sum 80 opposite to and immediately above them. This 80 is now the upper number in the Rank of the Biquadrate.

s. Multiply 2, the first found figure of the Root, into this 80, and write the product 160 in the Rank of the Quadratus Cubi opposite to and immediately above the 32 formerly written there by Art. *f*).

t. Add together in the Rank of the Quadratus Cubi this 160 and 32, and write the sum 192 opposite to and immediately above them.

u. Transfer this 192 one place to the right hand. This 192 so transferred is now the upper number in the Rank of the Quadratus Cubi.

v. Add 2, the first found figure of the Root to 4, the upper number in the Rank of the Latus by Art. *k*, and write the sum 6 opposite to and immediately above it. This 6 is now the upper number in the Rank of the Latus.

w. Multiply 2, the first found figure of the Root into this 6, and write the product 12 in the Rank of the Square opposite to and immediately above 12, the upper number in that Rank by Art. *m*.

x. Add together in the Rank of the Square this 12 and 12, and write the sum 24 opposite to and immediately above them. This 24 is now the upper number in the Rank of the Square.

y. Multiply 2, the first found figure of the Root into this 24, and write the product 48 in the Rank of the Cube opposite to and immediately above 32, the upper number in that Rank by Art. *p*.

z. Add together in the Rank of the Cube this 48 and 32, and write the Sum 80 opposite to and immediately above them. This 80 is now the upper number in the Rank of the Cube.

a. Multiply 2, the first found figure of the Root into this 80, and write the product 160 in the Rank of the Biquadrate opposite to and immediately above 80, the upper number in that Rank by Art. *r*.

z

β. Add together in the Rank of the Biquadrate this 160 and 80, and write the sum 240 opposite to and immediately above them.

γ. Transfer this 240 to the right hand 2 places. This 240 so transferred is now the upper number in the Rank of the Biquadrate.

δ. Add 2, the first found figure of the Root to 6, the upper number in the Rank of the Latus by Art. ν, and write the sum 8 opposite to and immediately above it. This 8 is now the upper number in the Rank of the Latus.

ε. Multiply 2, the first found figure of the Root into this 8, and write the product 16 in the Rank of the Square opposite to and immediately above 24, the upper number in that Rank by Art. x.

ζ. Add together in the Rank of the Square this 16 and 24, and write the sum 40 opposite to and immediately above them. This 40 is now the upper number in the Rank of the Square.

η. Multiply 2, the first found figure of the Root into this 40, and write the product 80 in the Rank of the Cube opposite to and immediately above 80, the upper number in that Rank by Art. z.

θ. Add together in the Rank of the Cube this 80 and 80, and write the sum 160 opposite to and immediately above them.

ι. Transfer this 160 to the right hand 3 places. This 160 so transferred is now the upper number in the Rank of the Cube.

κ. Add 2, the first found figure of the Root to 8, the upper number in the Rank of the Latus by Art. δ) and write the sum 10 opposite to and

immediately above it. This 10 is now the upper number in the Rank of the Latus.

λ. Multiply 2, the first found figure of the Root into this 10, and write the product 20 in the Rank of the Square opposite to and immediately above 40, the upper number in that Rank.

μ. Add together in the Rank of the Square this 20 and 40, and write the sum 60 opposite to and immediately above them.

ν. Transfer this 60 to the right hand 4 places. This 60 so transferred is now the upper number in the Rank of the Square.

ξ. Add 2, the first found figure of the Root to 10, the upper number in the Rank of the Latus Art. π) and write the sum 12 opposite to and immediately above the 10.

π. Transfer this 12 to the right hand 5 places. This 12 so transferred is now the upper number in the Rank of the Latus.

Then seek the greatest number with the following condition—

1. That if this sought number be written in the interstice to the right hand of 12, the upper number by Art. π in the Rank of the Latus.

2. And this sought number be multiplied into the whole figures now uppermost in the Rank of the Latus, and the product written in the Rank of the Square opposite 571,800, the second period of the given number, which stands in the Rank of the number or Pulpit Diagram, and immediately above 60, the upper number by Art. ν in that Rank.

3. And the figures of this product and that upper number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

4. And the sought number be multiplied into this sum, and the product written in the Rank of the Cube opposite to 571,800, the second period as before, and immediately above 160, the upper number by Art. 1 in that Rank.

5. And the figures of this product and that upper number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

6. And the sought number be multiplied into this sum and the product written in the Rank of the Biquadrate opposite to 571,800, the second period as before, and immediately above 240, the upper number by Art. 7) in that Rank.

7. And the figures of this product and that upper number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

8. And the sought number be multiplied into this sum, and the product be written in the Rank of the Quadratus Cubi opposite to 571,800, the second period as before, and immediately above 192, the upper number by Art. 2 in that Rank.

9. And the figures of this product and that upper number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

10. And the sought number be multiplied into this sum, this product should not be greater than 102,571,800, the first Resolvend by Art. *j*.

Then 3 will be found the number answering these conditions. For—

g. Write 3 in the interstice to the right hand of 12, the upper number by Art. π) in the Rank of the Latus, and it becomes 123, and is now the upper number in that Rank.

σ . Multiply the found 3 into this 123, and write the product 369 in the Rank of the Square opposite to 571,800, the second period, and immediately above 60, the upper number by Art. ν) in that Rank.

τ . Add the figures in this situation, 369

60

and it becomes 6,369. Write this sum opposite to and immediately above 369, and this 6,369 is now the upper number in the Rank of the Square.

υ . Multiply this found 3 into this 6,369, and write the product 19,107 in the Rank of the Cube opposite to 571,800, the second period, and immediately above 160, the upper number by Art. ν) in that Rank.

Add the figures in this situation, 19,107

160

and it becomes 179,107. Write this sum opposite to and immediately above 19,107, and this 179,107 is now the upper number in the Rank of the Cube.

χ . Multiply the found 3 into 179,107, and write the product 537,321 in the Rank of the Biquadrate opposite to 571,800, the second period, and immediately above 240, the upper number by Art. γ in that Rank.

ψ. Add the figures in this situation, 537,321.

240

and it becomes 2,937,321. Write this sum opposite to and immediately above 537,321, and this 2,937,321 is now the upper number in the Rank of the Biquadrate.

ω. Multiply this found 3 into this 2,937,321, and write the product 8,811,963 in the Rank of the Quadratus Cubi opposite to 571,800, the second period, and immediately above 192, the upper number by Art. *u* in that Rank.

1. Add the figures in this situation, 8,811,963

192

And it becomes .. 28,011,963. Write this sum opposite to and immediately above 8,811,963, and this 28,011,963 is now the upper number in the Rank of the Quadratus Cubi.

β. Multiply this found 3 into this 28,011,963, and the product is 84,035,889, which is less than 102,571,800, the first Resolvend by Art. *j*.

And 3 is the highest number which will answer these conditions. For let 4 be substituted in these operations, they will successively become—

The number in <i>g</i>	124.	The product in <i>σ</i> ..	$124 \times 4 = 496$
	496		6,496
	60		4
The sum in <i>τ</i>	6,496.	The product in <i>υ</i>	25,984
	25,984		185,984
	160		4

The sum in ϕ	185,984.	The product in χ	743,936
	<u>743,936</u>		<u>3,143,936</u>
	240		4
The sum in ψ	3,143,936.	The product in ω ..	12,575,744
	<u>12,575,744</u>		<u>31,775,744</u>
	192		4
The sum in ι	31,775,744.	The product in β ..	127,102,976
	<u>127,102,976</u>		<u>127,102,976</u>

which last product is greater than 102,571,800.

ب. Write the found figure 3, which answers the conditions above 0, the units of the second period 571,800, and exterior to and immediately above the Pulpit Diagram. This is the second found figure of the Root

ت. Call this last product 84,035,889, which answers the conditions the second Subtrahend, write it opposite to and immediately under 102,571,800, the first Resolvend.

ث. Subtract 84,035,889, the second Subtrahend, from 102,571,800, the first Resolvend, and 18,535,911 is the second Remainder.

ج'. Write 18,535,911, the second Remainder, on a line with the figures of the third Period in the next descending right hand step of the Pulpit Diagram, so as to form the number 18,535,911,758,593. This is the second Resolvend.

ك. Add 3, the second found figure of the Root, to 123, the upper number in the Rank of the Latus by Art. 9), and write the sum 126 in the

Rank of the Latus, opposite to and immediately above it. This 126 is now the upper number in the Rank of the Latus.

7. Multiply 3, the second found figure of the Root, into this 126, and write the product 378 in the Rank of the Square opposite to and immediately above 6,369, the upper number in that Rank by Art. τ).

m' . Add together in the Rank of the Square this 378 and 6,369, and write the sum 6,747 opposite to and immediately above them. This 6,747 is now the upper number in the Rank of the Square.

n' . Multiply 3, the second found figure of the Root, into this 6,747, and write the product 20,241 in the Rank of the Cube opposite to and immediately above 179,107, the upper number in the Rank by Art. ϕ .

p' . Add together in the Rank of the Cube this 20,241 and 179,107, and write the sum 199,348 opposite to and immediately above them. This 199,348 is now the upper number in the Rank of the Cube.

q' . Multiply 3, the second found figure of the Root, into this 199,348, and write the product 598,044 in the Rank of the Biquadrate opposite to and immediately above 2,937,321, the upper number in that Rank by Art. ψ .

r' . Add together in the Rank of the Biquadrate this 598,044 and 2,937,321, and write the sum 3,535,365 opposite to and immediately above them. This 3,535,365 is now the upper number in the Rank of the Biquadrate.

s' . Multiply 3, the second found figure of the Root into this 3,535,365, and write the product 10,606,095 in the Rank of the Quadratus Cubi,

opposite to and immediately above 28,011,963, the upper number in that Rank by Art. $\mathfrak{j}$.

$\mathfrak{k}'$. Add together in the Rank of the Quadratus Cubi this 10,606,095 and 28,011,963, and write the sum 38,618,058 opposite to and immediately above them.

$\mathfrak{l}'$. Transfer this 38,618,058 to the right hand one place. And this 38,618,058 so transferred, is now the upper number in the Rank of the Quadratus Cubi.

$\mathfrak{m}'$. Add 3, the second found figure of the Root, to 126, the upper number in the row of the Latus by Art. $\mathfrak{k}'$, and write the sum 129 opposite to and immediately above it. This 129 is now the upper number in the Rank of the Latus.

$\mathfrak{n}'$. Multiply 3, the second found figure of the Root, into this 129, and write the product 387 in the Rank of the Square opposite to and immediately above 6,747, the upper number in that Rank by Art. $\mathfrak{m}'$.

$\mathfrak{o}'$. Add together in the Rank of the Square this 387 and 6,747, and write the sum 7,134 opposite to and immediately above them. This 7,134 is now the upper number in the Rank of the Square.

$\mathfrak{p}'$. Multiply 3, the second found figure of the Root, into 7,134, and write the product 21,402 in the Rank of the Cube opposite to immediately above 199,348, the upper number in that Rank by Art. $\mathfrak{p}'$.

$\mathfrak{q}'$. Add together in the Rank of the Cube this 21,402 and 199,348, and write the sum 220,750 opposite to and immediately above them. This 220,750 is now the upper number in the Rank of the Cube.

α' . Multiply 3, the second found figure of the Root, into this 220,750, and write the product 662,250 in the Rank of the Biquadrate opposite to and immediately above 3,535,365, the upper number in that Rank by Art. ν' .

β' . Add together in the Rank of the Biquadrate this 662,250 and 3,535,365, and write the sum 4,197,615 opposite to and immediately above them.

γ' . Transfer this 4,197,615 to the right hand two places. This 4,197,615 so transferred, is now the upper number in the Rank of the Biquadrate.

δ' . Add 3, the second found figure of the Root, to 129, the upper number in the Rank of the Latus by Art. ν' , and write the sum 132 opposite to and immediately above it. This 132 is now the upper number in the Rank of the Latus.

ϵ' . Multiply 3, the second found figure of the Root, into this 132, and write the product 396 in the Rank of the Square opposite to and immediately above 7,134, the upper number in that Rank by Art. x' .

ζ' . Add together in the Rank of the Square this 396 and 7,134, and write the sum 7,530 opposite to and immediately above them. This 7,530 is now the upper number in the Rank of the Square.

η' . Multiply 3, the second found figure of the Root, into this 7,530, and write the product 22,590 in the Rank of the Cube opposite to and immediately above 220,750, the upper number in that Rank by Art. z' .

θ. Add together in the Rank of the Cube this 22,590 and 220,750, and write the sum 243,340 opposite to and immediately above them.

ι. Transfer this 243,340 to the right hand three places. This 243,340 so transferred, is now the upper number in the Rank of the Cube.

κ. Add 3, the second found figure of the Root, to 132, the upper number in the Rank of the Latus by Art. δ,) and write the sum 135 opposite to and immediately above it. This 135 is now the upper number in the Rank of the Latus.

λ. Multiply 3, the second found figure of the Root, into this 135, and write the product 405 in the Rank of the Square opposite to and immediately above 7,530, the upper number in that Rank by Art. ε.)

μ. Add together in the Rank of the Square this 405 and 7,530, and write the sum 7,935 opposite to and immediately above them.

ν. Transfer this 7,935 to the right hand four places. This 7,935 so transferred, is now the upper number in the Rank of the Square.

ξ. Add 3, the second found figure of the Root, to 135, the upper number in the Rank of the Latus by Art. κ,) and write the sum 138 opposite to and immediately above the 135.

ζ. Transfer this 138 to the right hand five places. This 138 so transferred, is now the upper number in the the Rank of the Latus.

Then seek the greatest number with the following conditions—

1'. That if this sought number be written in the interstice to the right hand of 138, the upper number by Art. ζ' in the Rank of the Latus.

2'. And the sought number be multiplied into the whole figures now uppermost in the Rank of the Latus, and the product written in the Rank of the Square opposite 758,593, the third period of the given number, which stands in the Rank of the number, or Pulpit Diagram, and immediately above 7,935, the upper number by Art. *f* in that Rank.

3'. And the figures of this product, and that upper number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

4'. And the sought number be multiplied into this sum, and the product written in the Rank of the Cube opposite to 758,593, the third period as before and immediately above 243,340, the upper number by Art. *i* in that Rank.

5'. And the figures of this product, and that upper number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

6'. And the sought number be multiplied into this sum, and the product written in the Rank of the Biquadrate opposite to 758,593, the third period as before and immediately above 4,197,615, the upper number by Art. *g*,) in that Rank.

7'. And the figures of this product, and that number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

8'. And the sought number be multiplied into this sum, and the product written in the Rank of the Quadratus Cubi opposite to 758,593, the third period as before and immediately above 38,618,058, the upper number by Art. *u*,) in that Rank.

9'. And the figures of the product, and that upper number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

10'. And the sought number be multiplied into this sum, the product should not be greater than 18,535,911,758,593, the second Resolvend by Art. 9'.

Then 4 will be found the number answering these conditions, for—

9'. Write 4 in the interstice to the right hand of 138, the upper number by Art. 8') in the Rank of the Latus, and it becomes 1,384, and is now the upper number in that Rank.

8'. Multiply the found 4 into this 1,384, and write the product 5,536 in the Rank of the Square opposite to 758,593, the third period, and immediately above 7,935, the upper number by Art. 7' in that Rank.

7'. Add the figures in this situation, 5,536

7935

And it becomes . . . 799,036. Write this sum opposite to and immediately above 5,536, and this 799,036 is now the upper number in the Rank of the Square.

6'. Multiply this found 4 into this 799,036, and write the product 3,196,144 in the Rank of the Cube, opposite to 758,593, the third period, and immediately above 243,340, the upper number by Art. 6' in that Rank.

5'. Add the figures in this situation, 3,196,144

243,340

And it becomes . . . 246,536,144. Write this sum opposite to and immediately above 3,196,144, and this 246,536,144 is now the upper number in the Rank of the Cube.

π. Multiply this found 4 into this 246,536,144, and write the product 986,144,576 in the Rank of the Biquadrate, opposite to 758,593, the third period, and immediately above 4,197,615, the upper number by Art. γ' in the Rank of the Biquadrate.

ψ. Add the figures in this situation, 986,144,576

41,976,15

And it becomes . . 42,962,294,576. Write this sum opposite to and immediately above 986,144,576, and this 42,962,294,576 is now the upper number in the Rank of the Biquadrate.

ω. Multiply this found 4 into this 42,962,294,576, and write the product 171,849,178,304 in the Rank of the Quadratus Cubi, opposite to 758,593, the third period, and immediately above 38,618,058, the upper number by Art. ω' in that Rank.

ν. Add the figures in this situation, 171,849,178,304

3,861,805,8

And it becomes . . 4,033,654,978,304. Write this sum opposite to 758,593, the third period, and immediately above 171,849,178,304, and this 4,033,654,978,304 is now the upper number in the Rank of the Quadratus Cubi.

ξ. Multiply this found 4 into this 4,033,654,978,304, and the product is 16,134,619,913,216, which is less than 18,535,911,758,593, the second Resolvend by Art. j'.

And 4 is the highest number which will answer these conditions.

For let 5 be substituted in these operations, and they will become—

The number in ع 1,385. The product in د .. $1,385 \times 5 = 6,925$

<u>6,925</u>	<u>800,425</u>
793,5	5

The sum in ر 800,425. The product in ز $4,002,125$

<u>4,002,125</u>	<u>247,342,125</u>
243,340	5

The sum in ف 247,342,125. The product in ح $1,236,710,625$

<u>1,236,710,625</u>	<u>43,212,860,625</u>
41,976,15	5

The sum in ط 43,212,860,625. The product in ق .. $216,064,303,125$

<u>216,064,303,125</u>	<u>4,077,870,103,125</u>
3,861,805,8	5

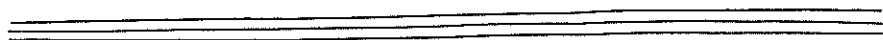
The sum in ك .. $4,077,870,103,125$. The product in ل .. $20,389,350,515,625$

which last product is greater than 18,535,911,758,593.

ب . Write the found figure 4, which answers the conditions above 4, the units of the third period 758,593, and exterior to and immediately above the Pulpit Diagram. This is the third found figure of the Root.

ت . Call this last product 16,134,619,913,216, which answers the conditions the third Subtrahend, and write it opposite to and immediately under 18,535,911,758,593, the second Resolvend.

ج. Subtract 16,134,619,913,216, the third Subtrahend, from 8,535,911,758,593, the second Resolvend, and 2,401,291,845,377 is the third Remainder.



And proceed analogously through all the following Periods of the given number :

Thus—

j'. Write the last Resolvend on a line with the figures of the next Period in the next descending right hand step of the Pulpit Diagram. These whole figures are the next Resolvend.

k'. Add the last found figure of the Root to the upper number in the Rank of the Latus, and write the sum opposite to and immediately above it. This sum is now the upper number in the Rank of the Latus.

l'. Multiply the last found figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Square opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

m'. Add together in the Rank of the Square this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Square.

n'. Multiply the last found figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Cube opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

p'. Add together in the Rank of the Cube this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Cube.

q''. Multiply the last found figure of the Root into this sum and write the product in the Rank of the Biquadrate opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

r'. Add together in the Rank of the Biquadrate this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Biquadrate.

s'. Multiply the last found figure of the Root into this sum and write the product in the Rank of the Quadratus Cubi opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

t''. Add together in the Rank of the Quadratus Cubi this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them.

u''. Transfer this last sum to the right hand one place. This sum so transferred is now the upper number in the Rank of the Quadratus Cubi.

v''. Add the last found figure of the Root to the upper number in the Rank of the Latus, and write the sum opposite to and immediately above it. This sum is now the upper number in the Rank of the Latus.

w' . Multiply the last found figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Square opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

x' . Add together in the Rank of the Square this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Square.

y' . Multiply the last found figure of the Root into this sum and write the product in the Rank of the Cube opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

z' . Add together in the Rank of the Cube this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Cube.

a' . Multiply the last found figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Biquadrate opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

β' . Add together in the Rank of the Biquadrate this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them.

γ' . Transfer this last sum to the right hand two places. This sum so transferred is now the upper number in the Rank of the Biquadrate.

δ' . Add the last found figure of the Root to the upper number in the Rank of the Latus, and write the sum opposite to and immediately above it. This sum is now the upper number in the Rank of the Latus.

ε'. Multiply the last found figure of the Root into this sum and write the product in the Rank of the Square opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

ε'. Add together in the Rank of the Square this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Square.

η'. Multiply the last found figure of the Root into this sum and write the product in the Rank of the Cube opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

θ'. Add together in the Rank of the Cube this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them.

ι'. Transfer this last sum to the right hand three places. This sum so transferred is now the upper number in the Rank of the Cube.

κ'. Add the last found figure of the Root to the upper number in the Rank of the Latus, and write the sum opposite to and immediately above it. This sum is now the upper number in the Rank of the Latus.

λ'. Multiply the last found figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Square opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

μ'. Add together in the Rank of the Square this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them.

iv. Transfer this last sum to the right hand 4 places. This sum so transferred is now the upper number in the Rank of the Square.

xi. Add the last found figure of the Root to the upper number in the Rank of the Latus, and write the sum opposite to and immediately above it.

xii. Transfer this sum to the right hand 5 places. This sum so transferred is now the upper number in the Rank of the Latus.

Then seek the greatest number with the following conditions :

xi. That if this sought number be written in the interstice to the right hand of the upper number in the Rank of the Latus.

xii. And this sought number be multiplied into the whole figures now uppermost in the Rank of the Latus, and the product written in the Rank of the Square opposite to the next period of the given number, which stands in the Rank of the number, or Pulpit Diagram, and immediately above the upper number in the Rank of the Square.

xiii. And the figures of this product and that upper number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

xiv. And the sought number be multiplied into this sum, and the product written in the Rank of the Cube opposite to the next period and immediately above the upper number in that Rank.

٤". And the figures of this product and that upper number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

٥". And the sought number be multiplied into this sum, and the product written in the Rank of the Biquadrate opposite to the next period and immediately above the upper number in that Rank.

٦". And the figures of this product and that upper number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

٧". And the sought number be multiplied into this sum, and the product written in the Rank of the Quadratus Cubi opposite to the next period and immediately above the upper number in that Rank.

٨". And the figures of this product and that upper number be in this situation added together, and the sum written opposite to and immediately above the product.

٩". And the sought number be multiplied into this sum, then the product shall not be greater than the last Resolvend.

١٠". Then write the found number which answers these conditions above the units of the next period, and exterior to and immediately above the Pulpit Diagram. This is the next found figure of the Root.

١١". Call the last product which answers these conditions the next Subtrahend, write it opposite to and immediately under the last Resolvend.

ج. Subtract this last found Subtrahend from the last Resolvend, and the result is the next Remainder.

And by this circle of operation there will successively be found—

For the 4th period

u. The upper number transferred in the Rank of the Quadratus Cubi = 4,209,500,228,544.

γ. The upper number transferred in the Rank of the Biquadrate = 44,973,293,040.

ρ. The upper number transferred in the Rank of the Cube = 256,258,080.

σ. The upper number transferred in the Rank of the Square = 821,340.

π. The upper number transferred in the Rank of the Latus = 1,404.

ⲑ. The sought number or fourth figure of the Root = 5.

ⲓ. The fourth Subtrahend = 2,116,025,521,169,640,625.

ⲕ. The fourth Remainder = 285,266,324,208,246,683.

For the 5th period

u'. The upper number transferred in the Rank of the Quadratus Cubi = 425,466,612,625,293,750.

γ^{'''}. The upper number transferred in the Rank of the Biquadrate
= 453,589,139,259,375.

ι^{'''}. The upper number transferred in the Rank of the Cube
= 257,904,272,500.

ν^{'''}. The upper number transferred in the Rank of the Square
= 82,485,375.

π^{'''}. The upper number transferred in the Rank of the Latus = 14,070.

ρ^{'''}. The sought number or fifth figure of the Root = 6.

σ^{'''}. The fifth Subtrahend = 255,443,315,383,323,683,729,856.

τ^{'''}. The fifth Remainder = 29,823,008,824,922,999,566,169.

For the 6th and last Period

ι^{iv}. The upper number transferred in the Rank of the Quadratus
Cubi = 42,601,119,820,029,578,182,656.

γ^{iv}. The upper number transferred in the Rank of the Biquadrate
= 4,540,535,451,486,781,440.

ν^{iv}. The upper number transferred in the Rank of the Cube
= 258,102,288,056,320.

σ^{iv}. The upper number transferred in the Rank of the Square
= 8,252,759,040.

٨١٢. The upper number transferred in the Rank of the Latus = 140,736.

٨١٣. The sought number or sixth figure of the Root = 7.

٨١٤. The sixth Subtrahend = 29,823,008,824,922,999,565,181,681,169.

٨١٥. The sixth and last Remainder = 987,654,321.

Hence then the integral approximate Root of the given number is 234,567, and the last Remainder 987,654,321 is the Numerator of a Fraction, which is to be added to the integral Root, so as to afford a nearer approximate to truth. And the Denominator of this Fraction is found by the following process—

ج. Add the last figure of the Root to the upper number in the Rank of the Latus, and write the sum opposite to and immediately above it. This sum is now the upper number in the Rank of the Latus.

د. Multiply the last figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Square opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

ه. Add together in the Rank of the Square this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Square.

و. Multiply the last figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Cube opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

د. Add together in the Rank of the Cube this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Cube.

ج. Multiply the last figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Biquadrate opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

ر. Add together in the Rank of the Biquadrate this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Biquadrate.

ز. Multiply the last figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Quadratus Cubi opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

س. Add together in the Rank of the Quadratus Cubi this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Quadratus Cubi.

And these operations are analogous to those from k'' to t'' .

ش. Add the last figure of the Root to the upper number in the Rank of the Latus, and write the sum opposite to and immediately above it. This sum is now the upper number in the Rank of the Latus.

ص. Multiply the last figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Square opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

ض. Add together in the Rank of the Square this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Square.

ب. Multiply the last figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Cube opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

ط. Add together in the Rank of the Cube this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Cube.

ع. Multiply the last figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Biquadrate opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

غ. Add together in the Rank of the Biquadrate this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Biquadrate.

And these operations are analogous to those from v'' to β'' .

ف. Add the last figure of the Root to the upper number in the Rank of the Latus, and write the sum opposite to and immediately above it. This sum is now the upper number in the Rank of the Latus.

ج. Multiply the last figure of the Root into this sum, and write the product in the Rank of the Square opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

ك. Add together in the Rank of the Square this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Square.

گ. Multiply the last figure of the Root into the sum, and write the product in the Rank of the Cube opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

ج. Add together in the Rank of the Cube this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Cube.

And these operations are analogous to those from δ'' . to θ'' .

م. Add the last figure of the Root to the upper number in the Rank of the Latus, and write the sum opposite to and immediately above it. This sum is now the upper number in the Rank of the Latus.

ن. Multiply the last figure of the Rank into this sum, and write the product in the Rank of the Square opposite to and immediately above the upper number in that Rank.

ر. Add together in the Rank of the Square this product and that upper number, and write the sum opposite to and immediately above them. This sum is now the upper number in the Rank of the Square.

And these operations are analogous to those from π'' to μ'' .

س. Add the last figure of the Root to the upper number in the Rank of the Latus, and write the sum opposite to and immediately above it. This sum is now the upper number in the Rank of the Latus.

Lemma 7. If two rows of figures be written mutually parallel, but so that the units of the first row be opposite the n^{th} place of the second, the tens of the first opposite to place $n + 1$ of the second, the hundreds of the first, opposite to place $n + 2$ of the second, &c. and the rows be in this situation added by the common Rule of Addition, this is equivalent to the first row having added (the second row) $\times (10^{n-1})$.

Thus if there be written for the first row,	56,789.
for the second row,	123.
	58,019.

Then since 3, the units place of 123 is written opposite the tens or 2d place of 56,789, and since $2 - 1 = 1$, so this is equivalent to $56,789 + 123 \times 10^1 = 56,789 + 1,230$.

Similarly if there be written 56,789.

123.
69,089.

Then since the 3 is here written opposite the hundreds, or 3d place of 56,789, and since $3 - 1 = 2$, so this is equivalent to $56,789 + 123 \times 10^2 = 56,789 + 12,300$.

Similarly if there be written 56,789.

123.
179,789

This is equivalent to $56,789 + 123,000$.

c 1

277

No demonstration is required here.

