

Publications of the Institute
for the History of Arabic-Islamic Science

Islamic Mathematics
and
Astronomy
Volume 25

Publications of the
Institute for the History of
Arabic-Islamic Science

Edited by
Fuat Sezgin

ISLAMIC
MATHEMATICS
AND
ASTRONOMY

Volume
25

Ibn Yūnis
Abu l-Ḥasan 'Alī ibn 'Abdarrahmān
(d. 399/1009)

Texts and Studies
Collected and Reprinted

II

1997

Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

ISLAMIC MATHEMATICS AND ASTRONOMY

Volume
25


IBN YŪNIS
‘ABU L-ḤASĀN ‘ALĪ IBN ‘ABDARRAḤMĀN
(d. 399/1009)

TEXTS AND STUDIES

II

Collected and reprinted
by
Fuat Sezgin

in collaboration with
Mazen Amawi, Carl Ehrig-Eggert,
Eckhard Neubauer

1997

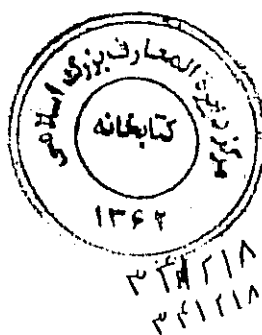
Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

QA23

.18

vol. 24, 25

v. 25



100 copies printed

© 1997

Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften
Beethovenstrasse 32, D-60325 Frankfurt am Main
Federal Republic of Germany

Printed in Germany by
Strauss Offsetdruck, D-69509 Mörlenbach

TABLE OF CONTENTS

Delambre, Jean-Baptiste Joseph: <i>Histoire de l'astronomie du Moyen Age</i> . Paris 1819. pp. 76-170: <i>Ebn Yunis et Aboul Wefa</i> ; 3 pls.	1
Sédillot, Louis-Amélie: <i>La grande Table Hakémitte</i> . Congrès International des Orientalistes. Compte-rendu de la première session Paris 1873. Tome deuxième. Paris 1876. pp. 309-313.	97
Wittstein, Armin: <i>Die von Ibn Jūnis in Kairo beobachteten Mond- und Sonnenfinsternisse. Nach Theodor von Oppolzer's "Kanon der Finsternisse" berechnet</i> . Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft (Leipzig) 61. 1907. pp. 422-424.	102
Schoy, Carl: <i>Das 20. Kapitel der großen Hākemitischen Tafeln des Ibn Yūnis: "Über die Berechnung des Azimuts aus der Höhe und der Höhe aus dem Azimut"</i> . Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie (Hamburg/Berlin) 48. 1920. pp. 97-111.	105
Schoy, Carl: <i>Über eine arabische Methode, die geographische Breite aus der Höhe der Sonne im 1. Vertikal ("Höhe ohne Azimut") zu bestimmen</i> . Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie (Hamburg/Berlin) 49. 1921. pp. 124-133.	120
Schoy, Carl: <i>Die Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes durch Beobachtung der Meridianhöhe der Sonne oder mittels der Kenntnis zweier anderen Sonnenhöhen und den zugehörigen Azimuten nach dem arabischen Text der Hākemitischen Tafeln des Ibn Yūnus</i> . Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie (Hamburg/Berlin) 50. 1923. pp. 3-20; 1 pl.	131
Schoy, Carl: <i>Beiträge zur arabischen Trigonometrie (Originalstudien nach unedierten arabisch-astronomischen Manuscripten)</i> . Isis (Brussels) 5. 1923. pp. 364-399.	150

Schoy, Carl: <i>Über den Gnomonschatten und die Schattentafeln der arabischen Astronomie. Ein Beitrag zur arabischen Trigonometrie nach unedierte arabischen Handschriften.</i> Hannover 1923. 29 pp.	187
Schoy, Carl: <i>Die Gnomonik der Araber.</i> Berlin/Leipzig 1923. 95 pp; 2 pls. (Die Geschichte der Zeitmessung und der Uhren. Band I, Lieferung F).	217
Reynolds, J.H.: <i>The Hakemite Tables of Ebn Younis.</i> Nature (London) 128. 1931. pp. 913-914.	316

HISTOIRE
DE
L'ASTRONOMIE
DU MOYEN AGE;

PAR M. DELAMBRE,

Chevalier de Saint-Michel et de la Légion-d'Honneur, Secrétaire perpétuel de l'Académie royale des Sciences pour les Mathématiques, Professeur d'Astronomie au Collège royal de France, Membre du Bureau des Longitudes, des Sociétés royales de Londres, d'Upsal et de Copenhague, des Académies de Saint-Pétersbourg, de Berlin, de Suède et de Philadelphie, etc., etc.

PARIS,

M^{me} V^e COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES SCIENCES.

1819.

CHAPITRE IV.

Ebn Jounis et Aboul Wefa.

L'OUVRAGE d'Ebn Jounis a long-tems excité la curiosité des astronomes. On n'en connaissait que quelques observations qui étaient favorables à l'idée de l'accélération du moyen mouvement de la Lune. Mais on doutait si c'étaient des observations réelles ou simplement des lieux calculés sur les tables de cet auteur. On désira connaître l'ouvrage; la Bibliothèque du Roi n'en possédait que des fragmens où les observations n'étaient pas rapportées. On savait que la Bibliothèque de Leyde en possédait un manuscrit moins incomplet; le gouvernement français le demanda. L'ambassadeur de Hollande le remit à la Classe des Sciences mathématiques et physiques, en demandant qu'il fût nommé des commissaires pour le recevoir, en donner acte, et en rester personnellement responsables. M. Laplace et moi fûmes nommés; nous remîmes le manuscrit à M. Caussin, qui en fit un extrait qui a paru dans le tome VII des Notices des manuscrits en l'an 12 (1804). La Bibliothèque du Roi en fit faire une copie qui fut collationnée avec soin. J'offris alors à l'Université de Leyde de lui rendre le dépôt dont j'étais chargé. Le recteur de cette Université, qui était pour lors à Paris, m'avait promis de le reprendre, et de me remettre une décharge convenable. Mais, forcé de partir plutôt qu'il ne s'y attendait, il quitta Paris sans me voir, et je n'ai plus entendu parler de l'Université de Leyde. Depuis ce tems, M. Sedillot entreprit un grand travail, tant sur ce manuscrit que sur les fragmens de Paris et d'autres manuscrits orientaux; comme il n'a rien publié encore, nous allons d'abord extraire la traduction et les notes de M. Caussin. Le titre de l'ouvrage est

Le livre de la grande Table Hakémité, observée par le sheikh, l'Imam, le docte, le savant Aboulhassan Ali ebn Abderahman, ebn Ahmed, ebn Jounis, ebn Abdalaala, ebn Mousa, ebn Maïsara, ebn Afes, ebn Hiyan.

Le calife Hakem, auquel ces Tables sont dédiées, régna de 996 à 1021 de notre ère. La dernière des observations sur lesquelles les tables sont fondées, est du 7 novembre 1007. L'auteur mourut 7 mois environ après cette observation, c'est-à-dire le 31 mai 1008.

Ebn Jounis était d'une famille noble et distinguée. Ce fut le calife Aziz, père de Hakem, qui engagea notre auteur à se livrer à l'Astronomie. Il observa beaucoup; il est regardé comme un des plus habiles entre les astronomes arabes. Son ouvrage est annoncé comme formant 4 ou 2 volumes; M. Caussin pense que le manuscrit de Leyde en contient environ la moitié.

Ebn Jounis suppose qu'on ait lu Ptolémée; son but a été de réunir tout ce qui est relatif à la pratique des observations, aux calculs et à l'usage des tables; de corriger celles dont on faisait usage, et d'en montrer les erreurs. C'est dans ce dessein, qu'il a rassemblé un grand nombre d'observations faites par lui et d'après lesquelles ses tables sont construites.

La partie qui traite des ères et de la chronologie occupe le quart du volume.

On lit dans l'avant-propos qu'en 829—50 de l'ère vulgaire, les astronomes d'Almamon déterminèrent à Bagdad l'obliquité de $23^{\circ} 33'$; la plus grande équation du Soleil, $1^{\circ} 59'$; son apogée en $2^{\circ} 22' 39''$; son mouvement dans une année persane, de $359^{\circ} 45' 44'' 14''' 24''$; trois ans après ils trouvèrent l'obliquité, $23^{\circ} 33' 52''$; l'équation, $1^{\circ} 59' 51''$; l'apogée, $2^{\circ} 22' 1' 37''$; son mouvement, $359^{\circ} 45' 46'' 33''' 50'' 43'$.

Ces résultats ne sont pas encore de la dernière précision; mais on voit déjà qu'en suivant les traces des Grecs, en adoptant leurs théories, en mettant plus de soin dans la construction des instrumens, les Arabes avaient sensiblement amélioré les constantes des tables.

On lit ensuite que Ahmed ebn Abdallah, le calculateur, avait seul déterminé les mouvemens des cinq planètes, et que les autres auteurs de la *Table vérifiée* ne s'étaient occupés que du Soleil et de la Lune. On remarqua que ces tables étaient encore assez loin de la perfection. Les auteurs avaient déterminé les mouvemens par la comparaison de leurs propres observations avec celles de Ptolémée. Outre les fautes sur les élémens, Ebn Jounis en relève plusieurs qui ne sont que de calcul.

Ali ebn Isa Alastharlabi (le faiseur d'astrolabes), avait divisé le quart de cercle dont on s'était servi pour les observations. Ali raconte que l'armille d'Jahia ebn Aboumansor était divisée de 10 en 10'; il est probable que celles des Grecs donnaient moins encore.

Ebn Jounis dit plus loin qu'il a calculé la différence entre les valeurs extrêmes du rayon de l'ombre de la Terre; il l'a trouvée de $10' 17''$; l'excentricité du Soleil n'y entre que pour $1'$ au plus.

Il a commencé par s'assurer de la bonté de ses instrumens; il les

avait fait construire et diviser avec tout le soin possible; il les a comparés pour être plus sûr de leur justesse. Il a fait usage principalement des circonstances où les deux astres en conjonction étaient fort voisins l'un de l'autre; et c'est ainsi qu'il a déterminé les lieux des planètes observées par ses devanciers, pour les comparer avec ses tables, ou ses propres observations. Jusqu'ici l'auteur ne nous instruit guère; et la table des chapitres qui vient ensuite, quoiqu'assez complète, ne nous apprend encore rien. Dans le chapitre II, il est question des précautions prises par les astronomes d'Almamon, pour la mesure du degré; les deux troupes trouvèrent l'une 57 milles et l'autre $56\frac{1}{4}$; le milieu serait $56\frac{5}{8}$. Pour ne pas s'écarter de la méridienne, on commençait à la tracer au lieu du départ; on prenait deux cordeaux d'environ 50 coudées chacun; on plaçait l'un sur la méridienne, on plaçait le bout du second sur le milieu du premier; on enlevait le premier dont on posait le bout sur le milieu du second, et ainsi de suite. On peut, au lieu de deux cordeaux, employer trois piquets qu'on aligne. On transporte le premier qui devient le troisième, et ainsi de suite; ce qu'il y a de plus curieux dans ce passage, c'est que les deux degrés mesurés différaient de $\frac{3}{4}$ de mille, ou de... $\frac{3}{4 \cdot 57} = \frac{3}{19 \cdot 4} = \frac{1}{76}$ de degré, ce qui n'est pas une preuve de grande exactitude. Ensuite comment a-t-on pu tracer une méridienne de 57 milles, soit par les cordeaux en partie superposés, soit par les piquets alignés. Il faut, pour cela, être dans les déserts de l'Asie.

Dans la critique qu'il fait de la Table vérifiée, on voit que les Arabes se servaient d'armilles, ce qui était connu d'ailleurs et pouvait se supposer.

Une éclipse de Lune, l'an 198 d'Izdjerd, comparée aux Tables de Ptolémée et des Arabes, prouva que le calcul de Ptolémée était le plus juste, en supposant 50' pour la différence des méridiens; selon Beauchamp elle serait de 57'.

Cette éclipse est du 20 janvier 829.

Il parle d'une éclipse de Soleil observée à Bagdad, le 30 novembre 829 de l'ère vulgaire. Quant à l'éclipse de Soleil arrivée le dernier du ramadhan de la même année, tous les calculs en furent faux. Hauteur du Soleil au commencement 7° , à la fin, 24° , sur les trois heures du jour environ.

Voilà qui prouve bien l'imperfection des tables à cette époque. Voilà peut-être le premier exemple de l'instant d'un phénomène déterminé par des hauteurs; mais ces hauteurs ne sont marquées qu'en degrés. La précision n'est pas grande.

Il y eut éclipse de Lune, dit le Mahani, la 7^e férie, 15 de ramadhan, l'an 239 de l'hégire (16 février 854), commencement à 10^h 3' après midi de la 6^e férie. On n'observa pas la fin; la partie non éclipsée excédait $\frac{1}{10}$; l'erreur du calcul fut d'environ un doigt. Le Mahani pense qu'elle provenait du rayon de l'ombre de la Terre qu'il aurait fallu diminuer de $2' \frac{1}{2}$; rien n'est moins sûr; il était difficile que les Arabes pussent répondre de la latitude de la Lune à 3' près. Le commencement prouve que l'erreur du calcul sur le lieu de la Lune était de 10' en excès, « ce qui nous conduit à deux conséquences, dit Ebn Jounis; il faut retrancher ces 10' des moyens mouvemens, ou les ajouter à l'équation qui était soustractive. Si la même chose se trouve dans un grand nombre d'éclipses, l'erreur sera dans les mouvemens; s'il y a variété, la cause sera dans l'équation. L'examen d'un grand nombre d'éclipses nous l'apprendra. Il se peut aussi qu'il y ait erreur dans le nœud. » Voilà des réflexions sages.

Il y eut éclipse de Lune, dit encore le Mahani, la 1^{re} férie, 14 rabi 1^{er}, l'an 240 de l'hégire. Au commencement, hauteur d'Aldébaran 45° 30' à l'orient. On n'observa rien que le commencement, qui est exact et précis (12 août 854).

Ebn Jounis ajoute qu'ayant calculé le tems d'après la hauteur d'Aldébaran, au moyen de l'astrolabe, il a trouvé l'angle horaire de 44° après minuit. Le commencement retardait de 8° (32' de tems).

Il y eut, dit le Mahani, éclipse de Lune la 2^e férie, 15 safar, l'an 242 de l'hégire, 2 de khordad, jour de Bahmen, l'an 225 d'Izdjerd (22 juin 856).

Au commencement, hauteur d'Aldébaran 9° 50' à l'orient; angle horaire, 50°.

La partie non éclipsée fut plus grande que $\frac{1}{4}$, et moindre que $\frac{1}{3}$, plus grande que ne l'indiquait le calcul d'un peu moins d'un doigt. Le tems du commencement retarda sur le calcul d'environ une demi-heure.

On voit encore que l'on se contentait de l'astrolabe pour trouver le tems, au lieu de faire le calcul dont Albategni a depuis donné les règles. Les tables ne donnaient le tems de l'éclipse qu'à une demi-heure près, dont le calcul avançait le commencement.

La grandeur de l'éclipse fut trouvée une fois plus petite et une fois plus grande d'un doigt que par le calcul. La latitude était australe, la Lune allait vers le nœud ascendant, quand l'éclipse fut plus grande;

quand elle fut plus petite, la Lune avait passé par son nœud descendant; il en résulte qu'il faut ôter un degré du lieu du nœud.

Ptolémée avait donné des exemples de calculs semblables.

Il y eut, dit le Mahani, éclipse de ☉ la 1^{re} férie, 28 de jouradi, 1^{re} de l'an 252 de l'hégire, 29 d'ardebéshesht de l'an 235 d'Izdjerd. L'éclipse devait commencer à 6^h 3' d'heures inégales; milieu à 7^h 10'; fin, 8^h 16'; durée, 2^h 16'; quantité, $9\frac{1}{12}$ doigts, ou 8 doigts de la surface. Lieu apparent du Soleil au milieu de l'éclipse, 2^r 25° 29'; lieu de la Lune au même instant, 2^r 28' 47" (16 juin 866).

Le commencement retarde de plus de $\frac{1}{3}$ d'heure; le milieu, selon notre estime, fut à 7^h 26'; la fin à 8^h 30'. Le retard fut donc de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{3}$ d'heure; la latitude était australe, la partie éclipsée plus que de 7° et moindre que de 8°.

Il devait y avoir, dit le Mahani, éclipse de ☾ la 3^e férie, 15 de doulcanda de l'an 252 de l'hégire; 2 d'aban, jour de khem, l'an 235 d'Izdjerd. L'opposition à 9^h 35' tems inégal. ☉ en 8° 31' ♊, nœud en 2^r 19° 50'; latitude 59' A; grandeur ($\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$) doigts de la surface, ou $1\frac{1}{2}$ de diamètre. Commencement à 8^h 55'; fin, 10^h 7' 30"; durée, 1^h 12' heures inégales (26 nov. 866).

L'éclipse n'eut pas lieu. L'éclat de la Lune diminua du côté septentrional, mais la Lune demeura entière; le milieu du phénomène retarda sur le calcul, ce qui indique qu'il faut diminuer de la circonférence de l'ombre, ou augmenter la latitude de la Lune, et qu'il y a quelque erreur dans le nœud.

Conjonction de ♄ et ♀. Bagdad, 28 août 858. Le 15 jouradi 1^{er} de l'an 244 de l'hégire, Vénus avait encore $\frac{2}{3}$ de degré à parcourir; elle a dû atteindre Saturne à midi de la 2^e férie; sa vitesse était de plus de 1° par jour. ♀ un peu au nord de ♄, et ♄ éloigné de Régulus de $\frac{2}{3}$ de degré, et un peu au nord. (Mahani.)

Conjonction de ♀ et ☿. Bagdad, 22 septembre 858, 5^e férie, 10 de jouradi 2^e, 244 de l'hégire, Vénus était éloignée de ☿ de plus d'un degré. Ils semblaient décrire ensemble une ligne presque parallèle au zodiaque. Leur vitesse fut la même pendant ce jour.

Conjonction de ♂ et ♀, 13 février 864. ♀ et ♂ paraissaient à la vue se toucher au commencement de la nuit, avant la 2^e férie, 2 de moherran, an 250 de l'hégire.

Lettre de Thabet ebn Corah à Cassem ebn Obeïdallah.

Thabet ou Thébitb était astronome du calife Motaded; il naquit en 835 et mourut en 900 de notre ère; il est célèbre par beaucoup d'ouvrages d'Astronomie et de Médecine, de commentaires et de traductions d'auteurs grecs. (Les auteurs ne sont pas bien d'accord sur cette date. Voyez ce que nous avons dit ci-dessus, pag. 75).

« L'entreprise du calcul vérifié n'est pas achevée, ni près de l'être; »
 » parce que nous n'avons pas assez d'observations. Les choses qui ont
 » besoin d'une grande précision, comme les éclipses et les *apparitions*
 » *des nouvelles Lunes*, je les calcule d'après mes observations précé-
 » dentes. Pour les éphémérides, je me contente des élémens dont se
 » servait Aboujafar ebn Moussa ebn Shaker. » (C'était son maître en
 Astronomie.)

On voit donc qu'on calculait des éphémérides, et qu'on mettait grande importance à l'apparition de la nouvelle Lune. Aujourd'hui ces apparitions n'intéressent plus personne. La Lune ne sert plus guère qu'à éclairer nos nuits; elle joue un rôle tout-à-fait secondaire dans le calendrier civil.

Extrait du livre de Thabet ebn Corah à Isach ebn Honaïn. Cet Isach était fils d'Honaïn, médecin chrétien du calife Motavekel et auteur de la traduction arabe de l'Almageste. Il s'appliqua, comme son-père, à la traduction des ouvrages grecs.

La différence entre la Table de Ptolémée et la Table vérifiée, est commune à tous les corps célestes; cette uniformité n'a rien d'étonnant; le lieu du Soleil entre nécessairement dans toutes les déterminations des planètes et des étoiles. (La précession est commune à tous les astres.)

La cause de cette erreur est obscure; quelques astrologues, cités par Théon (voyez tome II de notre Histoire de l'Astronomie ancienne, page 625), ont pensé que le zodiaque avait un mouvement par lequel il s'avancait de 8°, et ensuite rétrogradait de la même quantité à raison d'un degré en 80 ans. Ils ont fait sur cela un calcul, d'où l'on conclut quelquefois 4° de plus ou de moins. Il faudra, si la chose est comme ils le supposent, que les étoiles fixes paraissent tantôt immobiles et tantôt rétrogrades.

Nous ne sommes pas en état maintenant de décider une pareille question; il faudrait pour cela une observation du Soleil, faite dans l'intervalle de Ptolémée à nous, et assez éloignée de notre tems. Si vous en

trouvez une dans les auteurs grecs, qui soit indubitablement postérieure à Ptolémée, je vous prie de me la faire connaître.

Si ce point eût été décidé, j'en aurais traité ici, mais il est encore obscur et ressemble beaucoup à une simple conjecture ; or, je ne veux rien adopter qui ne soit hors de doute. Ce que j'ai dit des quantités, que j'ajoute au calcul de Ptolémée, je ne l'ai communiqué à qui que ce soit, parce que ces quantités ne sont pas appuyées sur des bases solides, mais ont pour objet de représenter l'état actuel des choses jusqu'à ce qu'un nouveau lui succède.

M. Caussin nous avertit ici, que les deux passages de Thabet, qu'on vient de lire, sont difficiles à déchiffrer ; de sorte qu'obligé de deviner presque toujours, il a pu même se tromper quelquefois, et c'est dommage, car ce passage paraîtrait disculper Thabet d'un reproche qu'on lui a fait, d'avoir introduit en Astronomie ce malheureux mouvement de trépidation qui a défiguré les Tables d'Alphonse, et même celles de Copernic ; mais on lui attribue généralement ce livre *du Mouvement* de la huitième sphère. Weidler dit expressément, que Thébit donnait à cette sphère deux mouvemens ; l'un est le mouvement diurne, l'autre celui de *trépidation*, qui se fait dans de petits cercles autour des points de γ et Δ , et dont les rayons étaient de $4^{\circ}18'43''$. Il supposait aussi deux écliptiques ; l'une fixe, dans la neuvième sphère, l'autre, mobile dans la huitième. Par cette combinaison, les étoiles paraissent tantôt directes et tantôt rétrogrades, et par conséquent quelquefois stationnaires. Nous donnerons plus de détail sur ce système à l'article Nonius. Remarquons que Thébit ne dit pas que ce mouvement soit faux, il se contente de dire qu'il n'a l'air que d'une conjecture ; cependant, *il ajoute au calcul de Ptolémée, pour représenter l'état actuel des choses* ; il demande des observations pour se décider ; il tient la chose secrète en attendant des preuves ; or, puisqu'il a publié son livre, il faut donc qu'il se soit décidé, qu'il ait pris un parti ; et ce parti a été sans doute d'imaginer ces deux petits cercles et ces deux écliptiques. Ce qui prouve que cette détermination est postérieure à sa lettre, c'est qu'il ne parlait d'abord que de 4° en gros, et que dans son traité il dit $4^{\circ}18'43''$, ce qui annonce un travail plus soigné.

Ce que Thébit rapporte, d'après le témoignage de Théon, Albategni l'attribue à Ptolémée lui-même. Il se pourrait que Théon l'eût pris dans Ptolémée. Thébit ne serait donc pas l'auteur de l'idée fondamentale ; il aurait simplement imaginé les cercles nécessaires pour expliquer et calculer les mouvemens inégaux des étoiles ; mais Albategni, ou plus ancien

ou contemporain de Thébit, qui le cite, a rejeté cette inégalité, après s'en être ouvertement moqué. Thébit n'aurait pas dû être si irrésolu, il aurait dû faire comme Albategni. Il envoie ses idées à Ishac, confidentiellement; Ishac aurait-il trahi le secret? est-ce Thébit lui-même qui l'a révélé, quand il a cru avoir des preuves suffisantes? C'est ce qui paraît assez difficile à décider, et ce qui heureusement est fort indifférent.

Aboul Abbas Alfaldi ebn Hatem Alnaïrizi dit avoir trouvé, dans le calcul des syzygies écliptiques, une erreur d'environ une demi-heure, *soit que ce soit le calcul qui avance ou bien l'observation; mais le plus souvent c'est le calcul qui avance*. Le mouvement serait donc trop rapide; ce qui ne va guère avec l'accélération. Il dit encore que les auteurs de la Table vérifiée ont trouvé l'obliquité $23^{\circ} 35'$, et que l'observation a été bien faite, à cause de la bonté et de la grandeur de l'instrument, et du peu de difficulté de l'observation, avec un pareil secours. Cet auteur vivait vers la fin du IX^e siècle.

Aboulhassan abi ebn Amajour al Turki, observa Jupiter et Mars, du 13 juillet au 10 septembre 918; π était rétrograde et paraissait sans cesse moins avancé d'environ 1° que dans les éphémérides; la latitude au contraire était plus grande que selon le calcul; le mouvement diurne était plus petit dans l'éphéméride; Mars était direct.

Il observa aussi la Lune, du 13 juin au 12 août 918; à diverses époques du mois lunaire arabe; elle était moins avancée que dans les éphémérides de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$ de degré; quant à la latitude, l'observation donnait le plus souvent plus que les éphémérides, calculées sur les Tables de Ptolémée; les erreurs en latitude ne présentaient rien d'uniforme.

Le 24 décembre 918, il compara Vénus à Antarès, qui était alors en $24^{\circ} 31' m$; Vénus était en $7^{\circ} 29'$; la Table vérifiée de Habash donnait $8^{\circ} 0' 46'$.

Mercure, comparé de même à Antarès, était en $8^{\circ} 14' 20'$; la hauteur d'Antarès, 24° ; le lieu de la Table vérifiée, $8^{\circ} 16' 20'$. Voilà des erreurs de deux degrés.

Le 1^{er} janvier 919, Mars, comparé à Procyon, était en $2^{\circ} 5' 12'$; Procyon en $3^{\circ} 11' 1'$; la Table vérifiée donnait $8^{\circ} 6' 9'$. L'erreur est encore de 1° environ, comme ci-dessus.

Ebn Aladami dit, dans sa table, qu'ayant observé pendant 50 ans, il avait toujours trouvé des erreurs dans les tables des planètes, et que les erreurs de la Lune n'allaient qu'à $16'$ en longitude. Ci-dessus on disait de 15 à $20'$.

Le 1^{er} juin 925. La Lune se leva déjà éclipsée de trois doigts linéaires ou plus; la grandeur fut de plus de neuf doigts; le milieu environ à 1^h 40' égales de la nuit; la fin à 3^h; hauteur de l'étoile fixe, près la queue du Cygne, 29° 30' à l'orient. Le calcul était bon pour les tems, mais la quantité était trop faible de près d'un doigt. Observée par Alturki à Bagdad.

Le 11 novembre 920. Hauteur du Soleil, au milieu de l'éclipse, 8° orientale; fin, 2^h 12', en tems inégal; la hauteur alors était de 20°; la grandeur fut de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ du diamètre; l'intervalle entre le milieu et la fin, 1^h 22' inégales. La différence entre la table d'Habash était 51' d'heure égale; et pour la fin de 44', dont le calcul avançait sur l'observation. Bagdad.

Le 11 avril 925. Éclipse totale de Lune; au commencement, hauteur d'Arcturus, 11° à l'orient; hauteur de la Lyre à la fin, 24°; ainsi le commencement à 0^h 55', tems inégal de la nuit. Le retard des Tables d'Habash, 23' d'heure inégale; la fin, 4^h 36'; retard sur le calcul, 17' d'heure inégale. Bagdad.

Le 14 septembre 927. Éclipse de Lune, de 2^d 55' linéaires, ou deux doigts de surface ou égalés; commencement, 10^h 14' de la nuit; milieu, à 11^h 21'; la fin, à 9' du jour suivant; le tout en heures inégales. Ce calcul est en excès sur l'observation de 14' d'heure inégale; hauteur de Sirius, au commencement, 31° à l'orient; révolution de la sphère, depuis le coucher du Soleil jusqu'au commencement de l'éclipse, déterminée avec l'astrolabe, 14° environ, qui font 9^d 55' heures égales, ou 10^h inégales; grandeur de l'éclipse, plus que $\frac{1}{4}$ et moins que de $\frac{1}{3}$, environ 3^d $\frac{1}{3}$. L'éclipse avance sur le calcul.

Le 18 août 928. Le Soleil se leva éclipsé d'un peu moins de $\frac{1}{4}$ de sa surface, et l'éclipse alla jusqu'au quart. On observa le Soleil *dans l'eau, d'une manière sûre et distincte*. Quand le Soleil parut entier dans l'eau, la hauteur était 12° — $\frac{1}{3}$ d'une division, le degré étant divisé en trois parties. A Bagdad, la grandeur s'accordait avec le calcul.

Voilà donc des degrés divisés en tiers; nous en avons vu qui étaient divisés en sixièmes. On trouvera ci-après une armille divisée en minutes.

Le 27 janvier 929, on observa le commencement; Arcturus était élevé de 18° à l'orient; tems écoulé, depuis le commencement de la nuit, 5 heures inégales, comme l'indiquait le calcul vérifié, sans aucune différence.

Le 5 novembre 933. Lorsque la Lune commença à s'obscurcir, Arcturus

était élevé de 15° à l'orient; le tems écoulé depuis le commencement de la nuit était de $9^h 56'$, tems inégal; le calcul donnait, pour le commencement, $9^h 41'$, c'est-à-dire $15'$ de moins.

Ces observations sont à peu près comme celles des Grecs, à la réserve que l'heure doit être un peu plus exacte. Cependant on n'observait la hauteur qu'avec un petit quart de cercle, dont le limbe n'était divisé qu'en degrés; on se servait de l'astrolabe pour éviter le calcul. Albategni avait cependant donné ses méthodes; mais on se contentait d'une exactitude de quelques minutes.

Après avoir rapporté toutes ces observations pour démontrer l'erreur de la Table vérifiée, Ebn Jounis compare ses propres tables à d'anciennes observations tirées de Ptolémée. Il rapporte ensuite quelques observations plus modernes.

Équinoxe d'automne observé à Damas (ou à Bagdad), le 19 septembre 830.

Le Soleil entra dans la Balance le 25 de mordadmah, de l'an 199 d'Izdjerd, à $20''$ de jour ($8'$ après midi.)

Le même équinoxe à Bagdad. Il arriva l'an 215 de l'hégire, à 7 heures du jour.

Équinoxe du printemps. Bagdad. 17 mars 831, l'an 199 d'Izdjerd, 216 de l'hégire, le 18 de bahmenmah, deux heures environ après le milieu de la nuit d'avant le 19.

Équinoxe d'automne. Bagdad. 19 septembre 831, l'an 216 de l'hégire, 200 d'Izdjerd, 1 heure de la nuit, avant le 26 de mordamah.

Équinoxe du printemps. Bagdad. Le 17 mars 832, l'an 200 d'Izdjerd, le 19 Bahmenmah, 2 heures du jour.

Solstice d'été. Bagdad. 17 juin 832, l'an 217 de l'hégire, 201 d'Izdjerd, le 22 d'ardbehneshtmah, minuit d'avant le 23.

Équinoxe d'automne. Bagdad. 19 septembre 831, 216 de l'hégire, 201 d'Izdjerd, 1 heure de la nuit, avant le 26 de mordamah.

Équinoxe du printemps. Bagdad. 17 mars 832, 200 d'Izdjerd, 19 bahmenmah, 2 heures de jour.

Solstice d'été. Bagdad. 17 juin 832, 217 de l'hégire, 201 d'Izdjerd, le 22 d'ardbbeheshtmah, à minuit d'avant le 23.

Équinoxe d'automne. Damas. 18 septembre 832, 201 d'Izdjerd, 25 de mordadmah, à $28^h 15'$ de jour, après midi.

Équinoxe d'automne. Bagdad. 18 septembre 844, 28 mordadmah; $23^h 25''$ de jour, après midi, l'an 213 d'Izdjerd. $23^h 25''$ de jour font $9^h 22'$, tems égal.

Équinoxe d'automne. Nisabour. 18 septembre 831, avec une armille divisée en minutes; midi de la 7^e férie, dernier de mordadmah, 220 d'Izdjerd, 18 de eloul, an 1162 d'Alexandre, 28 de rabi I, 237 de l'hégire. Observation d'Albategni.

Tout ce qu'on vient de lire est du chapitre IV; ce qui suit est du chapitre V.

Les fils de Moussa ebn Shaker, qui suivirent immédiatement les auteurs de la Table vérifiée, font le mouvement moyen du Soleil, dans l'année persane, de $11^{\circ} 29' 45'' 58''' 2''$; l'équation, $2^{\circ} 0' 50''$; l'apogée, au tems d'Izdjerd, $2^{\circ} 20' 44' 19''$, et son mouvement de 1° en 66 années persanes.

Leur frère Aboulcasem

Ahmeth, fait. $11^{\circ} 29' 45' 40''$; $2^{\circ} 0' 8''$; $2^{\circ} 24' 33''$ (en 851 - 852)

Les fils d'Almajour,
dans leur table Albadin. . . $11.27.45.39.45''$; $2.0.50$; $2.23.35$.

Moflish ebn Joussef. . . $11.29.45.39.46$; $2.0.20$; $2.24.5$.

Mohammed ebn Ahmed

'Alsamarandi. $11.29.25.39.58$;

Albattani. $11.29.45.46$; $1.59.10$; $2.22.14$.

Aboulcasem Ali ebn

'Alaalam. $11.29.45.40.20$.

Aboul Hossain Assoufi

'Abdarrahman ebn Omar, $11.29.45.40$; 2 .

Tous ces auteurs ont comparé leurs observations à celles d'Hipparque. Il résulte encore de ces comparaisons, que l'erreur d'Hipparque, sur l'équation du Soleil, avait été bien diminuée par les auteurs de la Table vérifiée.

En 1800, j'ai trouvé. . . . $1^{\circ} 55' 23''$

Variation pour 900 ans. . . $2.54.6$

Pour le tems d'Albategni, $1.58.0.5$

Il restait encore une erreur de $1' 10''$ environ.

Entre l'observation de Ptolémée et celles des auteurs du calcul éprouvé, on ne connaît d'autre observation que celle d'Ahmed Alnewahendi, le calculateur. En 803, époque de la fin malheureuse de Barmecide, dans sa Table almoshtainai, il fait le mouvement $\odot 11^{\circ} 29' 45' 40'' 40'''$; on trouverait $5''$ de plus en se servant de l'observation de Ptolémée. Par l'obser-

vation d'Hipparque et celle de Jahia ebn Abenmansour, Ebn Jounis trouve $11^{\circ}29'45''39''54'''$; par Hipparque et ses propres observations, $11^{\circ}29'45'40''3'''44''$; il en conclut qu'il vaut mieux suivre Hipparque que Ptolémée. C'est aujourd'hui une chose universellement reconnue.

Observations de Régulus. Ahmed Habash,

en 829—830, a trouvé.....	4.13. 0'	lat. 15' B.
Thabet ebn Corah donne la même chose ;		
le même Habash.....	4.13. 9	
A Damas, on avait trouvé, trois ans plus tard ,	4.13.15	
Abenmanshour Jésafar ebn Mohammed Al-		
baskhi, trois ans auparavant.....	4.13.30	
Les fils de Moussa, en l'an 850—851.....	4.13.27	
Les fils de Moussa, en 840—841.....	4.13.49.40"	
Les mêmes, en 847—848.....	4.13.50.15	
Le Mahani, en 861—862.....	4.14. 6	
Khaled ebn Abdelmalek Almarouroudi, en		
832—833.....	4.13.42.10	lat. 10' B.
Mohammed... Alsamarcandi, en 865—866,	4.13.40	
Les fils d'Amajour, en 918—919.....	4.14.32	
Saïd ebn Khatif Alsamarcandi, l'an 304 de		
l'hégire.....	4.14.17	
Ebn Alaalam, en 975—976.....	4.15. 6	

Ebn Jounis a voulu, par ces citations, faire voir la difficulté de ces observations; si elles n'ont pas toute la précision désirable, elles prouvent du moins l'émulation qui régnait, à cette époque, parmi les astronomes arabes.

Des planètes. Le 5 juin 829, il y a eu une conjonction de...., et puis Vénus, le 25 janvier 831, était en $8^{\circ}22'42''$.

Jupiter et Régulus. Bagdad, 6 septembre 864. Jupiter un peu au nord. Le calcul plaçait Jupiter en $4^{\circ}14'18''$, et cette longitude était trop forte de $47''$.

♀ et ♂. Bagdad, 10 octobre 864; les deux planètes paraissaient n'en faire qu'une.

Occultation de Régulus par Vénus, le 9 septembre 885. Une heure avant le lever du Soleil, chacun des deux jours précédents, le mouvement de Vénus avait été de plus de 1° .

♀ et ♂, 23 octobre 896. Quatre doigts un peu moins entre les deux planètes, Vénus au nord.

♀ et ♃, 4 octobre 901. A Shiraz, dans le tems de l'aurore. L'intervalle un fetr, environ une demi-coudée; c'est l'espace entre les extrémités du pouce et du petit doigt.

Une coudée peut valoir 2°, le shebr 1°, le fetr 40', le doigt 5'. Ces évaluations sont fondées sur les observations suivantes: entre β et φ du Cygne, 1 dra; entre β et η, 5 dras ou coudées; entre η et γ plus de 3 dras; entre γ et α, 3 dras; entre γ et δ, 5 dras; entre δ et θ, 1 $\frac{1}{2}$ dra (je crois qu'il faut lire 2 $\frac{1}{2}$); entre ε et λ, 1 dra.

Ces distances, prises sur un globe moderne, ont donné les quantités suivantes:

Étoiles.	Distance.	Nombre des dras.	Valeur du dra.
β φ	2.50	1	2° 50'
β η	9. 0	5	1.48
η γ	7. 0	3 +	2.20 envir.
α γ	5.40	3	1.53
γ δ	8. 0	5	1.36
θ δ	5.20	2 $\frac{1}{2}$	2. 8
ε λ	2.10	1	2.10
Somme	40. 0	20 $\frac{1}{2}$ 2 —	14.45 2. 6

Le dra serait donc à très peu près 2°. En prenant ces distances sur le grand atlas de Bode, j'ai trouvé par un milieu 2° 6'; ainsi le milieu entre les deux résultats, est 2°. J'avais commencé à calculer ces distances d'après les longitudes et les latitudes des Tables de Berlin, premier volume, ce qui m'a fait apercevoir une erreur d'un signe sur α du Cygne, dont la longitude doit être 9° 28', et non 10° 28'. Cette erreur m'a dégoûté de continuer ces calculs; cependant, en la corrigeant, j'ai trouvé 2° 53', au lieu de 2° 50'. En revanche, sur l'étoile suivante, j'ai trouvé 8° 58', au lieu de 9°, ce qui se compense à très peu près. J'ai pensé que nos globes modernes pouvaient au moins valoir les estimés des Arabes; et, vu l'incertitude de ces évaluations, je m'en suis tenu aux deux résultats ci-dessus. Il est très vraisemblable en effet que les Arabes ont pris un nombre rond de degrés pour en faire leur dra, et cette valeur peut nous éclairer sur la coudée astronomique des Grecs.