43.) The division of the given number into periods written in the Pulpit Diagram, by Par. 37 and 38), is evidently the same as in the European Rule, Par. 32) and is therefore explained in Par. 34). Then

Since 166 the first period = A so as in Par. 34 Art. b.) its nearest approximate 6th Root which is 2, is = a .

a. Then $2 = a$ is the number written in the Rank of the Latus.

b. Then $2 \times 2 = 4 = a \times a = a^2$ is the number written in the Rank of the Square.

c. Then $4 \times 2 = 8 = a^2 \times a = a^3$ is the number written in the Rank of the Cube.

d. Then $8 \times 2 = 16 = a^3 \times a = a^4$ is the number written in the Rank of the Biquadrate.

e. Then $16 \times 2 = 32 = a^4 \times a = a^5$ is the number written in the Rank of the Quadratus Cubi.

f. Then $32 \times 2 = 64 = a^5 \times a = a^6$ is the number written in the Rank of the Number or Pulpit Diagram, and is the first subtrahend, agreeing with the first subtrahend of the European method, Par. 34 Art. c.)

g. h. i. Then $166 - 64 = 102 = A - a^6$ and is the first Remainder which agrees with the first Remainder of the European method, Par. 34 Art. d) and is therefore = R. (Par. 18.)

j. Since by Par. 34 Art. e.) $102,571,800 = R\phi^6 + B$, hence the first Resolvend of the European and Arabian methods agree.

k. Then by Art. *a.*) since $2 = a$ so $2 + 2 = 4 = a + a = 2a$, and is the upper number in the Rank of the Latus.

l. Then $4 \times 2 = 8 = 2a \times a = 2a^2$, and is the product written in the Rank of the Square.

m. By Art. *b.*) since $4 = a^2$ so $8 + 4 = 12 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$, and is the upper number in the Rank of the Square.

n. Then $12 \times 2 = 24 = 3a^2 \times a = 3a^3$, and is the product written in the Rank of the Cube.

p. By Art. *c.*) since $8 = a^3$ so $24 + 8 = 32 = 3a^3 + a^3 = 4a^3$, and is the upper number in the Rank of the Cube.

q. Then $32 \times 2 = 64 = 4a^3 \times a = 4a^4$, and is the product written in the Rank of the Biquadrate.

r. By Art. *d.*) since $16 = a^4$ so $64 + 16 = 80 = 4a^4 + a^4 = 5a^4$, and is the upper number in the Rank of the Biquadrate.

s. Then $80 \times 2 = 160 = 5a^4 \times a = 5a^5$, and is the product written in the Rank of the Quadratus Cubi.

t. By Art. *e.*) since $32 = a^5$ so $160 + 32 = 192 = 5a^5 + a^5 = 6a^5$, and is the sum written in the Rank of the Quadratus Cubi.

u. By the transference of 192, its units are put under the 6th place of the second period, and hence $6a^5$ thus transferred, is the upper number in the Rank of the Quadratus Cubi.

v. Then by Art. *k.*) since $4 = 2a$ so $2 + 4 = 6 = a + 2a = 3a$, and is the upper number in the Rank of the Latus.

w. Then $6 \times 2 = 12 = 3 a \times a = 3 a^2$, and is the product written in the Rank of the Square.

x. By Art. *m.*) since $12 = 3 a^2$ so $12 + 12 = 24 = 3 a^2 + 3 a^2 = 6 a^2$, and is the upper number in the Rank of the Square.

y. Then $24 \times 2 = 48 = 6 a^2 \times a = 6 a^3$, and is the product written in the Rank of the Cube.

z. By Art. *p.*) since $32 = 4 a^3$ so $48 + 32 = 80 = 6 a^3 + 4 a^3 = 10 a^3$, and is the upper number in the Rank of the Cube.

a. Then $80 \times 2 = 160 = 10 a^3 \times a = 10 a^4$, and is the product written in the Rank of the Biquadrate.

β. By Art. *r.*) since $80 = 5 a^4$ so $160 + 80 = 240 = 10 a^4 + 5 a^4 = 15 a^4$, and is the sum written in the Rank of the Biquadrate.

γ. By the transference of 240, its units are put under the 5th place of the second period, and hence $15 a^4$ thus transferred, is the upper number in Rank of the Biquadrate.

δ. Then by Art. *v.*) since $6 = 3 a$ so $2 + 6 = 8 = a + 3 a = 4 a$, and is the upper number in the Rank of the Latus.

ε. Then $8 \times 2 = 16 = 4 a \times a = 4 a^2$, and is the product written in the Rank of the Square.

ζ. By Art. *x.*) since $24 = 6 a^2$ so $16 + 24 = 40 = 6 a^2 + 4 a^2 = 10 a^2$, and is the upper number in the Rank of the Square.

η. Then $40 \times 2 = 80 = 10 a^2 \times a = 10 a^3$, and is the product written in the Rank of the Cube.

θ. By Art. ζ.) since $80 = 10 a^3$ so $80 + 80 = 160 = 10 a^3 + 10 a^3 = 20 a^3$, and is the sum written in the Rank of the Cube.

ι. By the transference of 160, its units are put under the 4th place of the second period, and hence $20 a^3$ thus transferred, is the upper number in the Rank of the Cube.

κ. Then by Art. δ.) since $8 = 4 a$ so $2 + 8 = 10 = a + 4 a = 5 a$, and is the upper number in the Rank of the Latus.

λ. Then $10 \times 2 = 20 = 5 a \times a = 5 a^2$, and is the product written in the Rank of the Square.

μ. By Art. ζ.) since $40 = 10 a^2$ so $20 + 40 = 60 = 5 a^2 + 10 a^2 = 15 a^2$, and is the sum written in the Rank of the Square.

ν. By the transference of 60, its units are put under the 3d place of the second period, and hence $15 a^2$ thus transferred, is the upper number in the Rank of the Square.

ξ. Then by Art. λ.) since $10 = 5 a$ so $2 + 10 = 12 = a + 5 a = 6 a$, and is the sum written in the Rank of the Latus.

π. By the transference of 12, its units are put under the second place of the second period, and hence $6 a$ thus transferred, is the upper number in the Rank of the Latus.

1. Then if there be a Digit annexed to the right hand of the upper number in the Rank of the Latus, since by Art. π) this upper number

$= 6 a$, so with the annexed Digit the whole figures will, by Lem. 6, become
 $= 6 a \phi + \text{that Digit.}$

2. Then if that Digit be multiplied into these figures, the product will become $6 a \phi \times \text{that Digit} + \overline{\text{that Digit}}|^2$. Then if this product be written in the Rank of the Square opposite to the second period, then since by the transference of Art. v, the units of the upper number in the Rank of the Square, are put under the 3d place of the second period, so they are also put under the third place of this product.

3. Then if this product and that upper number be in this situation added together since by Art. v) that upper number $= 15 a^2$, so by Lem. 7, the sum $= 6 a \phi \times \text{that Digit} + \overline{\text{that Digit}}|^2 + 15 a^2 \times \phi^2 = 15 a^2 \phi^2 + 6 a \phi \times \text{that Digit} + \overline{\text{that Digit}}|^2$.

4. Then if that Digit be multiplied into this sum, the product will become $15 a^2 \phi^2 \times \text{that Digit} + 6 a \phi \times \overline{\text{that Digit}}|^2 + \overline{\text{that Digit}}|^3$. Then if this product be written in the Rank of the Cube, opposite to the second period, then since by the transference of Art. v, the units of the upper number in the Rank of the Cube, are put under the 4th place of the second period, so they are also put under the 4th place of this product.

5. Then if this product and that upper number be in this situation added together since by Art. v, that upper number $= 20 a^3$ so by Lem. 7, the sum $= 15 a^2 \phi^2 \times \text{that Digit} + 6 a \phi \times \overline{\text{that Digit}}|^2 + \overline{\text{that Digit}}|^3 + 20 a^3 \times \phi^3 = 20 a^3 \phi^3 + 15 a^2 \phi^2 \times \text{that Digit} + 6 a \phi \times \overline{\text{that Digit}}|^2 + \overline{\text{that Digit}}|^3$

6. Then if that Digit be multiplied into this sum, the product will become $20 a^3 \phi^3 \times \text{that Digit} + 15 a^2 \phi^2 \times \overline{\text{that Digit}}|^2 + 6 a \phi \times \overline{\text{that Digit}}|^3 + \overline{\text{that Digit}}|^4$. Then if this product be written in the Rank of the Biquadrate, opposite to the second Period, then since by the transference

of Art. γ , the units of the upper number in the Rank of the Biquadrate, are put under the 5th place of the second period, so they are also put under the 5th place of this product.

7. Then if this product and that upper number be in this situation added together since by Art. γ) that upper number $= 15 a^4$ so by Lem. 7, the sum $= 20 a^3 \varphi^3 \times \text{that Digit} + 15 a^2 \varphi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 6 a \varphi \times \overline{\text{that Digit}}^3 + \overline{\text{that Digit}}^4 + 15 a^4 \times \varphi^4 = 15 a^4 \varphi^4 + 20 a^3 \varphi^3 \times \text{that Digit} + 15 a^2 \varphi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 6 a \varphi \times \overline{\text{that Digit}}^3 + \overline{\text{that Digit}}^4$.

8. Then if that Digit be multiplied into this sum, the product will become $15 a^4 \varphi^4 \times \text{that Digit} + 20 a^3 \varphi^3 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 15 a^2 \varphi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^3 + 6 a \varphi \times \overline{\text{that Digit}}^4 + \overline{\text{that Digit}}^5$. Then if this product be written in the Rank of the Quadratus Cubi, opposite to the second period, then since by the transference of Art. α , the units of the upper number in the Rank of the Quadratus Cubi are put under the 6th place of the second period, so they are also put under the 6th place of this product.

9. Then if this product and that upper number be in this situation added together since by Art. α) that upper number $= 6 a^5$, so by Lem. 7, the sum $= 15 a^4 \varphi^4 \times \text{that Digit} + 20 a^3 \varphi^3 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 15 a^2 \varphi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^3 + 6 a \varphi \times \overline{\text{that Digit}}^4 + \overline{\text{that Digit}}^5 + 6 a^5 \times \varphi^5 = 6 a^5 \varphi^5 + 15 a^4 \varphi^4 \times \text{that Digit} + 20 a^3 \varphi^3 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 15 a^2 \varphi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^3 + 6 a \varphi \times \overline{\text{that Digit}}^4 + \overline{\text{that Digit}}^5$.

10. Then if that Digit be multiplied into this sum, the product will become $6 a^5 \varphi^5 \times \text{that Digit} + 15 a^4 \varphi^4 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 20 a^3 \varphi^3 \times \overline{\text{that Digit}}^3 + 15 a^2 \varphi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^4 + 6 a \varphi \times \overline{\text{that Digit}}^5 + \overline{\text{that Digit}}^6$, which is required to be not greater than $R \varphi^6 + B$ by Art. j). Now this is evidently the same as the expression of Par. 20). $6 a^5 \varphi^5 b + 15 a^4 \varphi^4 b^2 + 20 a^3 \varphi^3 b^3$

β . $15 a^2 \phi^2 b^4 + 6 a \phi b^5 + b^6$ having that Digit substituted for b . And since $6 a^3 \phi^3 b + 15 a^2 \phi^2 b^2 + 20 a^2 \phi^2 b^3 + 15 a^2 \phi^2 b^4 + 6 a \phi b^5 + b^6$, must also be not greater than $R \phi^6 + B$, and since this b must be a Digit so it is evident that the present operation from Art. 1 to 10) is equivalent to seeking the b of Par. 20). and since 3 by Art. 2 et seq.) is the found Digit, so 3 also expounds the b of Par. 20) and then—

γ . Since by Art. π) $12 = 6 a$, and since 3 contains one figure, so $123 = 6 a \phi + b$ by Lem. 6,) and is the upper number in the Rank of the Latus.

α . Then $123 \times 3 = 369 = (6 a \phi + b) \times b = 6 a \phi b + b^2$, and is the product written in the Rank of the Square.

τ . Then since by Art. ν) $60 = 15 a^2$, with its units put under the 3d place of 369, so by Lem. 7,) their sum in this situation $= 369 + 60 \times 10^2 = 369 + 6,000 = 6,369 = (6 a \phi b + b^2) + 15 a^2 \phi^2 = 15 a^2 \phi^2 + 6 a \phi b + b^2$, and is the upper number in the Rank of the Square.

μ . Then $6,369 \times 3 = 19,107 = (15 a^2 \phi^2 + 6 a \phi + b^2) \times b = 15 a^2 \phi^2 b + 6 a \phi b^2 + b^3$, and is the product written in the Rank of the Cube.

ϕ . Then since by Art. ι) $160 = 20 a^3$, with its units put under the 4th place of 19,107, so by Lem. 7,) their sum in this situation $= 19,107 + 160 \times 10^3 = 19,107 + 160,000 = 179,107 = (15 a^2 \phi^2 b + 6 a \phi b^2 + b^3) + 20 a^3 \times \phi^3 = 20 a^3 \phi^3 + 15 a^2 \phi^2 b + 6 a \phi b^2 + b^3$, and is the upper number in the Rank of the Cube.

χ . Then $179,107 \times 3 = 537,321 = (20 a^3 \phi^3 + 15 a^2 \phi^2 b + 6 a \phi b^2 + b^3) \times b = 20 a^3 \phi^3 b + 15 a^2 \phi^2 b^2 + 6 a \phi b^3 + b^4$, and is the product written in the Rank of the Biquadrate.

ψ. Then since by Art. γ) $240 = 15 a^4$, with its unit put under the 4th place of 507,321 so by Lem. 7,) their sum in this situation $= 537,321 + 240 \times 10^4 = 537,321 + 2,400,000 = 2,937,321 = (20 a^3 \phi^3 b + 15 a^2 \phi^2 b^2 + 6 a \phi b^3 + b^4) + 15 a^4 \times \phi^4 = 15 a^4 \phi^4 + 20 a^3 \phi^3 b + 15 a^2 \phi^2 b^2 + 6 a \phi b^3 + b^4$, and is the upper number in the Rank of the Biquadrate.

ω. Then $2,937,321 \times 3 = 8,811,963 = (15 a^4 \phi^4 + 20 a^3 \phi^3 b + 15 a^2 \phi^2 b^2 + 6 a \phi b^3 + b^4) \times b = 15 a^4 \phi^4 b + 20 a^3 \phi^3 b^2 + 15 a^2 \phi^2 b^3 + 6 a \phi b^4 + b^5$, and is the product written in the Rank of the Biquadrate.

ι. Then since by Art. υ). $192 = 6 a^5$, with its units put under the 6th place of 8,811,963, so by Lem. 7), their sum in this situation $= 8,811,963 + 192 \times 10^5 = 8,811,963 + 19,200,000 = 28,011,963 = (15 a^4 \phi^4 b + 20 a^3 \phi^3 b^2 + 15 a^2 \phi^2 b^3 + 6 a \phi b^4 + b^5) + 6 a^5 \times \phi^5 = 6 a^5 \phi^5 + 15 a^4 \phi^4 b + 20 a^3 \phi^3 b^2 + 15 a^2 \phi^2 b^3 + 6 a \phi b^4 + b^5$

ⲑ. Then $28,011,963 \times 3 = 84,035,889 = (6 a^5 \phi^5 + 15 a^4 \phi^4 b + 20 a^3 \phi^3 b^2 + 15 a^2 \phi^2 b^3 + 6 a \phi b^4 + b^5) \times b = a^5 \phi^5 b + 15 a^4 \phi^4 b^2 + 20 a^3 \phi^3 b^3 + 15 a^2 \phi^2 b^4 + 6 a \phi b^5 + b^6$, and is less than 102,571,800, or $R \phi^6 + B$ by Art. j.

ⲑ. Then since 3 is the greatest number which answers this condition, so 3 is the second figure of the Root, and agrees with the second figure of the Root found by the European method in Par. 34, Art. b').

ⲑ. And 84,035,889 expounds the second Subtrahend, which agrees with the second Subtrahend found by the European method in Par. 34, Art. c'.

ⲑ. And since by Art. j) $102,571,800 = R \phi^6 + B$, so $102,571,800 - 84,035,889 = 18,535,911 = R \phi^6 + B - (6 a^5 \phi^5 b + 15 a^4 \phi^4 b^2 + 20 a^3$

$\varphi^3 b^3 + 15 a^2 \varphi^2 b^4 + 6 a \varphi b^5 + b^6$) and is the second Remainder, which therefore agrees with the second Remainder found by the European method in Par. 34, Art. *d'*, and is therefore $= R'$ (Par. 21).

j'. Then as in Par. 34 Art. *e'*) $18,535,911,758,593$ expounds $R' \varphi^6 + C$, and hence the second Resolvend of the European and Arabian methods agree.

k'. Then by Art. *g*). Since $123 = 6 a \varphi + b$, so $3 + 123 = 126 = b + (6 a \varphi + b) = 6 a \varphi + 2 b$, and is the upper number in the Rank of the Latus.

l'. Then $126 \times 3 = 378 = (6 a \varphi + 2 b) \times b = 6 a \varphi b + 2 b^2$, and is the product written in the Rank of the Square.

m'. By Art. *r*). Since $6,369 = 15 a^2 \varphi^2 + 6 a \varphi b + b^3$, so $378 + 6,369 = 6,747 = (6 a \varphi b + 2 b^2) + (15 a^2 \varphi^2 + 6 a \varphi b + b^3) = 15 a^2 \varphi^2 + 12 a \varphi b + b^3$, and is the upper number in the Rank of the Square.

n'. Then $6,747 \times 3 = 20,241 = (15 a^2 \varphi^2 + 12 a \varphi b + 3 b^2) \times b = 15 a^2 \varphi^2 b + 12 a \varphi b^2 + 3 b^3$, and is the product written in the Rank of the Cube.

p'. By Art. *φ*). Since $179,107 = 20 a^3 \varphi^3 + 15 a^2 \varphi^2 b + 6 a \varphi b^2 + b^3$, so $20,241 + 179,107 = 199,348 = (15 a^2 \varphi^2 b + 12 a \varphi b^2 + 3 b^3) + (20 a^3 \varphi^3 + 15 a^2 \varphi^2 b + 6 a \varphi b^2 + b^3) = 20 a^3 \varphi^3 + 30 a^2 \varphi^2 b + 18 a \varphi b^2 + 4 b^3$, and is the upper number in the Rank of the Cube.

q'. Then $199,348 \times 3 = 598,044 = (20 a^3 \varphi^3 + 30 a^2 \varphi^2 b + 18 a \varphi b^2 + 4 b^3) \times b = 20 a^3 \varphi^3 b + 30 a^2 \varphi^2 b^2 + 18 a \varphi b^3 + 4 b^4$, and is the product written in the Rank of the Biquadrate.

r'. By Art. ψ). Since $2,937,321 = 15 a^4 \phi^4 + 20 a^3 \phi^3 b + 15 a^2 \phi^2 b^2 + 6 a \phi b^3 + b^4$, so $598,044 + 2,937,321 = 3,535,365 = (20 a^3 \phi^3 b + 30 a^2 \phi^2 b^2 + 18 a \phi b^3 + 4 b^4) + (15 a^4 \phi^4 + 20 a^3 \phi^3 b + 15 a^2 \phi^2 b^2 + 6 a \phi b^3 + b^4) = 15 a^4 \phi^4 + 40 a^3 \phi^3 b + 45 a^2 \phi^2 b^2 + 24 a \phi b^3 + 5 b^4$, and is the upper number in the Rank of the Biquadrate.

s'. Then $3,535,365 \times 3 = 10,606,095 = (15 a^4 \phi^4 + 40 a^3 \phi^3 b + 45 a^2 \phi^2 b^2 + 24 a \phi b^3 + 5 b^4) \times b = 15 a^4 \phi^4 b + 40 a^3 \phi^3 b^2 + 45 a^2 \phi^2 b^3 + 24 a \phi b^4 + 5 b^5$, and is the product written in the Rank of the Quadratus Cubi.

t'. By Art. χ). Since $28,011,963 = 6 a^5 \phi^5 + 15 a^4 \phi^4 b + 20 a^3 \phi^3 b^2 + 15 a^2 \phi^2 b^3 + 6 a \phi b^4 + b^5$, so $10,606,095 + 28,011,963 = 38,618,058 = (15 a^4 \phi^4 b + 40 a^3 \phi^3 b^2 + 45 a^2 \phi^2 b^3 + 24 a \phi b^4 + 5 b^5) + (6 a^5 \phi^5 + 15 a^4 \phi^4 b + 20 a^3 \phi^3 b^2 + 15 a^2 \phi^2 b^3 + 6 a \phi b^4 + b^5) = 6 a^5 \phi^5 + 30 a^4 \phi^4 b + 60 a^3 \phi^3 b^2 + 60 a^2 \phi^2 b^3 + 30 a \phi b^4 + 6 b^5 = 6 (a^5 \phi^5 + 5 a^4 \phi^4 b + 10 a^3 \phi^3 b^2 + 10 a^2 \phi^2 b^3 + 5 a \phi b^4 + b^5) = 6 (a \phi + b)^5$, and since $a \phi + b$ is $= p$ by Par. 21), so $6 (a \phi + b)^5 = 6 p^5$, and is the sum written in the Rank of the Quadratus Cubi.

u'. By the transference of 38,618,058, its units are put under the 6th place of the third period, and hence $6 p^5$ thus transferred is the upper number in the Rank of the Quadratus Cubi.

v'. Then by Art. k'). Since $126 = 6 a \phi + 2 b$, so $3 + 126 = 129 = b + (6 a \phi + 2 b) = 6 a \phi + 3 b$, and is the upper number in the Rank of the Latus.

w'. Then $129 \times 3 = 387 = (6 a \phi + 3 b) \times b = 6 a \phi b + 3 b^2$, and is the product written in the Rank of the Square.

x' . Then by Art. m' .) Since $6,747 = 15 a^2 \phi^2 + 12 a \phi b + 3 b^2$, so $3 \cdot 87 + 6,747 = 7,134 = (6 a \phi b + 3 b^2) + (15 a^2 \phi^2 + 12 a \phi b + 3 b^2) = 15 a^2 \phi^2 + 18 a \phi b + 6 b^2$, and is the upper number in the Rank of the Square.

y' . Then $7,134 \times 3 = 21,402 = (15 a^2 \phi^2 + 18 a \phi b + 6 b^2) \times b = 15 a^2 \phi^2 b + 18 a \phi b^2 + 6 b^3$, and is the product written in the Rank of the Cube.

z' . Then by Art. p' .) Since $199,348 = 20 a^3 \phi^3 + 30 a^2 \phi^2 b + 18 a \phi b^2 + 4 b^3$, so $21,402 + 199,348 = 220,750 = (15 a^2 \phi^2 b + 18 a \phi b^2 + 6 b^3) + (20 a^3 \phi^3 + 30 a^2 \phi^2 b + 18 a \phi b^2 + 4 b^3) = 20 a^3 \phi^3 + 45 a^2 \phi^2 b + 36 a \phi b^2 + 10 b^3$, and is the upper number in the Rank of the Cube.

a' . Then $220,750 \times 3 = 662,250 = (20 a^3 \phi^3 + 45 a^2 \phi^2 b + 36 a \phi b^2 + 10 b^3) \times b = 20 a^3 \phi^3 b + 45 a^2 \phi^2 b^2 + 36 a \phi b^3 + 10 b^4$, and is the product written in the Rank of the Biquadrate.

β' . Then by Art. r' .) Since $3,535,365 = 15 a^4 \phi^4 + 40 a^3 \phi^3 b + 45 a^2 \phi^2 b^2 + 24 a \phi b^3 + 5 b^4$, so $662,250 + 3,535,365 = 4,197,615 = (20 a^3 \phi^3 b + 45 a^2 \phi^2 b^2 + 36 a \phi b^3 + 10 b^4) + (15 a^4 \phi^4 + 40 a^3 \phi^3 b + 45 a^2 \phi^2 b^2 + 24 a \phi b^3 + 5 b^4) = 15 a^4 \phi^4 + 60 a^3 \phi^3 b + 90 a^2 \phi^2 b^2 + 60 a \phi b^3 + 15 b^4 = 15 (a^4 \phi^4 + 4 a^3 \phi^3 b + 6 a^2 \phi^2 b^2 + 4 a \phi b^3 + b^4) = 15 (a \phi + b)^4$, and since $a \phi + b = p$ by Par. 21, so $15 (a \phi + b)^4 = 15 p^4$, and is the sum written in the Rank of the Biquadrate.

γ' . By the transference of 4,197,615, its units are put under the 5th place of the third period, and hence $15 p^4$ thus transferred, is the upper number in the Rank of the Biquadrate.

δ'. Then by Art. ν'.) Since $129 = 6 a \phi + 3 b$, so $3 + 129 = 132 = b + (6 a \phi + 3 b) = 6 a \phi + 4 b$, and is the upper number in the Rank of the Latus.

ε'. Then $132 \times 3 = 396 = (6 a \phi + 4 b) \times b = 6 a \phi b + 4 b^2$, and is the product written in the Rank of the Square.

ζ'. Then by Art. ξ'.) Since $7,134 = 15 a^2 \phi^2 + 18 a \phi b + 6 b^2$, so $396 + 7,134 = 7,530 = (6 a \phi b + 4 b^2) + (15 a^2 \phi^2 + 18 a \phi b + 6 b^2) = 15 a^2 \phi^2 + 24 a \phi b + 10 b^2$, and is the upper number in the Rank of the Square.

η'. Then $7,530 \times 3 = 22,590 = (15 a^2 \phi^2 + 24 a \phi b + 10 b^2) \times b = 15 a^2 \phi^2 b + 24 a \phi b^2 + 10 b^3$, and is the product written in the Rank of the Cube.

θ'. Then by Art. ζ'.) Since $220,750 = 20 a^3 \phi^3 + 45 a^2 \phi^2 b + 36 a \phi b^2 + 10 b^3$ so $22,590 + 220,750 = 243,340 = (15 a^2 \phi^2 b + 24 a \phi b^2 + 10 b^3) + (20 a^3 \phi^3 + 45 a^2 \phi^2 b + 36 a \phi b^2 + 10 b^3) = 20 a^3 \phi^3 + 60 a^2 \phi^2 b + 60 a \phi b^2 + 20 b^3 = 20 (a^3 \phi^3 + 3 a^2 \phi^2 b + 3 a \phi b^2 + b^3) = 20 (a \phi + b)^3$, and since $a \phi + b$ is $= p$ by Par. 21). so $20 (a \phi + b)^3 = 20 p^3$, and is the sum written in the Rank of the Cube.

ι'. By the transference of 243,340, its units are put under the 4th place of the third period, and hence $20 p^3$, thus transferred, is the upper number in the Rank of the Cube.

κ'. Then by Art. θ'.) Since $132 = 6 a \phi + 4 b$ so $3 + 132 = 135 = b + (6 a \phi + 4 b) = 6 a \phi + 5 b$, and is the upper number in the Rank of the Latus.

λ'. Then $135 \times 3 = 405 = (6a\phi + 5b) \times b = 6a\phi b + 5b^2$, and is the product written in the Rank of the Square.

μ'. Then by Art. ζ'.) Since $7,530 = 15a^2\phi^2 + 24a\phi b + 10b^2$ so $405 + 7,530 = 7,935 = (6a\phi b + 5b^2) + (15a^2\phi^2 + 24a\phi b + 10b^2) = 15a^2\phi^2 + 30a\phi b + 15b^2 = 15(a^2\phi^2 + 2a\phi b + b^2) = 15(a\phi + b)^2$, and since $a\phi + b = p$ by Par. 21) so $15(a\phi + b)^2 = 15p^2$, and is the sum written in the Rank of the Square.

ν'. By the transference of 7,935, its units are put under the 3d place of the third period, and hence $15p^2$, thus transferred, is the upper number in the Rank of the Square.

ξ'. Then by Art. π'.) Since $135 = 6a\phi + 5b$ so $3 + 135 = 138 = b + (6a\phi + 5b) = 6a\phi + 6b = 6(a\phi + b)$, and since $a\phi + b = p$ by Par. 21) so $6(a\phi + b) = 6p$, and is the sum written in the Rank of the Latus.

π'. By the transference of 138, its units are under the 2d place of the third period, and hence $6p$, thus transferred, is the upper number in the Rank of the Latus.

1'. Then if there be a Digit annexed to the right hand of the upper number in the Rank of the Latus, since by Art. π') this upper number $= 6p$ so with the annexed Digit, the whole figures will, by Lem. 6) become $= 6p\phi + \text{that Digit}$.

2'. Then if that Digit be multiplied into these figures, the product will become $6p\phi \times \text{that Digit} + \overline{\text{that Digit}}^2$. Then if this product be writ-

ten in the Rank of the Square opposite to the third period, then since by the transference of Art. 7, the units of the upper number in the Rank of the Square are put under the 3d place of the third period, so they are also put under the 3d place of this product.

3'. Then if this product, and that upper number be in the situation added together, since by Art. 7) that upper number $= 15 p^2$ so by Lem 7). the sum $= 5 p \phi \times \text{that Digit} + \overline{\text{that Digit}}^2 + 15 p^2 \times \phi^2 = 15 p^2 \phi^2 + 6 p \phi \times \text{that Digit} + \overline{\text{that Digit}}^2$

4'. Then if that Digit be multiplied into this sum, the product will become $15 p^2 \phi^2 \times \text{that Digit} + 6 p \phi \times \overline{\text{that Digit}}^2 + \overline{\text{that Digit}}^3$. Then if this product be written in the Rank of the Cube, opposite to the third period, since by the transference of Art. 7, the units of the upper number in the Rank of the Cube are put under the 4th place of the third period, so they are also put under the 4th place of this product.

5'. Then if this product and that upper number be in this situation added together, since by Art. 7) that upper number $= 20 a^3$ so by Lem. 7). the sum =

$$15 p^2 \phi^2 \times \text{that Digit} + 6 p \phi \times \overline{\text{that Digit}}^2 + \overline{\text{that Digit}}^3 + 20 p^3 \times \phi^3 = 20 p^3 \phi^3 + 15 p^2 \phi^2 \times \text{that Digit} + 6 p \phi \times \overline{\text{that Digit}}^2 + \overline{\text{that Digit}}^3$$

6'. Then if that Digit be multiplied into this sum the product will become $20 p^3 \phi^3 \times \text{that Digit} + 15 p^2 \phi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 6 p \phi \times \overline{\text{that Digit}}^3 + \overline{\text{that Digit}}^4$. Then if this product be written in the Rank of the Biquadrate opposite the third period, since by the transference of Art. 7) the units of the upper number in the Rank of the Biquadrate are put under the 5th place of the third period, so they are also put under the 5th place of this product.

7'. Then if this product and that upper number be in this situation added together, since by Art. γ') that upper number $= 15 p^4$ so by Lem. 7) the sum =

$$20 p^3 \phi^3 \times \text{that Digit} + 15 p^2 \phi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 6 p \phi \times \overline{\text{that Digit}}^3 + \overline{\text{that Digit}}^4 + 15 p^4 \times \phi^4 = 15 p^4 \phi^4 + 20 p^3 \phi^3 \times \text{that Digit} + 15 p^2 \phi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 6 p \phi \times \overline{\text{that Digit}}^3 + \overline{\text{that Digit}}^4.$$

8'. Then if that Digit be multiplied into this sum, the product will become $15 p^4 \phi^4 \times \text{that Digit} + 20 p^3 \phi^3 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 15 p^2 \phi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^3 + 6 p \phi \times \overline{\text{that Digit}}^4 + \overline{\text{that Digit}}^5$. Then if this product be written in the Rank of the Quadratus Cubi, opposite the third period, since by the transference of Art. w' , the units of the upper number in the Rank of the Quadratus Cubi are put under the 6th place of the third period, so they are also put under the 6th place of this product.