A l'article $\theta\delta$, j'ai lu $2\frac{1}{2}$ dras et non $1\frac{1}{2}$ qui donneraient au dra la valeur très inexacte $3^{\circ}33'$, laquelle augmenterait de $18'$ le résultat moyen.

Ces renseignemens sur les différentes mesures employées par les astronomes arabes, sont tirées d'une note de M. Caussin. Il ne nous dit pas quels sont les auteurs des observations, ni avec quel instrument ces distances ont été prises. Il ne serait pas impossible qu'elles eussent été, comme le reste, de simples estimés dans lesquelles on aurait comparé les distances de quelques étoiles au diamètre de la Lune. Il est pourtant possible qu'on les ait déduites des Catalogues des étoiles, et en effet elles se trouvent toutes dans le Catalogue de Ptolémée.

φ et ϖ , 19 mai 902. Il y avait entre eux un shebr.

ψ et σ , 28 février 903. Il y avait entre eux $\frac{1}{2}$ diamètre $\odot$ à l'horizon, Mars au midi.

σ et $\alpha\Omega$, 19 septembre 909. Intervalle, un doigt; hauteur, 60° .

Les observations qui suivent sont d'Ebn Jounis.

Éclipse $\odot$ au Caire, 12 décembre 977. Elle parut sensible à la vue, lorsque la hauteur $\odot$ était entre 15 et 16° . Grandeur, environ 8^d du diamètre, ou 7^d de la surface. A la fin, hauteur $\odot$, $33^{\circ}20'$ le matin.

M. Caussin dit dans une note, que Costard n'avait aucune idée des doigts de surface. Il n'aurait donc pas lu Ptolémée, ce qui serait assez singulier pour un auteur qui a fait l'Histoire de l'Astronomie.

Éclipse de $\odot$, le 8 juin 978, au Caire. Grandeur estimée $5^d\frac{1}{2}$ du diamètre, ou $4^d10'$ de la surface. Hauteur $\odot$, 56° environ, quand l'éclipse devint sensible aux yeux. Hauteur à la fin, 26° environ.

Éclipse $\odot$. Caire, 14 mai 979. La Lune se leva éclipsee. Grandeur; plus de 8^d du diamètre, et moins de 9. La fin de l'éclipse à $1^h12'$ de la nuit. Heures égales.

Éclipse $\odot$. Caire, 28 mai 979, après midi. Commencement haut. $\odot$, $6^{\circ}30'$; grandeur $5^d\frac{1}{2}$ du diamètre, environ $4^d10'$ de surface. Le Soleil se coucha éclipsee. La grandeur de cette éclipse fut la même que celle de l'année précédente.

Éclipse $\odot$. Caire, 7 novembre 979. Grandeur, 10^d de surface. Hauteur au commencement, $64^{\circ}30'$ à l'orient. Hauteur à la fin, 65° à l'occident.

Éclipse totale de $\odot$. Caire, 5 mai 980. Hauteur $\odot$ au commencement, $47^{\circ}40'$. Fin à $36'$ environ d'heure égale avant la fin de la nuit.

Éclipse $\odot$. Caire, 22 avril 981. Hauteur $\odot$ au commencement, 21° environ. Grand., $\frac{1}{4}$ de diam. environ, $\frac{1}{4}$ d'heure environ avant le lever du $\odot$.

Éclipse $\odot$. Caire, 15 octobre 981. Grandeur, 5^d environ du diamètre.

Hauteur de la Lune, 24° au contact du commencement. Le calcul retarda sur l'observation de $24'$ d'heure égale.

Éclipse totale ☾. Caire, 1^{er} mars 983. Hauteur au commencement, 66° . Hauteur à la fin, $35^{\circ} 50'$. Durée, 1^h environ. Le calcul était en retard de $40'$ environ.

Éclipse ☉. Caire, 20 juillet 985, après midi. Haut. au commencement, 25° environ; 6° à la fin. Grandeur, $\frac{1}{4}$ de diamètre.

Éclipse ☾. Caire, 19 décembre 986. Hauteur au commencement, 24° occident. Grandeur, 10^{e} du diamètre. La Lune se coucha éclipse; hauteur au moment de l'attonchement, $50^{\circ} 30'$.

Éclipse ☾. Caire, 12 avril 990. Grandeur, $7^{\text{e}} \frac{1}{2}$ du diamètre. La fin au lever du premier degré du Verseau. Hauteur de la Lune au premier contact, 38° .

Éclipse ☉. Caire, 20 août 993. Hauteur au commencement, 27° orient. Au milieu, 45° orient. À la fin, 60° . Grandeur, $\frac{1}{3}$ de la surface.

Éclipse ☾. Caire, 5 septembre 1001. J'ai vu, avant la fin de l'éclipse, la Lune qui paraissait comme le croissant. La fin, à 2^h inégales après le commencement de la nuit.

Éclipse totale ☾. Caire, 1^{er} mars 1002. Hauteur d'Arcturus au commencement, 12° orientale. Hauteur d'Aldébaran, 14° occidentale. Hauteur d'Arcturus à la fin, 35° . (Selon M. Sédillot).

Éclipse ☉. Caire, 24 janvier 1004. Grandeur, 11 doigts. Hauteur au commencement, $16^{\circ} 30'$ occidentale. Hauteur quand l'éclipse était de $\frac{1}{4}$, 15° ; quand elle fut de moitié, 10° ; au milieu, 5° .

Conjonctions. ☿ ☿. Caire, 10 mai 983. Commencement de la nuit. Différence de latitude, 1^o environ. Mars au nord. Le calcul était en retard.

☿ et ♀. Caire, 22 juin 985. Différence en latitude, 1^o environ. ☿ au midi.

♀ et α ♈. Caire, 17 juin 987. Au couchant, 8^h égales.

☿ et ☿. Caire, 10 octobre 987. À 7^h égales après midi.

☿ et ♀. Caire, 20 janvier 988. Une demi-heure avant le lever du ☉, différence latitude, 1 doigt. Vénus au nord. ☿ précédait d'environ 1^o.

☿ et ☿. Caire, 15 décembre 989. J'estime qu'il a été éclipsé à midi, le 27 d'adernah, 358 d'Izdjerd.

☿ et α ♈. Caire, 18 septembre 988. La conjonction avait dû avoir lieu à minuit.

♀ et α ♈. Caire, 22 juin 990. 1^h avant le coucher du ☉, Vénus au nord. 1^o de différence en latitude.

♂ et α♏. Caire, 30 août 990. 20' avant le lever du ☉, ♂ au midi. différence latitude, 40' environ.

♄ et ♂. Caire, 1^{er} novembre 991.

♄ et ♀. Caire, 22 décembre 991. 6^h environ après midi. 1° de différence en latitude. ♄ au nord. Distance, un shebr et deux nœuds (peut-être deux articulations de doigt).

♀ et α♏. Caire, 16 septembre 992. Une heure égale avant le lever ☉. Vénus avait déjà dépassé l'étoile de $\frac{1}{2}$ de degré environ. Elle était au midi. Différence latitude, 30' environ.

♄ et ♂. Caire, 19 octobre 993. Commencement de la nuit. Les deux planètes étaient dans le même vertical, environ $\frac{1}{2}$ degré de différence en latitude. Mars au midi. Le calcul indiquait la conjonction 13 jours auparavant; ce qui est une erreur grossière, dit Ebn Jounis.

♄ et ♂. Caire, 31 mai 994. Conjonction à midi suivant, 5^e férie, 18^e de rabi II, 384 de l'hégire.

♄ et ♂. Caire, 1^{er} juin 994. La conjonction eut lieu la 6^e férie, 19 rabi II, 384 de l'hégire.

♀ et ♄. Caire, 3 janvier 995. ♄ dut éclipser ♀ le 28 de doulcaada, 384 de l'hégire.

♄ et ♀. Caire, 11 juin 995. 7^h après midi, heures égales. Vénus au nord de 40' environ; dans le même vertical.

♄ et ♂. Caire, 11 juin 995. La nuit d'avant la 3^e férie, 10 jourmadi I, 385 de l'hégire. Différ. latit., un doigt. Hauteur, 6° en conjonction.

♀ et α♏. Caire, 18 juin 995. 7^h 40' environ. Heures égales après midi de la 3^e férie, 7 jourmadi I, 385 de l'hégire. Vénus au nord. Distance en latitude, 40 ou 45'.

♄ et ♀. Caire, 11 juin 995. La nuit d'avant la 3^e férie, 10 jourmadi I, 385 de l'hégire. ♄ au midi. Distance en latitude, 40'.

♄ et ♀. Caire, 8 août 996. $\frac{1}{2}$ heure après le coucher du ☉. Vénus au nord de Jupiter, qu'elle touchait presque. Dist. en lat., 5'.

♀ et ♄. Caire, 24 mai 997. Vénus éclipa Saturne d'une manière non douteuse, $\frac{2}{3}$ d'heure égale avant le lever du ☉.

♂ et α♏. Caire, 14 juin 998. ♂ au nord. Diff. latit., 1° environ.

♀ et α♏. Caire, 23 juin 998. 1^h après le coucher du ☉, Vénus au nord. Différence de latitude, 1° environ.

♂ et ♀. Caire, 4 juin 998. Au commencement de la nuit. Distance, environ un doigt. ♀ au nord et plus élevée sur l'horizon. Elle avait passé Mars de $\frac{1}{4}$ de degré ou de 15'.

♀ et ♂. 9 avril 999. Sur la fin de la nuit, ♀ était avec ♂ à l'orient, et le précédait d'environ 1°. Leur hauteur était peu considérable.

♀ et ♀. Caïre, 19 mai 1000. A l'occident, après le coucher du ☉ : ♀ au nord. Différ. latit., 20'. Différence en longitude, selon la Table vérifiée, 4°36'.

♀ et αΩ. Caïre, 16 septembre 1000. A l'orient. ♀ au sud. Distance en latitude, 40'. ♀ un peu plus élevée, ce qui montrait qu'elle n'avait pas encore atteint l'étoile.

♀ et ♀. Caïre, 2 juin 1001. 1^h après le coucher du ☉. ♀ au nord de ♀; un peu au-dessous de lui; ♀ difficile à apercevoir. La conjonction eut lieu à minuit.

♀ et αΩ. 7 juillet 1001. 1^h environ après le coucher du ☉. ♀ au nord. Différ. latit., 1°. Il restait à ♀ un léger intervalle à parcourir pour atteindre αΩ.

♄ et ♂. Caïre, 19 juillet 1001. A midi, diff. 1° en latitude.

♄ et αΩ. Caïre, 14 mars 1002. Au commencement de la nuit, ♂ précédait α de 2° environ.

♄ et αΩ. Caïre, 21 mars 1002. A l'occident. ♂ au nord. Diff. lat., 30' (30' probablement.)

♄ et ♀. Caïre, 18 avril 1002. 1^h $\frac{1}{2}$ avant le lever du ☉. ♀ encore éloignée de ♄ de 12'. Elle décrivait la même route, et allait directement sur lui. La conjonction a dû avoir lieu 2^h avant midi. La conjonction a dû avoir lieu en longitude et en latitude.

♀ et ♄. Caïre, 14 juillet 1002. A l'orient, 8^h après midi.

♀ et ♂. Caïre, 7 janvier 1003. A l'occident. Différ. latit., 30'. ♀ au midi et un peu plus élevée. J'estimai qu'elle l'avait passé de 30'; je déterminai la conjonction à 12^h après midi, 5^e férie de Rabi Ier.

♄ et ♀. Caïre, 18 février 1003. A l'occident, 20' après le coucher du ☉. ♄ précédait ♀ de 20'; il était un peu au nord. La conjonction ne dut pas être écliptique; elle dut avoir lieu à 14^h après midi.

♀ et αΩ. Caïre, 18 juin 1003. A l'occident, après le coucher du ☉, différence en latitude, 15'. ♀ au nord. Il restait à Vénus peu de chemin à parcourir. Conjonction à 14^h après midi, 6^e férie, 15 de Shaaban.

♄ et ♄. Caïre, 7 novembre 1007. A l'orient pendant l'aurore. ♄ au sud. Différ. latit., 40' à vue. Conjonction estimée à midi suivant. J'évaluai à 24' le chemin que Jupiter avait à faire pour atteindre Saturne.

Ici finit le chapitre V. Le VI donne les éléments des Tables vérifiées et ceux des Tables d'Ebn Jounis,

199 d'Izdjer.

Ahoulmansor	{	☉ 11° 29' 45" 45" 14'''	1° 59'	2° 22' 39'	en 215 de l'hég.
Ebn Jounis..	{	11. 29. 45. 40. 3. 44	2. 0. 30	2. 26. 10	372 d'Izdjer.
☾.....	{	4. 9. 23. 5. 51			
	{	4. 9. 25. 1. 58. 50. 34			
Mouv. propre	{	2. 28. 43. 7. 28. 41''			{ M. Caussin dit le même, moins de 20' seulement.
	{	2. 28. 23			
☿.....	{	19. 19. 33. 40	5°		
	{	19. 19. 44. 21. 48	4. 48.		

On ne voit pas qu'Ebn Jounis ait beaucoup amélioré ces deux théories.

☿	12° 13' 39' 33''	6° 51'	6° 13'	Comme Ptolémée,
	12. 13. 36	6. 51	6. 13	
Apog.	8. 4. 30	l'an 199.		
	8. 10	372		
♄	1. 0. 20. 58. 12	5. 15	11. 5'	Ap. 5° 22' 53" 199
	1. 0. 20. 33. 0	5. 15	11. 5'	5. 23. 35 372
♂	6. 11. 17. 17. 27	11. 25	41. 9	5. 5. 33 199
	6. 11. 17. 9. 46. 2	11. 25	41. 9	4. 5. 36 372
♀	7. 15. 2. 0. 2'	1. 59	45. 59	Ap. ☉
	7. 15. 2. 24. 20'	2. 0. 30	46. 25	
☿	1. 23. 56. 42. 33	3. 2	22. 2	6. 21
	1. 23. 56. 50	4. 2	22. 24	6. 22. 3

On voit qu'Ebn Jounis n'a guère réformé que les moyens mouvemens et l'équation de ☿; que l'Astronomie des Arabes n'était que celle des Grecs; la manière d'observer très peu différente; que les observations étaient un peu plus soignées, et que le principal avantage des Arabes consiste en ce qu'ils sont venus 7 à 800 ans plus tard.

Le chapitre VI renferme encore les quantités suivantes, tirées des Tables de l'auteur.

Obliquité de l'écliptique, 23° 35' en l'an 1000.

Mouvement de l'apogée pour 365 jours, 51" 14''' 43" 59", 1° en 70 années.

Longit. m. ☉ 30 nov. 1000...	8 ^r 14° 45' 57" 6'''
Apogée.....	2.26. 8. 2.27
Longit. m. ☾.....	9. 0.41.12.25
Anom.....	11. 9.51.25.12
Longit. m. ♀.....	11.21.27. 3.53
Longit. m. ♄.....	2. 6. 1. 2.19
♅.....	10. 0.41.52.29
♆.....	9.10.43.18.29
Mouv. pr. (anomalie) ♀.....	9.22.36. 8.22
♂.....	10. 7.45.25.18

Observations d'Abousahel, tirées d'un manuscrit rapporté d'Égypte, par M. Reiche.

♀ tout près de α_Ω, le matin du 16 shahrimah, 534 d'Izdjerd.

♀ et ♂ sont près l'un de l'autre, 12 shahrimah, 522 d'Izdjerd, 45' après le commencement de la nuit.

Le 13 du mois de bahman, 522 d'Izdjerd, ♂ près l'extrémité méridionale du croissant, et comme y étant suspendu; 12 heures égales après le commencement de la nuit.

Le 30 du mois de khordad, l'an 528 d'Izdjerd, ♄ et ♅ à l'occident, ne forment qu'une seule planète.

Solstice d'été. Bagdad. 27 safour, 378 de l'hégire; obliquité, 23° 51'.

Équinoxes d'automne. Bagdad. 4 soumadi II, 378 de l'hégire, 4 heures après le commencement du jour.

Ces deux dernières observations sont tirées du Catalogue des Manuscrits arabes de la Bibliothèque de l'Escurial.

Dans les chapitres qui restent à extraire, on ne peut guère espérer quelque chose de neuf que dans le chapitre X des sinus, et de la manière d'en dresser les tables.

Chapitre XI. De l'obliquité, et des tables des ombres.

XXV. Du calcul des hauteurs correspondantes.

XXVII. Trouver la hauteur des heures marquées sur le cadran.

XXXV. Trouver la latitude du lieu, et la longueur du mekyas des heures simples, quand ce mekyas est perdu, et la latitude inconnue. C'est apparemment le style du cadran. Voyez ci-après.

LXX. Du diamètre de l'ombre.

LXXI. Du mouvement horaire vrai du ☉.

LXXII. Mouvement horaire vrai de la Lune.

LXXIV. Éclipses de ☾.

LXXV. Éclipses de ☉.

Le reste pourrait fournir quelques lumières sur les méthodes trigonométriques de ce tems. Quelques chapitres sont purement astrologiques.

Il ne reste aucun indice que Ptolémée, ou aucun grec après lui, ait cherché les erreurs des Tables du Soleil, de la Lune et des planètes. Ce que les Grecs n'ont point fait, parce qu'ils étaient plus discoureurs que calculateurs, et plus théoriciens qu'observateurs, on le voit pour la première fois pratiqué par les Arabes. Tous leurs astronomes, à l'envi, cherchent à mieux déterminer ce qui n'avait été qu'ébauché par les Grecs; mais ils ne paraissent pas même avoir soupçonné le besoin de rien changer aux théories. On ne voit, à cet égard, aucune tentative, même de la part des plus distingués d'entre eux, tels qu'Albategnius, et Ebn Jounis. On les voit tous observateurs assidus et calculateurs infatigables. Leur principal avantage sur les Grecs, c'est que l'Astronomie étant encouragée spécialement, et même cultivée par leurs princes, ils purent avoir des instrumens plus grands, plus chers et mieux divisés; mais ils ne changèrent rien à la forme de ces instrumens, ni à la manière d'observer. Rien ne nous dit quelles avaient été les ressources d'Hipparque. Elles étaient probablement celles d'un simple particulier. Pour Ptolémée, il n'eut pas besoin de dépenser beaucoup pour ses instrumens, puisqu'il est très probable qu'il s'est contenté de les imaginer, et d'en donner la description. S'il est vrai (comme on l'a vu *Histoire de l'Astron. anc.*, tome II, p. 431) qu'il soit demeuré quarante ans enfermé dans les Pîtres de Canope, il y aura sans doute été réduit à ses moyens personnels. Les Arabes ne pouvaient calculer si assidûment, sans trouver quelques abréviations, quelques méthodes nouvelles; Ptolémée leur a maladroitement laissé à faire la substitution des sinus à ces cordes si peu commodes; ce changement en a amené d'autres dans la Trigonométrie. Nous en avons déjà remarqué plusieurs, nous en ferons encore voir quelques autres, mais ils n'auront pas tous la même importance.

L'extrait qu'on vient de lire était livré à l'impression, quand M. Sédillot, qui s'occupe d'un immense travail sur l'Astronomie des peuples orientaux, a bien voulu nous communiquer sa traduction de quarante-sept chapitres d'Ebn Jounis, qui n'ont point été publiés par M. Caussin, et dont vingt-huit ne se trouvent pas dans le manuscrit de Leyde. M. Caussin s'est attaché principalement à nous faire connaître ce qui concerne les observations; ce que l'on va lire se rapporte plus particulièrement à la doctrine, aux méthodes et à l'histoire de la science. Nous aurons interverti l'ordre des chapitres; mais nous les aurons rangés en deux classes

qui nous offriront un arrangement plus méthodique et plus conforme à notre plan; et nous n'en aurions peut-être pas pris un autre, quand nous aurions eu tout-à-la-fois les matériaux divers que nous avons employés; et dont nous remercions sincèrement les deux savans à qui nous en sommes redevable.

Le chapitre I traite des différentes ères; on y voit que l'*hégire*, ou la fuite de Mahomet, qui est le premier jour de la première année de cette ère, était un jeudi, selon les astronomes. Les années et les mois sont lunaires; le mois lunaire est celui qu'Hipparque a déduit des observations des Chaldéens; c'est-à-dire de $29^{\circ} 31' 50'' 8''' 9'' 24''$; 12 mois lunaires font $354^{\circ} 22' 1'' 37''' 52'' 48''$.

On voit qu'Ebn Jounis a pensé, comme nous, que les Chaldéens étaient simplement observateurs, et qu'ils avaient négligé de tirer de leurs observations les conséquences les plus immédiates et les plus faciles; ou du moins que s'ils l'avaient entrepris, ils y avaient bien moins réussi qu'Hipparque. Ils étaient astrologues et non astronomes.

Le règne d'Alexandre a commencé un lundi. Les Grecs comptaient les jours du lever du Soleil, et les années de cette ère sont juliennes.

Le règne de Dioclétien a commencé un vendredi; les mois sont égyptiens, avec cinq jours épagomènes. L'année de cette ère est celle des Coptes, ou l'année Alkept d'Albategnius. Le premier jour se nomme *neirouz, nouveau jour*. Le traducteur d'Albategni a écrit *enneirur*; c'est le premier jour de thoth ou du premier mois.

Le règne d'Jezdegerd a commencé un mardi. Les mois sont égyptiens avec cinq jours épagomènes. Ebn Jounis ajoute que, suivant quelques auteurs, les Persans intercalaient autrefois un mois tous les 120 ans.

La Table suivante montre la correspondance entre ces différentes ères;

Ères.	Premier jour de l'ère.	Distance en jours.	Années de 365 jours.	
Jezdegerd.....	3 Mardi....	0	0	0
Hégire.....	5 Jeudi....	3624	9	339
Dioclétien ou des Coptes.....	6 Vendredi..	127033	348	13
Auguste.....	5 Jeudi.....	241287	661	16
Alexandre.....	2 Lundi....	344324	945	129
Philippe.....	1 Dimanche..	348665	955	90
Baknaser.....	4 Mercredi..	503425	1379	90
Déluge.....	5 Jeudi.....	1363598	3755	323

Cette table pourra servir à mieux entendre ou même à rectifier les préceptes d'Albategnius, pour passer d'un Calendrier à un autre.

Chapitre II. Positions géographiques.

Les longitudes se déterminent par les éclipses de Lune. Il faut avoir des instrumens éprouvés, et s'être préalablement exercé aux observations; il faut savoir d'avance en quel point du disque doit commencer l'éclipse. L'auteur en a donné les moyens dans un autre ouvrage. On estime toujours le commencement trop tard, et l'on a pensé que le retard pouvait être de $7\frac{1}{4}$ environ. Pour déterminer le tems, on observait la hauteur d'une étoile. C'est la première fois que cette attention est mentionnée, et l'on en a vu des exemples dans quelques-unes des éclipses rapportées ci-dessus.

Ce même chapitre contient l'histoire de la mesure du degré par les Arabes.

Send ben Ali rapporte, dans un Discours qui lui est attribué, qu'Almamoun lui ordonna, ainsi qu'à Khaled ben Abdalmaleck Almezouroudi, de mesurer le degré d'un arc de grand cercle. Le khalife donna le même ordre à Ali ben Isa al Astharlabi et à Ali ebn Albahtazi, qui se rendirent dans un autre lieu. Les premiers allèrent entre Waset et Tadmor, et trouvèrent le degré de 57 milles. Les deux autres trouvèrent la même chose, et les deux rapports arrivèrent des deux endroits, tous deux en même tems, et ils donnaient la même grandeur au degré.

Cette parfaite conformité pourrait rendre le récit un peu suspect; nous aimerions mieux y voir quelque petite différence. Si les deux troupes se sont contentées des milles sans fraction, l'accord parfait des deux mesures sera moins étonnant, mais les mesures n'en seraient pas meilleures.

Ahmed ben Abdallah rapporte qu'on s'avança dans la plaine de Sinjjar, jusqu'à ce que la différence dans la hauteur méridienne, observée au même jour, fût d'un degré; il ajoute que le chemin mesuré fut de $56\frac{1}{2}$ milles, chaque mille étant de 4000 coudées noires. Voilà donc deux évaluations, l'une de $56\frac{1}{2}$, et l'autre de 57; le milieu est à très peu près $56\frac{2}{3}$, ainsi qu'il est rapporté ci-dessus.

Ebn Jounis explique ensuite la manière dont on doit procéder dans cette mesure; nous en avons déjà rendu compte. Il exige que les instrumens donnent les minutes; il veut que la règle dont on se sort soit de cuivre jaune ou rouge, d'argent ou d'or; que l'épaisseur soit égale à la largeur, et que la longueur soit un multiple exact de la largeur, tel que 20, 24 ou tel autre; que le poids de la règle soit exactement

déterminé, pour se convaincre qu'elle n'a souffert aucune altération pendant la mesure. Toutes ces précautions sont fort bonnes, mais on ne dit pas bien précisément si elles ont été observées.

Chapitre III. Du tems moyen et du tems vrai. Les uns commencent le jour au lever du Soleil, les autres à la première apparition de l'aurore. L'auteur pense qu'il vaut mieux commencer à minuit ou à midi. Il compte cinq méthodes différentes pour évaluer l'équation du tems.

La première est celle de Ptolémée. Théon nous l'a expliquée de façon à ne rien laisser à désirer. La seconde est celle des auteurs des Tables qui commencent par le point de l'écliptique où l'équation est nulle. Suivant la troisième, on commence par le point où l'équation est soustractive (et sans doute la plus grande); dans la quatrième, on commence la Table au point où l'équation est additive; enfin, dans la cinquième, on commence au point équinoxial du printemps. Toutes ces méthodes au fond n'en sont qu'une, et Ebn Jounis nous apprend moins de choses que Théon. On pourrait penser que les Arabes ne connaissaient pas les Tables manuelles où l'équation était toujours additive.

Les chapitres IV, V et VI ont été traduits par M. Caussin; voyez ci-dessus, p. 78.

Chapitre VII. La Table des longitudes géographiques est pour le méridien du Caire, à 55° du point le plus occidental, ou 125° du point le plus oriental. Nous ne disons rien de ces longitudes; les Arabes pouvaient les avoir rendues moins défectueuses, mais ils n'avaient encore aucun moyen pour les rendre un peu passables.

Chapitre VIII. Mouvement des apogées et des nœuds. L'auteur ne donne aux apogées et aux nœuds que le mouvement commun de précession d'un degré en 70 ans, ou plus exactement de $51''14''43'''59''$ en 365 jours. On avait cru l'apogée du Soleil parfaitement immobile par la raison que Ptolémée lui donnait la même longitude qu'Hipparque avait trouvée 263 ans plutôt. Si Ptolémée n'eût pas changé l'idée d'Hipparque, qui donnait aux points équinoxiaux un mouvement rétrograde, il aurait vu que les apogées devaient paraître avancer en longitude comme les étoiles; mais, pour trouver l'apogée avancé, il aurait fallu changer les données de l'observation, et Ptolémée a trouvé plus simple de copier le calcul fait par Hipparque, et de le donner pour le résultat de nouvelles observations.

Ebn Jounis l'excuse par la difficulté qu'on éprouve à déterminer cet apogée, qu'on déduit de la comparaison de deux arcs très petits; il aurait pu ajouter, et très incertains. Il partage l'erreur entre Hipparque et Pto-

lémée; il retranche 2° de l'apogée d'Hipparque, et les ajoute à celui de Ptolémée, supposant ainsi environ 4° de précession entre Hipparque et Ptolémée; c'est un peu trop, même dans la supposition de $54''$ de précession annuelle; mais plus de précision eût été bien illusoire.

La Table vérifiée ne donnait que $2^{\circ} 4' 35''$ d'équation au Soleil; d'autres auteurs avaient trouvé $2^{\circ} 5' 32''$; Albategni a depuis trouvé mieux encore; on avait considérablement diminué l'erreur d'Hipparque; Albategni, par ses propres observations, a eu l'avantage d'approcher plus près de la vérité.

Aboul Cassem Ahmed ben Mousa ben Schaker avait trouvé l'apogée en $2^{\circ} 24' 35''$ en l'année 220 d'Izǧerd; Ebn Jounis nous dit qu'il l'a observé lui-même avec un très grand soin, et qu'il a trouvé $2^{\circ} 26' 10''$, et c'est ainsi qu'il l'a mis dans ses Tables. Dans des tems intermédiaires, des Persans avaient eu $2^{\circ} 17' 55''$ et $2^{\circ} 20''$. Environ 200 ans après cette dernière observation, les auteurs de la Table vérifiée trouvèrent $2^{\circ} 40'$ de plus, ou $2^{\circ} 22' 40''$; deux autres déterminations ont suivi celle de la Table vérifiée, et toujours l'apogée a paru plus avancé. Ebn Jounis en conclut que l'apogée a le même mouvement que les fixes. Ainsi il n'avait aucune idée d'un mouvement propre. Il donne, pour les divers apogées, les quantités suivantes, qui se rapportent à l'an 372 d'Izǧerd :

$$\begin{array}{cccccc} \odot & \text{♄} & \text{♅} & \text{♆} & \text{♇} & \text{♁} \\ 2^{\circ} 26' 10'', & 8^{\circ} 10' 0'', & 5^{\circ} 25' 0'', & 0^{\circ} 0' 10'', & 2^{\circ} 26' 10'', & 6^{\circ} 23' 30''. \end{array}$$

Chap. IX. Calcul des lieux du Soleil, de la Lune et des planètes. Rien de nouveau, puisque la forme des tables n'a point changé.

Stations et rétrogradations. Il énonce, comme Albategni, que la rétrogradation commence lorsque la planète se meut suivant la tangente à l'orbite. Si ce n'est pas une erreur positive, c'est au moins une expression bien impropre. Ptolémée s'était exprimé avec beaucoup plus de justesse.

Chapitre X. Des cordes et des sinus. Les cordes primitives sont au nombre de 7. Ce sont celles de 60° et de 120° , de 90° , de 36° et de 144° , de 72° et de 108° . Il enseigne à trouver les cordes des arcs doubles et des arcs sous-doubles et la corde de $(A \pm B)$. Il applique ces formules au calcul des sinus. Il suppose 120 parties au diamètre; d'autres lui en ont donné 300; d'autres 10 seulement. Il donne les motifs du choix qu'il a fait d'après les Grecs.

Du sinus de 18° , il descend à ceux de 9° , $4^\circ 50'$, $2^\circ 15'$, $1^\circ 7' 30'' = 1^\circ \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$ de degré; il en retranche $\frac{1}{8}$, et conclut pour le sinus de $1^\circ 1^\circ 2' 49'' 40''' 4^{17}$.

Du sinus de 15° il descend à ceux de $7^\circ 30'$, $3^\circ 45'$, $1^\circ 52' 30''$, $0^\circ 56' 15'' = \frac{1}{16}$ de degré; il y ajoute $\frac{1}{15}$, et il a pour le sinus de 1°

La différence est..... $\frac{1.2.49.45.10}{5.6}$

L'un est trop faible et l'autre trop fort; il partage la différence en trois parties, le tiers est $1' 42''$; il ajoute au premier sinus, deux de ces tiers, ou.....

il a pour le sinus plus approché..... $\frac{3.24}{1.2.49.43.28}$

Il retranche du second sinus le tiers de la différence, ou $\frac{1.42}{1.2.49.43.28}$.
il a de même pour le sinus approché.....

C'est par ces moyens qu'il a calculé les sinus pour toute l'étendue du quart de cercle de 10 en 10'; il pousse l'exactitude jusqu'aux tierces.

Le sinus de 10' se déduit des sinus de $7' 30''$ et de $15'$.

Les sinus conclus par de simples parties proportionnelles, sont toujours trop faibles.

Pour corriger l'erreur, Ebn Jounis la détermine, comme on vient de voir, pour les sinus qui sont dans sa Table. Il appelle cette erreur, *élément de correction* = E; pour en conclure la correction pour un nombre *m* de minutes, il fait la correction = $E.m(60-m) = Em.60 - Em^2$, ce qui revient à peu près à ce que donnerait la formule différentielle..... $\Delta'' \sin A = (\Delta - A)^2 \sin A$. On voit qu'il ne connaissait pas la formule de la seconde différence que nous avons trouvée chez les Indiens, à une époque fort incertaine qui paraît postérieure au tems d'Ebn Jounis.

Chapitre XI. De l'obliquité de l'écliptique. Il rapporte en commençant l'obliquité d'Eratosthène, d'Hipparque et de Ptolémée, c'est-à-dire $23^\circ 51' 20''$.

Après les Grecs, on ne connaît d'autre obliquité que celle qui fut observée entre les années 160 et 170 de l'hégire, laquelle était de $23^\circ 51'$, et paraît un peu trop faible. Les astronomes d'Almamoun trouvèrent, en l'an 201 d'Izdgird..... $23^\circ 33'$ et $23^\circ 33' 32''$
en l'an 237, on trouva les haut. solsticiales $33^\circ 5'$

et..... $\frac{80.15}{47.10}$ obliquité 23.35
différence..... 113.20
 56.40
latitude de Bagdad..... 35.20

Ahmed ben Abdallah Habash donne.....	25° 33'	
	et.....	23.35
en 243, on trouva, hauteurs.....	79° 24'	
et.....	32.13	
	47.11	23.35.30
	111.37	
	55.48.30	
Latitude de Sermanrai.....	34.11.30	
Thébit ben Corrab.....		23.35
Alfâdel.....		23.34. 2
Aboulhassan.....		23.33.45

Ebn Jounis, d'après ses propres observations, et en réduisant à 2' la parallaxe du Soleil, nous donne..... 23.35.

Mais la parallaxe du Soleil est réellement si peu de chose, qu'il valait mieux la négliger tout-à-fait, comme on négligeait forcément la réfraction, dont on n'avait aucune idée. Il a confirmé cette détermination par des observations d'azimut et de hauteur; mais ces moyens sont moins directs et moins certains. Il assure qu'il a toujours trouvé les mêmes résultats. D'après les détails qu'il nous donne de ses observations de latitude au Caire, et d'après l'anneau astronomique qu'il dit avoir employé, il est à croire que ses observations ne pouvaient être exactes à la minute; mais l'accord entre tant d'observateurs différents, doit faire penser que le résultat moyen entre tous, ne doit pas s'écarter sensiblement de la vérité. Il nous avertit d'ailleurs que si l'arc de 90° n'est pas exactement le quart d'une circonférence, l'obliquité sera affectée d'une erreur proportionnelle et de signe contraire.

Parmi les vérifications qu'il mentionne, il cite des hauteurs sans azimut, c'est-à-dire observées au premier vertical. Car il appelle azimut l'angle que fait le cercle de hauteur avec le premier vertical, et il réserve le mot amplitude pour l'arc de l'horizon qu'on appelle aujourd'hui *amplitude orientale* ou *occidentale*.

Pour ces dernières observations, il commence par tracer la ligne est-ouest par des ombres égales. Il remarque expressément que le gnomon donne toujours la hauteur du bord supérieur du Soleil. Il nous apprend qu'Hermès et quelques autres ont traité des ombres *ex professo*.

Il nous enseigne l'usage des formules

$$\sin D = \sin \omega \sin \odot, \sin \odot = \frac{\sin D}{\sin \omega}, \sin \omega = \frac{\sin D}{\sin \odot}.$$

Tout cela était connu depuis Hipparque. La Table des déclinaisons d'Ebn Jounis est calculée de 10 en 10' de longitude.

Dans un discours sur l'ombre, il démontre géométriquement que l'ombre du gnomon est celle du bord supérieur; il ne dit rien de la pénombre.

Il recommande sur-tout de bien vérifier le niveau du plan sur lequel on pose le gnomon. Ce plan doit être d'un marbre blanc; quand il est bien nivelé, on le scelle en plâtre. Il faut bien vérifier la perpendicularité du gnomon; l'auteur en donne plusieurs moyens: le plus remarquable est de retourner l'instrument, et de faire des observations dans les deux situations opposées. C'est la première mention que je trouve de cette pratique aujourd'hui très répandue. Il décrit une armille mobile et l'anneau dont nous avons déjà dit un mot. Cet anneau avait à son zénit un anneau beaucoup plus petit qui servait à le suspendre. Cet instrument serait plutôt celui d'un amateur que celui d'un astronome de profession. C'est pourtant avec cet anneau qu'il a vérifié la latitude du Caire, où il demeurait. On était persuadé que cette latitude ne passait pas 29°; par les ombres, avec un astrolabe plan, et par les hauteurs observées au premier vertical, il nous dit avoir toujours trouvé 30° à fort peu près. Ce résultat n'étant pas conforme à l'opinion commune, il répéta l'observation avec divers savans qui doutaient de sa détermination. Ils furent obligés de se ranger à son avis; mais il est à regretter qu'il ait employé des moyens si peu susceptibles de précision.

Il donne ensuite une table d'ombres, c'est-à-dire des tangentes; il la calcule pour le rayon 60 et de 10 en 10', comme les tables de sinus, ce qui donne l'espoir qu'il va l'introduire dans les calculs trigonométriques; il en calcule une autre de degré en degré seulement pour le rayon 12°; il enseigne à réduire au rayon 12 les ombres calculées pour 60, et réciproquement; il donne les formules

$$\text{ombre} = \text{gnomon} \frac{\cos \text{hauteur}}{\sin \text{hauteur}}; \text{gnomon} = \text{ombre mesurée} \frac{\sin \text{hauteur}}{\cos \text{hauteur}}.$$

Ces formules se trouvent déjà dans le livre d'Albategnius.

Chapitre XII. Détermination des latitudes. Il recommande la correction due à la parallaxe du Soleil; le précepte était juste, mais prématuré. On ne la connaissait pas assez bien; il était plus sûr de la négliger. Il appelle *cercle indien*, le cercle qu'on trace autour du pied du gnomon, pour déterminer la méridienne par des ombres égales.

Chapitre XIII. Des ascensions droites. Son précepte est celui de Pto-

lémée et celui d'Albategni. Il en diversifie le calcul de plusieurs manières, mais elles n'ont rien de neuf, et prouvent toutes qu'il n'avait pas senti toute l'utilité de la Table des tangentes qu'il avait calculée avec tant de soin et tant d'étendue. Il calcule séparément $\frac{\sin \omega}{\cos \omega} \cdot \frac{\sin D}{\cos D}$, et multiplie l'un

des quotiens par l'autre. Il fait $\sin R = \frac{\sin D}{\cos D} \cdot \frac{\cos \omega}{\sin \omega}$, au lieu de faire... $\sin R = \tan D \cot \omega$. Cette inadvertance est véritablement singulière.