9'. Then if this product and that upper number be in this situation added together, since by Art. w' , that upper number $= 6 p^5$ so by Lem. 7) the sum $= 15 p^4 \phi^4 \times \text{that Digit} + 20 p^3 \phi^3 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 15 p^2 \phi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^3 + 6 p \phi \times \overline{\text{that Digit}}^4 + \overline{\text{that Digit}}^5 + 6 p^5 \times \phi^5 = 6 p^5 \phi^5 + 15 p^4 \phi^4 \times \text{that Digit} + 20 p^3 \phi^3 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 15 p^2 \phi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^3 + 6 p \phi \times \overline{\text{that Digit}}^4 + \overline{\text{that Digit}}^5$.

10'. Then if that Digit be multiplied into this sum, the product will become $6 p^5 \phi^5 \times \text{that Digit} + 15 p^4 \phi^4 \times \overline{\text{that Digit}}^2 + 20 p^3 \phi^3 \times \overline{\text{that Digit}}^3 + 15 p^2 \phi^2 \times \overline{\text{that Digit}}^4 + 6 p \phi \times \overline{\text{that Digit}}^5 + \overline{\text{that Digit}}^6$, which is required to be not greater than $R' \phi^6 + C$ by Art. j' .) Now this is evidently the same as the expression of Par. 23.) $6 p^5 \phi^5 c + 15 p^4 \phi^4 c^2 + 20 p^3 \phi^3 c^3 + 15 p^2 \phi^2 c^4 + 6 p \phi c^5 + c^6$, having that Digit substituted for c . And since $6 p^5 \phi^5 c + 15 p^4 \phi^4 c^2 + 20 p^3 \phi^3 c^3 + 15 p^2 \phi^2 c^4 + 6 p \phi c^5 + c^6$, must also be not greater than $R' \phi^6 + C$, and since this c must be a Digit, so it is

evident that the present operation from Art. 1' to 10'.) is equivalent to seeking the c of Par. 23) and since 4 by Art. ξ' . et seq. is the found Digit, so 4 also expounds the c of Par. 23) and then—

ξ' . Since by Art. ξ') $138 = 6 p$, and since 4 contains one figure, so $1384 = 6 p \phi + c$ by Lem. 6) and is the upper number in the Rank of the Latus.

σ' . Then $1,384 \times 4 = 5,536 = (6 p \phi + c) \times c = 6 p \phi c \times c^2$, and is the product written in the Rank of the Square.

ρ' . Then since by Art. μ'). $7,935 = 15 p^2$, with its units put under the 3d place of 5,536 so by Lem. 7) their sum in this situation $= 5,536 + 7,935 \times 10^2 = 5,536 + 793,500 = 799,036 = (6 p \phi c + c^2) + 15 p^2 \times \phi^2 = 15 p^2 \phi^2 \times 6 p \phi c + c^2$, and is the upper number in the Rank of the Square.

ν' . Then $799,036 \times 4 = 3,196,144 = (15 p^2 \phi^2 \times 6 p \phi c \times c^2) \times c = 15 p^2 \phi^2 c + 6 p \phi c^2 + c^3$, and is the product written in the Rank of the Cube.

ϕ' . Then since by Art. θ'), $243,340 = 20 p^3$, with its units put under the 4th place of 3,196,144 so by Lem. 7) their sum in this situation $= 3,196,144 + 243,340 \times 10^3 = 3,196,144 + 243,340,000 = 246,536,144 = (15 p^2 \phi^2 c + 6 p \phi c^2 + c^3) + 20 p^3 \times \phi^3 = 20 p^3 \phi^3 + 15 p^2 \phi^2 c + 6 p \phi c^2 + c^3$, and is the upper number in the Rank of the Cube.

χ' . Then $246,536,144 \times 4 = 986,144,576 = (20 p^3 \phi^3 + 15 p^2 \phi^2 c + 6 p \phi c^2 + c^3) \times c = 20 p^3 \phi^3 c + 15 p^2 \phi^2 c^2 + 6 p \phi c^3 + c^4$, and is the product written in the Rank of the Biquadrate.

ψ. Then since by Art. γ) $4,197,615 = 15 p^4$, with its units put under the 5th place of 986,144,576 so by Lem. 7) their sum in this situation $= 986,144,576 + 4,197,615 \times 10^4 = 986,144,576 + 41,976,150,000 = 42,962,294,576 = (20 p^3 \phi^3 c + 15 p^2 \phi^3 c^2 + 6 p \phi c^3 + c^4) + 15 p^4 \times \phi^4 = 15 p^4 \phi^4 + 20 p^3 \phi^3 c + 15 p^2 \phi^3 c^2 + 6 p \phi c^3 + c^4$, and is the upper number in the Rank of the Biquadrate.

ω. Then $42,962,294,576 \times 4 = 171,849,178,304 = (15 p^4 \phi^4 + 20 p^3 \phi^3 c + 15 p^2 \phi^3 c^2 + 6 p \phi c^3 + c^4) \times c = 15 p^4 \phi^4 c + 20 p^3 \phi^3 c^2 + 15 p^2 \phi^3 c^3 + 6 p \phi c^4 + c^5$, and is the product written in the Rank of the Quadratus Cubi.

ν. Then since by Art. ι') $38,618,058 = 6 p^5$, with its units put under the 6th place of 171,849,178,304 so by Lem. 7) their sum in this situation $= 171,849,178,304 + 38,618,058 \times 10^5 = 171,849,178,304 + 3,861,805,800,000 = 4,033,654,978,304 = (15 p^4 \phi^4 c + 20 p^3 \phi^3 c^2 + 15 p^2 \phi^3 c^3 + 6 p \phi c^4 + c^5) + 6 p^5 \times \phi^5 = 6 p^5 \phi^5 + 15 p^4 \phi^4 c + 20 p^3 \phi^3 c^2 + 15 p^2 \phi^3 c^3 + 6 p \phi c^4 + c^5$, and is the upper number in the Rank of the Quadratus Cubi.

ξ. Then $4,033,654,978,304 \times 4 = 16,134,619,913,216 = (6 p^5 \phi^5 + 15 p^4 \phi^4 c + 20 p^3 \phi^3 c^2 + 15 p^2 \phi^3 c^3 + 6 p \phi c^4 + c^5) \times c = 6 p^5 \phi^5 c + 15 p^4 \phi^4 c^2 + 20 p^3 \phi^3 c^3 + 15 p^2 \phi^3 c^4 + 6 p \phi c^5 + c^6$ and is less than 18,535,911,758,593, or $R' \phi^6 + C$ by Art. j'.

ζ. Then since 4 is the greatest number which answers this condition, so 4 is the third figure of the Root, and agrees with the third figure of the Root found by the European method in Par. 34, Art. b'').

ς. And 16,134,619,913,216 expounds the third Subtrahend, which agrees with the third Subtrahend found by the European method in Par. 34, Art. c'').

ث. And since by Art. j') $18,535,911,758,593 = R' \phi^6 + C$, so
 $18,535,911,758,593 - 16,134,619,913,216 = 2,401,291,845,377 = R' \phi^6 +$
 $C - (6 p^5 \phi^3 c + 15 p^4 \phi^4 c^2 + 20 p^3 \phi^5 c^3 + 15 p^2 \phi^6 c^4 + 6 p \phi^7 c^5)$, and is
the third Remainder, which therefore agrees with the third Remainder
found by the European method in Par. 34, Art. d'' , and is therefore $= R''$
Par. 24.

And by the circle of exposition there will successively be found—

For the 4th Period—

u'' . 4,209,500,228,544, the upper number transferred in the Rank of
the Quadratus Cubi $= 6 p'^5$.

γ'' . 44,973,293,040, the upper number transferred in the Rank of the
Biquadrate $= 15 p'^4$.

ρ' . 256,258,080, the upper number transferred in the Rank of the
Cube $= 20 p'^3$.

ν'' . 821,340, the upper number transferred in the Rank of the Square
 $= 15 p'^2$.

π'' . 1,404, the upper number transferred in the Rank of the Latus
 $= 6 p'$.

ب. 5, the sought number, or fourth figure of the Root $= d$.

ت. 2,116,025,521,169,640,625, the fourth Subtrahend $= 6 p'^5 \phi^3 d +$
 $15 p'^4 \phi^4 d^2 + 20 p'^3 \phi^5 d^3 + 15 p'^2 \phi^6 d^4 + 6 p' \phi^7 d^5 + d^6$.

ج. 285,266,324,208,246,683, the fourth Remainder = R'' .

For the 5th Period

w'' . 425,466,612,625,293,750, the upper number transferred in the Rank of the Quadratus Cubi = $6 p'^5$.

γ'' . 453,589,139,259,375, the upper number transferred in the Rank of the Biquadrate = $15 p'^4$.

r'' . 257,904,272,500, the upper number transferred in the Rank of the Cube = $20 p'^3$.

v'' . 82,485,375, the upper number transferred in the Rank of the Square = $15 p'^2$.

π'' . 14,070, the upper number transferred in the Rank of the Latus = $6 p'^1$.

ب''. 6, the sought number, or fifth figure of the Root = e .

ج''. 255,443,315,383,323,683,729,856, the fifth Subtrahend = $6 p'^5 \phi^5 e$
 $+ 15 p'^4 \phi^4 e^2 + 20 p'^3 \phi^3 e^3 + 15 p'^2 \phi^2 e^4 + 6 p' \phi e^5 + e^6$.

د''. 29,823,008,824,922,999,566,169, the fifth Remainder = R'' .

For the 6th Period

w'' . 42,601,119,820,029,578,182,656, the upper number transferred in the Rank of the Quadratus Cubi = $6 p''^5$.

٧^{١٧}. 4,540,535,451,486,781,440, the upper number transferred in the Rank of the Biquadrate = $15 p'^{14}$.

١^{١٧}. 258,102,288,056,320, the upper number transferred in the Rank of the Cube = $20 p'^{12}$.

١^{١٧}. 8,252,759,040, the upper number transferred in the Rank of the Square = $15 p'^{10}$.

٨^{١٧}. 140,736, the upper number transferred in the Rank of the Latus = $6 p'^{11}$.

٧^{١٧}. 7, the sought number, or sixth figure of the Root = f .

٢٨^{١٧}. 29,823,008,824,022,099,565,181,681,169, the sixth Subtrahend, = $6 p'^{12} \phi^5 f + 15 p'^{11} \phi^4 f^2 + 20 p'^{10} \phi^3 f^3 + 15 p'^{9} \phi^2 f^4 + 6 p'^{8} \phi f^5 + f^6$.

٢٨^{١٧}. 987,654,321, the sixth and last Remainder = R^v that is = r of Par. 28) as in the European method Par. 34).

Then by the Analogous operations of Articles ٢٤ to ٢٦, to find the Denominator of the Fractional Part of the Root, there will be as follows:

٤٨^{١٧}. 4,260,747,694,908,334,607,381,985,642, the upper number transferred in the Rank of the Quadratus Cubi = $6 p'^{15}$, and since by Par. 25) $p'^v = m$ so this is also = $6 m^5$.

٤٨^{١٧}. 45,410,774,905,552,940,176,815, the upper number transferred in the Rank of the Biquadrate = $15 p'^{14} = 15 m^4$ by Par. 25).

ج. 258,125,396,471,245,260, the upper number transferred in the Rank of the Cube = $20 p^{iv} = 20 m^3$ by Par. 25).

د. 825,325,162,335, the upper number transferred in the Rank of the Square = $15 p^{iv} = 15 m^2$ by Par. 25).

ه. 1,407,402, the upper number transferred in the Rank of the Latus = $6 p^{iv} = 6 m$ by Par. 25).

ي. Hence then the sum with the additional Unit = 4,260,793,105, 941,366,382,119,977,455 = $6 m^3 + 15 m^4 + 20 m^3 + 15 m^2 + 6 m + 1 = (m + 1)^6 - m^6$, and since by Art. ٩٨٧, 654, 321 = r of Par. 28) and

by Par. 34). $234,567 = m$ so $m + \frac{r}{(m + 1)^6 - m^6} =$ the mixed number

$234,567 \frac{987,654,321}{4,260,793,105,941,366,382,119,977,455}$ and is by Par. 28). the approximate 6th Root of the given number M, or 166,571,800,758,593,887,308,296,025, 335,490.

(44.) To prove by tentation that this is the Case, would require the actual involution of the above mixed number, which is the approximate Root, to the sixth Power, a task of vast labour, which, after so much calculation, I willingly decline, as it could serve little purpose except the mere gratification of curiosity, and therefore to illustrate this part of the subject, I shall chuse the following examples in simpler numbers, but which, in all probability, will be thought sufficiently complicated. Besides their present use, they will afterwards be satisfactory for reference in a future part of this paper.

Then by the method of Par. 28.

—First. Let there be sought the approximate 6th Root of 65.—

Here, since $2^6 = 64$, and which is $<$ and $3^6 = 729$, which is > 65 , so $M = 65$, $m = 2$, and $(m + 1)^6 - m^6 = 729 - 64 = 665$, and $r = M - m^6 = 65 - 64 = 1$. And hence the approximate Root, or $m + \frac{r}{(m + 1)^6 - m^6}$
 $= 2 \frac{1}{665}$. Then $2 \frac{1}{665} |^6 =$

$$2^6 + 6 \cdot 2^5 \cdot \frac{1}{665} + 15 \cdot 2^4 \cdot \frac{1}{665^2} + 20 \cdot 2^3 \cdot \frac{1}{665^3} + 15 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{665^4} + 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{665^5} + \frac{1}{665^6} \text{ or}$$

$$64 + \frac{6 \cdot 2^5 \cdot 665^5 + 15 \cdot 2^4 \cdot 665^4 + 20 \cdot 2^3 \cdot 665^3 + 15 \cdot 2^2 \cdot 665^2 + 6 \cdot 2 \cdot 665 + 1}{665^6}$$

equal to

$$24,969,477,535,800,000 = 6 \cdot 2^5 \cdot 665^5$$

$$46,935,108,150,000 = 15 \cdot 2^4 \cdot 665^4$$

$$47,052,740,000 = 20 \cdot 2^3 \cdot 665^3$$

$$26,533,500 = 15 \cdot 2^2 \cdot 665^2$$

$$7,980 = 6 \cdot 2 \cdot 665$$

$$1$$

$$665^6 = 86,482,825,840,140,625 \quad \underline{\underline{25,016,459,723,231,481}} \quad (0 + 64 = 64)$$

$$\text{Hence the deficiency in this case is } 65 - 64 \frac{25,016,459,723,231,481}{86,482,825,840,140,625} =$$

$$61,466,366,116,909,144$$

$$\underline{\underline{86,482,825,840,140,625}}$$

—Second. Let there be sought the approximate 6th Root of 396—

Here $M = 396$, m is the same as before, and $r = 396 - 64 = 332$. And hence the approximate Root is $2 \frac{332}{665}$. Then $2 \frac{332}{665} |^6 =$

$$\begin{aligned}
 & 2^6 + 6 \cdot 2^5 \cdot \frac{332}{665} + 15 \cdot 2^4 \cdot \frac{332^2}{665^2} + 20 \cdot 2^3 \cdot \frac{332^3}{665^3} + 15 \cdot 2^2 \cdot \frac{332^4}{665^4} + 6 \cdot 2 \cdot \frac{332^5}{665^5} + \frac{332^6}{665^6} \text{ or} \\
 & 6 \cdot 2^5 \cdot 665^5 \cdot 332 + 15 \cdot 2^4 \cdot 665^4 \cdot 332^2 + 20 \cdot 2^3 \cdot 665^3 \cdot 332^3 + 15 \cdot 2^2 \cdot 665^2 \cdot 332^4 + 6 \cdot 2 \cdot 665 \cdot 332^5 + 332^6 \\
 & 6 \frac{1}{2} + \frac{\quad}{665^6} \text{ or} \\
 & \quad \quad \quad 8,289,866,541,885,600,000 = 6 \cdot 2^5 \cdot 665^5 \cdot 332 \\
 & \quad \quad \quad 5,173,375,360,725,600,000 = 15 \cdot 2^4 \cdot 665^4 \cdot 332^2 \\
 & \quad \quad \quad 1,721,865,282,968,320,000 = 20 \cdot 2^3 \cdot 665^3 \cdot 332^3 \\
 & \quad \quad \quad 322,364,252,224,896,000 = 15 \cdot 2^2 \cdot 665^2 \cdot 332^4 \\
 & \quad \quad \quad 32,187,949,395,087,360 = 6 \cdot 2 \cdot 665 \cdot 332^5 \\
 & \quad \quad \quad 1,339,147,769,319,424 = 332^6 \\
 & 6 \frac{65}{66} = 86,482,825,840,140,625) 15,540,998,534,968,822,784 \quad (179 + 64 = 243 \\
 & \quad \quad \quad 15,480,425,825,385,171,875 \\
 & \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad 60,572,709,583,650,909}
 \end{aligned}$$

Hence the deficiency in this case is $396 - 243 = \frac{60,572,709,583,650,909}{86,482,825,840,140,625}$

a quantity no less than $152 \frac{25,910,116,256,489,716}{86,482,825,840,140,625}$

—— Third. Let there be sought the approximate 6th Root of 397 ——

Here $M = 397$, m is the same as before, and $r = 397 - 64 = 333$. And hence the approximate Root is $2 \frac{333}{665}$. Then $2 \frac{333}{665} |^6 =$

$$\begin{aligned}
 & 2^6 + 6 \cdot 2^5 \cdot \frac{333}{665} + 15 \cdot 2^4 \cdot \frac{333^2}{665^2} + 20 \cdot 2^3 \cdot \frac{333^3}{665^3} + 15 \cdot 2^2 \cdot \frac{333^4}{665^4} + 6 \cdot 2 \cdot \frac{333^5}{665^5} + \frac{333^6}{665^6} \text{ or} \\
 & 6 \cdot 2^5 \cdot 665^5 \cdot 333 + 15 \cdot 2^4 \cdot 665^4 \cdot 333^2 + 20 \cdot 2^3 \cdot 665^3 \cdot 333^3 + 15 \cdot 2^2 \cdot 665^2 \cdot 333^4 + 6 \cdot 2 \cdot 665 \cdot 333^5 + 333^6 \\
 & 6 \frac{1}{2} + \frac{\quad}{665^6} \text{ or}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8,314,836,019,421,400,000 &= 6 \cdot 2^5 \cdot 665^4 \cdot 333 \\
5,204,587,207,645,350,000 &= 15 \cdot 2^4 \cdot 665^3 \cdot 333^2 \\
1,737,471,218,191,380,000 &= 20 \cdot 2^3 \cdot 665^2 \cdot 333^3 \\
326,265,741,912,253,500 &= 15 \cdot 2^2 \cdot 665^5 \cdot 333^4 \\
32,675,636,708,806,140 &= 6 \cdot 2 \cdot 665 \cdot 333^5 \\
1,363,532,208,525,360 &= 333^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
665^6 &= 86,482,825,840,140,625 \quad 15,617,199,356,087,715,009 \quad (180 + 64 = 244 \\
&\quad 15,566,908,651,225,312,500 \\
&\quad \underline{50,290,704,862,402,509}
\end{aligned}$$

Hence the deficiency in this case is $397 - 244 \frac{50,290,704,862,402,509}{86,482,825,840,140,625}$ a quantity yet greater than before, being no less than $152 \frac{36,192,120,977,738,116}{86,482,825,840,140,625}$

— Fourth. Let there be sought the approximate 6th Root of 728 —

Here $M = 728$, m is the same as before $r = 728 - 64 = 664$. And hence the the approximate Root is $2 \frac{664}{665}$. Then $2 \frac{664}{665} |^6$ is

$$\begin{aligned}
2^6 + 6 \cdot 2^5 \cdot \frac{664}{665} + 15 \cdot 2^4 \cdot \frac{664^2}{665^2} + 20 \cdot 2^3 \cdot \frac{664^3}{665^3} + 15 \cdot 2^2 \cdot \frac{664^4}{665^4} + 6 \cdot 2 \cdot \frac{664^5}{665^5} + \frac{664^6}{665^6} \text{ or} \\
64 + \frac{6 \cdot 2^5 \cdot 665^5 \cdot 664 + 15 \cdot 2^4 \cdot 665^4 \cdot 664^2 + 20 \cdot 2^3 \cdot 665^3 \cdot 664^3 + 15 \cdot 2^2 \cdot 665^2 \cdot 664^4 + 15 \cdot 2 \cdot 665 \cdot 664^5 + 664^6}{665^6} \text{ or}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16,579,733,083,771,200,000 &= 6 \cdot 2^5 \cdot 665^5 \cdot 664 \\
20,693,501,442,902,400,000 &= 15 \cdot 2^4 \cdot 665^4 \cdot 664^2 \\
13,774,922,263,746,560,000 &= 20 \cdot 2^3 \cdot 665^3 \cdot 664^3 \\
5,157,828,035,598,336,000 &= 15 \cdot 2^2 \cdot 665^2 \cdot 664^4 \\
1,030,014,380,642,795,520 &= 6 \cdot 2 \cdot 665 \cdot 664^5 \\
85,705,457,236,443,136 &= 665^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
665^6 &= 86,482,825,840,140,625 \quad 57,321,704,663,897,734,656 \quad (662 + 64 = 726 \\
&\quad 57,251,630,706,173,093,750 \\
&\quad \underline{70,073,957,724,640,906}
\end{aligned}$$

N 1

301

Hence the deficiency in this case is $728 - 726 \frac{70,073,957,724,640,906}{86,482,825,840,140,625}$ and is
 again diminished to $1 \frac{16,408,868,115,499,719}{86,482,825,840,140,625}$

45.) It is obvious that the operation and exposition may easily be extended to any other power, by the method of Par. 30), and by having as many Ranks as there are units in the index of the power and analogically adapting the circle of operations to these Ranks. It would be both curious and entertaining to investigate those properties of figurate numbers by which the upper transferred number in each Rank becomes the found figures of the Root involved to the index of that Rank and multiplied by the proper co-efficient of the Binomial Theorem, and the succeeding operations finally produce for each period, the last found figures of the Root multiplied by ten, and having then added the next figure of the Root, and the sum being involved to the index of the given power, and then having subtracted the last found figures of the Root multiplied by ten, and involved to the index of the given power. But such an inquiry would swell the present paper beyond all bounds of moderation, and must therefore be omitted.

46.) From all this ample detail, it appears that the advantages proposed by the Arabian Arithmeticians in the complicated apparatus of calculation required for the Pulpit Diagram, is first, that the Root may be extracted, as it were mechanically, without previous knowledge of the co-efficients of the Binomial Theorem, which are here produced by the mere arrangement of the Ranks; and next, that throughout all the intricacies of this operation it should never be necessary to multiply by a number higher than a Digit. I shall not undertake to decide, whether these objects were sufficiently important to justify the employment of means so

laborious, but shall only observe with respect to the last of them, that we may hence form some judgment how much the old Arithmeticians must have been perplexed and retarded by the labour of long multiplication. We, who enjoy the benefits of the great discovery of Logarithms, can now scarcely form an estimate of the difficulties with which they had to contend from this want, and the facilities which we enjoy from their use. While, therefore, the Arabian method of extraction may inspire us with more gratitude to Lord NAPIER, we must not too hastily condemn it as uselessly laborious, till we can show that, without a knowledge of his discovery we could have more happily succeeded in the facilitating and abbreviation of calculation. Should, after all these considerations, the intention of the Arabian operation be thought of little value, and the labour employed to accomplish it misused, yet the artful contrivances by which it is attained, and the skilful adaptation for this purpose of the simple principle of the variation of the signification of symbols from the variation of their situation, must, I think, in justice, always cause the Pulpit Diagram to be considered a deserving monument of Arabic ingenuity.

47.) It now remains, according to the originally proposed arrangement—

IV. That I should give the extract from the original Ayoun-ul-Hisab, containing the above Rule, accompanied by a translation, and then offer some explanatory Remarks.

48.) And the extract is as follows :

مطلب عاشر از كتاب عيون الحساب

في استخراج المضلع للمضلعات على الوجه العام نرسم شكلا منبريا متصاعدا الدرجات
تساوي عدة الدرجات اذ وار المضلع المفروض و تقسم عرض كل درجة بعدة عدد
منزلة ذلك المضلع الا العليا فانها تقسم بعدة المراتب الموجودة من آخر الادوار

ثم نخرج من مواضع القسمة خطوطا طولية من سموك الدرجات الى حد يقتضيه العمل ونخرج عروض الدرج الى يرا الخطوط الطولية ونقسم ايمن الطويات بعدة منزلة ذلك المصلح و يكفي ان يكون طول على الاقسام قدر ما يسع رقمين كسموك سائر الدرج و طول اسفلها بقدر ما يسع دورا من المصلح طولاً و يسمى اسفل الاقسام صف المصلح ونوقه صف المال ونوقه صف الكعب وهكذا الى ان ينتهي الى صف العدد و يسمى خارج الجدول سطر الخارج وقد يطلق على القسم الذي تحت صف العدد ثاني العدد وعلى ما تحته ثالث العدد وهكذا الى ان ينتهي الى صف المصلح ثم نبتدئ باليمين فنرسم الدور الاول من العدد في مربعات الدرجة الاولى و الدور الثاني في مربعات الدرجة الثانية وهكذا الى ان نرسم المراتب في المربعات الصغار كل مرتبة في مربع ثم نطلب اكثر عدد من الاحاد يمكن نقصان مضلعه الذي في منزلة المصلح المفروض من المرتبة المنطقه الاخيرة و ما في يارها و نحن وضعنا مضلعات الاثنين الى التسعة الى مال مال كعب الكعب الذي في المنزلة العاشرة في جدول ليسجل وجدان ذلك و هو هذا فاذا وجدناه نضعه في سطر الخارج و اسفل صف المصلح محاذيا لآخرى المراتب المنطقه و نرسم ماله و هو حاصل ضرب الفوقي في التحتاني في اسفل صف المال و مضروب الفوقي في المال و هو كعبه في اسفل صف الكعب و هكذا الى ان تضرب الفوقي فيما هو في صف ثاني العدد فنرسم الحاصل في صف العدد تحت ما رسم هناك و يجب ان نرسم تلك الحواصل في الصفوف بحيث يحاذي احادها جميعا للمفرد الفوقي فينقص الحاصل الاخير مما يحاذيه من سطر العدد و نرسم الباقي تحت الخط العرضي المرسوم فوق الدور السابق ليصير مع ذلك الدور سطر واحد ثم نزيد الفوقي على ما في صف المصلح مرة لصف ثاني العدد و تضربه في المجتمع و نزيد الحاصل على ما في صف المال و تضربه في المجتمع هناك و نزيد الحاصل على ما في صف الكعب و تضربه في المجتمع في صف ثالث العدد و ينقل المجتمع الى اليمين في هذا الصف بمرتبة ثم نزيد الفوقي مرة ثانية على ما في صف المصلح لصف ثالث العدد و تضربه في المجتمع و نزيد الحاصل على ما في صف المال و تضربه في المجتمع و نزيد الحاصل على ما في صف الكعب و هكذا الى ان يزداد مضروبه في المجتمع في صف رابع العدد على ما في صف ثالثه و نقل المجتمع الى اليمين بمرتبتين ثم نزيد الفوقي على ما في صف المصلح مرة ثالثة لصف رابع العدد و نعمل به ما عرفت و هكذا الى ان ينتهي الى زيادة الفوقي على ما في صف المصلح لذلك الصف و ينقله الى اليمين فيحاذي احاده المرتبة الثانية من الدور المقدم ولنعلم

ان نرسم تلك الحواصل في الصفوف بحيث يحاذي احادها المفرد القوتاني و نرسم حاصل الجمع فوق المجموعين بعد محوهما بخط عرضي فيكون ما فوق الخطوط في غير صف العدد ثابتا لكون وجه العمل في غير ذلك الصف الى الفوق فان حاصل ضرب القوتاني فيما رسم في كل صف يزداد على ما في صف يكون فوقه ثم نطلب اكثر احاد اذا رسمناه في الطر الخارج محاذيا لاولى مراتب الدور المتقدم وتحت في اسفل صف الصلح يمين المرسوم هناك وضربناه فيما هو في صف الصلح وزدنا الحاصل على ما في صف المال ثم ضربناه فيما هو في صف المال وزدنا الحاصل على ما في صف الكعب وهكذا الى ان ضربناه في المجموع في صف ثاني العدد ورسم الحاصل في صف العدد ان امكن نقصانه مما يحاذيه فاذا وجدناه وعملنا به ما عرفت رسمنا الباقي تحت الخط العرضي المرسوم فوق الدور السابق يصير مع مراتب الدور السابق عليه سطرا واحدا ثم نزيد القوتاني على ما في صف الصلح مرة بعد اخرى لاجل صف صف ونعمل به ما مر فان لم يوجد عدد بهذه الصفة نضع مكانه صفرا وننقل ما في الصفوف التي تحت صف العدد مرة اخرى الى اليمين كما مر ما في ثاني العدد بمرتبة وما في ثالثه بمرتبتين وهكذا ثم نطلب اكثر احاد لنعمل به ما ذكرناه وهكذا الى ان ينقص حاصل ضرب القوتاني الموضوع بازاء احاد العدد في المجموع في صف ثالث العدد من المرسوم في صف العدد فان لم يبق شيء فالعدد منقطع والمرسوم في الطر الخارج نلعه الاول وان بقي شيء فهو اسم ونلعه الاول بالتقريب الاصطلاحي ما في الطر الخارج مع كسر صورته الباقية ومخرجه ما بين هذا المصطلح المرسوم المذكور ولما نزيد عليه بواحد فنعامل المفرد الموضوع بازاء احاد العدد معاملة لنا بغيره سوى النقل فتجمع ما في الصفوف التي تحت صف العدد باجمعها ونزيد عليه واحدا فهو المخرج المذكور والمصطلح الحاصل من الصلح الماخوذ على هذا ينقص عن العدد ابدا ويتناحش التفاوت في المضاعفات غير المال ولتحصيل مخرج الكسر في عمل الكعب يمكن ان تضرب الطر الخارج فيما نزيد عليه بواحد والحاصل في الثلاثة ونزيد عليه واحدا

49). Previously to giving the translation, I must remind the reader, that the Arabs, writing from right to left, call the most right-hand Period of the given number—the first, and the most left-hand, or highest in the Pulpit Diagram—the last, contrary to the directions of Par. 32): Consequently, what by the Author of the Ayoun-ul-Hisab is called the last

period, is, in my demonstration, called the first; and what he calls the former or preceding period, is, in my demonstration, called the next, or following period, and so on. It must also be noticed, that throughout this Extract, the word breadth means across the page from right to left, and length means down the page from top to bottom.