Pour calculer la longitude par l'ascension droite, au lieu de faire $\tan \odot = \frac{\tan R}{\cos \omega}$, il donne un moyen qui est au moins très curieux.

Dans la figure 14, il a d'abord $\sin B : \sin R :: 1 : \sin \odot = \frac{\sin R}{\sin B}$.

Pour connaître B, prenez $AC = 90^\circ$, et menez BC qui sera de 90° , C sera le pôle de AB. CBA sera de 90° ; prenez encore $BE = 90^\circ$, et menez CE, dont B sera le pôle, les angles en E seront droits.

$$\begin{aligned} C\hat{A} &= 180^\circ - \gamma C = 180^\circ - CA - A\gamma = 180^\circ - 90^\circ - R = 90^\circ - R \\ E\hat{A} &= 180^\circ - E\gamma = 180^\circ - EB - B\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \odot = 90^\circ - \odot \\ CE &= EBC = 180^\circ - CB\gamma = 180^\circ - CBA - AB\gamma = 180^\circ - 90^\circ - B = 90^\circ - B, \\ \cos C\hat{A} &= \cos CE \cos E\hat{A} = \cos CE \sin L, \text{ et } \sin \odot = \frac{\cos C\hat{A}}{\cos CE} = \frac{\sin R}{\cos CE}. \end{aligned}$$

Pour avoir CE, faites $\sin CE = \sin \omega \sin C\hat{A} = \sin \omega \cos R$.

Soit donc $\sin CE = \sin \omega \cos R$, et vous aurez $\sin \odot = \frac{\sin R}{\cos CE}$.

Tel est le précepte que l'auteur nous donne sans démonstration.

Cette construction nous démontre une chose aujourd'hui bien connue.

L'angle de l'écliptique avec le cercle de déclinaison est le complément de la déclinaison d'un point de l'écliptique dont la longitude serait $= 90^\circ - R$.

Elle nous prouve encore ce théorème dont Géber, long-tems après, s'est déclaré le premier inventeur, $\cos B = \sin \omega \cos R$, ou $\cos$ angle oblique $= \cos$ côté opposé $\sin$ autre angle oblique.

Ebn Jounis a-t-il remarqué ce théorème, en a-t-il connu la généralité? Il est incontestable qu'il l'emploie; mais Ptolémée l'avait déjà calculé sans le remarquer.

Je ne puis répondre que la construction que je viens de donner ait été connue d'Ebn Jounis. En voici une autre qui est plus encore dans le style grec, et dont on voit plus d'un exemple dans la Syntaxe mathématique.

Prolongez BA en sorte que $Ba = 90^\circ$ (fig. 15),

$B\gamma$ en sorte que $Bb = 90^\circ$.

Menez abC qui aille rencontrer l'équateur en C .

B est le pôle de abC ; les angles Bab , Bba , BCa seront droits; les arcs Ca , CA , CB seront de 90° ; $ba = \gamma BA = B$.

$$cb = CBb = 90^\circ - B; \quad C\gamma = 90^\circ - A, \quad b\gamma = 90^\circ - \odot, \\ \sin Cb = \cos B = \sin \omega \sin C\gamma = \sin \omega \cos A.$$

Cette construction a été employée par Ptolémée; Ptolémée n'a pas vu le théorème; si l'on veut en faire honneur à Ebn Jounis, qui n'en parle en aucun endroit, et qui ne l'emploie ici que comme moyen subsidiaire, je serai fort tenté de le réclamer pour Ptolémée, qui a pris le même détour, parce qu'il ignorait aussi le théorème énoncé par Géber.

Si Ebn Jounis le connaissait, il a dû dire, faites $\cos B = \sin \omega \cos A$, et vous aurez $\sin L = \frac{\sin A}{\sin B}$; qu'était-il besoin d'aller chercher cette déclinaison que l'on calcule avec une longitude $= 90^\circ - A$? Pour quoi compliquer et obscurcir inutilement l'énoncé du précepte? Si l'auteur arabe a employé ce langage détourné et peu naturel, c'est qu'il ignorait cette propriété générale des triangles rectangles.

Il est à remarquer que parmi une foule de problèmes d'Astronomie sphérique, souvent assez inutiles et de pure fantaisie, jamais du moins jusqu'ici Ebn Jounis ne nous parle du moyen pour calculer les angles de position des points de l'écliptique. Ce silence peut-il se concevoir, si l'on suppose qu'il connaissait le théorème de Géber.

Il en est de ce théorème comme de l'usage des tangentes, qu'il a méconnu, après avoir calculé une Table des tangentes. Ce théorème est resté enfoui dans les écrits de Ptolémée et des Arabes, qui ont été souvent tout près de l'apercevoir. Géber, qui se l'attribue, aime un peu trop à se vanter; tout son ouvrage le prouve; mais enfin, avant lui, personne n'en avait parlé; c'est par lui que nous le connaissons; je ne vois pas de raison suffisante pour l'en dépouiller. Au reste, je ne propose que des doutes, je suis loin de rien affirmer.

Ebn Jounis donne ensuite une règle bien moins simple et bien moins facile à calculer; elle se déduit facilement de l'équation primitive.

$$\begin{aligned} \sin \odot &= \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{(1 - \cos^2 B)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin A}{(1 - \sin^2 \omega \cos^2 A)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sin A}{(\sin^2 \omega + \cos^2 \omega - \sin^2 \omega \cos^2 A)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin A}{(\cos^2 \omega + \sin^2 \omega \sin^2 A)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Tel est le précepte qu'il nous donne, sans nous dire comment il a changé $\sin B$ en $(\cos^2 \omega + \sin^2 \omega \sin^2 R)^{\frac{1}{2}}$, qui est une hypoténuse. A-t-il fait ces substitutions? la chose n'est pas absolument impossible, mais on peut la croire peu vraisemblable.

Voici un autre moyen extrêmement simple, et par lequel Ebn Jounis aurait pu arriver au théorème.

Par le point B, menez au pôle de l'écliptique E le cercle de latitude BE, $\angle BE$ sera un angle droit. $\angle BAE = B = 180^\circ - \angle BPE = 180^\circ - EB \angle - EBP = 180^\circ - 90^\circ - EPB = 90^\circ - EBP$; donc $EBP = 90^\circ - B$,

$$\begin{aligned} \sin EB : \sin EPB :: \sin EP : \sin EPB = \cos B &= \frac{\sin EP \sin EPB}{\sin EB} \\ &= \frac{\sin \omega \sin (90^\circ + R)}{\sin 90^\circ} = \sin \omega \cos R. \end{aligned}$$

Cette démonstration n'a rien qui ne fût très connu des Grecs ou des Arabes, mais cela n'est pas suffisant pour établir qu'ils aient en effet connu ce théorème.

Voici encore un calcul qu'ils ont fait plus d'une fois. Ils avaient la formule

$$\frac{\sin \odot}{\cos \odot} = \frac{\sin R}{\cos R \cos \omega};$$

pour calculer les formules de cette espèce, ils étaient obligés de les élever au carré. Ils faisaient donc, ainsi qu'on peut le voir à la page 55 du tome II de l'*Astron. ancienne*,

$$\frac{\sin^2 \odot}{1 - \sin^2 \odot} = \frac{\sin^2 R}{\cos^2 \omega \cos^2 R}, \text{ d'où } \sin^2 \odot = \frac{\sin^2 R}{\cos^2 \omega \cos^2 R} - \frac{\sin^2 R \sin^2 \odot}{\cos^2 \omega \cos^2 R},$$

et

$$\begin{aligned} \sin^2 \odot + \frac{\sin^2 R}{\cos^2 \omega \cos^2 R} \sin^2 \odot &= \frac{\sin^2 R}{\cos^2 \omega \cos^2 R}, \\ \sin^2 \odot &= \left(\frac{\sin^2 R}{\cos^2 \omega \cos^2 R} \right) = \frac{\sin^2 R}{\cos^2 \omega \cos^2 R + \sin^2 R} = \frac{\sin^2 R}{\sin^2 R + \cos^2 R - \sin^2 \omega \cos^2 R}, \\ &= \left(\frac{\sin^2 R}{1 + \frac{\sin^2 R}{\cos^2 \omega \cos^2 R}} \right), \\ &= \left(\frac{\sin^2 R}{1 - \sin^2 \omega \cos^2 R} \right), \text{ et } \sin \odot = \frac{\sin R}{(1 - \sin^2 \omega \cos^2 R)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin R}{(1 - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin R}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Calculez donc $\sin \varphi = \sin \omega \cos R$, et vous aurez $\sin \odot = \frac{\sin R}{\cos \varphi} = \frac{\sin R}{\sin B}$, donc $\cos \varphi = \sin B$, ou $B = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - \arcsin \sin \omega \cos R$, ou $\cos B = \sin \omega \cos R$.

Ebn Jounis aura donc pu très bien voir que pour trouver $\odot$ par $\mathcal{R}$, il fallait calculer $\sin D' = \sin \omega \cos \mathcal{R}$, et qu'on avait $\sin \odot = \frac{\sin \mathcal{R}}{\cos D'}$, sans remarquer pourtant que $D' = 90^\circ - B$, et sans apercevoir le théorème général.

Mais on objectera que pour suivre cette voie, il fallait une suite de transformations; je répondrai qu'il a fallu très probablement des transformations du même genre pour arriver à cette autre formule d'Ebn Jounis.

$$\sin \odot = \frac{\sin \mathcal{R}}{(\cos^2 \omega + \sin^2 \omega \sin^2 \mathcal{R})^{\frac{1}{2}}}, \text{ d'où l'on tire } \frac{\sin \mathcal{R}}{\cos \omega (1 + \tan^2 \omega \sin^2 \mathcal{R})^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sin \mathcal{R}}{\cos \omega (1 + \tan^2 D)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin \mathcal{R} \cos D}{\cos \omega (\cos^2 D + \sin^2 D)} = \frac{\sin \mathcal{R} \cos D}{\cos \omega},$$

et

$$\cos \omega = \frac{\sin \mathcal{R} \cos D}{\sin \odot}, \text{ ou } \cos \text{ angle oblique} = \frac{\cos \text{ côté opposé} \sin \text{ côté adjacent}}{\sin \text{ hypoténuse}}.$$

Autre théorème général des triangles sphériques rectangles. Il est peu connu, parce qu'on a cette autre formule plus commode

$$\tan \text{ angle oblique} = \frac{\tan \text{ côté opposé}}{\sin \text{ côté adjacent}}.$$

Dans la formule $\cos \text{ angle oblique} = \cos \text{ côté opposé} \left(\frac{\sin \text{ autre côté}}{\sin \text{ hypoténuse}} \right)$.

Substituez $\frac{\sin \text{ autre angle}}{\sin 90^\circ} = \sin \text{ autre angle}$, vous aurez

$$\cos \text{ angle oblique} = \cos \text{ côté opposé} \sin \text{ autre angle oblique},$$

ce qui est le théorème de Géber. Nous trouverons plus loin une autre formule générale qui n'est pas plus connue, et qui n'est pas moins exacte.

On peut arriver à cette expression de deux autres manières.

Les Grecs connaissaient la formule

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin \mathcal{R}}{\cos \mathcal{R} \sin D}, \text{ ou } \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\cos \mathcal{R} \sin D}{\sin \mathcal{R}},$$

$$\text{d'où } \cos B = \frac{\cos \mathcal{R} \sin D \sin B}{\sin \mathcal{R}} = \cos \mathcal{R} \sin \omega,$$

route bien simple pour arriver au théorème sans aucune construction.

Ptolémée fait encore $\cos B = \frac{\sin D \cdot \cos \odot}{\cos D \sin \odot}$; d'où

$$\cos B = \frac{\sin \odot \sin \omega \cos \odot}{\cos D \sin \odot} = \frac{\sin \omega \cos \mathcal{R} \cos D}{\cos D} = \sin \omega \cos \mathcal{R},$$

manière tout aussi simple que la précédente.

Il n'est pas difficile de construire par l'Analemme la formule.....
 $(\cos^2 \omega + \sin^2 \omega \sin^2 \mathcal{R})^{\frac{1}{2}}$, et d'en faire l'hypoténuse d'un triangle rectiligne rectangle; l'embarras est seulement de démontrer que cette hypoténuse est le sinus de l'angle B, ce qui est démontré par le calcul analytique. En voilà trop sur ce petit problème, passons à un autre.

Pour déterminer l'obliquité par une longitude et une ascension droite, on avait les deux formules

$$\cos \mathcal{R} \cos D = \cos L, \quad \text{d'où} \quad \cos D = \frac{\cos L}{\cos \mathcal{R}},$$

$$\sin D = \sin \omega \sin L, \quad \text{d'où} \quad \sin \omega = \frac{\sin D}{\sin L},$$

c'est à cela que revient le procédé d'Ebn Jounis, qui ne suppose ici rien qui ne fût connu depuis long-tems. Il fait encore $\frac{\sin \mathcal{R} \cos L}{\sin L} \cdot \frac{1}{\cos \mathcal{R}}$, ce qui revient à $\tan \mathcal{R} \cot L = \cos \omega$, d'où $\tan \mathcal{R} = \cos \omega \tan L$, formule que les Grecs et les Arabes évitaient, parce qu'elle était pour eux du second degré.

S'il avait connu le théorème du cosinus, il aurait pu faire.....
 $\cos B = \sin \omega \cos \mathcal{R}$, $\cos D = \frac{\cos L}{\cos \mathcal{R}}$, et $\cos \omega = \cos D \sin B = \left(\frac{\cos L}{\cos \mathcal{R}} \right) \sin B$; il eût deux fois de suite employé ce théorème.

Ce problème, au reste, n'est que de fantaisie; on ne peut observer à la fois $\mathcal{R}$ et L , sans un instrument qui, comme l'astrolabe, suppose l'obliquité connue.

Chapitre XIV. Demi-augmentation ou diminution du jour, c'est-à-dire complément de l'arc semi-diurne; sin verse de l'arc semi-diurne et ascensions obliques. Soit A l'arc semi-diurne;

$$\sin A = \cos P = \frac{\sin H}{\cos H} \cdot \frac{\sin D}{\cos D},$$

c'est la formule de Ptolémée; elle revient à $\cos P = \tan H \tan D$.

$\sin v. P = 1 \pm \sin A$. A ces formules l'auteur ajoute

$$\cos P = \left(\frac{\sin D}{\cos D} \right) \frac{\text{ombre équinoxiale}}{\text{longueur du gnomon}},$$

ce qui revient évidemment à $\tan D \tan H$.

Ainsi même en employant une ombre, il méconnaît l'utilité des tangentes, puisqu'il calcule encore $\frac{\sin D}{\cos D}$; il fait

$$\left(\frac{\text{ombre équinox.}, \text{ombre du complém. de déclin.}}{\text{rayon}} \right) = \tan H \tan D = \sin A = \cos P;$$

$$\frac{\sin D}{\cos D} \cdot \frac{\sin \text{amplitude ortive}}{\sin \text{haut. au 1}^{\text{er}} \text{ vertic.}} = \frac{\sin D}{\cos D} \cdot \frac{\left(\frac{\sin D}{\cos H}\right)}{\left(\frac{\sin D}{\sin H}\right)} = \frac{\sin D}{\cos D} \cdot \frac{\sin H}{\cos H} = \tan D \tan H.$$

Il retourne de toutes les manières ses tangentes pour les naturaliser dans le calcul trigonométrique, sans trouver cette notion simple et générale, qu'on pouvait substituer partout l'ombre au rapport $\frac{\sin}{\cos \sin}$. Était-il si difficile de dire : toutes les fois que nous trouverons ce rapport, nous y substituerons l'ombre qui en est l'expression, et dont nous avons calculé la Table dans cette vue. Par là nous simplifierons les règles trigonométriques, et nous éviterons les extractions de racines qu'exigent les méthodes ordinaires.

$$\frac{\sin A \sin \frac{1}{2} \text{ excès du plus long jour}}{\sin \text{ total}} = \sin A \cos P = \sin A \tan H \tan \omega \\ = \sin \frac{1}{2} \text{ excès du jour proposé.}$$

C'est encore une règle de Ptolémée.

La même formule, en changeant le signe, donne la demi-diminution du jour le plus court.

Dans une continuation du même sujet, il nous dit : faites..... $\frac{\cos (H-D) + \cos (H+D)}{2}$, et vous aurez

$$\sin \text{ verse arc semi-diurne} = \frac{\cos (H-D)}{\frac{1}{2} [\cos (H-D) + \cos (H+D)]}, \\ \sin v. \text{ arc semi-diurne} = \sin v. P = 2 \sin^2 \frac{1}{2} P = \frac{\cos (H-D)}{\cos H \cos D} \\ = \frac{\cos H \cos D + \sin H \sin D}{\cos H \cos D} = 1 + \tan H \tan D.$$

Ebn Jounis ne donne pas ces développemens, mais ils prouvent que sa règle est identique à la nôtre. Il emploie ensuite l'amplitude ortive A, dont le sinus est $\frac{\sin D}{\cos H}$, et il fait

$$\sin v. P = \frac{\sin (H-D) + \frac{\sin D}{\cos H}}{\sin H \cos D} = \frac{\sin H \cos D - \cos H \sin D + \frac{\sin D}{\cos H}}{\sin H \cos D} \\ = \frac{\sin H \cos H \cos D - \cos^2 H \sin D + \sin D}{\sin H \cos H \cos D} = \frac{\sin H \cos H \cos D + \sin D \sin^2 H}{\sin H \cos H \cos D} \\ = 1 + \tan H \tan D;$$

c'est donc toujours la même valeur présentée sous des formes différentes.

$$\frac{\sin \gamma. P}{\cos (H-D)} = \frac{1}{\cos H \cos D}, \text{ ou } \cos H \cos D = \frac{\cos (H-D)}{\sin \gamma. \text{ arc semi-diurne}};$$

de $\cos P = \tan H \tan D$, on tire $\tan H = \cos P \cot D$, formule qui sert à trouver la hauteur du pôle par l'arc semi-diurne et la déclinaison, ou pour éviter la tangente de l'arc inconnu,

$$\sin H = \frac{\cos P \cos D \cos H}{\sin D} = \frac{\cos P \cos D}{\sin \text{amplit.}} = \frac{\cos P \cos D}{\sin A},$$

expression qui n'emploie que des sinus, mais elle exige de plus la connaissance de l'amplitude ortive. Il donne encore $\cos H = \frac{\sin D}{\sin A}$, et..... $\cos A = \cos D \sin P$: toutes ces formules étaient connues. A ces expressions de H, il en ajoute une plus compliquée qu'il est aisé de vérifier.

$$\begin{aligned} \sin H &= \frac{\cos P \cos D}{\sin A} = \frac{\cos P \cos D}{(1 - \cos^2 A)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos P \cos D}{(1 - \cos^2 D \sin^2 P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos P \cos D}{(1 - \cos^2 D + \cos^2 D \cos^2 P)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\cos P \cos D}{(\sin^2 D + \cos^2 D \cos^2 P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos P \cos D}{\left(\frac{\sin^2 D}{\cos^2 D} + \cos^2 P\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos P \cos D}{(\sin^2 D + \cos^2 D \tan^2 P)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\cos P \cos D}{(\sin^2 D + \sin^2 D \tan^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos P \cos D}{(\sin^2 D \sec^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos P \cos D}{\sin D \sec H} = \cos P \cot D \cos H \\ &= \tan H \tan D \cot D \cos H = \sin H. \end{aligned}$$

Par ces transformations dont il ne dit rien, on voit qu'il a pu trouver H par la déclinaison et l'arc semi-diurne en faisant

$$\sin H = \frac{\cos P}{\left(\frac{\sin^2 D}{\cos^2 D} + \cos^2 P\right)^{\frac{1}{2}}},$$

expression qui n'emploie que des sinus et n'exige que l'arc semi-diurne avec la déclinaison

$$\begin{aligned} \sin D = \cos H \sin A &= \frac{\cos H}{\cos \sec A} = \frac{\cos H}{(1 + \cot^2 A)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos H}{(1 + \sin^2 H \tan^2 P)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{(\sec^2 H + \tan^2 H \tan^2 P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1 + \tan^2 H + \tan^2 H \tan^2 P)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{(1 + \tan^2 H \sec^2 P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos P}{(\cos^2 P + \tan^2 H)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\cos P}{\left(\cos^2 P + \frac{\sin^2 H}{\cos^2 H}\right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Cette expression de la déclinaison est analogue à la précédente pour la latitude; elle offre les mêmes avantages, mais toutes deux sont assez inutilement compliquées. Il serait assez difficile de trouver des démonstrations directes de toutes les formules transformées qu'il présente successivement; on est donc réduit à penser que ces transformations lui étaient familières, et qu'elles ont pu le conduire à ses deux préceptes différens pour la longitude.