50). Translation.

" Chapter Tenth. From the Book *called* the Ayoun-ul-Hisab, or Sources of Arithmetic. Of the extraction of the Latus of Powers generally.

Let us draw a Pulpit Diagram of ascending steps, the number of which *steps* is equal to the number of periods of the given Power. Then let us divide the breadth of each step *into places*, the number *of which* are according to the number of the Index, except the highest step, and we are to divide that according to the number of the places of figures which are found in the last of the periods. Then let us draw from the points of division longitudinal lines, *which*, with *the lines which form* the height of the step, *are to be drawn* to such a distance as the operation may require. Then let us produce the breadth of the step to the most left hand of the longitudinal lines, and let us divide the most right hand of the longitudinal lines *into divisions, or ranks*, according to the number of the Index of the Power, and it is sufficient that the length of the divisions be great enough to contain *the same number* of figures as the height of all the steps, and the length of the lowest of them *be great enough* to contain, in length, one period of the given Power. And let the lowest of the divisions be called the Rank of the Latus, and *the division* above it the Rank of the Square, and *the division* above it the Rank of the Cube, and so on till we reach the Rank of the number; and *the figures* exterior to the Diagram are called the external Row, and then to the division which is

below the Rank of the number there is applied *the name of second Rank* of the number, and to *that Rank* which is below it there is applied the name of third *Rank* of the number, and so on till we reach to the Rank of the Latus. Then let us begin from the right hand, and let us write the first period of the number in the Squares of the first step, and the second period in the Squares of the second step, and so on till we have written *all the places of figures* in the small Squares, each place in a Square. Then let us seek the greatest number of the Digits, which being involved to the Index of the given number, can be subtracted from, *i. e. is less than* the last dotted place, and *the figures* to its left hand. Now, if we were to arrange in a Table the Powers of the numbers from 2 to 9 to the Quadratus quadrati cubi cubi which is to the Index 10, that would facilitate the finding of this *sought number*. And when we have found it, let us place it in the external Row, and *call that the top number which hence is the first found figure of the Root*, and let us also put it in the lowest part of the Rank of the Latus, opposite to the last dotted place, and *call that the bottom number*, and let us write its Square (and that is the product of the top number into the bottom) in the lowest *part* of the Rank of the Square, and let us write the product of the *top number* into the Square, and that is its Cube in the lowest part of the Rank of the Cube, and thus, until we multiply the top number into that which is in the second Rank of the number. Then let us write this product in the Rank of the number below what was written there and below that, there is written the products in the Ranks, so that their units should all be opposite the single top *figure*. And let us subtract the last product from that which is opposite it in the Rank of the number, and let us write the Remainder below the latitudinal line drawn above the former period, so that it may be one line with this period. Then let us add the top *number* to that which is in the Rank of the Latus, once, for the second Rank of the number, and let us multiply it, *the top number* into the sum, and let us add the product to that which is in the Rank of the Square, and let us multiply it into the sum there,

and let us add the product to that which is in the Rank of the Cube, and thus until we multiply it into the sum in the third Rank of the Number, and transfer the sum of *this product and the number in the second Rank of the number*, to the right hand in this Rank one place. Then let us add the top *number* the second time to that which is in the Rank of the Latus for the third Rank of the number, and let us multiply it into the sum, and let us add the product to that which is in the Rank of the Square, and let us multiply it into the sum, and let us add the product to that which is in the Rank of the Cube, and so on till we have added its product into the sum in the fourth Rank of the Number to that which is in the third Rank, and let us transfer the sum to the right hand two places, then let us add the top number to that which is in the Rank of the Latus a third time, for the fourth Rank of the Number, and let us operate with it as I have explained, and so on until we arrive at the addition of the top number to that which is in the Rank of the Latus for that same Rank, and its transference to the right hand, so that its units should be opposite the second place of the preceding period. And let it be known that we write the products in the Ranks, so that their units should be under the single top figure, and we write the result of the addition above the items after erasing them by a latitudinal line, and this will be *the Number* which is above the lines in *all the Ranks*, except the Rank of the Number, because the progress of the operation in *all*, except that Rank, is upwards. And that the product of the multiplication of the top *Number* into that which is written in each Rank is added to that which is in the Rank above it. Then let us seek the greatest of the units, which, if we write it in the external Row opposite to the first place of the preceding period, and below it in the lowest *part* of the Rank of the Latus to the right of the Number written there and multiply it into that which is in the Rank of the Latus; and add the product to that which is in the Rank of the Square, then multiply it into that which is in the Rank of the Square, and add the product to that

which is in the Rank of the Cube, and so on until it be multiplied into the sum in the second Rank of the number, and the product written in the Rank of the number this can be subtracted from, *i. e. is less than* that which is opposite to it, and when we have found it, *such a number*, let us operate with it as I have explained, and let us write the remainder below the latitudinal line drawn over the former period, so that it may be one line with the places of the former period *annexed* to it. Then let us add the *new found* top number to that which is in the Rank of the Latus one time after another, for the Rank one after another, and let us operate with it as was done before, and if we cannot find a number with this property, let us put cypher in its place, and transfer that which is in the Ranks, which are below the Rank of the number, once again to the right hand as was done before, that which is in the second *Rank* of the number one place, and that which is in the third, two places, and so on. Then let us seek the greatest of the units and operate with it as we have detailed *above*, and so on until the product of the top number placed opposite the units of the *original given* number into the sum in the second Rank of the number be subtracted from that which is written in the Rank of the number, and if nothing remains, that number is rational, and the number written in the external Row, *i. e. above the Pulpit Diagram*, are its Latus Primum, and if any thing remains then it is Surd, and its Latus Primum, technically *speaking*, by approximation, is that which is in the external Row, with a fraction of which the numerator is the remainder, and the denominator is that which is between, *i. e. is the difference between* the power of this said written number, and the power of (this number having unit added to it). Then let us employ the single *figure* placed opposite the units of the given number as we employed the other numbers, except the transference of them, and let that which is in *all* the Ranks below the Rank of the number be added together into one sum, and let us add to that unit, and that is the said denominator, and the power produced

from the Latus thus taken, is always less than the *given* number. And this difference is considerable in every power except the Square. And for finding the denominator of the fraction in the operation on the Cube, we may multiply the *figures of the external Row* into itself, increased by unit, and the product into three, and add to that unit."

After the prolix detail in the former part of this paper, it would be very useless to make many comments on the above extract, and I have only therefore to add a few cursory observations.

51). The directions given for erasing the added items, and merely writing their sum in the same place, will account for the Ranks being in the extract directed to be so much shorter than they appear in the full Diagram given by me.

52). The Rationale of the directions given for the treatment of cypher, when it occurs as one of the found figures of the Root, is so easily understood, that it would be needless to elucidate them by any explanation.

53). The last sentence respecting the denominator of the fraction in the Cube is also easily comprehended. The figures of the external Row are those of the approximate integral Root written above the Pulpit Diagram, and are consequently = m of Par. 28). 'Then the Rule of

the Text evidently is $\left[\left[m \times \left[m + 1 \right] \right] \times 3 \right] + 1 = 3m^2 + 3m + 1 = (m + 1)^3 - m^3$.

54). What I have here said of the increase of the error of deficiency corresponding to the increase of the index of the power, would, if true, be

very tedious to demonstrate, and excessively laborious to exemplify. I shall not therefore, by entering upon this task, render this very long paper yet unnecessarily longer, but as a proof of this assertion I refer to the great deficiency in the 2d and 3d example of Par. 44). This imperfection, the Arabians seem to have been fully sensible of, and anxious to remedy; and I shall conclude with an account of their attempts for this purpose in the extraction of the Square Root. Of these I have not been able to obtain the Arabic original, but their detail is as follows.

55). Let on the principles of Par. 28). A , be a surd to the 2d Power, of which a , is the approximate integral Square Root, so that $a^2 < A$ and $(a + 1)^2$ or $a^2 + 2a + 1$ is $> A$. Then let $A - a^2 = r$ and $a^2 + r = A$. Then evidently $r < 2a + 1$ and the Root, to be assumed is $a + \frac{r}{(a + 1)^2 - a^2} = a + \frac{r}{2a + 1}$. Then the deficiency arising from this assumption is evidently $A - \left(a + \frac{r}{2a + 1}\right)^2 = (a^2 + r) - \left(a^2 + \frac{2ar}{2a + 1} + \frac{r^2}{(2a + 1)^2}\right) = \frac{(2a + 1)r - r^2}{(2a + 1)^2}$. Now since $r < 2a + 1$ so r^2 or $r r < (2a + 1)r$, and hence this can never be a negative expression, but must be always positive and real.

56). Then the Arabian Arithmeticians observe that the deficiency incurred by employing this assumed Root as the true Root, must always be less than $\frac{1}{4}$. To prove this, if to a be assigned any constant value, then r may be considered as a variable. For the only known properties of r are that it should be real, and $< 2a + 1$. Hence if a be put $= 1$, then $2a + 1 = 3$, and r is expoundable by 1 and 2. If a be put $= 2$, then r is expoundable by 1, 2, 3, 4. If a be put $= 3$, then r is expoundable by 1, 2, 3, 4, 5 or 6, and so on. The shortest and most

direct way therefore of proceeding will be to enquire upon these conditions what is the maximum value of this expression $\frac{(2a+1)r - r^2}{(2a+1)^2}$. Then for this purpose let it be put into Fluxions, and it will become $2ar + r - 2rr = 0$, and hence $2a + 1 = 2r$ and $r = a + \frac{1}{2}$. Hence it appears that the greatest deficiency is when $r = a + \frac{1}{2}$. Substitute this value of r and the expression $\frac{(2a+1)r - r^2}{(2a+1)^2}$ becomes $\frac{(a + \frac{1}{2})^2}{(2a+1)^2} = \frac{(a + \frac{1}{2})^2}{4(a + \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4}$. Now since a is an integer, so $a + \frac{1}{2}$ is evidently a fraction. But r is also an integer, and hence can never be equal to $a + \frac{1}{2}$. That is the value of r can never be such as to render the deficiency a maximum. In other words, the deficiency must always be $< \frac{1}{4}$.

57.) As an illustration of this, let us take the following three sets of examples.

1

Let $A = 2 = 1^2 + 1$. Then $a = 1$ and $r = 1$ and $2a + 1 = 3$, and assumed Root $= 1\frac{1}{3}$.

Then $\overline{1\frac{1}{3}}^2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = 1\frac{7}{9}$, and the deficiency $= \frac{2}{9}$.

Let $A = 3 = 1^2 + 2$. Then $a = 1$, $r = 2$, and assumed Root $= 1\frac{2}{3}$.

Then $\overline{1\frac{2}{3}}^2 = 1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} = 2\frac{7}{9}$, and deficiency $= \frac{2}{9}$.

2

Let $A = 5 = 2^2 + 1$. Then $a = 2$, $r = 1$ and $2a + 1 = 5$ and assumed Root $= 2\frac{1}{5}$.

Then $\overline{2\frac{1}{3}}|^2 = 4 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 4\frac{5}{9}$, and deficiency = $\frac{4}{9}$.

Let $A = 6 = 2^2 + 2$. Then $a = 2$, $r = 2$, and assumed Root = $2\frac{2}{3}$.

Then $\overline{2\frac{2}{3}}|^2 = 4 + \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = 5\frac{12}{9}$, and deficiency = $\frac{6}{9}$.

Let $A = 7 = 2^2 + 3$. Then $a = 2$, $r = 3$, and assumed Root = $2\frac{3}{2}$.

Then $\overline{2\frac{3}{2}}|^2 = 4 + \frac{12}{4} + \frac{9}{4} = 6\frac{21}{4}$, and deficiency = $\frac{9}{4}$.

Let $A = 8 = 2^2 + 4$. Then $a = 2$, $r = 4$, and assumed Root = $2\frac{4}{2}$.

Then $\overline{2\frac{4}{2}}|^2 = 4 + \frac{16}{4} + \frac{16}{4} = 7\frac{32}{4}$, and deficiency = $\frac{4}{4}$.

3

Let $A = 10 = 3^2 + 1$. Then $a = 3$, $r = 1$ and $2a + 1 = 7$, and assumed Root = $3\frac{1}{7}$.

Then $\overline{3\frac{1}{7}}|^2 = 9 + \frac{6}{7} + \frac{1}{49} = 9\frac{41}{49}$, and deficiency = $\frac{6}{49}$.

Let $A = 11 = 3^2 + 2$. Then $a = 3$, $r = 2$, and assumed Root = $3\frac{2}{7}$.

Then $\overline{3\frac{2}{7}}|^2 = 9 + \frac{12}{7} + \frac{4}{49} = 10\frac{52}{49}$, and deficiency = $\frac{12}{49}$.

Let $A = 12 = 3^2 + 3$. Then $a = 3$, $r = 3$, and assumed Root = $3\frac{3}{7}$.

Then $\overline{3\frac{3}{7}}|^2 = 9 + \frac{18}{7} + \frac{9}{49} = 11\frac{57}{49}$, and deficiency = $\frac{18}{49}$.

Let $A = 13 = 3^2 + 4$. Then $a = 3$, $r = 4$, and assumed Root = $3\frac{4}{7}$.

Then $\overline{3\frac{4}{7}}|^2 = 9 + \frac{24}{7} + \frac{16}{49} = 12\frac{67}{49}$, and deficiency = $\frac{24}{49}$.

Q 1

Let $A = 14 = 3^2 + 5$. Then $a = 3r = 5$, and assumed Root $= 3\frac{5}{7}$.

Then $\overline{3\frac{5}{7}}|^2 = 9 + \frac{30}{7} + \frac{25}{49} = 13\frac{40}{49}$, and deficiency $= \frac{40}{49}$.

Let $A = 15 = 3^2 + 6$. Then $a = 3r = 6$, and assumed Root $= 3\frac{6}{7}$.

Then $\overline{3\frac{6}{7}}|^2 = 9 + \frac{36}{7} + \frac{36}{49} = 14\frac{48}{49}$, and deficiency $= \frac{48}{49}$.

From these examples we may observe—

58). That the deficiencies are in every case $\angle \frac{1}{2}$ according to Par. 57).

59). That when the remainder is very great or very small, the deficiency is small, but when the remainder is a medium, that is, as it approaches to be equal to $a + \frac{1}{2}$, the deficiency becomes great, and is greatest when the deficiency is $= a$, and $= a + 1$. That is, it is greatest in the 3d set of cases when $r = 3$ and $= 4$. In the 2d set of cases when $r = 2$ and $= 3$. And in the 1st set of cases, of course when $r = 1$ and $= 2$. This observation is confirmed by the examples of Par. 44). For in the 1st and 4th examples where $r = 1$ and $= 728$ that is very small and very great, the deficiency is small, and in the 2d and 3d examples when $r = 332$ and $= 333$, that is, a medium, the deficiency is great.

60). And that when A is equally distant from a^2 below, and $(a + 1)^2$ above the deficiency is equal. That is the deficiency is equal when A is equal to $a^2 + 1$ and $(a + 1)^2 - 1$, and the deficiency is equal when A is equal to $a^2 + 2$ and $(a + 1)^2 - 2$, and the deficiency is equal when A is equal to $a^2 + 3$ and $(a + 1)^2 - 3$, and so on. Thus—

In the 1st set of Cases.

When $A = 2 = 1^2 + 1$, and when $A = 3 = 2^2 - 1$, the deficiency is the same, viz. $\frac{2}{9}$.

In the 2d set of Cases.

When $A = 5 = 2^2 + 1$, and when $A = 8 = 3^2 - 1$, the deficiency is the same, viz. $\frac{4}{15}$.

When $A = 6 = 2^2 + 2$, and when $A = 7 = 3^2 - 2$, the deficiency is the same, viz. $\frac{6}{15}$.

In the 3d set of Cases.

When $A = 10 = 3^2 + 1$, and when $A = 15 = 4^2 - 1$, the deficiency is the same, viz. $\frac{6}{15}$.

When $A = 11 = 3^2 + 2$, and when $A = 14 = 4^2 - 2$, the deficiency is the same, viz. $\frac{10}{15}$.

When $A = 12 = 3^2 + 3$, and when $A = 13 = 4^2 - 3$, the deficiency is the same, viz. $\frac{12}{15}$.

This is easily proved generally, for since by Par. 57) the excess of $a^2 + r$ over the Square of its assumed Root, is $\frac{(2a+1)r - r^2}{(2a+1)^2}$ let the surd power whose Root is required be $(a+1)^2 - r$. This is $= a^2 + 2a + 1 - r$, and hence the remainder is in this case $2a + 1 - r$. This being the numerator, and $2a + 1$ still being the denominator, the assumed Root is in this case $a + \frac{2a+1-r}{2a+1} = a + 1 - \frac{r}{2a+1}$ and hence the deficiency is $(a+1)^2 - r - \left(a + 1 - \frac{r}{2a+1}\right)^2 = \frac{(2a+1)r - r^2}{(2a+1)^2}$ the same expression as before.

61. But this observation will by no means apply to powers higher than the Square, as will appear from the following examples in Cubes.

Let A be a surd Cube, of which a is the approximate Root, and r the remainder as before. Then on the principles of Par. 28), the assumed

Root of A is $a + \frac{r}{(a+1)^3 - a^3} = a + \frac{r}{3a^2 + 3a + 1}$. Then

Let $A = 2 = 1^3 + 1$. Then $a = 1$, $r = 1$, and $3a^2 + 3a + 1 = 7$ and assumed Root $= 1\frac{1}{7}$.

Then $\overline{1\frac{1}{7}}^3 = 1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{49} + \frac{1}{343} = 1\frac{66}{343}$, and deficiency $= \frac{177}{343}$.

Let $A = 3 = 1^3 + 2$. Then $a = 1$, $r = 2$, and assumed Root $= 1\frac{2}{7}$.

Then $\overline{1\frac{2}{7}}^3 = 1 + \frac{6}{7} + \frac{12}{49} + \frac{8}{343} = 2\frac{43}{343}$, and deficiency $= \frac{300}{343}$.

Let $A = 4 = 1^3 + 3$. Then $a = 1$, $r = 3$, and assumed Root $= 1\frac{3}{7}$.

Then $\overline{1\frac{3}{7}}^3 = 1 + \frac{9}{7} + \frac{27}{49} + \frac{27}{343} = 2\frac{114}{343}$, and deficiency $= 1\frac{239}{343}$.

Let $A = 5 = 1^3 + 4$. Then $a = 1$, $r = 4$, and assumed Root $= 1\frac{4}{7}$.

Then $\overline{1\frac{4}{7}}^3 = 1 + \frac{12}{7} + \frac{48}{49} + \frac{64}{343} = 3\frac{102}{343}$, and deficiency $= 1\frac{441}{343}$.

Let $A = 6 = 1^3 + 5$. Then $a = 1$, $r = 5$, and assumed Root $= 1\frac{5}{7}$.

Then $\overline{1\frac{5}{7}}^3 = 1 + \frac{15}{7} + \frac{75}{49} + \frac{125}{343} = 5\frac{13}{343}$, and deficiency $= \frac{330}{343}$.

Let $A = 7 = 1^3 + 6$. Then $a = 1$, $r = 6$, and assumed Root $= 1\frac{6}{7}$.

Then $\overline{1\frac{6}{7}}^3 = 1 + \frac{1^3}{7} + \frac{1^2 \cdot 6}{7^2} + \frac{1 \cdot 6^2}{7^3} = 6\frac{112}{343}$, and deficiency = $\frac{304}{343}$.

62). It also appears from hence that the deficiency in the form $a^3 + r$, is always less than in the form $(a + 1)^3 - r$. For—

When $A = 2 = 1^3 + 1$, deficiency = $\frac{112}{343}$, and when $A = 7 = 2^3 - 1$, there is a greater deficiency $\frac{204}{343}$.

When $A = 3 = 1^3 + 2$, deficiency = $\frac{304}{343}$, and when $A = 6 = 2^3 - 2$, there is a greater deficiency $\frac{112}{343}$.

When $A = 4 = 1^3 + 3$, deficiency = $1\frac{204}{343}$, and when $A = 5 = 2^3 - 3$, there is a greater deficiency $1\frac{112}{343}$.

This is also confirmed by the examples of Par. 44), for there the deficiency in the first example, or $2^6 + 1$, is less than that in the fourth example, or $3^6 - 1$. And the deficiency in the second example, or $2^6 + 332$, is less than that in the third example, or $3^6 - 332$.

63). And we may also observe that the deficiencies produced by assuming the Cube Root are greater than by assuming the Square Roots of the same number. Thus—

By the assumed $\sqrt[3]{2}$ deficiency is $\frac{2}{3}$. By the assumed $\sqrt[3]{2}$ there is greater deficiency $3\frac{74}{105}$.
 By the assumed $\sqrt[3]{3}$ deficiency is $\frac{2}{3}$. By the assumed $\sqrt[3]{3}$ there is greater deficiency $3\frac{60}{105}$.
 By the assumed $\sqrt[3]{5}$ deficiency is $\frac{1}{25}$. By the assumed $\sqrt[3]{5}$ there is greater deficiency $1\frac{112}{343}$.
 By the assumed $\sqrt[3]{6}$ deficiency is $\frac{1}{25}$. By the assumed $\sqrt[3]{6}$ there is greater deficiency $3\frac{112}{343}$.
 By the assumed $\sqrt[3]{7}$ deficiency is $\frac{1}{25}$. By the assumed $\sqrt[3]{7}$ there is greater deficiency $3\frac{60}{105}$.

Agreeable to what was conjectured in the latter part of Par. 54,) and which was confirmed by the very great deficiencies in example 2d and 3d of Par. 44.)

64). It may be presumed the Arabians would be anxious to correct or diminish such important deficiencies as these. The method they have employed for this purpose in the Square is as follows :

The assumed Root of $a^2 + r$ by Par. 55), is $a + \frac{r}{2a+1}$ that is,

$a + \frac{r \times 1}{2a \times 1 + 1}$. Instead of 1 here employed as the multiplier of r , and $2a$,

let there be substituted the general real integer z , and this expression will become $a + \frac{rz}{2az+1}$ in which z may be taken any integer at pleasure.

Then if this expression $a + \frac{rz}{2az+1}$ be assumed the approximate Square

Root of $a^2 + r$, the deficiency in this case will evidently be $a^2 + r -$

$\left(a + \frac{rz}{2az+1}\right)^2 = \frac{(2az+1)r - r^2z^2}{(2az+1)^2}$. Let any constant value be given

to z and put this expression into Fluxions as in Par. 56), and then

$2az\dot{r} + \dot{r} - 2z^2r\dot{r} = 0$ and $r = \frac{2az+1}{2z^2}$. Substitute this value of r

and the expression $\frac{(2az+1)r - r^2z^2}{(2az+1)^2}$ becomes

$$\frac{(2az+1) \frac{(2az+1)}{2z^2} - \frac{(2az+1)^2}{4z^4}}{(2az+1)^2} = \frac{1}{4z^2}$$

65). Now as $\frac{1}{4z^2}$ evidently becomes less, as z becomes greater, so

it might at first be supposed that if z were taken very large, the error would be very inconsiderable. But then it must be observed that since z^2 increases faster than z , so if z be taken very great, the numerator $(2az+1)r - r^2z^2$ becomes negative, and since the denominator

$(2az + 1)^2$ is positive so the fraction $\frac{(2az + 1)r - r^2z^2}{(2az + 1)^2}$ which expresses the deficiency will also be negative. Now a negative deficiency is an excess. That is by taking z too large, the assumed Root will be greater than the truth instead of less. In this case the positive fraction $\frac{1}{4z^2}$ is greater than 0 , and all the negative values of $\frac{(2az + 1)r - r^2z^2}{(2az + 1)^2}$, though they may be numbers of a greater denomination, yet as they are all less than 0 , so they are also all less than positive $\frac{1}{4z^2}$, which hence is still truly a maximum.

66.) Now since this expression $\frac{(2az + 1)r - r^2z^2}{(2az + 1)^2}$ when negative is the amount of the negative deficiency produced by assuming $a + \frac{rz}{2az + 1}$ as the true Square Root of $a^2 + r$, so if this expression have its signs changed it will become $\frac{r^2z^2 - (2az + 1)r}{(2az + 1)^2}$ and will be the positive excess produced by the same assumption.

For in this case since by supposition $a + \frac{rz}{2az + 1} > a^2 + r$, so instead of $(a^2 + r) - \left(a + \frac{rz}{2az + 1}\right)^2$ as in Par. 64) for a deficiency we have for an excess. $\left(a + \frac{rz}{2az + 1}\right)^2 - (a^2 + r) = \frac{r^2z^2 - (2az + 1)r}{(2az + 1)^2}$ as above.

67.) Now this expression increases in value both by the increase of r and of z .

For $\frac{r^2 z^2 - (2az + 1)r}{(2az + 1)^2} = \frac{r^2 z^2}{(2az + 1)^2} - \frac{r}{2az + 1}$. Then—

First. Since r^2 increases faster than r , so by increasing r the expression $\frac{r^2 z^2}{(2az + 1)^2}$ will increase faster than $\frac{r}{2az + 1}$ and hence their difference $\frac{r^2 z^2}{(2az + 1)^2} - \frac{r}{2az + 1}$ will increase also.

Second. Let ζ be another value of z greater than the present, and let $\frac{r^2 z^2}{(2az + 1)^2} = x$ and $\frac{r^2 \zeta^2}{(2a\zeta + 1)^2} = \xi$. Then—
 $\frac{x(2az + 1)^2}{z^2} = r^2 = \frac{\xi(2a\zeta + 1)^2}{\zeta^2}$ and hence $x = \frac{z^2 \xi (2a\zeta + 1)^2}{\zeta^2 (2az + 1)^2}$
 $= \xi \times \frac{4a^2 \zeta^2 z^2 + 4a\zeta z^2 + z^2}{4a^2 \zeta^2 z^2 + 4a\zeta^2 z + \zeta^2}$

Then $4a^2 \zeta^2 z^2 + 4a\zeta z^2 + z^2 < 4a^2 \zeta^2 z^2 + 4a\zeta^2 z + \zeta^2$. For $4a^2 \zeta^2 z^2 = 4a^2 \zeta^2 z^2$, and since by supposition $z < \zeta$, so $4a\zeta z^2$, or $4a\zeta z \times z < 4a\zeta z \times \zeta$, or $4a\zeta^2 z$, and for the same reason $z^2 < \zeta^2$.

Hence $x = \xi \times \frac{4a^2 \zeta^2 z^2 + 4a\zeta z^2 + z^2}{4a^2 \zeta^2 z^2 + 4a\zeta^2 z + \zeta^2}$ or ξ multiplied by a proper

fraction. That is $x < \xi$, and consequently the expression $\frac{r^2 z^2}{(2az + 1)^2}$

increases by the increase of z . And again evidently $\frac{r}{2az + 1}$ which is

the subtracted part of the expression, is diminished by the increase of z , that is, as r is divided by a greater number. Then since the increase of z

causes $\frac{r^2 z^2}{(2az+1)^2}$ to increase, and $\frac{r}{2az+1}$ to diminish, so it must evidently cause their difference $\frac{r^2 z^2}{(2az+1)^2} - \frac{r}{2az+1}$ to increase also.

Now r by Par. 55) is $\angle 2a+1$, that is, r is not greater than $2a$.

Substitute this value of r and the expression $\frac{r^2 z^2}{(2az+1)^2} - \frac{r}{2az+1}$ becomes

$$\frac{4a^2 z^2}{4a^2 z^2 + 4az + 1} - \frac{2a}{2az+1}.$$

Now since $4a^2 z^2 + 4az + 1 > 4a^2 z^2$ so $\frac{4a^2 z^2}{4a^2 z^2 + 4az + 1} < \frac{4a^2 z^2}{4a^2 z^2}$

or 1. And evidently $\frac{4a^2 z^2}{4a^2 z^2 + 4az + 1} - \frac{2a}{2az+1} < \frac{4a^2 z^2}{4a^2 z^2 + 4az + 1}$,

and consequently is, *a fortiori*, also < 1 ; and since it is also by supposition, positive and real, it must be a proper fraction. That is, though the

error of excess committed by assuming $a + \frac{rz}{2az+1}$ as the true Root of

$a^2 + r$ continually increases both as r and z are taken greater and greater, yet, although r be taken as great as possible, and though z be taken as great as we please, yet this error must always be less than unit, which is the limit to which it continually tends, but cannot pass.

68). This may be more directly, I will not say more satisfactorily, proved, in the method of modern Geometers, by considering Infinity as

a positive Idea. In this case, since the expression $\frac{r^2 z^2}{(2az+1)^2} - \frac{r}{2az+1}$

is increased both by the increase of r and z , so evidently its maximum is produced when r and z are both maxima. Now by last paragraph, since r is not greater than $2a$, so $2a$ is maximum of r . And since z is any integer at pleasure, so Infinity is the maximum of z . Substitute these

values of r and z , and this expression becomes $\frac{4a^2 \infty^2}{4a^2 \infty^2 + 4a \infty + 1}$
 $\frac{2a}{2a \infty + 1}$. Now since $2a \infty + 1$ is infinitely great, so $\frac{2a}{2a \infty + 1}$ when

a is finite, becomes infinitely small, and vanishes. And the quantity $4a \infty + 1$ being an infinite of the first order, vanishes before $4a^2 \infty^2$ an infinite of the second order, and the expression is reduced to $\frac{4a^2 \infty^2}{4a^2 \infty^2} = 1$

as before. But it is to be considered whether it be correct Logic to ascribe positive properties to the negative idea Infinity.

59). By this it is evident not much advantage is gained, for by Par. 56) the error on one side may be $\frac{1}{4}$, and here it may be 1 on the other. To correct this, and to render the error of excess as small as possible, the Arabian Arithmeticians direct that z should not be taken greater than 2,

and hence the assumed Root of $a^2 + r$ is $a + \frac{2r}{4a + 1}$ and the error ex-

pressed by $\frac{(2az + 1)r - r^2 z^2}{(2az + 1)^2}$ becomes $\frac{(4a + 1)r - 4r^2}{(4a + 1)^2}$. If in this

case, the deficiency is positive, then by Par. 64), it cannot be greater

than $\frac{1}{4z^2}$ or $\frac{1}{4 \cdot 2^2}$ or $\frac{1}{16}$. But if this expression is negative, it is evident

that it can only become negative by the increase of r . Now as before maximum of r is $2a$. Substitute this value of r , and the expression

$\frac{(4a+1)r - 4r^2}{(4a+1)^2}$ becomes $\frac{2a - 8a^2}{16a^2 + 8a + 1}$ and is the greatest denomi-
 nation of the negative deficiency, and consequently as in Par. 66,) this expres-
 sion with its signs changed, that is $\frac{8a^2 - 2a}{16a^2 + 8a + 1} = \frac{8a^2}{(4a+1)^2} - \frac{2a}{(4a+1)^2}$
 is the maximum of the positive error of excess.

70). Now this expression increases by the increase of a . For let
 α be any other value greater than the present, and let $\frac{8a^2}{(4a+1)^2} = p$, and

$\frac{8\alpha^2}{(4\alpha+1)^2} = \pi$. And then by the very same reasoning that was employed
 in Par. 67) with z, ζ, x and ξ , it will be found that $p = \pi \times \frac{16\alpha^2 a^2 + 8\alpha a^2 + a^2}{16\alpha^2 a^2 + 8\alpha^2 a + \alpha^2}$

and that $16\alpha^2 a^2 + 8\alpha a^2 + a^2 < 16\alpha^2 a^2 + 8\alpha^2 a + \alpha^2$, and consequently
 that $p = \pi$ multiplied by a proper fraction, that is, $p < \pi$. And hence

$\frac{8a^2}{(4a+1)^2}$ increases by the increase of a . Again $\frac{2a}{(4a+1)^2} = \frac{2a}{16a^2 + 8a + 1}$,
 and since a^2 increases faster than a , so $16a^2 + 8a + 1$ increases faster
 than $2a$. That is, $\frac{2a}{16a^2 + 8a + 1}$ diminishes by the increase of a . And

consequently by the same reasoning as in Par. 67,) the whole expression

$\frac{8a^2}{(4a+1)^2} - \frac{2a}{(4a+1)^2}$ increases by the increase of a , and is by supposi-
 tion positive and real. And by a continuation of the reasoning of the

same paragraph, it will be seen that $\frac{8a^2}{(4a+1)^2} - \frac{2a}{(4a+1)^2} < \frac{8a^2}{(4a+1)^2}$ or

$\frac{8a^2}{16a^2 + 8a + 1}$ and consequently also $< \frac{8a^2}{16a^2}$ or $\frac{1}{2}$. That is to say, the

error of excess committed by assuming $\frac{2r}{4a + 1}$ as the Square Root of

$a^2 + r$ continually increases as a is greater and greater, but can never exceed the limit $\frac{1}{2}$. This is also proved by the same consideration of Infinity, as in Par. 68. For if a be infinitely great, then, in the expression

$\frac{8a^2 - 2a}{16a^2 + 8a + 1}$, $2a$ vanishes before $8a^2$, and $8a + 1$ vanishes before $16a^2$,

and hence it will be reduced to $\frac{8a^2}{16a^2} = \frac{1}{2}$ as before.

71). As an illustration of all this, let us resume the former 3 sets of examples of Par. 57,) and suppose $x = 2$, so that the assumed Root will

be $a + \frac{2r}{4a + 1}$ and then—

1

Let $A = 2$ and assumed Root $= 1\frac{2}{3}$.

Then $\overline{1\frac{2}{3}}^2 = 1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} = 1\frac{16}{9}$ and deficiency $= \frac{1}{9}$.

Let $A = 3$ and assumed Root $= 1\frac{3}{4}$, and in this case $r = 2a$, and is a maximum.

Then $\overline{1\frac{3}{4}}^2 = 1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{16} = 3\frac{6}{16}$, and the excess is $\frac{6}{16}$.

2

Let $A = 5$ and assumed Root $= 2\frac{5}{9}$.

Then $\overline{2\frac{5}{9}}^2 = 4 + \frac{10}{9} + \frac{25}{81} = 4\frac{109}{81}$ and deficiency $= \frac{5}{81}$.

Let $A = 6$ and assumed Root $= 2\frac{3}{4}$.

Then $\overline{2\frac{4}{9}}|^2 = 4 + \frac{16}{9} + \frac{16}{81} = 5\frac{7}{81}$ and deficiency = $\frac{5}{81}$.

Let A = 7 and assumed Root = $2\frac{6}{9}$.

Then $\overline{2\frac{6}{9}}|^2 = 4 + \frac{36}{9} + \frac{36}{81} = 7\frac{4}{81}$ and deficiency = $\frac{1}{9}$.

Let A = 8 and assumed Root = $2\frac{8}{9}$, and in this case $r = 2a$, and is a Maximum.

Then $\overline{2\frac{8}{9}}|^2 = 4 + \frac{64}{9} + \frac{64}{81} = 8\frac{8}{81}$ and excess = $\frac{8}{81}$.

3

Let A = 10 and assumed Root = $3\frac{2}{13}$.

Then $\overline{3\frac{2}{13}}|^2 = 9 + \frac{4}{13} + \frac{4}{169} = 9\frac{166}{169}$ and deficiency = $\frac{9}{169}$.

Let A = 11 and assumed Root = $3\frac{4}{13}$.

Then $\overline{3\frac{4}{13}}|^2 = 9 + \frac{16}{13} + \frac{16}{169} = 10\frac{152}{169}$ and deficiency = $\frac{16}{169}$.

Let A = 12 and assumed Root = $3\frac{6}{13}$.

Then $\overline{3\frac{6}{13}}|^2 = 9 + \frac{36}{13} + \frac{36}{169} = 11\frac{144}{169}$ and deficiency = $\frac{36}{169}$.

Let A = 13 and assumed Root = $3\frac{8}{13}$.

Then $\overline{3\frac{8}{13}}|^2 = 9 + \frac{64}{13} + \frac{64}{169} = 13\frac{120}{169}$ and excess = $\frac{120}{169}$.

Let $A = 14$ and assumed Root $= 3\frac{1}{3}$.

Then $\overline{3\frac{1}{3}}^2 = 9 + \frac{6}{15} + \frac{1}{15} = 14\frac{1}{15}$ and excess $= \frac{1}{15}$.

Let $A = 15$ and assumed Root $= 3\frac{1}{3}$, and in this case $r = 2a$ and is a Maximum.

Then $\overline{3\frac{1}{3}}^2 = 9 + \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = 15\frac{8}{15}$ and excess $= \frac{8}{15}$.

And from these examples we may observe—

72). That each deficiency $< \frac{1}{15}$ according to Par. 69.)

73). That each excess $< \frac{1}{3}$ according to Par. 70, for even in the three cases where r is a Maximum, and consequently the excess should, by Par. 68 and 71), be greatest, the excess is

When $a = 1$, only $\frac{6}{15}$.

When $a = 2$, it is greater, and becomes $\frac{8}{15}$.

When $a = 3$, it is still greater, and becomes $\frac{10}{15}$.

And we may hence also observe, that the excess increases with the increase of a , as by Par. 70).

74). For more illustration, let z be taken $= 3$, and let other things remain the same, and then the assumed Root will be $a + \frac{3r}{6a+1}$ and the deficiency must be $< \frac{1}{4 \cdot 3^2}$ or $\frac{1}{36}$, as by Par. 64.) Then the same

three sets of examples will become as follow :

1

Let $A = 2$ and assumed Root $= 1\frac{1}{7}$.

Then $\overline{1\frac{1}{7}}^2 = 1 + \frac{2}{7} + \frac{2}{49} = 2\frac{2}{49}$ and excess $= \frac{2}{49}$.

Let $A = 3$ and assumed Root $= 1\frac{6}{7}$ and r , a Maximum.

Then $\overline{1\frac{6}{7}}^2 = 1 + \frac{12}{7} + \frac{36}{49} = 3\frac{22}{49}$ and excess $= \frac{22}{49}$.

2

Let $A = 5$ and assumed Root $= 2\frac{3}{13}$.

Then $\overline{2\frac{3}{13}}^2 = 4 + \frac{12}{13} + \frac{9}{169} = 4\frac{165}{169}$ and deficiency $= \frac{4}{169}$.

Let $A = 6$ and assumed Root $= 2\frac{6}{13}$.

Then $\overline{2\frac{6}{13}}^2 = 4 + \frac{24}{13} + \frac{36}{169} = 6\frac{10}{169}$ and excess $= \frac{10}{169}$.

Let $A = 7$ and assumed Root $= 2\frac{9}{13}$.

Then $\overline{2\frac{9}{13}}^2 = 4 + \frac{36}{13} + \frac{81}{169} = 7\frac{42}{169}$ and excess $= \frac{42}{169}$.

Let $A = 8$ and assumed Root $= 2\frac{12}{13}$ and r , a Maximum.

Then $\overline{2\frac{12}{13}}^2 = 4 + \frac{48}{13} + \frac{144}{169} = 8\frac{22}{169}$ and excess $= \frac{22}{169}$.

3

Let $A = 10$ and assumed Root $= 3\frac{1}{19}$.

Then $\overline{3\frac{1}{19}}|^2 = 9 + \frac{1^6}{1^9} + \frac{6}{3^6 1} = 9\frac{1^6 6}{3^6 1}$ and deficiency $= \frac{1^6}{3^6 1}$.

Let $A = 11$ and assumed Root $= 3\frac{6}{19}$.

Then $\overline{3\frac{6}{19}}|^2 = 9 + \frac{3^6}{1^9} + \frac{3^6 6}{3^6 1} = 10\frac{3^6 6}{3^6 1}$ and deficiency $\frac{3^6}{3^6 1}$.

Let $A = 12$ and assumed Root $= 3\frac{9}{19}$.

Then $\overline{3\frac{9}{19}}|^2 = 9 + \frac{3^9}{1^9} + \frac{3^9 1}{3^6 1} = 12\frac{3^9 1}{3^6 1}$ and excess $= \frac{3^9 1}{3^6 1}$.

Let $A = 13$ and assumed Root $= 3\frac{12}{19}$.

Then $\overline{3\frac{12}{19}}|^2 = 9 + \frac{7^2}{1^9} + \frac{1^4 4}{3^6 1} = 13\frac{7^2 1}{3^6 1}$ and excess $= \frac{7^2 1}{3^6 1}$.

Let $A = 14$ and assumed Root $= 3\frac{14}{19}$.

Then $\overline{3\frac{14}{19}}|^2 = 9 + \frac{2^6}{1^9} + \frac{2^6 5}{3^6 1} = 14\frac{1^6 1}{3^6 1}$ and excess $= \frac{1^6 1}{3^6 1}$.

Let $A = 15$ and assumed Root $= 3\frac{15}{19}$ and r , a Maximum.

Then $\overline{3\frac{15}{19}}|^2 = 9 + \frac{1^6 9}{1^9} + \frac{1^6 4}{3^6 1} = 15\frac{1^6 1}{3^6 1}$ and excess $= \frac{1^6 1}{3^6 1}$.

And from these examples we may observe—

75). That each deficiency $\angle \frac{1}{3^6}$, as by Par. 75,) and each excess $\angle 1$, as by Par. 68,) and also that the deficiencies, though less in value, are yet fewer in number, and the excesses are both greater in number and value than in the examples of Par. 71.)

76). For still farther illustration, let us take $z =$ a great number $= 100$, and let us take the three examples in these sets wherein r is a

Maximum, and wherein consequently by Paras. 67 and 63,) the excess should

be as great as possible. Then the assumed Root will be $a + \frac{100 r}{200 a + 1}$

$$= a + \frac{100 \times 2 a}{200 a + 1} = a + \frac{200 a}{200 a + 1} \text{ and then}$$

Let $A = 3$ and assumed Root $= 1\frac{200}{201}$.

Then $\left(1\frac{200}{201}\right)^2 = 1 + \frac{400}{201} + \frac{40000}{40401} = 3\frac{32400}{40401}$.

Let $A = 8$ and assumed Root $= 2\frac{400}{201}$.

Then $\left(2\frac{400}{201}\right)^2 = 4 + \frac{1600}{201} + \frac{160000}{40401} = 8\frac{156304}{40401}$.

Let $A = 15$ and assumed Root $= 3\frac{600}{201}$.

Then $\left(3\frac{600}{201}\right)^2 = 9 + \frac{3600}{201} + \frac{360000}{40401} = 15\frac{356304}{40401}$.

In which it will easily be observed, that the excesses, though large, are yet still < 1 , and that they increase with the increase of a .

77). These speculations might easily be continued and diversified, and pursued into higher powers; but this, like all other Mathematical subjects, leads to interminable results, and as an abrupt conclusion must be made somewhere, so it is high time, considering the length of this Paper, that it should be made here. Some apology is, perhaps, necessary for the great length to which the Essay has already extended, and which is, indeed, much greater than I had supposed would have been necessary; but it is not very easy to abridge such a detail without rendering it

obscure; and I therefore hope the nature of the subject, which is both curious in itself, and affords a complete estimate of the state of Arithmetic among the Arabians, will be a sufficient justification of my prolixity.

78). I must conclude this Essay as my former, with an acknowledgement of my obligations to my very intelligent friend Dewan Kanh Jee, of Patna; by him I was furnished with the extract of the Ayoun-ul-Hisab. His Treatise of Arithmetic formerly mentioned,* and his oral explanation, enabled me to comprehend the obscure and studied brevity of the Arabian Author; and from the same sources I derived those observations on the fractional part of the Root which form the basis of the concluding paragraphs of the present Essay.

* See Essay on the Binomial Theorem, Vol. XIII. of the Researches, p. 466.

DU BINÔME DE NEWTON,

Antérieurement à Newton.

PAR M. ARISTIDE MARRE.

Le théorème du binôme de *Newton*, c'est ainsi qu'on le dénomme ordinairement, n'appartient pas exclusivement à *Newton*. *Hutton* a émis cette vérité aujourd'hui reconnue, dans son Introduction à ses Tables mathématiques. Avant *Newton*, d'illustres géomètres, *Lucas de Burgo*, *Stifelius*, *Viète*, *Briggs* et *Pascal* avaient ouvert la voie. Ce qui seulement peut être accordé sans conteste au prince des Mathématiciens anglais, c'est l'extension du fameux théorème au cas des exposants fractionnaires.

M. *Ed. Biot* nous a appris (Journal des savants 1835) que la formation des coefficients des diverses puissances du binôme exprimées en nombres entiers était connue des Chinois au moins en 1593, car le *Souan Fa long Tsong* (principes de l'art du calcul) fut imprimé en cette année. Les Hindous très-vraisemblablement ne sont pas restés en arrière de leurs voisins chez lesquels on n'a pas encore trouvé, que je sache, un *Brahmagupta* ou un *Aryabhatta*; toutefois je ne saurais voir dans l'énoncé et dans la solution d'un problème traduit du sanscrit par M. *Reuben Burrow*, la preuve évidente que les Hindous connaissaient le théorème du binôme de *Newton* dans le cas de l'exposant entier et positif, tout aussi bien que *Briggs* et beaucoup mieux que *Pascal* (*). Ce sont là les pro-

(*) *Biographie universelle*, t. XXXI, p. 132. Notice sur *Newton* par M. *Biot* :

pres termes de *M. Reuben Burrow* (*). Voyons si le problème traduit du sanscrit peut justifier un pareil langage.

Énoncé : « Le palais d'un Radja avait huit portes ; or ces portes peuvent être ouvertes une à une, ou par deux à la fois, ou par trois à la fois, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin toutes soient ouvertes ensemble. On demande de dire les nombres de fois que ceci peut être fait? »

Solution : « Écris le nombre des portes, et avance en ordre en diminuant successivement de huit jusqu'à l'unité, et alors dans l'ordre contraire comme il suit :

8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8

» Divise le premier nombre huit par l'unité au-dessous de lui, et le quotient huit montre le nombre de fois que les portes peuvent être ouvertes une par une. Multiplie ce dernier huit par le terme voisin sept et divise le produit par le deux qui est au-dessous, et le résultat vingt-huit est le nombre de fois que deux portes différentes peuvent être ouvertes ; multiplie le dernier nombre trouvé vingt-huit par la figure suivante, six, divise le produit par le trois au-dessous, et le quotient cinquante-six montre le nombre de fois que trois portes différentes peuvent être ouvertes. Et encore, ce cinquante-six multiplié par le cinq suivant et divisé par le quatre au-dessous est soixante-dix, nombre de fois que quatre portes différentes peuvent être ouvertes. De même, cinquante-six est le nombre de fois que cinq peuvent être ouvertes : vingt-huit le nombre de fois que six peuvent être ouvertes : huit le nombre de fois que sept peuvent être ouvertes, et enfin, un

Pascal, avant *Newton*, avait donné une règle pour former directement un terme quelconque du développement des puissances binomiales, dans le cas où l'exposant de la puissance est un nombre entier.

(*) *Asiatic Researches*, 2^e vol. Appendix, n^o 5.

est le nombre de fois que toutes peuvent être ouvertes ensemble ; et la somme de toutes les différentes fois est 255 ». Ici finit la traduction du sanscrit. M. Reuben Burrow continue : « La démonstration est évidente pour les mathématiciens. En effet, le coefficient du second terme dans toute équation générale indiquant la somme des racines, il s'ensuit que dans la puissance n de $1+1$, où chacune des racines est l'unité, le coefficient indique les différentes *unités* qui peuvent être prises dans n choses : de même, attendu que le coefficient du troisième terme est la somme des produits différents de toutes les racines prises deux à deux, il s'ensuit que....., etc. » (*Lilavati*, section VI.)

D'abord nous dirons que l'on doit établir une distinction entre la règle des coefficients et la formule du binôme elle-même. D'autre part, si l'on veut rattacher cette question à l'une des théories des Hindous, il nous semble que pour la résoudre, ils ont suivi une route beaucoup moins détournée que celle qu'on leur attribue. Les Hindous connaissaient la théorie des combinaisons et des permutations, et nous avons, d'après M. Burrow lui-même, rapporté à ce sujet (*), une question particulière qui, si elle n'est pas d'une grande utilité pratique, a du moins le mérite de paraître curieuse à M. Delambre (**). Pour nous, la règle donnée précédemment par les Hindous, n'est qu'une simple conséquence ou plutôt une pure application de cette théorie. En effet, le nombre de fois que huit portes différentes peuvent être ouvertes une à une, est évidemment égal à 8 ou $\frac{8}{1}$. Le nombre de fois que huit portes peuvent être ouvertes deux à deux, ou le nombre de combinaisons de huit objets pris deux à deux, est

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome V, p. 87.

(**) *Histoire de l'Astron. anc.*, fin du tome I.

égal à $\frac{8.7}{1.2}$. Le nombre de fois que huit portes différentes,

peuvent être ouvertes trois à trois ; est égal à $\frac{8.7.6}{1.2.3}$; etc.

En faisant la somme, les Hindous furent amenés à cette remarque bien naturelle que pour passer du premier terme (nombre des portes) au second, il fallait multiplier par 7 voisin de 8, et diviser le produit par 2, au-dessous de 7 et qui marquait son rang ; — que pour passer du second terme au troisième, il fallait multiplier par le chiffre suivant 6, et diviser par le nombre au-dessous de 6, c'est-à-dire 3 qui marquait son rang et ainsi de suite. Arrivés à la dernière expression de forme fractionnaire, un simple coup d'œil jeté sur ce double rang de chiffres dicta aux Hindous la règle qu'ils ont donnée. — Cette explication admise, nous répétons avec M. *Plaisir d'Édimbourg*, que ce problème prouve que les Hindous ont tourné leur attention vers certaines investigations arithmétiques dont il n'existe aucune trace dans les écrits des mathématiciens grecs, mais nous croirons avoir justement démontré qu'on n'en doit pas conclure avec M. *Reuben Burrow* que les Hindous connaissaient le théorème du binôme de *Newton* dans le cas de l'exposant entier et positif, au moins aussi bien que *Briggs* et beaucoup mieux que *Pascal*.

Nous allons prouver maintenant que longtemps avant *Briggs*, les Arabes connaissaient la règle pour engendrer les coefficients des termes du développement d'une puissance entière et positive du Binôme, successivement les uns des autres et indépendamment de ceux de toute autre puissance. Cette règle se trouve dans deux de leurs ouvrages arithmétiques, dans le *Meftehal Hisab*, ou Clef du calcul, composé par *Djoumshid ben Moussaoud* sous le règne de *Oulough Beg*, petit-fils de *Timour*, et dans l'*Ayoun al Hisab*, ou Règles du calcul, composé par *Mohammed Bakir*

sous le règne de *Shah Abbas I*, vers l'an 1600. Ces deux ouvrages sont peu ou point connus, M. J. Tytler qui le premier a révélé leur existence n'a pu se procurer dans l'Inde qu'un simple extrait de chacun d'eux, et il n'a fait connaître que le fragment de l'*Ayoun al Hisâb*, qui donne la règle de la formation des coefficients. C'est ce fragment que nous allons reproduire :

« Observe que les *Radices Locorum* (coefficients) de toute puissance sont des nombres qui sont placés vis-à-vis du *latus primum* (la racine ou la première puissance) et des puissances antécédentes (i. e. dont les indices sont moindres que celui de la puissance dont les coefficients sont demandés) ; la méthode pour les découvrir est comme il suit : — Écris les noms de la racine et de la puissance antécédente ou inférieure à celle donnée en un rang de longueur (i. e. en un rang du haut en bas de la page), prends le nombre indice de cette puissance donnée et place-le vis-à-vis du nom de la racine, alors retranches-en un, multiplie $\frac{1}{2}$ du reste par le nombre qui est placé vis-à-vis de la racine ou inversement (i. e. ou multiplie le reste par la moitié de ce qui est placé vis-à-vis de la racine), et place le produit vis-à-vis du nom du carré; alors retranche 2 (de l'indice de la puissance donnée) et multiplie $\frac{1}{3}$ du reste par ce qui est placé vis-à-vis du carré ou inversement, et place le produit vis-à-vis du cube; alors retranche 3 et multiplie $\frac{1}{4}$ du reste par ce qui est placé vis-à-vis du cube ou inversement, et place le produit vis-à-vis de la quatrième puissance, et ainsi de suite jusqu'à la fin; par une conséquence nécessaire le même nombre sera trouvé dans toute place équidistante de celle du milieu, ou des deux qui occupent le milieu; c'est pour-

quoi, si tu l'aimes mieux, écris la première figure trouvée, aussi à la dernière place (dans le cas actuel), ce qui est écrit vis-à-vis de la racine et du carré peut être écrit vis-à-vis de la quatrième puissance et du cube, et ainsi de suite jusqu'à ce que ce soit complété. Par exemple, qu'il soit requis de trouver les coefficients de la douzième puissance. Écrivons depuis la racine jusqu'à la onzième puissance, ainsi qu'il a été enseigné, et écrivons 12 qui est l'indice de la puissance donnée vis-à-vis de la racine et à la dernière place, retranchons-en 1, et multiplions ce reste par $\frac{1}{2}$ de 12, et écrivons 66 le produit vis-à-vis du carré et à l'avant-dernière place; retranchons 2 et multiplions 10 qui est le reste par $\frac{1}{3}$ de ce qui a été écrit vis-à-vis du carré, et écrivons le produit qui est 220 vis-à-vis du cube et à cette place qui lui correspond (*i. e.* équidistante du milieu de l'autre côté); alors retranchons 3 et multiplions 9 le reste par $\frac{1}{4}$ de ce qui est opposé au cube, et écrivons le produit, qui est 495, vis-à-vis de la quatrième puissance et de sa correspondante; alors retranchons 4 et multiplions 8 le reste, par $\frac{1}{5}$ de ce qui est vis-à-vis de la quatrième puissance, et écrivons le produit, qui est 792, vis-à-vis de la cinquième puissance et de la correspondante; alors retranchons 5 et multiplions 7 le reste par $\frac{1}{6}$ de ce qui est vis-à-vis de la cinquième puissance, et écrivons le produit, qui est 924, vis-à-vis de la sixième puissance; ces nombres ainsi écrits sont les coefficients de la douzième puissance, en voici la table :

NOIS DES PUISSANCES PRÉCÉDANT LA PUISSANCE DONNÉE.	NOMS des COEFFICIENTS.
Racine (1 ^{re} puissance).	12
Carré.	66
Cube.	220
Quatrième puissance.	495
Cinquième puissance.	792
Sixième puissance.	924
Septième puissance.	792
Huitième puissance.	495
Neuvième puissance.	220
Dixième puissance.	66
Onzième puissance.	12

» D'où il suit que cette puissance de tout nombre est égale à la somme des puissances de ses deux parties ; et 12 fois chacune de ces parties multipliée par la onzième puissance de l'autre ; et 66 fois le carré de chacune d'elles par la dixième puissance de l'autre ; et 220 fois le cube de chacune d'elles par la neuvième puissance de l'autre ; et 495 fois la quatrième puissance de chacune d'elles par la huitième puissance de l'autre ; et 792 fois la cinquième puissance de chacune d'elles par la septième puissance de l'autre ; et 924 fois la sixième puissance de l'une d'elles par la sixième puissance de l'autre , et ainsi des autres cas. »

Note. Il est remarquable qu'en Europe les coefficients binomiaux ont été indiqués pour les extractions des racines avant de l'avoir été pour l'élévation aux puissances ; la première indication se trouve dans l'arithmétique du célèbre

Stifel, cité ci-dessus. Voici le titre de l'ouvrage : *Arithmetica integra*, authore Michaelis Stifelii ; Norimb. ap. Joh. Petreium, 1544, in-4. de 322 pages. Il y a une préface du célèbre théologien Philippe Melanchthon qui recommande l'arithmétique parce qu'elle forme l'esprit et l'accoutume à prendre plaisir à la vérité et à la certitude. Le premier livre du cinquième chapitre *De extractionibus radicum* contient une section intitulée : *De inventionem numerorum qui peculiariter pertinent ad suas species extractionum*. C'est une table formée de colonnes qui contiennent les nombres qu'on appelle aujourd'hui coefficients binomiaux. En voici la formation :

Primo a latere sinistro descendit naturalis numerorum progressio, quam extendere poteris quantum volueris. Et illa radix est sequentium laterum omnium. Nam secundum latus quod continet numeros trigonales sic oritur ex primo latere : Duobus () cellis de primo latere obmissis, repetitur numerus cellula tertio in primo latere, atque ab eodem numero incipit latus secundum videlicet circum tertiam cellulam primi lateris. Deinde ex additione amborum illor. (id est ex tertio primi lateris, et primo termino secundi lateris) fit numerus secundus secundi lateris. Sic ex secundo numero secundi lateris, et ex suo collateralis fit tertius numerus secundi lateris, et ex tertio, et suo collateralis fit quartus. Et sic deinceps in infinitum fieri potest descensus. Quomodo autem nascitur secundum latus ex latere primo, ita nascitur latus tertium ex latere secundo, et eodem modo nascitur latus quartum ex latere tertio, et quintum ex quarto : et sic deinceps, ut in tabula omnia hæc exemplariter vides. Certe admodum mirandum est talia contineri sub numerorum vicibus.*

D'après cette description, il est évident que le triangle de Pascal appartient à Stifel. Il se sert même de cette table, pour construire, à son insu, les termes binomiaux, mais rien qu'en vue de l'extraction des racines : *Cui speciei quilibet ordo transversaliter progrediens serviat, subindicat ordinis illius numerus primus, notum est enim 2 subindicare quadratum*. Ainsi pour l'extraction de la racine huitième, il dit :

Ex ordine illo 8. 26. 56. 70. sumuntur numeri qui servant extractioni Zensizensensica. Primo recipiuntur ex ordine quo ponantur. Deinde repetuntur omnes retrogrado excepto ultimo. Erunt ergo septem numeri videlicet

(*) Il faut d'unus.

s. 25. 56. 70. 56. 25. s. etc. *ut* libet eorum præpono suas cifras. Recipit autem quilibet eorum pro se cifram unam, et pro quolibet sequenti numero etiam unam recipit. Ut 8 septem cifras, unam pro se et reliquas sex pro reliquis sex numeris sequentibus : sic secundus numerus, id est 28, recipit sex cifras, unam pro se et alias quinque pro numeris quinque sequentibus : sic tertius, id est 56 recipit quinque, et quartus est 70 recipit quatuor, et sic deinceps, quemadmodum vides nos hic esse positos :

50000000
28000000
16000000
7000000
560000
2800
80

C'est tout ce qu'il dit de l'extraction de la racine huitième, il en résulte clairement qu'il avait le sentiment du binôme et le formait même ; aussi Kästner, dont nous avons extrait ce qui précède, dit avec raison que Stifel connaissait le théorème binomial *virtualiter*, mais non *formaliter* (*Geschichte der Mathematik*, t. I, p. 128, 1796). On peut en dire autant de la théorie des logarithmes. Ainsi, dans le 4^{me} chapitre du 1^{er} livre, où il traite des progressions géométriques, on lit : *Sequitur utilis tractatio ut progressioni arithmetice respondeat geometrica progressio*. Il montre l'usage qu'on peut faire de cette correspondance, pour changer la multiplication et la division en addition et soustraction ; les élévations aux puissances et extractions de racines en multiplication et division, et donne des exemples. Il dit la chose et ne se sert pas du mot *puissance*, mais il emploie le mot *exposant* dans le même sens que nous. Ainsi, dans une équation où un zensicube doit être égal à un sursolide plus 35156 bicarrés ; il dit que les *exposants* sont 6, 5, 4. Cet homme de génie né à Eslingen en 1509, et pasteur de l'église de Holsdorf, a enseigné en Saxe, en Prusse et en diverses villes de France et d'Italie, et est mort à Iéna en 1567. Il a publié une arithmétique en allemand, Norimb., 1545, in-4°, et un livre de calcul (*Rechenbuch*) sur la pratique italienne et allemande, Nuremb., 1546, in-4°.