Voici encore un exemple de ces transformations :

$$\cos P = \tan g D \tan g H, \text{ on en déduit } \tan g D = \cos P \cot H, \quad \frac{\sin D}{\cos D} = \frac{\sin D}{(1 - \sin^2 D)^{\frac{1}{2}}} = \cos P \cot H;$$

$$\sin^2 D = \cos^2 P \cot^2 H - \sin^2 D \cos^2 P \cot^2 H;$$

$$\sin^2 D + \sin^2 D \cos^2 P \cot^2 H = \cos^2 P \cot^2 H,$$

$$\sin^2 D = \frac{\cos^2 P \cot^2 H}{1 + \cos^2 P \cot^2 H}, \text{ et } \sin D = \frac{\cos P \cot H}{(1 + \cos^2 P \cot^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos P \frac{\cos H}{\sin H}}{\left(1 + \cos^2 P \frac{\cos^2 H}{\sin^2 H}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{\cos P \cos H}{(\sin^2 H + \cos^2 P \cos^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos P \cos H}{(\sin^2 H + \cos^2 H - \cot^2 H \sin^2 P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos P \cos H}{(1 - \cos^2 H \sin^2 P)^{\frac{1}{2}}},$$

solution qui est tout-à-fait dans le style de Ptolémée. Sin D étant ainsi trouvé, Ebn Jonnis en conclut $\sin \omega = \frac{\sin D}{\sin \odot}$; ces préceptes lui servent à trouver l'obliquité par la hauteur du pôle et l'arc semi-diurne.

Ces divers problèmes ne peuvent être considérés que comme des exercices de calcul. Il est à regretter que l'auteur n'ait pas dit par quelle voie il était parvenu à les résoudre.

Il nous dit ensuite de faire $\sin P \cos H = \sin \phi$. Cette expression est celle de l'angle ZSP dans le triangle rectiligne ZSP (fig. 17). Cet angle est le complément de PSL dans le triangle rectangle PLS; faites ensuite

$$\sin D = \frac{\cos P \cos H}{\sin S = \cos \phi}, \text{ ou } \cos PS = \frac{\cos P \cos H}{\sin S},$$

ou

$$\cos \text{hypoténuse} = \frac{\cos \text{angle oblique} \cdot \cos \text{côté opposé à l'autre oblique}}{\sin \text{autre oblique}};$$

en effet cette formule est exacte et générale, ainsi qu'une autre qui est démontrée ci-dessus. On aura donc le sinus de la déclinaison par les deux règles de l'auteur, ou

$$\cos \text{hypoténuse} = \left(\frac{\text{côté oblique}}{\sin \text{angle opposé}} \right) \cos \text{autre oblique};$$

on a généralement $\cos C'' = \cos C \cos C'$; mais $\cos A' = \cos C' \sin A$, et $\cos C' = \frac{\cos A'}{\sin A}$; donc $\cos C'' = \left(\frac{\cos C}{\sin A} \right) \cos A'$, formule peu usitée, parce qu'on a $\cos C'' = \cot A \cot A'$, qui est plus simple.

La formule de l'auteur suppose donc implicitement le théorème de Céber; car il est visible que son arc subsidiaire ϕ est le complément de l'angle PSL; mais pourquoi, au lieu de cet angle auxiliaire, ne parlait-il pas de l'angle PSL qui appartient au triangle? Ne valait-il pas mieux dire faites $\sin P \cos H = \cos S$ et $\sin D = \frac{\cos P \cos H}{\sin S}$?

Autre méthode. Soit P' l'arc semi-diurne solstitial, P celui d'un autre jour;

$$\begin{aligned} \cos P' &= \tan H \tan \omega, \quad \cos P = \tan H \tan D, \\ \frac{\cos P}{\cos P'} &= \frac{\tan H \tan D}{\tan H \tan \omega} = \tan D \cot \omega = \sin R = \frac{\sin D}{\cos D} \cdot \frac{\cos \omega}{\sin \omega}, \end{aligned}$$

avec R , vous trouverez, dans les Tables de l'écliptique, la déclinaison qui lui convient, ou vous ferez $\sin R \tan \omega = (\tan D \cot \omega) \tan \omega = \tan D$; vous aurez donc D et $\sin \odot = \frac{\sin D}{\sin \omega}$, ou bien, ce qui serait plus court, avec les Tables de l'écliptique, vous trouverez la longitude $\odot$ qui répond à R .

Troisième méthode. *sin du rapport.* $\sin R = \cos P \cot H = \tan D$.

$$\begin{aligned} \sin^2 R + 1 &= \tan^2 D + 1 = \sec^2 D = \frac{1}{\cos^2 D}, \\ \sin \odot &= \frac{\sin R}{(1 + \sin^2 R)^{\frac{1}{2}} \sin \omega} = \frac{\tan D}{\sec D \sin \omega} = \frac{\tan D \cos D}{\sin \omega} = \frac{\sin D}{\sin \omega}; \end{aligned}$$

n'était-il pas beaucoup plus simple de chercher $\tan D$ dans la Table des ombres?

Chapitre XV. Arcs diurne et nocturne; *dayer* de l'arc diurne. Le *dayer* est la partie déjà écoulée du jour.

Si le Soleil est dans l'équateur. Soit $MA = \cos H$ le sinus de la hauteur méridienne (fig. 18), $NB = \sin h = \sin$ hauteur observée; NQ sera la partie écoulée du jour,

$$NQ = \frac{NB}{\cos H} = \frac{\sin h}{\cos H} = \cos P = \sin \text{partie écoulée du jour.}$$

Si le Soleil est au nord, $NB = \sin h$ (fig. 19),

$$NR = \frac{NB}{\cos H} = \frac{\sin h}{\cos H}, \text{ et en réduisant à l'équateur, } \frac{NR}{\cos D} = \frac{\sin h}{\cos H \cos D};$$

$\frac{NR}{\cos D}$ sera le sinus verse de la partie, MIN le cosinus verse.

Au lieu de $\frac{\sin h}{\cos H \cos D}$, l'auteur met $\frac{\sin h}{\frac{1}{2} [\cos (H-D) + \cos (H+D)]}$, ce qui pouvait être plus commode pour le calcul numérique, et ressemble à ce qu'on a depuis nommé prostaphérèse.

$$MA : NB :: MR : NR,$$

$$\sin \text{ haut. mérid.} : \sin \text{ haut. observée} :: \sin v. \text{ arc semi-diurne} : NR,$$

Cette méthode est dans l'ouvrage d'Albategni.

$$\sin \text{ angle horaire} = \frac{\cos \text{ haut. observée} \sin \text{ azimut}}{\cos \text{ déclinaison}};$$

c'est la règle des quatre sinus dans le triangle sphérique.

Pour trouver sin hauteur par le dayer, il renverse les formules précédentes, en dégagant $\sin h$, qu'il prend pour inconnue.

Le problème suivant sert à trouver la hauteur h et l'angle Z au zénit (fig. 25).

$$\sin P \cos D = \sin pS = \cos SQ = \cos baad, \quad \cos pP = \frac{\cos PS}{\cos pS} = \frac{\sin D}{\sin baad},$$

$$pZ = ZQS = \text{inhiraf} = pP - pZ = pP - (90^\circ - H),$$

$$\sin h = \sin SM = \sin SQ \sin SQM = \sin baad \cos SQZ \\ = \sin baad \cdot \cos \text{inhiraf},$$

$$\cos Z = \sin SZQ = \frac{\sin Sn}{\sin ZS} = \frac{\sin SQ \sin SQn}{\cos h} = \frac{\sin baad \cdot \sin \text{inhiraf}}{\cos \text{hauteur}};$$

Le baad est la distance de l'astre au point est de l'horizon; l'inhiraf est l'angle de cette distance avec le premier vertical.

Chapitre XVI. Durée du crépuscule. Abaissement 18° ; rien de neuf.

Chapitre XVII. Douze maisons. Point de formules, et rien de bien clair.

Chapitre XVIII. De l'amplitude ortive.

Quand le Soleil est dans l'équateur MQ (fig. 20), $MA \tan H = AQ$, ou

$$\cos (H-D) \tan H = MB = \sin (H-D) = \sin H \\ \text{et} \quad \tan H = \tan (H-D) = \tan H, \text{ puisque } D=0;$$

si la déclinaison est boréale,

$$\begin{aligned} M'A' \text{ tang } H &= A'C = A'Q + QC = \sin(H-D) + \sin A; \\ \text{donc} \quad \cos(H-D) \text{ tang } H &= \sin(H-D) + \sin A \\ \text{et} \quad \sin A &= \cos(H-D) \text{ tang } H - \sin(H-D), \\ \sin A &= \frac{\cos(H-D)\sin H - \sin(H-D)\cos H}{\cos H} = \frac{\sin(H-H-D)}{\cos H} = \frac{\sin D}{\cos H} = \sin \text{amplit.}; \end{aligned}$$

changez le signe de D , et vous aurez l'amplitude du côté du sud, ce qui nous dispense de démontrer la seconde règle de l'auteur. Vous aurez donc l'amplitude par la hauteur méridienne et la latitude; mais si vous avez la hauteur méridienne et la latitude, vous aurez la déclinaison, et il sera plus simple de faire $\sin A = \frac{\sin D}{\cos H}$; ces formules, fort justes d'ailleurs, sont parfaitement inutiles.

$$\sin A = \frac{\cos P \cos D}{\sin H} = \frac{\text{tang } H \text{ tang } D \cos D}{\sin H} = \frac{\sin D}{\cos H};$$

on aura donc l'amplitude par l'arc semi-diurne, la déclinaison et la latitude; il suffit de la déclinaison et de la latitude: cette formule est donc encore inutile. Faites

$$\cos \text{amplit. ortive} = \sin P \cos D;$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin \text{amplit.} &= (1 - \sin^2 P \cos^2 D)^{\frac{1}{2}} = (1 - \cos^2 D + \cos^2 D \cos^2 P)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sin^2 D + \cos^2 D \cos^2 P)^{\frac{1}{2}} = (\sin^2 D + \cos^2 D \text{tang}^2 H)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sin^2 D + \sin^2 D \text{tang}^2 H)^{\frac{1}{2}} = (\sin^2 D \sec^2 H)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin D}{\cos H}; \end{aligned}$$

en général,

$$\sin \text{ampl.} = \frac{\sin D}{\cos H}, \text{ l'amplitude solstittiale} = \frac{\sin \omega}{\cos H} = \sin A';$$

$$\sin A : \sin A' :: \sin D : \sin \omega, \quad \sin A = \frac{\sin A' \sin D}{\sin \omega};$$

Pour trouver la latitude par l'amplitude, on aura

$$\cos H = \frac{\sin D}{\sin A} = \frac{\sin \omega \sin \odot}{\sin A},$$

$$\sin H = \text{tang}(P - 90^\circ) \cot \text{amplit.} = \cot P \cot \text{amplit.};$$

il ne dit pas comment il calcule cette équation, ni s'il y emploie sa Table des ombres.

Sin amplit. $\cos H = \sin D = \sin \omega \sin \odot$, $\sin \odot = \frac{\sin A \cos H}{\sin \omega}$,
formule connue.

Sur la hauteur sans azimuth. Soit h cette hauteur (fig. 21);

$$\sin h = \cos ZN = \frac{\sin D}{\sin H} = \frac{\sin \omega \sin \odot}{\sin H} = \frac{\sin \text{amplit. orive} \cos H}{\sin H} \\ = \frac{\sin \text{amplit. or.} \cos (H - D)}{\cos (H - D) + \sin \text{amplit. or.}}$$

Cette dernière expression revient à $(AB + BC) : MA :: BC : BN$ (fig. 21);

$$\sin h = \cos (H - D) - \sin (H - D) \frac{\cos H}{\sin H} = NB = AF = MA - FN \tan \angle MNF;$$

$\sin h = \frac{\sin \omega \sin \odot}{\sin H}$; soit $\odot = 90^\circ$, $\sin h' = \frac{\sin \omega}{\sin H}$ sera la hauteur sans azimuth au jour du solstice; donc $\sin h = \sin h' \sin \odot$,

$$\sin \odot = \frac{\sin h \sin H}{\sin \omega}, \quad \sin D = \sin h \sin H,$$

$$\sin H = \frac{\sin A}{(\sin^2 A + \sin^2 h)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin A}{\sin A \left(1 + \frac{\sin^2 h}{\sin^2 A}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\sin^2 h}{\sin^2 A}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{1 + \cot^2 H}\right)^{\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{\cos H} = \sec H,$$

$$\cos H = \frac{\sin h}{(\sin^2 A + \sin^2 h)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin h}{\sin h \left(1 + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 h}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(1 + \tan^2 H\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sec H} = \cos H,$$

$$\sin D = \cos H \sin A.$$

Toutes ces formules sont évidentes, ou se vérifient avec facilité. Il n'y a rien de bien particulier, que l'équation, aujourd'hui bien inutile,

$$\sin h = \cos (H - D) - \sin (H - D) \tan H.$$

Chapitre XIX. Différence à l'horizon (fig. 22).

$$\text{Diff. hor.} = A'C = M'A \tan M' = \sin h \tan H = \sin h \left(\frac{BC}{BM'}\right)$$

$$= \sin h \left(\frac{\sin h \sin \text{ampl. orive}}{\sin \text{haut. sans azimuth}}\right),$$

$$\text{ou} \quad A'C = M'E + \sin A = \cos Z \cos h + \sin A$$

$$\text{ou} \quad A'C = \left(\frac{AB + BC}{MA}\right) MA' = \left(\frac{\sin (H - D) + \sin A}{\cos (H - D)}\right) \sin h,$$

$$\text{et enfin} \quad A'C = M'A \tan M' = \sin h \tan H = \sin H \left(\frac{\sin h}{\cos H}\right)$$

$$= \sin H \left(\frac{\cos H - x}{\cos H}\right) = \sin H \left(1 - \frac{x}{\cos H}\right) = \sin H - \frac{x \sin H}{\cos H};$$

l'exactitude de ces substitutions est évidente.

L'auteur fait $\cos H - x = \sin h$ ou $x = \cos H - \sin h$.

Si x était négative, on aurait pour la différence à l'horizon

$$A'C = \sin H + \frac{x \sin H}{\cos H}.$$

Cette formule pouvait être plus commode pour le calcul d'une table. Le même calcul donnait deux termes de la table, au moyen du double signe de x .

Il fait encore $A'C = M'C \sin H = \sin \text{dayer} \cdot \sin \text{latitude}$.

Ces formules servent à calculer l'azimut.

Chapitre XX. Calcul de l'azimut. Supposons d'abord le Soleil à l'équateur (fig. 23);

$$BQ = NB \tan H = \sin h \tan H \text{ et } \cos MZN = \frac{\sin h \tan H}{\cos h} = \tan h \tan H,$$

$$NQ \sin H = NO, \frac{NO}{\cos h} = \sin QZN = \frac{NQ}{\cos h} = \frac{\sin \text{dayer} \sin H}{\cos h},$$

$$\sin NQ : \sin NZQ :: \sin ZN : \sin ZQN, \sin NZQ = \frac{\sin NQ \sin ZQN}{\sin ZN},$$

$$\text{ou} \quad \cos MZN = \frac{\sin \text{dayer} \sin H}{\cos h},$$

$$\begin{aligned} \cos MZN &= \tan h \tan H = \tan \text{haut. observée} \cot \text{haut. méridienne} \\ &= \cot \text{dist. z. observée} \tan \text{dist. z. méridienne} \\ &= \frac{\tan \text{dist. z. mérid.}}{\tan \text{dist. z. observ.}} = \frac{\text{ombre mérid.}}{\text{ombre observ.}}. \end{aligned}$$

Le triangle MZN rectangle en M donne

$$\cos MZN = \tan ZM \cot ZN = \frac{\tan \text{dist. z. mérid.}}{\tan \text{dist. observée}};$$

voilà un des cas d'un triangle sphérique rectangle, calculé par les ombres; mais ces ombres sont mesurées; on ne les cherche pas dans la Table; on les multiplie l'une par l'autre, et leur produit est un cosinus. Cet exemple ne prouve donc pas tout-à-fait que les ombres soient introduites dans le calcul, comme le sont aujourd'hui les tangentes. Ebn Jounis donne cette formule sans démonstration et sans aucune réflexion, à son ordinaire.

Supposons maintenant le Soleil boréal (fig. 24);

$$\begin{aligned} &(\sin \text{haut. mérid.} - \sin \text{haut.}) \tan H = \phi, \\ \text{ou} \quad &(\text{MA} - \text{NB}) \tan M = \text{NO} = [\cos(H - D) - \sin h] \tan H, \end{aligned}$$

et $\left(\frac{\sin(H-D) - \varphi}{\cos h} \right) = \frac{OR - NO}{\cos h} = \frac{NR}{\cos h};$

$$\begin{aligned} \cos Z &= \frac{\sin(H-D) - [\cos(H-D) - \sin h] \tan H}{\cos h} \\ &= \frac{\sin(H-D)\cos H - \cos(H-D)\sin H + \sin h \sin H}{\cos h \cos H} = \frac{-\sin(H-H+D) + \sin h \sin H}{\cos h \cos H} \\ &= \frac{-\sin D + \sin h \sin H}{\cos h \cos H} = -\frac{\sin D - \sin h \sin H}{\cos h \cos H}. \end{aligned}$$

C'est notre formule fondamentale $\cos Z \cos h \cos H + \sin h \sin H = \sin D$; la figure supposait Z obtus; pour l'avoir aigu, il faut changer le signe.

Ebn Jounis avait donc déjà l'équivalent de notre formule fondamentale; nous avons montré comme elle était dans l'Analemme et dans le livre d'Albategnius.

Il fait encore

$$\cos Z = \frac{\sin A - \text{dist. à l'horizon}}{\cos h} = \frac{\sin D}{\cos H} - \frac{\sin h \sin H}{\cos h} = \frac{\sin D - \sin h \sin H}{\cos h \cos H}.$$

C'est encore un équivalent plus voisin de notre formule.

$$\begin{aligned} \cos Z &= \left(\frac{\sin A - \sin h}{\cos h} \right) \tan H = \left(\frac{\sin D}{\cos H} - \sin h \right) \frac{\sin H}{\cos h} = \frac{\sin D - \sin h \sin H}{\cos h \cos H}, \\ \frac{\sin A - \sin h \tan H}{\cos h} &= \frac{\sin D}{\cos H} - \frac{\sin h \sin H}{\cos h} = \frac{\sin D - \sin h \sin H}{\cos h \cos H}. \end{aligned}$$

C'est encore notre formule sous une forme différente.