NOTICE

SUR

LA DACTYLONOMIE

OU

NUMÉRATION DIGITALE DES ANCIENS ARABES.

(Fragment de l'ouvrage de Chems eldin abou Abd Allah Mohammed Ibn Ahmed El-Mouqontli.)

La dactylonomie est l'art de calculer avec les doigts. Plusieurs auteurs de tous les âges offrent des documents sur cette méthode, qui fut usitée primitivement en Orient. On la trouve enseignée par Bède, Raban-Maur et Gerbert. Ce dernier notamment en a exposé le système dans son *Traité de l'Abacus*, dont M. Chasles de l'Institut a lu des extraits traduits par lui devant l'Académie des sciences, en 1843.

L'illustre interprète de l'écriture sainte, saint Jérôme, en traitant un passage de l'Évangile, n'a pas craint d'emprunter des exemples à cette doctrine.

« *Les nombres soixante et trente, dit-il, quoique nés sur un même sol et d'une même semence, diffèrent cependant beaucoup par leur valeur.* »

« Trente est le symbole du mariage. En effet, le rapprochement

de l'index et du pouce qui se baisent délicatement représente l'union du mari et de la femme. »

« Soixante est l'emblème des veuves accablées de tristesse et de tribulations. Le pouce abattu sous l'index indique leur position. »

Hariri, dans sa trente-neuvième *mékhma*, emploie aussi une expression empruntée de cette numération.

Outre les ouvrages de ces écrivains, je citerai encore un volume de la bibliothèque impériale, intitulé : *De numeris libri duo, authore Ioanne Nouiomago*, 1539, et dans lequel on a représenté, au moyen du dessin, les dix-neuf figures principales de cette numération.

EXPLICATION DU CALCUL DIGITAL

Par Chems eldin abou Abd Allah Mohammed Ibn Akmed El-Mouçouli.

Personne n'ignore que les orateurs comme les négociants, chez les peuples de l'Orient, ont fait un usage constant de la dactylogonomie pour représenter les nombres, les uns dans leurs discours, les autres dans les transactions commerciales. Cependant, je n'ai encore vu aucun ouvrage qui développât ce sujet.

Au moyen des positions et de l'enchâssement des doigts de la main humaine, instrument de tant de merveilles, on a formé dix-neuf figures correspondant aux divers ordres de nombres, et l'on est parvenu à chiffrer d'une manière distincte depuis *un* jusqu'à *dix-mille*.

Comment opère-t-on dans cette numération ? Parmi les doigts de la main droite, l'auriculaire, l'annulaire et le doigt du milieu sont destinés à représenter les neuf unités ; le pouce et l'index à exprimer les dizaines. La main gauche sert à compter les centaines, avec le pouce et l'index ; et les mille avec l'auriculaire, l'annulaire et le doigt du milieu.

Pour former le nombre *un*, il faut abaisser le doigt auriculaire sur la paume de la main ; pour le nombre *deux*, on ploie l'annulaire à côté du petit doigt ; pour le nombre *trois*, on rebas le doigt du milieu à côté des deux précédents. Pour obtenir le nombre *quatre*, on a soin de relever le doigt auriculaire en maintenant les deux

autres baissés: Si vous voulez produire le nombre *cinq*, vous devez redresser aussi l'annulaire. Le geste qui aide à figurer le nombre *six*, consiste à appuyer l'annulaire tout seul contre la base de la paume. Pour exprimer *sept*, levez aussi l'annulaire, mais gardez l'auriculaire fortement incliné vers le poignet. Pour le nombre *huit*, il faut procéder de la même manière avec l'annulaire; enfin, pour le nombre *neuf*, on fait la même chose avec le médial.

Dans ces trois dernières figures, les bouts des doigts s'appliquent fortement sur l'extrémité de la paume de la main, de peur qu'elles ne ressemblent aux trois premières figures.

Pour obtenir le nombre *dix*, il faut poser l'ongle de l'index de la main droite sur la première articulation du pouce, de telle façon que l'intervalle laissé entre les deux doigts ressemble à un cercle. Pour le nombre *vingt*, la partie de la phalange inférieure de l'index, qui est près du médial, doit être passée par-dessus la convexité de l'ongle du pouce, en sorte que la tête du pouce paraisse serrée entre les racines de l'index et du doigt du milieu, sans toutefois que ce dernier contribue le moins du monde à la formation du nombre *vingt*. Pour *trente*, il faut rapprocher par une légère inclinaison le bout de l'index de l'ongle du pouce, de manière à former l'apparence d'un arc bandé. Pour *quarante*, vous mettez la partie inférieure du bout du pouce à cheval sur le dos de la phalange inférieure de l'index, et vous avez soin de ne point laisser d'espace entre le pouce et le bord de la paume de la main. Pour figurer le nombre *cinquante*, on dresse l'index et l'on courbe le pouce en le maintenant contre la paume au-dessous de son collatéral. Pour *soixante*, il faut ployer le pouce et rabattre sur la convexité de son ongle la partie inférieure de la deuxième phalange de l'index, comme pour prendre une flèche. Pour *soixante-dix*, on tient le pouce cambré et on fait descendre la partie inférieure de la deuxième phalange de l'index sur le bord de l'ongle du pouce, en ayant soin de laisser le dos de cet ongle entièrement découvert. Pour exprimer le nombre *quatre-vingts*, il suffit de cambrer le pouce en mettant le bout de l'index sur la convexité de la première articulation. Pour *quatre-vingt-dix*, vous poserez l'ongle de l'index sur l'articulation de la seconde phalange du pouce, de même que vous l'avez appuyé sur l'articulation de la première phalange pour former le nombre *dix*.

D'après les notions préliminaires exposées précédemment, on

comprendra que ce qui, dans la main droite, sert à exprimer l'une des unités depuis *un* jusqu'à *neuf*, exprime, dans la main gauche, le même nombre de l'ordre des mille, depuis *mille* jusqu'à *neuf mille*, et aussi, que ce qui, dans la main droite, sert de signe à un nombre de l'ordre des dizaines, depuis *dix* jusqu'à *quatre-vingt-dix*, indique, dans la main gauche, le même nombre de l'ordre des centaines, depuis *cent* jusqu'à *neuf cents*.

Reste donc la dix-neuvième figure, dont le but est d'exprimer *dix mille*. Pour la représenter, il s'agit de placer bout à bout l'ongle de l'index et l'ongle du pouce.

Je termine cet article en constatant que, si la numération digitale est complètement inconnue des Arabes d'Afrique, il existe chez les Mozabites un procédé de *multiplication digitale* à l'aide duquel on opère aussi vite que sûrement.

A. GUERDONNEAU.

MANIÈRE DE COMPTER DES ANCIENS AVEC LES DOIGTS DES MAINS,
D'APRÈS UN PETIT POÈME INÉDIT ARABE DE CHEMS-EDDIN EL MOSSOULI,
ET LE TRATADO DE MATHEMATICAS DE JUAN PEREZ DE MOYA,
IMPRIMÉ A ALCALA DE HENARES, EN 1573.

PAR M. ARISTIDE MARRE.

Professeur, Officier de l'Instruction publique, Membre de la Société Asiatique de Paris.

La Bibliothèque Impériale de Paris possède un manuscrit catalogué sous le numero 1912 du Supplément arabe, et portant pour titre: *Le guide du Kiateb*. C'est un recueil de divers ouvrages dont le plus grand nombre traitent des sciences mathématiques, et particulièrement de l'arithmétique, de l'algèbre et de la planimétrie ou mesure des surfaces planes. En tête du premier opusculé se rencontre le véritable titre: *Melhat al âdeb fy send'at al Kâtib*. Ce manuscrit très-beau et en parfait état de conservation faisait partie de la bibliothèque léguée en 1732 au monastère de S.^t Germain des-Prés par Henri du Cambout, Duc de Coislin, pair de France et évêque de Metz.

Au feuillet 92, commence un petit poème ou *Kassideh* sur la manière de calculer ou plutôt d'exprimer les nombres, en pliant et levant les doigts (1). Avant

(1) Il codice della Biblioteca Imperiale di Parigi contrassegnato « Supplément arabe 1912 », e citato di sopra (linee 7—8 della presente pagina 309) è composto di 189 carte, delle quali le 1^a—7^a, 186^a, 189^a non sono numerate, e le 8^a—187^a sono numerate a penna ne' margini superiori de' recto coi numeri 1—180. Nella 92^a di queste 189 carte, numerata nel margine superiore del suo recto col numero 92, trovasi il testo arabo del piccolo poema menzionato di sopra (linee 16—17 della presente pagina 309). Nelle linee 6—8 del rovescio della carta terza del suddetto codice, si legge:

« F. 92 r. Petit poème sur la manière de calculer en pliant et levant les doigts par Sebemseddin Abou Abdallah Moham- med ben // Ahmed Almozouli Athanabelli. »

In questo passo del precitato manoscritto è indicato, che nel recto della carta numerata 92 di questo codice incomincia il detto poema di Chems-Eddin el Mossouli. Il passo medesimo fa parte d'un catalogo di scritti contenuti nelle carte 1^a (recto, lin. 5—27, verso), 2^a—4^a, del manoscritto stesso. Nel rovescio della carta settima di questo manoscritto trovasi scritto a penna il titolo seguente:

« Recueil d'éléments d'arithmétique, de géométrie, d'arpentage // &c avec des instructions sur la nature des impositions et des // diverses sortes de revenus publics en Egypte, sur leur assiette et // leur perception: le tout destiné à l'instruction de celui // qui // veut se mettre en état de remplir la place de Kiateb. »

Nel margine inferiore del medesimo rovescio è incollata una striscia di carta nella quale è scritto a penna:

« Ex Bibliotheca mss. COISLINIANA, olim SEQUELIANA, // quam Illust. HENRICUS DE CAMBOUT, DUX DE // COISLIN, // Par Franciscus, Episcopus Metensis, &c. Mo- // nasterio S. Germani a Pratis legavit. An. M.DCC.XXIII. »

Il precitato manoscritto contrassegnato « Supplément arabe, n° 1912 » è legato in pelle gialla colorita a marmo, con dorso di marocchino rosso, con cinque cordoni sul dorso che lo dividono in sei scompartimenti, nel secondo de' quali si legge in lettere dorate « LE GUIDE DU KIATEB ». Nel 6° di questi sei scompartimenti trovasi incollata una striscia di carta bianca con lembo verde, nella quale è scritto a penna « S. Ar. // 1912. » In ciascuno dei 10, 3°—6° de' medesimi sei scompartimenti vedesi un N sormontato da corona, con ai lati due corone civiche, e con quattro stelle al di sopra e quattro al disotto. — La Biblioteca Imperiale di Parigi possiede un catalogo manoscritto composto di due volumi, in foglio, ed intitolato nel primo di questi volumi « Supplément // du Catalogue des Manuscrits // Arabes // de la bibliothèque royale // par M. Reinaud. // Paris // 1846. » Il secondo di questi due volumi è composto di 484 pagine, delle quali le 1^a—12^a, 418^a—420^a, 423^a, 424^a, 427^a, 428^a, 431^a, 432^a, 435^a, 436^a, 439^a, 440^a, 443^a, 444^a, 447^a, 448^a, 451^a, 452^a, 455^a, 456^a, 459^a, 460^a, 463^a, 464^a, 467^a, 468^a, 470^a—484^a non sono numerate, e le 13^a—417^a, 421^a, 422^a, 425^a, 426^a, 429^a, 430^a, 433^a, 434^a, 437^a, 438^a, 441^a, 442^a, 445^a, 446^a, 449^a, 450^a, 453^a, 454^a, 457^a, 458^a, 461^a, 462^a, 465^a, 466^a, 469^a

l'en donner la traduction, nous devons dire un mot des fonctions du *Kiateb* ou *Kâtib*, puisque c'est en faveur de cet ordre de fonctionnaires que le *Melhat al âdeb fy send'at al Kâtib* a été composé, et que notre petit *Kassideh* y a trouvé place.

Le mot *Kâtib* signifie au propre écrivain, il désigne à la fois un secrétaire et un intendant; le *Kâtib*, fonctionnaire du gouvernement, s'occupait en Egypte de la répartition et de la perception des impositions et autres revenus publics. Ibn Alhaïtham et l'illustre Abou'l Wafâ Al Bouzjdjâni entre autres, ont écrit des traités spéciaux sur les connaissances mathématiques nécessaires aux *Kâtibs*, et leurs ouvrages montrent jusqu'à quel degré d'instruction supérieure, pratique et théorique, devait s'élever l'aspirant au *Kâtibat*. Mais ce qui, par dessus tout, témoigne de la haute estime dans laquelle cette fonction était tenue chez les Arabes, c'est le soin avec lequel l'auteur du *Melhat al âdeb fy send'at al Kâtib* s'est plu à citer (f. 9 verso et f. 10 recto) les Khalifes qui commencèrent par exercer les fonctions de *Kâtib*. Il suffira de mentionner ici:

Aali ben Abou Thâlib,
Zeïd ben Thabet el Ansâry,
Moâviah ben Abou Sofîân,
Othman ben Ofîân,
Abd el Malek ben Merouân,
Merouân ben el Hakem, etc.

N'oublions pas non plus, car le trait est caractéristique, Loth, le *Kâtib* d'Abraham, Joseph, le *Kâtib* du Pharaon Laarfyz (?), et Jean, fils de Zacharie, le *Kâtib* de N. S. Jésus-Christ.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux, lequel me suffit :

Le cheik Chems-Eddin Abou Abdallah Mohammed ben Ahmed El Mossouli el Hanbali a dit: Par la grâce de Dieu le très-haut ceci est un *Kassideh* sur le calcul par la contraction des doigts de la main; il comprend avec détails toutes les difficultés propres à ce genre de calcul, et les rend accessibles. En Dieu est

sono numerate coi numeri 309—713, 715—739. Nelle linee 35—37 della 377^a di queste 494 pagine. numerata col numero 673, si legge:

- f. 92 . . . Petit poème sur la manière de calculer
- en pliant et levant les doigts, par Chem eddin
- Abou Abd-Allah Mohammed ben Ahmed Moussouli. »

In questo passo del detto volume secondo del catalogo intitolato « Supplément », ecc. è indicato trovarsi nella carta 99^a, numerata 92, del precitato codice contrassegnato « Supplément arabe, n.° 1913 » il testo arabo del poema suddetto di Chems-Eddin el-Mossouli. Il passo medesimo fa parte d'una descrizione di questo codice contenuta nello stesso volume secondo (pagina numerata 665, lin. 23—31; pagine numerate 667, 669, 671, 673, 675, 677; pagina numerata 679, lin. 1—6). Il medesimo volume è legato in marocchino rosso con quattro cordoni sul dorso, che dividono il dorso medesimo in cinque scompartimenti, nel primo de' quali è impresso in oro « BIBLIOTHÈQUE ROYALE || CATALOGUE || DES MANUSCRITS || DU || SUPPLÉMENT || ARABE ». Nel secondo di questi scompartimenti è pure impresso in oro « 2 || 1001 à 1952 ». B. B.

la protection et la défense; par Lui la gloire, les bienfaits, les faveurs et la prospérité descendent sur l'Islam, le Livre et le Sunna. Gloire à Dieu !

Or donc le voici :

« Louanges à Toi, à jamais, à Toi digne d'éternelles actions de grâces !

Après tes louanges viendra la bénédiction de celui que tu as eu la miséricorde d'envoyer pour guide aux hommes.

Après cela, ô toi qui interrogas, fais bien attention quels nombres tu demanderas. Pour tout nombre d'unités simples, c'est ta main gauche, sache-le bien et ne l'oublie pas. |

— Pour le *un*, tu plies le petit doigt,

— De plus l'annulaire, pour le *deux*,

— Et de plus encore le doigt du milieu pour le nombre *trois*, et c'est tout.

— Pour le *quatre*, tu lèves le petit doigt,

— Et, en outre, pour le *cinq*, l'annulaire.

— Pour le *six*, tu plies l'annulaire tout au bas vers l'extrémité de la paume de la main, et tu élèves les autres.

— Pour le *sept*, tu couches le petit doigt sous le pouce à l'extrémité de la paume repliée, et tu relèves l'annulaire.

— Pour le *huit* et le *neuf*, c'est en pliant conjointement avec le petit doigt, le premier, puis le second doigt à côté.

— Pour le *dix*, c'est avec le nœud du pouce; écoute bien: tu rases sa tête avec l'index; fais cela.

— Place l'ongle de ton pouce à la base intérieure du doigt du milieu, c'est le *vingt*. Fais-le.

— Si tu réunis la tête de l'index avec la tête du pouce, tu fais *trente*.

— Si tu mets le pouce à cheval sur l'index, et si tu l'y maintiens, tu figures le *quarante*.

— Si tu opères pour *cinquante*, mets ton pouce sous l'index, prends y garde.

— Mets le pouce sur l'index, écoute bien, comme lorsque tu tiens la flèche, et c'est *soixante*.

— Pour ton nombre *soixante-dix*, mets la troisième phalange de ton index sur ton pouce, au dessous du nœud.

— Pour parfaire le *quatre-vingts*, pose le pouce par dessous l'index, ongle sur ongle.

— Pour le nombre *quatre-vingt-dix* plie l'index, resserre le plus possible l'espace entre le pouce et lui, et mets ton pouce au dessus comme un serpent.

Tu désires maintenant indiquer les centaines, eh bien ! pour cela tu figures avec ta main droite les unités que ta gauche a fait connaître; garde-le dans ta mémoire; de même les dizaines de ta gauche, exprimées avec ta droite seront les unités de mille.

— Pour *dix-mille* joins ton pouce avec l'index, dans ta main gauche, ô noble ère, donne leur la forme d'un anneau, et incline leur tête en bas.

Louange à Dieu l'unique ! O frère instruit et intelligent, tu demandes une œuvre bonne et facile. Montre-toi indulgent pour les défauts que celle-ci laisse voir, car personne, ô mon disciple, n'en est exempt. Accepte-la comme une ancée semblable à la pleine lune éclatante au zénith d'un ciel sercin. Si elle ne veut pas se donner à toi et qu'elle résiste, il ne faut point te décourager, car elle ressemble à une nouvelle mariée qui ne veut pas se donner facilement, mais qui veut qu'on la flatte et la caresse pour obtenir ses faveurs. Offre-lui de l'or et plonge-toi dans les mers de la pensée, alors tu obtiendras ses faveurs. En agissant ainsi tu verras que son éclat est comparable à celui des astres, et tu deviendras en même temps un homme savant et distingué. Salut et bénédiction de Dieu sur Mohammed qu'il a envoyé aux hommes pour les faire passer des ténèbres à la lumière ! Salut et bénédiction de Dieu sur sa famille, ses compagnons et leurs successeurs ! Le parfum de la prière surpassera le parfum du zarneb (?) et du giroflier, tant que les astres de la nuit paraîtront et disparaîtront dans le firmament. Louange à Dieu ! Absolution et bénédiction de Dieu sur notre seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons !

FIN.

A ce petit *Kassideh* arabe, il nous paraît utile de donner comme complément et terme de comparaison, un extrait du Traité de Mathématiques de don Juan Perez de Moya, imprimé à Alcalá de Henarez en l'année 1573. Voici comment s'exprime à son tour sur ce même sujet l'érudit et savant mathématicien espagnol :

« CHAPITRE IX QUI TRAITE DE LA Manière de compter des anciens avec les doigts des mains et autres parties du corps.

» Les anciens comptaient avec les doigts de la main gauche jusqu'à 99, et avec ceux de la main droite, les nombres au-dessus de cent, de la manière que nous allons dire. Quoique différents auteurs fassent mention de cette manière de compter, tels que Erasme, dans l'*Exposition* du premier livre de Saint Jérôme contre Jovinien, et Saint Jérôme lui-même dans le chapitre 13 du premier livre sur l'évangile de Saint Mathieu; et Saint Isidore; et Bède l'anglo-saxon, dans le traité qu'il intitule: *de natura rerum*; Antoine de Lebrixa, en la quinzième annotation de la troisième *Quinquagenaria*; et beaucoup d'autres. Celui qui l'explique le mieux et avec le plus de soin est Pierio Valeriano, en son 37.^e livre de *Hieroglyphicis*, qu'il rédigea mieux que tout autre. Ce dernier auteur dit que pour indiquer un, les anciens pliaient le petit doigt de la main gauche de manière à ce qu'il touchât la paume de la main. Et en pliant de la même manière le petit doigt et celui qui le suit (que les Latins appellent *medicus*) indiquent le nombre deux. Pour trois, ils pliaient de la même manière les deux doigts susdits et le doigt du milieu. Pour indiquer quatre, ils levaient le petit doigt, et laissaient le *medius* et le *medicus* pliés, comme ils l'étaient pour trois. Pour cinq, ils tenaient plié le doigt *medius* et étendus les autres doigts de la main. Pour six, ils pliaient le doigt *medicus* et étendaient les autres. Et c'est pour cette manière de représenter le nombre six que Macrobie dans les Saturnales (Livre 7, chap. 13), recherchant pour quelle raison l'anneau se met dans ce doigt *medicus* plutôt qu' dans tout autre doigt de la main, entre autres causes donne celle-ci: que c'est, parce que les anciens figuraient avec ce doigt le nombre 6, et comme 6 est le premier des nombres parfaits, et que les nombres parfaits étaient grandement célébrés pour les propriétés excellentes et singulières qu'on trouvait en eux des différentes propriétés des autres nombres (ainsi que nous l'avons démontré dans le premier livre), on récompensa le doigt qui dénote un nombre si excellent, en le couvrant avec l'anneau. — En revenant au sujet, pour marquer 7, les anciens pliaient le petit doigt autant que possible, de manière qu'il atteignît la base de la main. — Pour huit, ils pliaient à la fois de cette même manière le *medicus* et le petit doigt. — Pour 9 ils pliaient le *medius*, conjointement avec les

deux autres, petit doigt, et *medicus*. — Pour 10, ils posaient le bout de l'index sur la jointure du milieu du pouce. — Pour 20, l'ongle du pouce était posée entre les racines de l'index et du *medicus*. — Pour 30, le bout de l'index était joint avec le bout du pouce. — Pour 40, ils mettaient le pouce sur l'index en formant une croix. — Pour 50 ils étendaient bien la paume de la main et les doigts, et avec le pouce ils faisaient cette figure Γ. — Pour 60, ils arrondissaient l'index autour du pouce par le milieu. — Pour 70 ils arrondissaient le pouce avec l'index, comme pour 60 avec cette différence que pour 70 on doit s'efforcer à arrondir de manière que l'angle du pouce reste, le plus à découvert qu'il est possible. D'où il s'ensuit, que pour 80, quoique l'ongle du pouce soit couverte lorsque l'index l'entoure, on pourra le faire. — Pour 90 ils posaient l'index sur le pouce à l'inverse de ce qui se faisait pour 40. — Pour 90, ils pliaient l'index de manière à toucher à la naissance ou racine du pouce. — De là ils passaient à la main droite; et ce qui en la main gauche était un, en la droite est cent; et ce qui en la gauche était deux, en la droite est deux cents; et ils procédaient ainsi successivement jusqu'à figurer 90 dans la main droite, de la même manière que dans la gauche ils figuraient neuf. Et ce qui en la gauche faisait 10, en la droite fera mille; et ce qui faisait 20, deux mille; et ainsi de suite jusqu'à neuf mille qui se figure avec la main droite de la même manière qu'on figurait quatre-vingt-dix de la main gauche. Juvenal (*Satire dixième*) fait mention de de cette manière compter les centaines avec la main droite quand il dit en parlant de Nestor :

» *Fœlix nimirum qui per tot sæcula mortem*

» *Distulit, atque suos jam dextra computat annos.*

Plinie (livre 34, chap. 7) et Macrobe (livre 1, chap. 9) font mention de cette manière de compter avec la main gauche les nombres inférieurs à 100 et avec la main droite les centaines précises en traitant de la statue de Janus qui présidait à l'année chez les anciens, disant qu'on le représentait indiquant avec la main droite le nombre 300, et avec la gauche 65, c'est-à-dire le nombre ou la mesure des jours qui composent l'année. Suivant ce que nous avons montré, la statue de Janus avait les 3 (doigts petit, *medicus* et *medius*) de la main droite, fermés, marquant ainsi trois cents, et de la main gauche faisant la figure (dando *vna higa*), figure avec laquelle on indique 65.

» Poursuivant ce qui a été commencé, je dis que l'on trouve que la main gauche appuyée à la poitrine, de manière que la paume soit tournée vers le ciel, marque dix-mille. La main renversée, la paume tournée contre la poitrine, marque 20000. La main touchant la poitrine de manière que la paume soit tournée vers les pieds, marque 30000. La dite main placée en face du nombril, la paume vers le ciel, marque 40000. La paume de la main tournée en face du nombril marque 50000. La main placée de manière qu'elle regarde le sol 60000. La main touchant la cuisse avec la paume vers le haut, marque 70000. La main appuyée sur la cuisse, marque 80000. Et la paume qui regarde le sol, et qui touche la cuisse marque 90000. Passe à la main droite, et de la même manière que dans la gauche tu nombres dix mille, avec la droite tu feras cent-mille, et ainsi de suite, jusqu'à ce que tu arrives à neuf cent mille. Le nombre, ou quantité qu'appellent *cuento* (qui est 10 fois cent mille) est indiqué avec les deux mains, entrelaçant les doigts les uns avec les autres. On ne sait pas l'inventeur de cette manière de compter, mais comme les Egyptiens étaient amis de peu de mots (ainsi que le dit Théodorete (Livre de *Graecarum affectionum curatione*)) elle dut sortir de ceux-ci (1) ».

(1) L'edizione del 1573, menzionata di sopra dal Sig. Marre nelle linee 21—22 della pagina 312, è intitolata « TRATADO DE || MATHEMATICAS EN || QUE SE CONTIENEN COSAS DE ARITHMETICA, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural. Con || otras varias materias, necessarias a || todas artes Liberales, y Mechanicas. || Puestas por la orden q̃ a la buelta de la hoja veras. || Ordenado por el Bachiller Juan Perez de Moya, natural de Sant Esteuan del Puerto. || DIRIGIDO A LA s. c. m. m. DE DON || Phelipe Rey de España nuestro señor. || Con licencia, y privilegio Real de Castilla y Aragon. || EN ALCALA DE HENARES. || Por Juan Gracian. Año de 1573. » Questa edizione, della quale la biblioteca Alessandrina di Roma possiede un esemplare contrassegnato « C.d.29 », è un volume, in foglio, composto di 1321 pagine delle quali le 1^a—37^a, 66^a, 302^a, 434^a, 464^a, 789^a—796^a, 1048^a—1060^a, 1062^a, 1064^a, 1125^a—1128^a, 1310^a—1324^a non sono numerate, e le 38^a—65^a, 67^a—361^a, 363^a—433^a, 435^a—463^a, 465^a—788^a, 797^a—1047^a, 1061^a, 1063^a, 1065^a—1124^a, 1129^a—1309^a sono numerate coi numeri 2—29, 31—100, 201, 102—186, 188—325, 327—344, 345 (*sic*), 346—397, 399—427, 429—593, 694, 595—608, 611, 610—632, 634, 634—724, 729—736, 733—752, 5—138, 319, 140—144, 345, 146—148, 159, 150—232, 243, 234—255, 1, 3, 5—64, 69—168, 169, 170—249. Nella edizione medesima (pag. 744^a, numerata 708, col. 1^a, lin. 5—43 e col. 2^a; pag. 745, numerata 709, col. 1^a e col. 2^a, lin. 1—10), si legge :

« CAP. IX. TRATA DELA
• orden que los antiguos tuvieron en
• cõtar con los dedos de las manos,
• y otras partes del cuerpo.
• OS antiguas cõtavan con
• los dedos de la mano yz-
• quierda, hasta 99, y con los
• de la derecha de cõtavan en

• adelãte de la manera que luego dire-
• mos. Y aũq̃ varios autores han m̃
• cõtado deste modo de cõtãr, como Eras-
• mo en la exposiciõ del primero libro
• de sant Hieronymo cõtra Ioviniano.
• Y el mismo sant Hieronymo en el li-
• bro primero, cap. 13. sobre el euangeli-
• o de sant Matthew. Y sãt Ysidoro, y de

De libro
alphabetic.

da Anglo Saxon, en el tratado q̄ inti
tula de natura rerum. Y Antonio de
Liberia en la quidecima anotaciō
de la tercera Quinquagena, y otros
muchos. El q̄ mejor i mas diligente-
mente lo declara, es Plerio Valeria-
no en el lib. 37, q̄ recopilō de todos lo
mejor. El qual dize que para denotar
uno doblegauan el dedo minimo de
la mano yzquierda, & arto quētoque
a la palma de la mano. Y doblegūdo
de la misma manera el dedo minimū
y el que se le sigue (que es el que dize
los Latinos medicus) doblan este no
mero dos. Y para tres, doblegūn de
la misma suerte los dichos dos dedos
y el de enmedio. Para denotar qua-
tro, leuantauan el dedo minimo, y de
sauan al medius y al medicus doble-
gados, como se estauan para el tres.
Y para poner cinco, leuaua doblega-
do el dñdo medius, y estendidus los
otros de la mano. Para seys, doblega-

uā el dedo medicus,
y estendit los otros.
Y figurase deste mo-
do el numero de seys,
siguese & la q̄ Macro
lib. 7. c. 13
biu en los Saturnales
en donde pidiendo

la razón porque se pone la sortija en
esto dedo medicus, mas q̄ en otro de-
do de los de la mano, entre otras cau-
sas dize: q̄ porq̄ los antiguos denoti-
uā cō esta dedo el numero & 6, y porq̄
6, es el numero primero de los perfe-
ctos, y porq̄ los numeros perfectos erā
muy celebrados por las excelencias,
y propiedades, que en ellos hallauā
diferēcias de las & los otros numeros
(como en el primero libro muestra-
mos) sus razones q̄ a dedo que tan esco-
lento numero denota, q̄ se lo de pre-
mio comendado a la sortija. Boleuā-
do al pposito, para denotar 7, doble-
gauan el dedo minimo todo lo possi-
ble, de arte q̄ llegue a la raya & la ma-
no. Y para 8 doblegauan (de la misma
suerte) al medicus cō el minimo. Para
9 doblegauan el medius, jutamente cō
los otros dos, minimo, y medicus. Pa-
ra 10 ponit la pta del index sobre la
juntura de enmedio al Pollex. Para 20
la vña al Pollex puesta entre las ray-
as al index y medicus. Para 30 la pta
del index juta con la del Pollex. Pa-
ra 40 ponit el pollex sobre el index,
hastado cruz. Para 50, estendit hñe la
palma de la mano y dedos, y cō el Pol-
lex hastado esta figura F. Para 60, ru-
deuā el index al Pollex por medio.
Para 70, rodeā al pollex cō el index,
como para los 60, salvo q̄ se ha & pu-
curse & arrodar para 70, de modo q̄
se descubra lo mas q̄ pueda de la vña
al pollex. De do se sigue, q̄ pa 60, aun
que no se parezca toda la vña al pol-
lex quando el index lo rodea, se podra

Matra de
cima.Lib. 34. ca
pit. 7.
lib. 1. ca. 2.

laxer. Para 80 ponian el index sobre
el pollex al contrario de como quādo
se puso 40. Para 90 ponit el index do-
blado de modo que toque al naci-
miento, o raya del Pollex. De aqui pas-
san a la mano derecha, y dōde en la
yzquierda era vno, en la derecha es
ciento, y donde en la yzquierda son
dos, en la derecha docientos. Y así
consuetudinamente hasta poner 200
en la derecha del modo que en la yz-
quierda se ponian nueue. Y donde en
la yzquierda eran 10, en la derecha
seran mil. Y donde 20, dos mil, &c.
hasta poner nueue mil en la derecha
del modo que en la yzquierda se po-
nían nouenta. Haze mención deste
contar los cientos con la mano dere-
cha Iuuenal, quando dize hablando
de Nestor. Felix nimis qui per tot
secula mortis distulit, atque suos iam
destra cūpatat annus. Haze mención
deste orden de contar con la yzquier-
da quantidad que no lleguen a 100, y
con la derecha por cientos iustos. Pli-
nio, y Macrobrin, tratando de la esta-
tua de Iano (q̄ le tenían los antiguos
por presidente del año) diciendo q̄ le
figurauan señalando con la mano de-
recha 300, y cō la yzquierda 65, que
es el numero, o medida de los dias q̄
tiene el año. Y segun hemos mostra-
do, la estatua de Iano estaua con los 3
dedos, minimo y medicus, y medius
de la derecha cerrados, con los qua-
les denota trecentos, y con la mano
yzquierda dando una higa, con la
qual figura se denota 65.