L'angle du point orient de l'écliptique est le complément de la hauteur du pôle de l'écliptique.

Soit S le Soleil et O l'angle du point orient (fig. 25);

$$\begin{aligned} \sin ZOS : \sin ZS &:: \sin OZS : \sin OS, \\ \sin OZS &= \frac{\sin OS \sin ZOS}{\sin ZS} = \frac{\sin OS \cdot \cos SOM}{\cos h} = \frac{\cos O \sin OS}{\cos h}, \\ QO &= QZO = \text{amplitude du point orient}, \\ QZS &= OZS - OZQ = PZS - 90^\circ. \end{aligned}$$

Il suppose connu l'angle O et son amplitude QO , la longitude O et celle du Soleil S .

$$\cos OZS = \frac{\cos OS - \cos ZS \cos ZO}{\sin ZS \sin ZO} = \frac{\cos OS}{\sin ZS} = \frac{\cos OS}{\cos h};$$

aucun principe nouveau. Ebn Jounis donne simplement et sans démonstration

$$\sin OZS = \frac{\cos O \sin OS}{\cos h} \quad \text{et} \quad \cos OZS = \frac{\cos OS}{\cos h}.$$

Le problème suivant est remarquable. L'auteur se propose de déterminer la hauteur et l'azimut par le triangle PSZ (fig. 25), dans lequel il connaît PS, PZ et P.

Il fait d'abord $\sin pS = \sin P \sin PS = \sin P \cos D$; mais au lieu de prendre PS, il en prend le complément SQ = distance du Soleil au point est de l'horizon; car il est visible que l'arc perpendiculaire pS étant prolongé, passera par le pôle du méridien qui est le point est.

Cette distance SQ, l'auteur la nomme *baad*.

Cette distance fait, avec le premier vertical, un angle SQZ qu'il appelle *inhiraf*. Pour le connaître, le triangle SpP rectangle en p lui donne $\cos pS \cos pP = \cos PS = \sin D$, ou

$$\cos pP = \frac{\sin D}{\cos pS} = \frac{\sin D}{\sin SQ} = \frac{\sin D}{\sin baad};$$

il a donc pP et $pZ = Pp - PZ = pP - 90^\circ + H$; or pZ est évidemment la mesure de l'*inhiraf* SQZ; il a donc

$$\cos ZS = \sin h = \cos pS \cos pZ = \sin SQ \cos SQZ = \sin baad \cdot \cos inhiraf,$$

ou bien

$$\sin h = \sin SM = \sin SQ \sin SQM = \sin baad \cos inhiraf;$$

il pourrait faire

$$\sin Z = \frac{\sin pS}{\sin ZS} = \frac{\cos baad}{\cos h} = \sin pZS = \cos SZQ;$$

il fait

$$\cos Z = \sin SZQ = \frac{\sin S_n}{\sin ZS} = \frac{\sin SQ \sin SQZ}{\sin ZS} = \frac{\sin baad \cdot \sin inhiraf}{\cos h};$$

on aurait plus directement $\tan pS = \tan Z \sin pZ = \tan P \sin Pp$,

$$\text{ou} \quad \tan Z = \frac{\tan P \sin Pp}{\sin pZ} = \frac{\tan P \sin \text{équation de latitude}}{\sin inhiraf};$$

car l'arc Pp, il l'appelle correction de latitude. Mais cette formule, plus directe, emploierait les tangentes, et l'auteur les évite avec soin.

Nous ferions $\tan Pp = \cos P \tan PS = \cos P \cot D$,

puis

$$\cos Pp : \cos pZ :: \cos PS : \cos ZS = \sin h = \frac{\cos pZ \cos PS}{\cos Pp} = \frac{\sin \text{inhiraf} \sin D}{\left(\frac{\sin D}{\sin \text{baad}} \right)} \\ = \cos \text{inhiraf} \sin \text{baad};$$

ce précepte est plus simple que celui de nos quatre cosinus.

Sa formule

$$\cos Z = \frac{\sin \text{baad} \sin \text{inhiraf}}{\cos h} = \frac{\sin SQ \sin SQZ}{\sin ZS} = \frac{\cos pS \sin pZ}{\sin ZS}$$

ou $\cos \text{angle oblique} = \frac{\cos \text{côté opposé} \cdot \sin \text{côté adjacent}}{\sin \text{hypoténuse}};$

c'est la formule générale que nous avons trouvée ci-dessus, page 106.

Ce n'est pas tout ce que cette solution a de remarquable. Pour connaître P, ou l'angle horaire, il nous dit de retrancher le dayer de l'arc semi-diurne; c'est-à-dire de retrancher du demi-jour la partie déjà écoulée depuis le lever du Soleil. Cette pratique tenait à l'usage des heures temporaires qui commencent nécessairement au lever du Soleil. Le demi-jour était toujours de 6^h. On faisait cette analogie

6^h : partie écoulée du jour :: arc semi-diurne : dayer :: MC : NC (fig. 24);

on avait donc ainsi le dayer; on le retranchait de l'arc semi-diurne, et le reste était évidemment l'angle horaire; le reste serait aussi MN; mais MN serait un arc du parallèle et non de l'équateur; mais il répondrait au même nombre de degrés.

Faisons encore quelques remarques sur le baad et l'inhiraf, qui varient à chaque instant du jour.

Au lever du Soleil, le baad, ou la distance au point est, se confond évidemment avec l'amplit. ortive QC (fig. 24), $\sin \text{baad} = \sin \text{ampl. ortive}$.

La hauteur du baad est nulle et l'inhiraf CQZ = 90°.

Au cercle de 6^h équinoxiales, le baad TQ est la déclinaison; $\sin \text{baad} = \sin D$, l'angle TQZ ou l'inhiraf = 90° — H. La hauteur TS = $\sin D \sin H = QT \sin PQE$.

Au premier vertical, le baad devient QV et $\sin \text{baad} = \sin \text{hauteur}$ sans azimut, l'inhiraf = 0, et la hauteur de l'extrémité du baad = QV = sin haut. sans azimut. Après le passage au premier vertical, nous venons de voir que l'inhiraf avait passé par zéro; qu'il avait changé de position, et par conséquent de signe.

Au méridien enfin, le baad, qui a toujours été en augmentant, der

puis le cercle de 6^h , est enfin de 90° ; c'est le *maximum* (le *minimum* est D), l'inhiraf est $(H - D)$, et sa hauteur $90^\circ - (H - D)$.

Après le passage au méridien, le dayer surpasse l'arc semi-diurne, et $P =$ partie écoulée — arc semi-diurne $=$ dayer — arc semi-diurne; les mêmes valeurs du baad, de l'inhiraf, de la hauteur et de l'azimut, reviennent en ordre inverse.

Nous n'avons rien dit de l'azimut; mais l'expression.....
 $\cos Z = \frac{\sin \text{baad} \sin \text{inhiraf}}{\cos \text{hauteur}}$ nous montre que l'azimut devient obtus, quand $\sin \text{inhiraf}$ a changé de signe et qu'il est devenu négatif; $\frac{\sin \text{baad}}{\cos h}$ est une quantité toujours positive.

Pour avoir l'azimut dans toutes les positions que nous avons détaillées, il suffira de substituer, pour les trois facteurs, les valeurs que nous avons indiquées.

Cette partie de la Trigonométrie des Arabes nous a paru assez curieuse, pour faire excuser l'étendue que nous avons donnée à cet article.

Soit P la partie écoulée du jour;

$$\sin \frac{1}{2} P \cos D = \sin MA = \sin MB = \sin \frac{1}{2} AB \text{ (fig. 26),}$$

$$\cos AB = \cos BC \cos AC, \frac{\cos AB}{\cos BC} = \frac{\cos AB}{\cos h} = \cos AC;$$

$$AC - AQ = CQ; \text{ et par l'Analemme,}$$

$$\sin h \tan H = \text{différence à l'horizon} = CQ + QA,$$

$$\cos Z \sin ZB = \sin BZQ \cos h = \text{ashle} = \sin BE = ME \text{ (fig. 27);}$$

l'ashle est la perpendiculaire abaissée du lieu du Soleil sur le rayon vertical ZB de la projection,

$$BC = \frac{\sin D}{\cos H} = \sin \text{amplitude.}$$

Chap. XXI. si l'on a les hauteurs de deux points opposés de l'écliptique, l'un de ces points sera boréal et l'autre austral (fig. 28); que les deux hauteurs soient égales, en sorte que $MA = \sin h = NB$, et que l'on connaisse les deux azimuts QA et BQ, on aura

$$Bb = NB \tan H = Aa, \frac{QA}{\cos h} = \sin QZM,$$

$$BQ = Bb + \text{amplit. } Qb,$$

$$QA = \text{amplit.} - Aa = \text{amplit.} - Bb, QA = \sin Z \cos h,$$

$$BQ + QA = 2 \text{ amplit. } \text{ortive}, \frac{1}{2} (BQ + QA) = \text{amplit. } \text{ortive},$$

$$BQ - QA = 2Bb = 2 \sin h \tan H; \frac{\frac{1}{2}(BQ - QA)}{\sin h} = \tan H,$$

$$\frac{\sin D}{\cos H} = \sin A \quad \text{et} \quad \sin D = \sin A \cos H;$$

on aura donc l'amplitude ortive, la hauteur du pôle et la déclinaison.

Si ce problème n'est pas très utile, il est au moins curieux; on voit, dans tout ceci, combien les Arabes avaient étudié cet Anqlemme, aujourd'hui si négligé.

Si les deux amplitudes sont méridionales, QA sera négatif; il n'y aura qu'un changement de signe, et les pratiques seront les mêmes. L'auteur les détaille pour les deux cas différents.

Il cherche la latitude et la déclinaison par une hauteur observée et par la hauteur sans azimut. Il faut de plus connaître l'azimut de la hauteur observée

$$\begin{aligned} \sin D &= \cos Z \cos h' \cos H + \sin h' \sin H, \\ \sin D &= \sin h \sin H, \\ \sin h \sin H &= \cos Z \cos h' \cos H + \sin h' \sin H, \\ \sin h &= \cos Z \cos h' \cot H + \sin h', \\ \sin h' - \sin h &= -\cos Z \cos h' \cot H, \\ \cot H &= \frac{\sin h' - \sin h}{\cos Z \cos h'}, \quad \sin D = \sin h \sin H. \end{aligned}$$

Ebn Jounis fait $\cos Z \cos h' = Q'$, c'est le dénominateur; il fait ensuite $(\sin h' - \sin h) = Q''$,

$$(Q'^2 + Q''^2)^{\frac{1}{2}} = R; \quad \frac{Q'}{R} = \sin H, \quad \sin D = \sin H \sin h;$$

il extrait cette racine carrée, pour éliminer le cosinus de H, nouvelle preuve qu'il n'a pas su profiter de sa Table des ombres.

Si l'on connaît la hauteur méridienne $MA = \cos(H - D)$ et l'azimut Z, on aura (fig. 24)

$$\begin{aligned} \cos h \cos Z &= BQ, \quad AB = AQ - BQ = \sin(H - D) - \cos h \cos Z, \\ AC &= \cos(H - D) \tan H, \quad AB = AC - BC = \cos(H - D) \tan H \\ &\quad - \sin h \tan H, \\ AB &= \tan H [\cos(H - D) - \sin h] = \sin(H - D) - \cos h \cos Z, \\ \tan H &= \frac{\sin(H - D) - \cos h \cos Z}{\cos(H - D) - \sin h}, \quad H - (H - D) = D. \end{aligned}$$

L'auteur extrait encore ici une racine pour éviter la tangente; mais il finit par prendre le résultat de la division pour une ombre; il la cherche dans sa Table, et trouve la latitude. C'est encore un essai de

la méthode des tangentes, mais il n'y paraît pas bien familiarisé, ou il a peur que ses lecteurs ne le soient pas assez; mais, en ce cas, il devrait en expliquer l'usage, et calculer les exemples des deux manières, pour gagner la confiance de ceux qui se seraient montrés incrédules.

Il fait encore (fig. 30)

$$\begin{aligned}\cos Z &= \frac{\left(\frac{MO + \sin A}{MA}\right) \sin h - \sin A}{\cos h} = \frac{\left(\frac{AQ + QC}{MA}\right) NB - QC}{\cos h} = \frac{\left(\frac{AC \cdot NB}{MA}\right) - QC}{\cos h} \\ &= \frac{BC - QC}{\cos h} = \frac{BQ}{\cos h};\end{aligned}$$

il lui faut une hauteur observée h , la hauteur méridienne, dont le sinus est MA et le cosinus MO , et l'amplitude ortive, pour en conclure l'azimut. $\text{Tang } H = \frac{BC}{\sin h} = \frac{BQ + QC}{\sin h}$; il aura donc la latitude; $\sin D = \sin A \sin H$ lui donnera la déclinaison.

Chapitre XXII. Trouver la hauteur du pôle par l'amplitude ortive et la hauteur au premier vertical.

$$\begin{aligned}(\sin^2 A + \sin^2 h)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{\sin^2 D}{\cos^2 H} + \frac{\sin^2 D}{\sin^2 H}\right)^{\frac{1}{2}} = (\overline{RQ}^2 + \overline{QC}^2)^{\frac{1}{2}} = RC; \\ \frac{QC}{RC} &= \sin H, \quad QR \sin H = \sin D = QC \cos H = QF \text{ (fig. 31.)}\end{aligned}$$

Ici se termine le manuscrit de Leyde.

Idee des Tables contenues dans ce manuscrit.

Table des sinus de 10 en 10' du quadrans, calculée jusqu'aux tierces. J'ai comparé cette Table à celle de Bressius, qui ne va que jusqu'aux secondes; j'ai pris les différences les plus remarquables entre les deux Tables; et faisant le calcul sur les sinus de Pitiscus, je me suis assuré que la Table d'Ebn Jounis est exacte à une tierce près et celle de Bressius à 1'.

Table des déclinaisons des points de l'écliptique de 10 en 10' pour l'obliquité de $23^{\circ}35'0''$, suivie d'une Table de différences ou de parties proportionnelles pour le commencement de chaque degré de longitude, et pour 1', 2', 3', 4' et 5'; il était inutile de les donner pour 6, 7, 8 et 9, parce qu'on peut prendre les parties pour -4 , -3 , -2 et -1 .

Table des 60 premiers multiples du sinus de l'obliquité. . . $23^{\circ}35'$ ou du sinus $0^{\circ}24'0''17'''42''$.
et du cosinus de 23.35 ou de $0.54.59.19.18.$

Ces deux Tables de multiplication devaient être d'un grand secours dans les calculs de l'Astronomie sphérique où ces sinus reviennent si souvent. Lambert, de nos jours, a donné des tables de 9 multiples de tous les sinus de degré en degré, pour faciliter les calculs en sinus naturels.

La Table suivante est celle des cotangentes de la hauteur, ou des distances zénitales, c'est-à-dire des ombres. Cette table est assez exacte jusqu'à 70° de distance zénitale; mais elle était difficile à calculer avec des sinus en tierces, aussi les erreurs, qui ne sont encore que de 1' 24" à 86°, vont-elles en croissant, et sont de plus de 5' à 89°. Ebn Jounis a fait la même faute que Rhéticus a depuis commise, mais elle n'était pas si dangereuse pour les ombres; les valeurs en étaient plus exactes qu'il ne fallait.

La Table donne donc les cotangentes et non les tangentes. Cette circonstance a pu contribuer à l'embarras d'Ebn Jounis, pour les introduire dans le calcul trigonométrique.

Après cette Table, on en trouve une pour le rayon 12, les nombres y sont le cinquième de ceux de la grande Table.

Table des ascensions droites, comptées du point équinoxial.

Autre Table pour les ascensions droites, comptées du colure.

Table des sinus de ces ascensions droites.

Table des sinus des déclinaisons de degré en degré de la longitude.

Table des tangentes des déclinaisons de degré en degré de longitude; il ne restera plus qu'à multiplier par $\tan H$ pour avoir le demi-excès du jour, ou $\cos P$.

Deux Tables de l'excès du demi-jour ou de la différence ascensionnelle. Elles dépendent de la longitude du Soleil. Il y avait de l'obscurité dans le texte; en calculant les formules $\sin \omega \sin \odot = \sin D$; $\cos P = \tan D \tan H$, j'ai trouvé que la première était pour Alexandrie, et l'autre pour le Caire. Pour remplacer ces Tables, l'auteur parle d'y substituer une Table des azimuts des points de l'équateur; il suffirait que cette Table fût calculée jusqu'à 24° de hauteur.

Quand la déclinaison est nulle, $\cos Z = \tan H \tan h$. En effet, fig. 23, le triangle ZMN donne

$$\tan ZM = \cos Z \tan ZN \quad \text{et} \quad \cos Z = \tan ZM \cot ZN = \tan H \tan h,$$

formule toute semblable à $\cos P = \tan H \tan D$; la Table $\cos Z = \tan H \tan h$ étant assujétie à l'argument h , prenez pour h la déclinaison du jour, vous

aurez $\tan H \tan h = \tan H \tan D = \cos P = \cos Z$; ainsi l'azimut trouvé de cette manière sera le demi-excès du jour proposé.

La Table suivante est celle des degrés des heures temporaires pour la latitude du Caire. Elle a pour argument la longitude du Soleil. La première partie est pour les signes septentrionaux, l'autre pour les signes méridionaux.

Table des sinus de l'amplitude orlive à 30° de latitude pour tous les degrés de l'écliptique; une autre pour $29^\circ 15'$; une troisième pour $52^\circ 40'$; une quatrième pour Bagdad..... $33^\circ 25'$

On trouve aujourd'hui que Bagdad est par..... $33.19.40$.

Table de la hauteur sans amplitude pour le Caire; la plus forte, celle du solstice, est de $53^\circ 8' 43''$, dont le sinus $= \frac{\sin D}{\sin H} = 2 \sin D$ pour le Caire.

Table du hissah de l'azimut, ou différence à l'horizon pour la latit. 30° .

Cette Table est calculée sur la formule $\sin h \tan H$. Au Caire, h ne peut passer $53^\circ 10'$, mais l'auteur a étendu les hauteurs jusqu'à 90° , afin que la Table puisse servir aux étoiles mêmes qui passent par le zénit.

Enfin Table de l'amplitude, quand la hauteur est de 30° , pour la latitude de 30° . La formule générale est $\cos Z = \frac{\sin D}{\cos H \cos h} - \tan H \tan h$; mais pour $H=30^\circ=h$, on a $\sin a = \frac{\sin \omega \sin \odot}{\cos^2 30} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sin \omega \sin \odot - \frac{1}{3}$; c'est par cette formule que j'ai vérifié la Table pour le Caire.

Pour une latitude quelconque on aura

$$(\sin \omega \sec H \sec h) \sin \odot - (\tan H \tan h);$$

il n'y aura toujours de variable que $\sin$ longitude du point de l'écliptique, Z sera 0 quand

$$\sin \odot = \frac{\sin H \sin h}{\sin \omega} = \sin^2 30 = \frac{1}{4} \operatorname{cosec} \omega = \sin 38^\circ 40' 22'',$$

ce qui a lieu en effet. On voit ensuite une table pareille qui suppose $H=35^\circ$, et dont le zéro doit se trouver à $45^\circ 47' 35''$, ce qui a lieu pareillement.

Table des positions géographiques. Outre les incertitudes inhérentes à ce genre de détermination, on remarque des négligences et des erreurs qu'on ne peut attribuer qu'aux copistes.

TABLES ASTRONOMIQUES.