Prosiguendo con lo comēçado, di-
go q̄ se lee q̄ la mano yzquierda arri-
mada al pecho de arte que la palma
dla mano mire hacia el cielo, denota
diez mil. Duelta la mano, y tocado al
pecho con la palma, denota 20000.
Tocado la mano al pecho de modo
que la palma mire hacia los pies, de-
nota 30000. Puesta la dicha mano en
frente del ombligo, la palma hacia el
cielo, denota 40000. La palma arri-
mada en frente del ombligo denota
50000. Y puesta la mano de modo q̄
mire hacia el suelo 60000. La mano
tocado al muslo cō la palma hacia lo
alto denota 70000. La mano assenta-
da en el muslo, denota 80000. Y la
palma q̄ miro hacia el suelo, y q̄ toq̄
en el muslo, denota 90000. Pasa a la
mano derecha, y & la misma suerte q̄
en la yzquierda cōsta diez mil, con
la derecha hazas cñ mil, &c. hasta lle-
gar a nuevecientos mil. El numero, o
quantidad q̄ dize cuēto (q̄ es 10 veces
cñ mil, se denota con ambas manos,
entrelazados los dedos vnos cō otros.
Esta orle de contar, no se lee quādo
infinito, mas segū los Egipcianos eran
amigos de pocas palabras (como di-
racione.
se Theodoretus) destas deuio salir.

Lib. de Grē
cord asse-
ctiōn ca
ratione.

Questo passo della detta edizione intitolata « TRATADO || DE MATHEMATICAS », ecc. trovasi tradotto
in francese di sopra (pag. 312, lin. 24—40, pag. 313, lin. 2—40). Nelle pagine 37^a, non numerata
(col. 1^a—2^a), 38^a—78^a, numerata 2—751; 788^a, numerata 752 (col. 1^a, e col. 2^a, lin. 1—7) di questa
edizione trovasi un'opera divisa in dieci libri, il decimo dei quali è intitolato nella edizione stessa
(pag. 737^a, numerata 701, lin. 1—6) « LIBRO DECIMO || destra obra. Trata de varios characteres de ||
» numeros, y de monedas, y pesos antiguos, y reglas del computo. || En que se tocan muchas cosas
» del tiempo, ne-cessarias y agradables a toda suerte de gente », e diviso in 38 capitoli, il nono

de' quali è composto di ciò che si riporta di sopra nelle colonne 1^a—2^a della pagina 313, e nelle colonne 1^a—2^a della pagina 314.

La Biblioteca Marciana di Venezia possiede un esemplare contrassegnato « E. 1. n. 15812 », cioè « Scaffale F, Palchetto 1, lila interna, n. 15812 progressivo delle opere stampate possedute dalla Biblioteca stessa », d'una edizione delle opere di S. Girolamo composta di nove volumi, in foglio, il primo de' quali è intitolato « OMNIUM OPERUM || DIVI EUSEBII HIERONYMI || STRIDONENSIS || TOMVS || PRI||MV || PAPAINETIA VIDELICET EX || QVAE AD VITAM RECTE || INSTITVENDAM PER||TINENT COM- || PLE||CTENS VNA CVM ARGVMENTIS ET SCHOLIIS || DES. ERASMI ROTERODAMI || CVIVS OPERA POTIS- || SI||MVVM EMENDATA SVNT || QVAE ANTE HAC || ERANT DEPRVA||VATISSIMA || ET INSTAVRA||TA EA QVAE || PRIVS || ERANT MYTILA. || APVD INGLYTA BASILEAM || EX ACVRATISSIMA OFFI||CINA FROBENIANA. » Nelle linee 20—33 del rovescio della carta 203^a del nono di questi nove volumi, numerata nel margine superiore del suo recto « Fo. 203 » si legge: « BASILEAE IN AEDIBVS IO. FROBENII IMPENDIO || DRV- || NIONIS, BASILII ET HONIFACII AMORBACHIO || RVN, AC IOANNIS FROBENII CHALCOGRAPHI || ET IACOBI || RECHAVRGII CIVIVM BASILIENSIVM, || MENSE MAIO. AN. M. D. XVI. ». Il terzo de' medesimi nove tomi, intitolato « TERTIVS TO||MVVS EPISTOLARVM || DIVI EUSEBII HIERONYMI || STRIDONENSIS, || COMPLECTENS || ΕΛΕΓΚΤΗ||ΚΑ ΚΑΙ ΑΠΟΛΟΓΕΤΙΚΑ, || NIMIRVM EA QVAE PERTI||NENT AD REFELLEN||DAS DIVERSAS HAE- || RE||EIS ET MALEDICIONVM || CALVMNIAS. || VNA CVM ARGVMENTIS ET || SCHOLIIS DES. ERASMI ROTHE|| RODAMI. », è composto di 169 carte, delle quali la prima non è numerata, e le 2^a—169^a sono numerate ne' margini superiori de' recto « fo. 2—fo. 169 ». In questo volume (carta 8^a, numerata « fo. » 8 », lin. 28—30) si legge:

« Centesimus & sexagesimus & tricesimus fru-

ctus q̄q̄ de una terra & de una semine nascatur, tamen multum differt in numero. Triginta referuntur ad nuptias. Nam & ipsa digitorum coniunctio, quasi noli se complexans osculo & foederans, maritū p̄iugit & cōiugem. Sexaginta vero ad viduas, eo quod in angustia & tribula tione sunt positae. Unde et superiori digito deprimuntur, quantoq̄ maior est difficultas exper- tae quōdam voluptatis illecebris abstinere: tanto maius est praemium. Porro centesimus nume- rus (diligenter quæso lector attende) de sinistra transfertur ad dexteram: & eisdem quidem digi- tis, sed non eadem manu: quibus in laeva nuptiae significantur & viduae: circulum faciens expri- mit virginitalis coronam. Hæc de impudentia magis q̄ iuxta ordinem disputationis dixerim. Cū enī adhuc vix de porta egrediar, & rudentibus vela sustollam, in mediū me quaestionū pe- lagus, subitus loquendi aestus abripuit. Unde cohibeo cursum, & paulisper sinus contraham, nec indulgelo mucroni, lim nunc pro virginitate ferire cupienti. »

Questo passo del detto volume intitolato « TERTIVS TO||MVVS EPISTOLARVM », ecc. fa parte del primo libro d'un opera di S. Girolamo intitolata « ADVERSVS IOVINIANVM ». Una nota di Erasmo di Rotterdam al passo medesimo trovasi nel volume stesso (carta 25^a, numerata « Fo. 25 », recto, lin. 33—64; verso, lin. 2—42). Juan Perez de Moya nel passo riportato di sopra (pag. 313, col. 1^a—2^a; pag. 314, col. 1^a—2^a) della suddetta edizione intitolata « TRATADO || DE MATHematicas, ecc. 1573 », cita questa nota dicendo « como Eras||mo en la expositio||n del primero libro || de sant Hieronymo cōtra Iovi- » niano » (vedi sopra, pag. 313, col. 2^a, lin. 3—5). Il passo riportato di sopra (linee 21—32 della presente pagina 315) della detta opera di S. Girolamo, trovasi anche stampato identicamente, salvo varietà ortografiche, nel volume intitolato « SANCTI EUSEBII || HIERONYMI || STRIDONENSIS || PRESBYTERI || OPERUM || TOMVS SECUNDVS || POST MONACHORVM ORD. S. BENED. E CONGREG. S. MAURI RE- » censionem || denuo ad Mss. Codices Romanos, Ambrosianos, Veronenses, aliosque, nec non ad priores || Editiones castigatus; quibusdam Sancti Doctoris Incubrationibus, seorsum tantum antea || vulgatis auctis, Notis & observationibus continenter illustratus. || STUDIO AC LABORE || DOMINICI VALLARSII || VERONENSIS PRESBYTERI || Opem ferentibus aliis in eadem Civitate Literatis viris, q̄q̄ » præcipue || MARCH. SCIPIONE MAFFEO. || VERONÆ. MDCCXXXV. || Apud || JACOBVM VALLARSIVM, & || PETRVM ANTONIVM BERNVM. || CVM GRATIA AC PRIVILEGIO EXCELLENTISSIMI SENATUS VEN. » (col. 240^a, lin. 11—39).

Il commento di S. Girolamo al Vangelo di S. Matteo è diviso in quattro libri, nel secondo de' quali sono esposti i Capi XII—XVI del Vangelo stesso. Sembra quindi che per errore nel detto passo della edizione intitolata « TRATADO || DE MATHematicas », ecc. trovisi « li||bro primeron » (vedi sopra, pag. 313, col. 2^a, lin. 6—7) in vece di « li||bro segundo ». Nel medesimo libro secondo S. Girolamo esponendo il Capo decimoterzo del detto Vangelo di S. Matteo, cita il passo riportato di sopra (linee 21—32 della presente pagina 315) della sua opera intitolata « ADVERSVS IOVINIANVM », ecc. scrivendo (SANCTI EUSEBII || HIERONYMI || STRIDONENSIS || PRESBYTERI || OPERUM || TOMVS SEPTIMVS || POST MONACHORVM ORD. S. BENED. E CONGREG. S. MAURI RECESIONEM || denuo ad Mss. Codices Romanos, Ambrosianos, Veronenses, aliosque, nec non ad priores Edi||tiones castigatus; quibusdam Sancti Doctoris Incubrationibus, seorsum tantum antea vulgatis || auctis: Notis, & Observationibus continenter illustratus || stu- » dio AC LABORE || DOMINICI VALLARSII || VERO NENSIS PRESBYTERI || Opem ferentibus aliis in eadem Civitate Literatis viris, q̄q̄ præcipue || MARCH. SCIPIONE MAFFEO. || VERONÆ. MDCCXXXVII. || Apud || PE- » TRUM ANTONIVM BERNVM & || JACOBVM VALLARSIVM. || CVM GRATIA AC PRIVILEGIO EXCELLENTISS. » SENATUS VEN., col. 91, lin. 8—18):

« Primum ergo de- » bemus audire, deinde intelligere, & » post intelligentiam fructus reddere do- » ctrinarum, & facere vel centesimum » fructum, vel sexagesimum, vel tri- » cesimum, de quibus plenius in libro

« contra Iovinianum diximus, & nunc » breviter perstringimus: Centesimum » fructum virginibus, sexagesimum vi- » duis & continentibus, tricesimum ca- » sto matrimonio deputantes. »

Forse a questo passo del detto commento allude Juan Perez de Moya scrivendo « Y el mismo sant Hie-
ronymo en el libro primero. cap. 13. sobre el euangelio. de sant Mattheo » (Vedi sopra, pag. 313, col. 2^a, lin. 6-8); giacchè nel commento stesso il modo di esprimere i numeri con inflessioni delle dita delle mani non è mai menzionato.

I primi dieci libri d'un'opera di S. Isidoro di Siviglia intitolata « ETYMOLOGIAE » trovansi stampati nelle pagine 11^a—509^a d'un volume intitolato nella prima sua pagina « S. ISIDORI HISPALENSIS EPISCOPI OPERA OMNIA. TOMVS III. ETYMOLOGIARVM. Libri X. priores. », e nella terza « S. ISIDORI HISPALENSIS EPISCOPI HISPANIARVM DOCTORIS OPERA OMNIA DE VNO CORRECTA ET AVCTA RE-
CENSENT FAYSTINO AREVALO Qui Isidoriana praemisit, variorum praefationes, notas, collationes; quae editas, quae nunc primum edendis, collegit, veteres editiones, et codices mss. Romanos contulit. AVCTORITATE ET IMPENSA EMINENTISS. PRINCIPIS D. DOMINI FRANCISCI LORENZANA E. PRESBYT. CARDINAL. TIT. SS. XII. APOSTOLORVM ARCHIEP. TOLET. ET HISPANIAR. PRIMATIS. ROMAE ANNO MDCCCXVIII. TYPIS ANTONII FVLGONII. Facultate praesidium ». Il primo di questi dieci libri è diviso in 44 capitoli, al 26^o de' quali, intitolato nel volume stesso (pag. 41, lin. 11—12) « CAPVT XXVI. De notis digitorum », sembra fare allusione Juan Perez de Moya, affermando che il metodo di contar colle dita è menzionato da « sāt Ysidro » (vedi sopra, pag. 313, col. 2^a, lin. 9), benchè questo capitolo non tratti di tale metodo, ma del modo di parlare con cenni.

Nelle carte 112^a—201^a d'un volume ora posseduto dalla Biblioteca Corsiniana di Roma, è contrassegnato « Col. 80 = D = 19 », cioè « Colonna 80, Palchetto D, numero 19 progressivo de' volumi » ora collocati in questo palchetto », trovansi un esemplare d'una edizione intitolata « BEDAE PRESBYTERII ANGLORUM VIRI ERUDITISSIMI DE NATURA RERVM ET TEMPORVM RATIONE LIBRI DVO. Nunc recens inuenti, & in lucem editi CUSTVM QVENDAM, HUMANISSIME LECTON, habes operum Bedae, eorum quae antea non extabant, quem si probabis, efficies ut primum totum desideratum hactenus, nobis vero nuper è situ prolatum, simus quaq' prima occasione edituri » NUNC SILEAE EXCVDENAT HENRIQVVS PETIVS MENSE MARII, ANNO D. MDCXXIX Cum gratia & privilegio Caesaris ». In questa edizione (carta 20^a, numerata 13, recto, segnata « c » nel suo margine inferiore, lin. 2—47, verso; carte 30^a—83^a, numerate 14—22, 25, 24—67), trovansi un'opera intitolata nella prima linea del recto della carta 20^a, numerata 13, della edizione stessa « BEDAE ANGL. DE NATURA RERVM LIB. », e divisa in 69 capitoli, il primo dei quali, intitolato nelle linee 2—3 del medesimo recto « DE COMPTV VEL LOQVELA DIGITORVM CAP. I. », è contenuto nella carta stessa (recto, lin. 4—47, verso, lin. 2—33). Sembra che a questo capitolo alluda Juan Perez de Moya, scrivendo nel passo riportato di sopra (pag. 313, col. 1^a—2^a; pag. 314, col. 1^a—2^a) della edizione intitolata « TRACTADO DE MATHEMATICAS », ecc. « Be' da Anglo Saxon en el tratado q' intitula de natura rerum » (Vedi sopra, pag. 313, col. 2^a, lin. 8; pag. 314, col. 1^a, lin. 1—2). La detta edizione intitolata « BEDAE, ecc. LIBRI DVO », ecc. è un volume, in foglio, composto di 90 carte, delle quali le 1^a—16^a non sono numerate, e le 17^a—90^a sono numerate ne' margini superiori de' recto coi numeri 1—22, 25, 24—74. Le carte 2^a—4^a, 7^a—10^a, 13^a—15^a, 17^a—20^a, 23^a—26^a, 29^a—32^a, 35^a—38^a, 41^a—44^a, 47^a—50^a, 53^a—56^a, 59^a—62^a, 65^a—68^a, 71^a—74^a, 77^a—80^a, 83^a—87^a di questa edizione sono segnate ne' margini inferiori de' loro recto

« a 2, a 3, a 4, b 2, b 3, b 4, c 2, c 3, c 4, d 2, d 3, d 4, e 2, e 3, e 4, f 2, f 3, f 4, g 2, g 3, g 4, h 2, h 3, h 4, i 2, i 3, i 4, k 2, k 3, k 4, l 2, l 3, l 4, m 2, m 3, m 4, m 5 ».

Nella prima linea del rovescio di ciascuna delle carte numerate 1—5, 7—10, 13—47, di questa edizione si leggono le parole « BEDAE ANGLORUM SAXONIS ». Nella linea prima del recto di ciascuna delle carte 2^a—6^a, 9^a—10^a, 14^a—47^a si leggono le parole « DE NATURA RERVM LIBER ». Un esemplare della edizione medesima è ora posseduto dalla Biblioteca Magliabechiana di Firenze contrassegnato « V. 2. 239 », ed un altro della Biblioteca Riccardiana della stessa città, è contrassegnato « Qqq. 1. 5820 ».

In un volume ora posseduto dalla Biblioteca Marucelliana di Firenze, è contrassegnato « b. c. VI. 12 », cioè « Stanza b, Scaffale c, Palchetto VI, numero 12 progressivo delle opere ora collocate in questo palchetto », trovansi un esemplare d'una edizione intitolata « BEDAE PRESBYTERII ANGLORUM SAXONIS MONACHI BENEDICTI viri literatissimi opuscula cumplura de temporum ratione diligenter castigata: atq' illustrata veteribus quibusdam annotationibus una cum scholijs in obscuriores aliquot locos, auctore Iohanne Noniomago. Nunc primum inuenta ac in lucem emissa, quorum catalogum require pagina versa. Coloniae excudebat IOHANNES Prael, Anno MDCXXVII. Mense Maio, Impensis Petri Quentel. Cum gratia & privilegio. » In questa edizione (carta 60^a, numerata xxxi, recto, lin. 3—50, verso, carte 70^a—134^a, delle quali la 81^a, 84^a, 94^a non sono numerate, e le rimanenti sono numerate « ii, Fol. xxxiii, Fol. xxxiiii, Fol. xxv, Fol. xxxvi, Fol. xxxvii—Fol. cxxxviii, Fol. cxxxix—Fol. cxlii, Fol. cxliiii, Fol. cxlv, Fol. cxlvii, Fol. cxlii, Fol. cxlv, Fol. cxlix, Fol. lvi, Fol. lvii, Fol. lxi—Fol. lxxv, Fol. lxxvi, Fol. lxxvii, Fol. lxxviii, Fol. lxxix—Fol. lxxx, Fol. lxxxviii, Fol. lxxxix, Fol. xc—xcii, xciii, xciiii, Fol. xcvi, Fol. xcvi »), trovansi ristampata la detta opera del Beda, che nel recto della detta carta numerata xxxi di questa edizione (lin. 1—2) è intitolata « BEDAE ANGLORUM SAXONIS DE NATURA RERVM LIBER ». Il primo capitolo di quest'opera, citato di sopra (linea 29 della presente pagina 316), è contenuto nella medesima carta 60^a, numerata xxxi (recto, lin. 5—50, verso, lin. 2—29), è intitolato nel recto della carta stessa (lin. 3—4) « DE COMPTV VEL LOQVELA DIGITORVM. Caput primum ».

La Biblioteca Alessandrina di Roma possiede un esemplare contrassegnato « U. l. 62 », cioè « Scansia U, Palchetto I, numero 62 progressivo de' volumi ora collocati in questo palchetto ». D'una edizione intitolata « DE LOCIS SCRIPTURAE HEBRAICIS ANGELI CANTINI COMMENTARIIS. »

» ET ANTONII NEBRISSENSIS || QVINQVAGENA. || *Nunc primum simul emendatius edita.* || ACCESSIT GASPARIS VARRERII || LVSITANI DE OPHIRA REGIONE || in Sacris litteris Disputatio. || Ad. Cl. P. BALTHASAREM SPINIGAM, || Regia Catholici in Belgio Legatum. || ANTVERPIÆ, || SYMPTIBVS VIVÆ ET HEREDVM || IO. BELLERI, sub insigni Aquilæ aureæ. || ANNO M. DC. ». Nelle pagine 85^a, non numerata (lin. 8—27); 86^a—205^a, numerate 78—197, di questa edizione, trovasi un'opera intitolata nella edizione stessa (pag. 85^a, non numerata, lin. 1—7) « ANTONII || NEBRISSENSIS || QVINQVAGENA, || SEV || QVINQVAGINTA. || S. Scriptura locorum explanatio; ordi-||ne Alphabetico. », e divisa in 50 Capitoli, il 16.^o dei quali intitolato nell'edizione stessa (pag. 109. lin. 26—27) « CAPVT XVI. || Dexteræ », e relativo al modo di contare colle dita delle mani. Juan Perez de Moya nel soprarrecato passo della edizione intitolata « TRATADO || DE MATHEMATICAS », ecc., cita questo capitolo affermando che il modo di calcolare colle dita è menzionato da « Antonio de || Lebrixa in la quindecima anpotaciõ || de la tercera Quinquagena » (Vedi sopra, pag. 313, col. 1^a, lin. 2—4).

Giovanni Bolzani di Belluno, conosciuto sotto il nome di Pierio Valeriano, tratta del modo di esprimere i numeri colla inflessione delle dita delle mani nel 37.^o libro della sua opera intitolata « Hieroglyphica ». Questo libro contenuto nelle carte 267^a, numerata 267 (recto, lin. 10—47 verso) e 268^a—276^a numerate 268—276, d'una edizione intitolata « HIEROGLYPHICA || SIVE DE SACRIS AEGYPTIOTICIS RVN LITERIS COMMENTARIJ, || IOANNIS PIERII VALERIANI BOLZANII || DELLVNENSIS. || Cum gratia || privilegio Imp. Maiest. in || annos quinque. || BASILEAE. || 1556. » (car. 267. recto, lin. 5—42; verso: car. 268—273, recto e verso; car. 276. recto, lin. 2—17), è intitolato nelle linee 1, 5—9 del recto della carta numerata 267 della edizione stessa « Liber XXXVII. || CLARISSIMO BERNARDINO TOMITANO, || PVBLICO DONARVM ARTVM IN ACADEMIA PATAVINA || PROFESSORI, DE DIGITORVM NVMERIS, ET SIGNIFICATIONE, EX SACRIS AEGYPTIORVM LITERIS, PER || PIERIVM VALERIANVM. » Juan Perez de Moya cita il medesimo libro 37.^o nel soprarrecato passo della edizione intitolata « TRATADO || DE MATHEMATICAS », ecc. dicendo « Pierio Valeriano en el lib. 37, q̄ recopilo de todos lo || mejor » (vedi sopra, pag. 314, col. 1^a, lin. 6—8). Nel recto della carta 268^a, numerata 268; della detta edizione intitolata « HIEROGLYPHICA », ecc. trovansi 36 figure di mani, delle quali la prima rappresenta una mano sinistra col dito mignolo chiuso, colle altre dita aperte e col numero 1 al di sopra dell'indice. A questa figura pare che alluda Juan Perez de Moya nel soprarrecato passo della edizione intitolata « TRATADO || DE MATHEMATICAS », ecc. scrivendo « El qual dize que para denotar || uno doblegauan el dedo minimo de || la mano yzquierda, d arte que toque || a la palma de la mano » (Vedi sopra, pag. 314, col. 1^a, lin. 8—14). Un esemplare della suddetta edizione intitolata « HIEROGLYPHICA », ecc. ora posseduto dalla Biblioteca Magliabechiana di Firenze. e contrassegnato « XI — 99 », cioè « Stanza XI, Palchetto in terra rappresentato dalla lineola —, numero 99 progressivo delle opere ora collocate in questo palchetto ».

Macrobio nel capo 13.^o del libro settimo della sua opera intitolata « Conviviorum Saturnalium || libri septem », scrive (AURELII || MACROBII || AMBROSII THEODOSII || P. C. || INLUSTRIS || QUÆ EXSTANT || OMNIA. || Diligentissime emendata, || Et cum optimis editionibus collata, ut ex || Praefatione manifestum. || PATAVII. MDCCCXXXVI. || EXCEDEBAT JOSEPHUS COMINUS. || Superiorum Permissu, || Et cum Privilegio Excell. Senatus VENETI ad annos XV, pag. 546, lin. 23—33, CONVIVIORVM POSTREMI DIEI SATURNALIORVM, LIBER SEPTIMVS, CAPVT XIII):

« Et HORN, Adco, inquit,
» Disari, verum est ita ut dicis Aegyptios optuari,
» ut ego sacerdotes eorum, quos prophetas vocant,
» cum in templo vidissem circa decorum simulacra
» hunc in singulis digitum confectis odoribus illinire,
» & ejus rei causas requisissem: & de nervo
» quod jam dictum est principe eorum narrante di-

» dicerim, & insuper de numero qui per ipsum significatur. complexus enim senarium numerum
» digitus iste demonstrat, qui omniseriam plenus,
» perfectus, atque divinus est. causasque cur plenus
» sit hic numerus ille multis asseruit. ego nunc ut
» praesentibus fabulis minus aptas relinquu. »

A questo passo del medesimo libro settimo allude Juan Perez de Moya nel passo riportato di sopra pag. 313, col. 1^a—2^a; pag. 314, col. 1^a—1^a della edizione intitolata « TRATADO || DE MATHEMATICAS, || ecc. 1573 » dalla parola « siguese » (Vedi sopra, pag. 313, col. 1^a, lin. 29) alle parole « cõ la || sortija » (Vedi sopra, pag. 313, col. 1^a, lin. 44). Più oltre nel passo medesimo sono riportati i versi 248—249 della Satira decima di Giovenale (vedi sopra, pag. 314, col. 2^a, lin. 17—22). Nel volume intitolato « D. IVNI || IVVENALIS || SATIRAE || EX RECENSIONE || A. RVPERTI || ITEM || A. PERSII FLACCI || EX RECENSIONE || L. KOENIG. || TOMVS PRIMVS. || AVGVSTAE TAVERNINORVM || EX TYPIS IOSEPHI POMBA || ANNO MDCCCXXX. » (pag. 187, lin. 13—14, D. IVNI IVVENALIS || AQVINATIS || SATIRARVM || LIBER QVARTVS, SATIRA X.), questi due versi leggonsi così:

« Felix nimirum, qui tot per saecula mortem
» Distulit atque suos iam dextra computat annos. »

Plinio nel capo settimo del libro 34.^o della sua celebre opera intitolata « Naturalis historia libri || xxxvii » scrive (C. PLINI SECUNDI || NATURALIS HISTORIAE || LIBRI XXXVII. || RECENSUIT || ET || COMMENTARIIS CRITICIS INDICIBUSQUE || INSTRUIT || IULIUS SILLIG. || VOLUMEN V. || ACCEDIT APPULEII QUI FERTUR DE REMEDIIS SALUTARIBUS || FRAGMENTUM E CODICE SALMASIANO NUNC PRIMUM || EDITUM. ||

HAMBURGI ET GOTHAE, || SUMPTIBUS FRIDERICI ET ANDREAE PERTHES. || MDCCCLII, pag. 140, lin. 10—18,
 PLINI SECUNDI NATURALIS HISTORIAE || LIBER XXXIV, CAP. VII, SECT. 16, §. 35):

« Fuisse autem statuariam artem familiarem Italiae
 » quoque et vetustam indicant Hercules ab Evandro sacratus
 » ut produnt in foro boario, qui triumphalis vocatur atque per
 » triumphus vestitur habitu triumphali; praeterea Janus ge-
 » minus a Numa rege dictus, qui pacis bellique argumento
 » colitur digitis ita figuratis ut cccxxv dierum nota aut per
 » significationum anni, temporis et aevi esse deum indicent ».
 » Signa quoque Tusculanae per terras dispersi, quas Etruria
 » faciliatus, non est dubium. »

Macrobio nel capo nono del primo libro della precitata sua opera intitolata « *Conviviorum Saturnalium libri septem* » (AURELII || MACROBII || AMBROSII THEODOSII || F. C. *Opus INLUSTRIS* || QUAE EXSTANT || OMNIA, ecc., pag. 203, lin. 11—22, CONVIVIORUM PRIMI DIEI || SATURNALIORUM, LIBER PRIMUS, CAPUT IX) scrive:

« Janum quidam solem de-
 » monstrari volunt; & ideo geminum, quasi utrius-
 » que janum caelestis potentem; qui exoriente aperiat
 » diem, occidente claudat: invocaturque primum cum
 » alicui deo res divina celebratur; ut per eum patet
 » ad illum cui immolatur, accessus, quasi preces suppli-

» cum per portas suas ad deos ipse transmittat. inde
 » & simulacrum ejus plerumque fingitur manu dextera
 » trecentorum, & sinistra sexaginta & quinque nume-
 » rum retinens; ad demonstrandam anni dimensio-
 » nem, quae praecipue est solis potestas. alii mun-
 » dum, id est, caelum esse voluerunt.

Nel passo riportato di sopra (pag. 313, col. 1^a—2^a; pag. 314, col. 1^a—2^a) della detta edizione intitolata « *TRATADO || DE MATHematicas* », ecc. dalle parole « Plinio, y Macrobio » (vedi sopra, pag. 314, col. 2^a, lin. 25—26) alle parole « el año » (vedi sopra, pag. 314, col. 2^a, lin. 32), sono citati in questo passo della detta opera di Macrobio, ed il passo riportato di sopra (pag. 317, lin. 61—67) della *Naturalis historia* di Plinio.

Intorno al metodo di fare i calcoli per mezzo di inflessioni delle dita delle mani sono date notizie da Giovanni Alberto Fabricio (IO. ALBERTI FABRICII || BIBLIOTHECA || LATINA, || SIPE || NOTITIA AU-
 CTORUM VETERUM LATINORUM, || Quorumcumque scripta ad nos pervenerunt, distributa in Libros || IV. Supplementis, quae antea sejunctim excusa maximo Lecto-||rum incommodo legebantur, suis quibusque locis nunc primum || insertis. || TOMUS SECUNDUS, || Ad cujus calcem accedunt suppleta ingens lacuna aliquot pa-||ginarum in scholiis Eustathii ad Dionysium Periegetem, || & Aur. Cornelii Celsi Rhetorica ex unica Sixti || Poppae editione. || VENETIIS, MDCCXXVIII. || Apud Sebastianum Coleti. || CUM AP-
 PROBATIONE ET PRIVILEGIO, pag. 447, lin. 18—43; pag. 448, lin. 2—37, LIBER IV, CAPUT VI, pa-
 ragrafi 12, 13. — IO. ALB. FABRICII || BIBLIOTHECA || LATINA || NUNC MELIUS DELECTA || RECTIVS DI-
 GESTA ET AVCTA DILIGENTIA || IO. AVG. ERNESTI. || TOMVS III. || LIPSIAE || APVD WEIDMANNI HERED-
 ES ET REICH VM || MDCCCLXXIV, pag. 384, lin. 8—38; pag. 385, pag. 386, lin. 2—6, LIBER IV, CA-
 PUT IV, SECTIO II, paragrafi 11, 12), e da Giovanni Gottlob Schneider (Anmerkungen und Erläute-
 rungen || über die || *Eclogas Physicas*. || Enthaltend || Verbesserungen und Erklärungen des griechi-
 schen || Textes, Erklärungen und Vergleichen der an-||geführten Lehrsätze und Versuche, und man-
 cher ||ley litterarisches Beyträge zur Geschichte der Phy-||sik aus den Alten. || Von || Johann Gottlob
 Schneider. || Jena und Leipzig, || bei Friedrich Frommann. || 1801, pag. 316—319). B. B.

EXTRAIT DU *KITÂB AL MOBÂREK*
 D'ABU' L WAFÂ AL DJOUEÏNI

TRANSCRIT D'APRÈS LE MS. 1912 DU SUPPLÉMENT ARABE DE LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE
 DE PARIS, ET TRADUIT POUR LA PREMIÈRE FOIS EN FRANÇAIS

PAR ARISTIDE MARRE

Membre de la Société Asiatique de Paris. (1)

Un homme possédait un bien, il en dépense un tiers et un quart, et ce qui lui reste se réduit à vingt drachmes; nous voulons savoir quel était le total de son bien.

Il a dit : Cette question se pose sous diverses formes. Notre premier exemple est pris parmi les hommes, mais au fond il n'y a pas de différence entre cet énoncé et les énoncés suivants : « Un poisson : sa tête forme le tiers de son poids, sa queue le quart, et le restant pèse vingt livres ». — Ou bien : « Un dattier : Un tiers de sa hauteur est dans l'eau, un quart dans la vase, la partie hors de l'eau et de la vase a vingt coudées; quelle est la hauteur du dattier ? » — Ou bien encore : « Une étoffe : On en a coupé un tiers pour une chemise et un quart pour des pantalons, le restant a vingt coudées; nous voulons savoir quelle était la longueur de cette pièce d'étoffe ».

De ces divers énoncés le sens est le même, et le procédé consiste en ceci, que nous prenons le nombre qui a son tiers et son quart, et c'est douze ;

(1) L'ouvrage dont nous donnons le présent extrait, écrit en 1570 dans le manuscrit *Supplément Arabe*, n° 1912 de la Bibliothèque nationale de Paris, n'est pas connu des bibliographes arabes, et son auteur *Abu'l Wafâ Al Djoueïni* n'est pas mentionné dans Casiri. Tout ce que l'on peut dire de l'auteur jusqu'à présent, c'est qu'il était Persan, et qu'il appartenait par sa naissance, ou bien au bourg de *Djouein*, dans le territoire de *Serakhs*, ou bien au canton de *Djouein*. Nous lisons dans l'ouvrage intitulé « DICTIONNAIRE GÉOGRAPHIQUE, HISTORIQUE ET LITTÉRAIRE DE LA PERSE ET DES CONTRÉES ADJACENTES, EXTRAIT DU MO'DJEM EL-BOULDAÏN DE YAQOUT, ET COMPLÉTÉ À L'AIDE DE DOCUMENTS ARABES ET PERSANS POUR LA PLUPART INÉDITS, PAR C. BARBIER DE MEYNARD, » etc. PARIS, etc. M DCCC LXI » (page 180, lig. 16—23; page 181, lig. 1—2) que le canton de *Djouein* est un canton vaste et florissant de la Perse, nommé par les habitants du Khorâsan *Gouïdn*, d'où les Arabes ont formé le nom de *Djouein*. Son chef-lieu est *Azadwâr* sur la frontière occidentale. Cent quatre-vingt neuf bourgs ou villages dépendent du territoire de *Djouein*; ils sont tous contigus les uns aux autres, et leurs jardins bien cultivés se suivent sans interruption. Ce pays a vu naître beaucoup de savants, dont quelques-uns sont cités par M. Barbier de Meynard (DICTIONNAIRE, etc. DE LA PERSE, etc., page 181, lig. 8—30); mais notre Mathématicien n'est point mentionné.

nous en retranchons son tiers et son quart, le reste est cinq, et nous le gardons ; ensuite nous multiplions le douze par le vingt, restant du bien, le produit est deux cent quarante ; nous le divisons par le nombre gardé, cinq ; le résultat de la division est quarante-huit ; et c'est là le total du bien. Il est clair en effet que si nous en retranchons le tiers, qui est seize, et le quart qui est douze, le restant sera vingt (1).

Et si le maître d'un bien y ajoute sa moitié et son dixième, et le fait monter à vingt drachmes, nous désirons savoir quel était ce bien. Nous prenons le nombre qui a sa moitié et son dixième, et c'est dix. Nous y ajoutons sa moitié et son dixième, le résultat est seize, nous le gardons ; ensuite nous multiplions le dix par le vingt, cela fait deux cents, que nous divisons par seize. Le résultat de la division est douze et demi, et c'est là le bien. En effet, si nous y ajoutons sa moitié qui est six et un quart, et son dixième qui est un et un quart, il en résulte au total vingt. Et Dieu sait avec rectitude ; c'est à Lui que nous retournons, en Lui que nous revenons ! (2)

SECONDE QUESTION

Un bien : nous l'augmentons de son tiers et d'une drachme, puis nous retranchons du tout son tiers et une drachme, et alors il ne reste plus rien. Si nous voulons connaître le bien, nous multiplions les dénominateurs des tiers donnés par l'énoncé, et c'est trois par trois, ou neuf, nous en retranchons une unité, et nous divisons par ce nombre la quantité connue provenant des tiers, c'est-à-dire trois. Le résultat de la division est un quart ($\frac{1}{4}$) et un huitième ($\frac{1}{8}$), et c'est là le bien total. — Et, en effet, si nous augmentons cette valeur de son tiers, qui est un huitième ($\frac{1}{8}$) et d'une drachme, il en résulte une drachme et demie ; si nous retranchons de cela son tiers qui est un demi ($\frac{1}{2}$) et une drachme, il ne reste plus rien. (3).

$$(1) \quad x - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{4} \right) = 20$$

$$12x - (4 + 3)x = 240$$

$$5x = 240$$

$$x = 48$$

$$(2) \quad x + \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{10} \right) = 20$$

$$10x + (5 + 1)x = 200$$

$$16x = 200$$

$$x = 12\frac{1}{2}$$

$$(3) \quad x + \frac{x}{3} + 1 - \frac{x}{3} - \frac{x}{9} - \frac{1}{3} - 1 = 0$$

$$x - \frac{x}{9} - \frac{1}{3} = 0$$

$$9x - x - 3 = 0$$

$$(9 - 1)x = 3$$

$$x = \frac{3}{9-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Nous augmentons le bien de son tiers et d'une drachme, puis nous ôtons de cela son cinquième et deux drachmes, il reste trois drachmes. Si nous voulons savoir quel était le bien à l'origine, nous prenons un bien qui ait un tiers et un cinquième, et c'est quinze. Nous l'augmentons de son tiers, et de l'ensemble nous ôtons son cinquième, il reste seize; nous retenons ce nombre; d'autre part nous retranchons de la drachme qui était en plus la fraction de drachme qui était en moins, c'est-à-dire un cinquième, et il reste quatre cinquièmes. Nous les retranchons de deux drachmes retirées du bien, et il reste une drachme et un cinquième. Nous ajoutons cela aux trois drachmes qui restaient du bien, et nous obtenons quatre et un cinquième ($4\frac{1}{5}$). Nous divisons ce nombre par celui que nous avons retenu, c'est-à-dire par seize. Il résulte de la division un quart et un quatre-vingtième ($\frac{1}{4} + \frac{1}{80}$). Nous multiplions ce résultat par le nombre ayant son tiers et son cinquième, c'est-à-dire par quinze, et le produit est trois drachmes et un demi et un quart et un huitième et un demi-huitième. Et c'est là le bien demandé. — Et, en effet, si à ce bien nous ajoutons son tiers, qui est une drachme et un quart et un demi-huitième, nous avons cinq drachmes et un quart. Si nous ajoutons à cela une drachme, il en résulte six drachmes et un quart, et si nous retranchons de cette somme son cinquième qui est une drachme et un quart, le reste est cinq, et si nous retranchons maintenant deux drachmes, le reste final est trois drachmes, comme il était demandé. Dieu le Très-Haut donne l'accord par sa grâce et sa libéralité! (1)

TROISIÈME QUESTION.

Deux hommes ont chacun un bien, si l'on prend les deux cinquièmes ($\frac{2}{5}$) de ce que possède le premier pour l'ajouter au bien du second, et les trois septièmes ($\frac{3}{7}$) de ce que possède le second pour l'ajouter au bien du premier, on obtient deux sommes égales. Voici la question comme elle est posée par celui qui parle : Deux hommes se sont rencontrés à la vente d'une pièce d'étoffe; l'un d'eux dit à l'autre: donne-moi deux cinquièmes ($\frac{2}{5}$) de ce que tu as; en l'ajoutant à ce que j'ai, cela fera le prix de l'étoffe; le second dit au premier: donne-moi trois septièmes ($\frac{3}{7}$) de ce que tu as, en l'ajoutant à ce que j'ai, j'aurai aussi le prix de l'étoffe. — Si nous voulons connaître le bien de cha-

$$(1) \quad \left(x + \frac{x}{5} + 1\right) - \frac{x}{5} - \frac{x}{15} - \frac{1}{5} - 2 = 3$$

$$\left(\frac{20-4}{15}\right)x = 4\frac{1}{5}$$

$$x = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2 \times 8}.$$

cun de ces deux hommes, nous prenons le dénominateur du cinquième, qui est cinq, et le dénominateur du septième qui est sept, puis nous retirons de ce « cinq » les deux parts qu'il a fallu en prendre, il reste trois, nous le multiplions par l'autre dénominateur sept, et cela donne *vingt-et-un*; et c'est là le bien de l'homme maître des septièmes. De même nous retirons du « sept » la part qui en a été prise, c'est-à-dire « trois », il reste « quatre »; nous le multiplions par le « cinq » et c'est « vingt ». Et c'est là le bien de l'homme maître des cinquièmes. (1)

Et en effet, si le maître des septièmes, c'est-à-dire le possesseur des « vingt-et-un », prend du maître des cinquièmes les deux cinquièmes de ce qu'il possède, c'est-à-dire huit, et qu'il l'ajoute à son bien, il obtient ainsi vingt-neuf; et d'autre part, quand le maître des cinquièmes prend du maître des septièmes les trois septièmes de ce qu'il possède, c'est-à-dire neuf, et qu'il l'ajoute à son bien, qui est vingt, alors il obtient également « vingt-neuf ». — Et c'est là ce qui était demandé. (2)

Et si la question est modifiée de telle sorte que chacun des deux hommes prend de son compagnon le double (de tout-à-l'heure) pour l'ajouter à son propre bien; et que les deux sommes ainsi obtenues restent encore égales. Alors nous doublons les parties prises de chacun d'eux, et nous retranchons ces nombres doublés du dénominateur de la fraction; ce qui reste nous le multiplions par le dénominateur de l'autre fraction. Les résultats donnent les biens possédés par chacun d'eux. Ainsi, si nous retranchons de *cinq* le double des parties qui en avaient été prises, c'est quatre, le reste est *un*; nous le multiplions

$$(1) \quad y + \frac{2}{5}x = x + \frac{3}{7}y.$$

$$y \left(1 - \frac{3}{7}\right) = x \left(1 - \frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{5} : \frac{4}{7}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{3 \times 7}{5 \times 4}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{21}{20}.$$

$$(2) \quad 20 + \frac{3}{7} \cdot 21 = 21 + \frac{2}{5} \cdot 20$$

$$20 + 9 = 21 + 8.$$

$$29 = 29.$$

par le sept, le produit est *sept*; et c'est là le bien du maître des septièmes. Ensuite nous retranchons du *sept*, le double des parties qui en avaient été prises, c'est *six*; le reste est *un*; pareillement si nous le multiplions par le cinq le produit est cinq, et c'est là le bien du maître des cinquièmes (1).

Et en effet le maître des septièmes, son bien étant sept, quand il prend du maître des cinquièmes les quatre cinquièmes de ce qu'il possède, et c'est le nombre quatre, et qu'il l'ajoute à son propre bien, il en résulte onze; d'autre part, quand le maître des cinquièmes prend du maître des septièmes les six septièmes de ce qu'il possède, et c'est le nombre six, et qu'il l'ajoute à son propre bien, il en résulte également onze, et c'est là ce qui était demandé (2).

L'état de la question étant tel que pour chacun de ces deux hommes, après le don de l'un à l'autre, une drachme est devenue dix drachmes, si nous voulons savoir combien possédait chacun d'eux, nous résolvons la question en suivant la même marche que précédemment (3).

Ce que chacun d'eux a obtenu, nous le multiplions par le nombre dix et nous divisons le produit par ce que l'on obtient après avoir effectué la prise et le don, et c'est la réponse à la question transformée. Si donc nous multiplions ce qu'avait le maître des cinquièmes dans la question primitive, à sa-

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & y + \frac{4}{5} x = x + \frac{6}{7} y \\
 & y \left(1 - \frac{6}{7}\right) = x \left(1 - \frac{4}{5}\right) \\
 & y \left(\frac{7-6}{7}\right) = x \left(\frac{5-4}{5}\right) \\
 & 5y = 7x \\
 & x = 5 \quad y = 7.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 7 + \frac{4}{5} \cdot 5 = 5 + \frac{6}{7} \cdot 7. \\
 & 7 + 4 = 5 + 6 \\
 & 11 = 11.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & y + \frac{2}{5} x = x + \frac{3}{7} y. \\
 & \frac{y}{x} = \frac{21}{20} \left\{ \begin{array}{l} y = 21 \\ x = 20 \end{array} \right. \\
 & 21 + \frac{2}{5} \cdot 20 = 20 + \frac{3}{7} \cdot 21 \\
 & 29 = 29.
 \end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{20}{29} \times 10 \\
 y &= \frac{21}{29} \times 10
 \end{aligned}$$

le rapport $\frac{y}{x}$ sera toujours $\frac{21}{20}$, et ces deux nouvelles valeurs formeront encore une solution de la question.

voir vingt, par les dix drachmes de la question changée de forme, et si nous divisons le produit par vingt-neuf, c'est-à-dire par ce à quoi s'était élevé finalement le bien de chacun d'eux, le résultat de la division est six drachmes et vingt-six des vingt-neuf parties d'une drachme; et c'est là le bien du maître des cinquièmes. D'autre part, si nous multiplions le vingt-et-un par dix, et que nous divisons le produit par vingt-neuf, il résulte de cette division sept drachmes et sept des vingt-neuf parties d'une drachme, et c'est là le bien du maître des septièmes (1). Et en effet, quand nous prenons du maître des cinquièmes deux cinquièmes de ce qu'il a, et c'est deux drachmes et vingt-deux des vingt-neuf parties d'une drachme, si nous l'ajoutons au bien du maître des septièmes, c'est-à-dire à sept drachmes et sept des vingt-neuf parties d'une drachme, il en résulte alors dix drachmes. — Et si nous prenons du maître des septièmes, trois septièmes de ce qu'il a, et c'est trois drachmes et trois des vingt-neuf parties d'une drachme, si nous l'ajoutons au bien du maître des cinquièmes, c'est-à-dire à six drachmes et vingt-six des vingt-neuf parties d'une drachme, il en résulte également dix drachmes (2).

$$(1) \quad x = \frac{20}{29} \times 10 = 6 \frac{26}{29}$$

$$y = \frac{21}{29} \times 10 = 7 \frac{7}{29}.$$

$$(2) \quad y + \frac{2}{5}x = x + \frac{3}{7}y$$

$$7 \frac{7}{29} + \frac{2}{5} \left(6 \frac{26}{29} \right) = 6 \frac{26}{29} + \frac{3}{7} \left(7 \frac{7}{29} \right)$$

$$7 \frac{7}{29} + 2 \frac{22}{29} = 6 \frac{26}{29} + 3 \frac{3}{29}$$

$$9 \frac{29}{29} = 9 \frac{29}{29}$$

$$10 = 10.$$

$$\frac{y}{x} = \frac{7}{6}$$

$$y = \frac{7}{6} \times 10 = 11 \frac{4}{6}$$

$$x = \frac{5}{6} \times 10 = 8 \frac{2}{6}$$

$$y - \frac{3}{7}y = 11 \frac{4}{6} - 6 \frac{4}{6} = 5$$

$$x - \frac{2}{5}x = 8 \frac{2}{6} - 3 \frac{2}{6} = 5$$

$$x - \frac{3}{7}y = x - \frac{2}{5}x$$

$$y + \frac{2}{5}x = x + \frac{3}{7}y.$$

فان زدنا علي المال ثلثه و درهما. و نقصنا منه خمسة و درهين بقى ثلاثة دراهم و اردنا ان نعلم اصلى المال احذنا ماله ثلث و خمس و هو خمسة عشر و زدنا عليه ثلثه و نقصنا مما جتمع خمسة فيبقى ستة عشر حفظناها ثم نقصنا من الدرهم الذي نأده الكسر الذي نقص و هو خمسة فيبقى اربعة اخماس نقصناها من الدرهمين الناقصين فبقى درهم و خمس زدنا ذلك علي الثلاثة الدراهم الباقية فصارت اربعة و خمسا قسمناها علي ما حفظناه و هو ستة عشر فخرج من القسمة ربع و ثمن عشر ضربناه في مخرج الثلث و الخمس و هو خمسة عشر فكان ثلاثة دراهم و نصفاً و ربعاً و ثلثاً و نصف ثلثها و هو المال المطلوب وذلك انما متى زدنا عليه ثلثه و هو درهم و ربع و نصف ثمن كان خمسة دراهم و ربعاً فاذا زدنا عليها درهما صارت ستة دراهم و ربعاً فاذا انقصنا منها خمسا و هو درهم و ربع كان الباقي خمسة واذا انقصنا منها درهين كان الباقي ثلاثة دراهم و هو مثل مطلوب والله تعالى الموفق بهمه تحليه و كرامه

المسألة الثالثة

رجلان معها ملان اخذ من احدها خمسا ما معه و دفع الى الثاني و اخذ من الثاني ثلاثة اسباع ما كان معه و دفع الى الاول و تساوبا و هذ المسألة مثل قول القايل رجلان التقيا علي ثوب يباع فقال احد هما الاخران اعطيني خمسا ما معك اضفه الى ما معي كان بقى ثمن الثوب فقال الثاني للاولان اعطيني ثلاثة اسباع ما معك اضفه ما معي كان معي ثمن الثوب فاذا اردنا ان نعرف المالين اخذنا مخرج الخمس و هو خمسة و مخرج السبع و هو سبعة ثم اخرجنا من مخرج الخمس و هو خمسة الجزوين الماخوذين منه بقى ثلاثة ضربناها في مخرج السبع و هو بعة فكان احد و عشرين و هو ما كان مع صاحب السبع ثم اخرجنا من مخرج السبع الاخر التي اخذت منه و هي ثلاثة فبقى اربعة ضربناها في مخرج الخمس فكان عشرين و هو ما كان مع صاحب الخمس وذلك ان صاحب السبع و هو احد عشرين متى اخذ من صاحب الخمس ما معه و هو ثمانية و اضافته الى ما معه صار معه تسعة و عشرين و متى اخذ صاحب الخمس من صاحب السبع ثلاثة اسباع ما معه و هي تسعة اضافته الى ما معه و هو عشرون صار ايضا تسعة و عشرون و هذا كان مطلوبه *

فان كان المسألة علي حالها الان كل واحد منها لما اخذ من صاحبه ما اخذ و اضافته الى ما بقى معه صار بعد ذلك ما معها متساويين اصفنا الاجزا الماخوذة من كل واحد منها و اسقطنا ما اصفنا من مخرج الكسر و ما بقى ضربنا في مخرج الكسر والآخر فحصل ما مع كل واحد منها الاتري انا اذا اسقطنا من الخمسة ضعف الاجزا الماخوذة منه وهو اربعة كان الباقي واحد قصيره في السبعة فيكون سبعة وهو ما كان مع صاحب السبع ثم اسقطنا من السبعة ضعف الاجزا التي اخذت منه وهو ستة بقى منها واحد ايضا فاذا ضرب في خمسة كان خمسة وهى ما كان مع صاحب الخمس و ذلك ان صاحب خمسة كان خمسة السبع وهو سبع متى اخذ من صاحب الخمس اربع اخماس ما معه و هو اربع و اضافته الى ما معه صار معه احد عشر و متى اخذ صاحب الخمس من صاحب السبع ست اسباع ما معه و هو ست اضافته الى ما معه و هو خمسة صار ايضا احد عشر و هذا كان المطلوب

فان كانت المسألة علي حالها الا ان كل واحد منها لما اعطى واحد صار معه عشرة دراهم و اردنا ان نعرف كم مع كل واحد منها حسبنا المسألة بالطريق الذي ذكرناه فما حصل كل واحد منها ضربناه في العشرة و قسمناه علي ما نحصل معها بعد الاخذ والاعطاء فيكون جواب المسألة الاتري انا اذا ضربنا ما حصل مع صاحب الخمس في المسألة الاولى وهو عشرون في العشرة الاتري دراهم و قسمنا علي تسعة وعشرين وهو الذي حصل مع كل واحد منها صار الخارج من القسم ستة دراهم وستة وعشرين جزوا من تسعة وعشرين جزا من درهم وهو الذي كان مع صاحب الخمس و اذا ضربنا الاحد وعشرين في عشرة و قسمنا ها خرج من الضرب علي تسعة وعشرين خرج من القسمة سبعة دراهم وسبعة اجزا من تسعة وعشرين جزوا من درهم وهو الذي كان مع صاحب السبع و ذلك متى اخذنا من صاحب الخمس خمس ما معه و هو درهمان واثنان و عشرون جزوا من تسعة وعشرين جزوا من واحد و اصفناه الى صاحب السبع و هو سبع دراهم وسبعة اجزا من تسعة وعشرين جزوا من درهم صار معه عشر دراهم و اذا اخذنا من صاحب السبع ثلاثة اسباع ما معه و هو ثلاثة دراهم و ثلاثة اجزا من تسعة وعشرين جزوا من درهم اصفنا ها الى ما مع صاحب الخمس و هو ستة دراهم وستة وعشرين اجزا من تسعة وعشرين جزوا من درهم كان ذلك ايضا عشر دراهم *

فاما في المسألة الثانية فانا متى ضربنا الخمسة التي هى مع صاحب الخمس في عشرة دراهم كان ذلك خمسين فاذا قسمنا ها علي ستة و هو ما حصل معها بعد الاخذ والاعطاء

كان ثمانية دراهم ودانقين و هو ما كان مع صاحب الخمس واذا ضربنا السبعة التى كانت مع صاحب السبع فى عشرة كان ذلك سبعين فانا قسمنا ها على ستة خرج من القسم احد عشر درهما و اربعة دوانق و هو ما كان مع صاحب السبع و ذلك انا متى اخذنا من صاحب الخمس خمسين ما معه و هو ثلاثة دراهم و دانقان صار الباقي معه خمسة دراهم فاذا اضعنا اليها ثلاثة اسباع ما مع صاحب السبع و هى خمسة دراهم صار معه عشرة درهم و اذا اضعنا الى ما بقى مع صاحب السبع و هو ستة دراهم و اربعة دوانق ما اخذناه من صاحب الخمس و هو ثلاثة دراهم و دانقان صار ايضا معه عشرة دراهم وهذا كان المطلوب والله اعلم والمسلتان الرابعة والخامسة تاتى فيما بعد والسلام *

- ٢٠٢ تيتلر، جون: دراسة حول استخراج الجذر التربيعي. (بالإنكليزية)
- ٢١٣ تيتلر، جون: دراسة حول استخراج الجذور (عند باقر اليزدي، القرن الثاني عشر الهجري). (بالإنكليزية)
- ٣٣١ مار، أرسيد: حول الأعداد التريعية عند نيوتن، وما قبله (عند باقر اليزدي) (بالفرنسية)
- ٣٤٠ شريونو، أوجوست: حول حساب اليد أو الحساب الهوائي عند العرب (قطعة من رسالة شمس الدين أبي عبد الله محمد بن أحمد الموصللي الأناطلي المتوفى سنة ٨٥٦هـ/١٢٥٢م). (بالفرنسية)
- ٣٤٤ مار، أرسيد: منهج الحساب باليد بناء على منظومة شمس الدين الموصللي ورسالة الحساب لخوان برز دي موي، مطبوعة في سنة ١٥٧٣م في مدينة قلعة هنارز. (بالفرنسية)
- ٣٥٤ مار، أرسيد: مقتبسات من كتاب المبارك لأبي الوفاء الجويني، منقولة من مخطوطة المكتبة الأهلية في باريس رقم ١٩١٢، مع ترجمتها لأول مرة إلى الفرنسية.

فهرس المحتويات

- فونكه، فرائس: أبحاث حول كتب عديدة لليوناردو من بيزا اكتشفها ونشرها
الأمير بالتسار بونكُمبانيه، وصلتها بكتب وأعمال الرياضيين العرب.
(١) ترجمة لفصل من مقدمة ابن خلدون مما يتعلق بعلم الرياضيات.
..... (بالفرنسية) ١
- فونكه، فرائس: دراسات حول تاريخ الرياضيات عند المسلمين بناء على
رسائل عربية وفارسية غير مطبوعة. المقالة الأولى: حول الرموز الجبرية
المستعملة عند العرب. (حول القلصادي). (بالفرنسية) ١٤
- فونكه، فرائس: أبحاث حول كتب عديدة لليوناردو من بيزا اكتشفها ونشرها
الأمير بالتسار بونكُمبانيه، وصلتها بكتب وأعمال الرياضيين العرب.
(٢) ترجمة كتاب أبي الحسن علي بن محمد القلصادي. (بالفرنسية) ... ٥١
- شربونو، أوجوست: ملاحظة بيليوغرافية حول القلصادي، عالم في الرياضيات
من القرن الثامن الهجري. (بالفرنسية) ٩٧
- أنسترم، جوستاف: حول طريقة الحصول على الجذر التربيعي التقريبي
للقلصادي. (بالفرنسية) ١٠٩
- يالتكيا، شرف الدين، كورين هانري: (نشر وترجمة فرنسية) لرسالة
التضعيف في المذبح (حول استخراج خط من خطين على نسبة متوالية)
للملا لطفني العثماني، ألفها حوالي سنة ٩٠٠هـ..... ١١٣

طبع في ١٠٠ نسخة

نشر بمعهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
بفرانكنفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية
طبع في مطبعة شتراوس، مولنباخ، ألمانيا الاتحادية

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٧٨

نصوص ودراسات
حول الرياضيات الإسلامية
والفلك الإسلامي

القسم ٣

جمع وإعادة طبع
فؤاد سزكين

بالتعاون مع

كارل إيرج-إيجرت، مازن عماوي، إكهارد نوبياور

١٤١٩هـ - ١٩٩٨م

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

يصدرها
فؤاد سزكين

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٧٨

نصوص ودراسات
حول الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

القسم ٣

جمع وإعادة طبع

١٤١٩هـ - ١٩٩٨م
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
سلسلة الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي
المجلد ٧٨