An 372 d'Iezdegerd, méridien du Caire à 36° 48' d'Alexandrie.

SOLEIL.		LUNE.	
Époque.....	3 ^r 15° 24' 12" 56'''	Époque.	
Apogée.....	2.26.10	Apogée.	
M. de 30 jours	0.29.34. 9.52	Nœud.	
Équation.....	0. 2. 0.29	M. de 30 jours	1. 5° 17' 30" 9'''
		M. propre....	1. 1.58.18. 9
		Nœud 30 jours	0. 1.35.19.16
		Équat. d'anom.	0.13. 9
		Équation du c.	
		Évection.....	
		Inclinaison.....	5. 3
SATURNE.		JUPITER.	
Époque.....	3.26.31.55.26	Époque.....	11. 1.51.48.53
Apogée.....	8. 6. 0	Apogée.....	5.24. 0
M. de 30 jours	1. 0.17.45	M. de 30 jours	0. 2.29.38. 3
Équation.....	6.31	Équation.....	0. 5.15
Inclinaison....		Inclinaison...	
MARS.		VÉNUS.	
Époque.		Époque.....	1.13.48.39.45
Apogée.....	0. 4.10	Apogée.....	2.26.10
M. de 30 jours	0.15.43.19.42	M. de 30 jours	1.18.29.47.12
Équation.....	0.11.25	Équation.....	0. 2. 0
Inclinaison...		Inclinaison...	
MERCURE.			
Époque.....	2 ^r 11° 50' 39" 23'''		
Apogée.....	6.23.30		
M. de 30 jours	3. 3.12. 4. 7		
Équation.....	0. 3.54		
Inclinaison...			

Ces Tables sont pour les années arabes qui sont lunaires, et c'est pour éviter une conversion incertaine que nous avons donné les mouvemens pour 30 jours, au lieu des mouvemens annuels. Voy. d'ailleurs pag. 93.

On voit que les changemens faits à la théorie de Ptolémée étaient de bien peu d'importance. Ils portent principalement sur les époques et les moyens mouvemens, qu'Ebn Jounis a sans doute assujétis aux observations qu'il avait recueillies, et dont nous avons ci-dessus donné la notice. On voit qu'il avait conservé l'équation de $13^{\circ}9'$ que Ptolémée donne à l'anomalie, en raison de ce qu'il appelle *prosneuse*. Ebn Jounis, qui ne rapporte que des éclipses, ne devait y trouver aucun secours pour le calcul de l'évection. Son équation du Soleil paraît trop forte et moins exacte que celle d'Albategni, à laquelle il a ajouté, tandis que dans l'intervalle elle aurait dû plutôt diminuer.

Ebn Jounis nous paraît devoir sa réputation principalement aux calculs qu'il a faits pour la correction des Tables. Comme observateur, Albategnius doit peut-être nous inspirer plus de confiance. Il paraît du moins avoir eu des instrumens beaucoup plus grands; ceux d'Ebn Jounis étaient fort médiocres. Il nous dit que de son tems, on croyait la latitude du Caire de 29° tout au plus, et qu'il l'a trouvée constamment de 50° ; il ne donne pas de minutes, ce qui est déjà suspect; mais, suivant la Connaissance des Tems, cette latitude serait de $50^{\circ}2'21''$; il s'y serait donc trompé de $2'21''$. Aboul Wéfa trouvait Bagdad par $33^{\circ}25'$; Beauchamp a trouvé $33^{\circ}19'40''$; l'erreur d'Aboul Wéfa serait donc de $5'20''$, et par conséquent plus que double; ci-dessus page 100, par deux observations solsticiales nous avons eu $33^{\circ}20'$, comme Beauchamp à $20''$ près. On voit qu'on ne peut compter sur ces observations qu'à quelques minutes près. Les Arabes avaient une fausse idée des parallaxes et n'en avaient aucune des réfractions. Il nous est bien plus facile d'apprécier la Trigonométrie des Grecs et des Arabes, que la bonté de leurs observations, dont nous ne pouvons guère juger que par le plus ou moins d'accord avec les connaissances actuelles.

Nous avons dit que le manuscrit de Leyde se termine au chapitre XXII. Les chapitres suivans sont extraits d'un abrégé attribué à Ebn Schathir; ce précieux manuscrit, dont M. Sédillot nous a communiqué la traduction, appartient à la Bibliothèque du Roi; il est inscrit au Catalogue imprimé, sous le n° 1112 des manuscrits arabes.

Ebn Jounis se propose de trouver l'azimut, quand on a mesuré deux hauteurs h' et h'' avec la différence des deux azimuts, c'est-à-dire l'angle formé par les deux ombres aux instans des deux observations de hauteur. L'auteur nous annonce une méthode dont personne n'avait encore parlé,

et en effet elle est digne de remarque. Pour la mieux comprendre, commençons par résoudre le problème par nos formules modernes (fig 33).

Le triangle ZPB donne, $\frac{\sin D}{\cos H} = \cos Z' \cos h' + \tan H \sin h'$,
 le triangle ZPA donne $\frac{\sin D}{\cos H} = \cos Z'' \cos h'' + \tan H \sin h''$,
 $\tan H (\sin h' - \sin h'') = \cos Z'' \cos h'' - \cos Z' \cos h'.$

On suppose que l'intervalle entre les deux observations est d'une heure environ, la déclinaison n'a pu varier que d'une minute au plus; on peut la faire constante.

$$Z' = Z'' + \delta, \cos Z' = \cos Z'' \sin \delta - \sin Z'' \sin \delta;$$

donc

$$\begin{aligned} \tan H (\sin h' - \sin h'') &= \cos Z'' \cos h'' - \cos h' (\cos Z'' \cos \delta - \sin Z'' \sin \delta) \\ &= \cos Z'' \cos h'' - \cos Z'' \cos \delta \cos h' + \sin Z'' \sin \delta \cos h' \\ &= \cos Z'' (\cos h'' - \cos \delta \cos h') + \sin Z'' \sin \delta \cos h', \\ \tan H \left(\frac{\sin h' - \sin h''}{\cos h'' - \cos \delta \cos h'} \right) &= \cos Z'' + \left(\frac{\sin \delta \cos h'}{\cos h'' - \cos \delta \cos h'} \right) \sin Z'' \\ &= \cos Z'' + \tan \varphi \sin Z'' \\ &= \frac{\cos Z'' \cos \varphi + \sin \varphi \sin Z''}{\cos \varphi} = \frac{\cos (Z'' - \varphi)}{\cos \varphi}, \\ \cos \varphi \tan H \left(\frac{\sin h' - \sin h''}{\cos h'' - \cos \delta \cos h'} \right) &= \cos (Z'' - \varphi); \end{aligned}$$

on aura donc

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{\sin \delta \cos h'}{\cos h'' - \cos \delta \cos h'} \cot \varphi = \frac{\cos h''}{\sin \delta \cos h'} - \cot \delta; \\ \cos (Z'' - \varphi) &= \cos \varphi \tan H \left(\frac{\sin h' - \sin h''}{\cos h'' - \cos \delta \cos h'} \right) \text{ et } Z'' = (Z'' - \varphi) + \varphi. \end{aligned}$$

Nous avons employé les azimuts PZB = Z' , PZA = Z'' ; les Arabes y substituaient les amplitudes $A' = Z' - 90^\circ$, $A'' = Z'' - 90^\circ$, ... $\delta = (Z' - 90^\circ) - (Z'' - 90^\circ) = Z' - Z'' = (A' - A'')$.

Ebn Jounis cherche d'abord $\sin \delta \cos h'$, quantité que nous désignerons par la lettre Q' , puis $\cos h'' - \cos \delta \cos h'$, quantité que nous nommerons Q'' ; il fait

$$D = (Q'^2 + Q''^2)^{\frac{1}{2}} = Q'' \left(1 + \frac{Q'^2}{Q''^2} \right)^{\frac{1}{2}} = Q'' (1 + \tan^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = Q'' \sec \varphi = \frac{Q''}{\cos \varphi};$$

il fait

$$\sin x = \tan H \left(\frac{\sin h' - \sin h''}{D} \right) = \tan H \left(\frac{\sin h' - \sin h''}{\cos h'' - \cos \delta \cos h'} \right) \cos \varphi;$$

$\sin x$ est donc notre $\cos(Z' - \varphi) = \cos(90^\circ + A'' - \varphi) = \sin(\varphi - A'')$; il fait

$$\sin a = \frac{Q'}{D} = \frac{Q' \cos \varphi}{Q''} = \tan \varphi \cos \varphi = \sin \varphi.$$

Son angle a est donc notre angle subsidiaire φ .

Il appelle *al amoun* ou *commun* son arc a , qui ne dépend point de la latitude, et *al khassous* ou *particulier*, l'arc x qui dépend de la latitude H .

Il fait enfin $a - x = \varphi - (\varphi - A'') = A''$; il a donc l'amplitude pour la hauteur h'' ; après quoi l'autre amplitude se trouve, en ajoutant ou retranchant δ , selon les cas.

Comment Ebn Jounis a-t-il pu arriver à cette solution parfaitement identique à la notre ? Il n'avait pas de tangente; il ne connaissait pas cet usage moderne des angles subsidiaires, qui simplifie les formules; il ne connaissait pas l'usage des équations; il n'avait même précisément aucune formule. Nous n'imaginerons donc pas qu'il ait posé nos deux formules primitives, pour leur faire subir des modifications du même genre que les nôtres. Voici une marche qui lui était familière :

$$AO = MA \tan \text{AMO} = \tan H \sin h' \text{ (fig 34),}$$

$$BO = NB \tan \text{BNO} = \tan H \sin h'',$$

$$AO - BO = AB = \tan H (\sin h' - \sin h'')$$

$$AB = AQ - BQ = A' - A'' = MR - Nq = \cos Z' \cos h' - \cos Z'' \cos h'' \\ = \sin A' \cos h' - \sin A'' \cos h'' = \tan H (\sin h' - \sin h'');$$

mais

$$A' = A'' + \delta, \sin A' = \sin A'' \cos \delta + \cos A'' \sin \delta;$$

donc

$$\begin{aligned} \tan H (\sin h' - \sin h'') &= \cos h' (\sin A'' \cos \delta + \cos A'' \sin \delta) - \sin A'' \cos h'' \\ &= \sin A'' \cos \delta \cos h' + \cos A'' \sin \delta \cos h' - \sin A'' \cos h'' \\ &= \cos A'' \sin \delta \cos h' - (\cos h'' - \cos \delta \cos h') \sin A'', \\ \tan H \left(\frac{\sin h' - \sin h''}{\cos h'' - \cos \delta \cos h'} \right) &= \left(\frac{\sin \delta \cos h'}{\cos h'' - \cos \delta \cos h'} \right) \cos A'' - \sin A'', \\ \frac{\sin H}{\cos H} \left(\frac{\sin h' - \sin h''}{Q''} \right) &= \frac{Q'}{Q''} \cos A'' - \sin A''. \end{aligned}$$

Telle a pu et dû être l'équation finale d'Ebn Jounis, ou du moins telle est l'expression moderne de la règle qu'il a trouvée; mais elle renferme l'inconnue A'' sous deux formes différentes.

Soit

$$\begin{aligned}\frac{Q'}{Q''} &= \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin y}{(1 - \sin^2 y)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad Q'(1 - \sin^2 y)^{\frac{1}{2}} = Q' \sin y, \\ Q'^2(1 - \sin^2 y) &= Q''^2 \sin^2 y, \quad Q'^2 - Q'^2 \sin^2 y = Q''^2 \sin^2 y, \\ Q'^2 &= Q'^2 \sin^2 y + Q''^2 \sin^2 y = \sin^2 y (Q'^2 + Q''^2), \\ \sin^2 y &= \frac{Q'^2}{Q'^2 + Q''^2} \quad \text{et} \quad \sin y = \frac{Q'}{(Q'^2 + Q''^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q}{D} = \sin a.\end{aligned}$$

Cette méthode, pour changer la valeur de $\frac{\sin y}{\cos y}$ en celle de $\sin y$ n'était pas inconnue aux Grecs.

Par ce moyen, qu'Ebn Jounis emploie souvent, nous arrivons à son précepte $\sin a = \frac{Q'}{D} = \sin \varphi$; il trouve l'arc subsidiaire a par son sinus; nous l'obtenons plus facilement par sa tangente.

Nous avons donc $\frac{Q'}{Q''} = \frac{\sin a}{\cos a}$, et par conséquent

$$\left(\frac{\sin H}{\cos H}\right) \left(\frac{\sin h' - \sin h''}{Q''}\right) = \left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) \cos A'' - \sin A' = \frac{\sin a \cos A'' - \sin A' \cos a}{\cos a} = \frac{\sin(a - A'')}{\cos a}.$$

Il n'y a plus qu'une inconnue, elle est dégagée; elle devient connue; on aura $a - (a - A'') = A''$ et $A' = \delta + A''$.

Ainsi, par des voies bien connues aux Arabes, nous arrivons à une solution conforme en tous points aux préceptes d'Ebn Jounis; il n'est donc pas douteux que nous avons retrouvé la démonstration qu'il a supprimée; elle nous prouve que les Arabes devaient avoir, sinon une notation algébrique, du moins quelques abréviations dont, à la vérité, il ne reste aucun vestige, mais qui leur étaient indispensables pour arriver à dégager une inconnue aussi embarrassée.

Ce problème nous paraît, sinon un des plus utiles, au moins un des plus curieux que nous ayons rencontrés dans les auteurs arabes, et l'un des plus propres à nous donner une idée très favorable de leur habileté dans le calcul.

Dans le chapitre XXIV, l'auteur enseigne à trouver la méridienne d'après la hauteur dont l'azimut est de 30° (fig. 35).

L'azimut est toujours compté du point est de l'horizon. Soit donc $EOC = 30^\circ$, OC l'ombre observée à l'instant où l'on sait par le calcul et par une bonne horloge, que l'amplitude sera de 30° ; la distance à la méridienne sera de 60° . D'un rayon arbitraire Oa , décrivez un arc de

cercle amD ; sur cet arc, portez de a vers D le rayon Oa = corde de 60° , et vous aurez le point m de la méridienne OM .

L'auteur ajoute qu'on peut trouver la méridienne *par d'autres hauteurs dont les azimuts pourront être déterminés*; il dit de plus qu'ils sont au nombre de dix.

Avec une table des cordes, on peut les déterminer tous, et le problème a une infinité de solutions; mais si l'on se borne aux cordes primitives qui servaient à calculer toutes les autres, on aura les cordes de 36° , de 45° , de 60° , de 72° et celle de 90° , ce qui ne fait que cinq; on peut y ajouter les cordes supplémentaires de 108 , 120 , 135 , 144 et 180° , on en aura dix; mais on ne peut employer à cet usage que celles qui sont au-dessous de 120° , du moins à la latitude du Caire. Il n'en resterait que cinq; mais chacune peut s'employer de deux manières. Ainsi supposez $EOC = 60^\circ$, COM sera de 30° ; portez la corde de 60° de a en D , l'arc Dm moitié de l'arc $aD = 60^\circ$, sera de 30° , et vous aurez le point m . Supposez $EOC = 45^\circ$, vous prendrez aD de 90° , $EOC = 54^\circ$, $COM = 36^\circ$; et $aD = 72^\circ$; $EOC = 72^\circ$, $COM = 18^\circ$ et $aD = 36^\circ$.

Je ne sais si c'est là le sens de l'auteur, mais son problème ne mérite pas un plus long commentaire; peut-être a-t-il voulu dire qu'il y avait cinq azimuts pour le matin et cinq pour le soir, ce qui ferait dix.

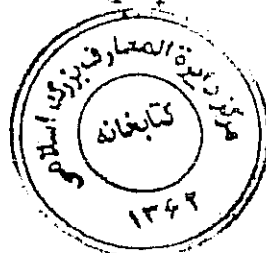
Le chapitre XXV manque dans le manuscrit. Il devait traiter des hauteurs correspondantes, pour servir à trouver la méridienne.

Les Indiens prenaient les ombres correspondantes, en traçant sur le sable un cercle autour du pied du gnomon. Il paraît qu'Ebn Jounis traçait le sien sur un marbre blanc très poli, afin d'avoir des ombres plus distinctes et mieux terminées. On appelait encore *cercle indien* une espèce d'astrolabe plan dont M. Sédillot nous fait espérer la description, et qui probablement servait à observer la hauteur du Soleil.

Chapitre XXVI. Déterminer la longueur de l'ombre et son azimut sur le cadran oriental. Ce titre est assez équivoque; les formules de l'auteur en fixeront le vrai sens. Faites (fig. 36)

$$\sin h = \sin \text{haut. sur le plan} = \sin \text{angle hor.} \sin \text{déclin.} = \sin P \cos D.$$

Soit EZP le plan du méridien, qui est aussi celui du cadran oriental; PS le cercle de déclinaison du Soleil; il est clair que $\sin SM = \sin P \cos D$; ainsi la hauteur du Soleil sur le plan est l'arc perpendiculaire abaissé du centre du Soleil sur le plan.



Le triangle rectangle SMP donne encore $\cos PS = \cos SM \cdot \cos MP$,

$$\text{d'où} \quad \frac{\cos PS}{\cos SM} = \cos MP = \frac{\sin D}{\cos h} = \sin K :$$

c'est la seconde formule de l'auteur; ainsi

$$\begin{aligned} \sin K &= \cos PM = \cos(PZ + ZM) = \cos(90 - H + ZM) = \sin(H - ZM) \\ &= \sin ME, \\ ME &= H - ZM \quad \text{et} \quad ZM = H - ME = H - K, \\ MR &= \sin ZM = AQ, \end{aligned}$$

sera l'amplitude mesurée sur la ligne horizontale OAQ du cadran.

Si la déclinaison était australe, $\sin K = \frac{\sin D}{\cos h}$ changerait de signe comme $\sin D$.

Si K se trouve plus grand que H , il est évident que $ZM = H - K$ changerait de signe, et que l'amplitude ou l'azimut AQ, suivant le langage de l'auteur, serait entre le premier vertical et le nord.

Ces remarques sont l'abrégé des préceptes que l'auteur donne pour les différens cas qui peuvent se rencontrer. Il nous dit que personne n'avait encore parlé de la solution qu'on vient de voir. Elle n'était ni d'une grande importance, ni d'une grande difficulté. Il ajoute que si le Soleil est dans l'équateur, l'ombre décrira une ligne droite, dont l'inclinaison avec l'horizontale sera $90^\circ - H$; ce qui est évident, car la projection de l'équateur est le diamètre QE. Cette inclinaison, l'auteur la nomme *azimut*; et pour ce cas, il nous dit que l'ombre sera $\cot P$, c'est-à-dire $\frac{\cos P}{\sin P}$; mais il nous avertit que cette ombre est celle du centre du Soleil.

Si le Soleil était dans l'équateur en S' , l'arc $S'E$ serait en même tems la mesure de l'angle horaire et le complément du dayer ou de la partie écoulée du jour. Alors aussi l'ombre de 3^h après le lever, serait égale au module ou à la hauteur du style; car $\cot P$ serait $\cot 45^\circ = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = 1$; ce qui servirait à retrouver le style, s'il était perdu. Nous avons fait usage de ce moyen et de beaucoup d'autres, pour retrouver le style des cadrans d'Athènes (voyez le tome II de notre *Hist. de l'Astr. anc.*).

Soit EM la déclinaison du Soleil; M sera le point où se trouvera le Soleil à midi; MSQ sera le rayon solaire dirigé au pied du style, l'ombre sera sur le prolongement de MQ.

Au lever du Soleil, l'ombre est la tangente de l'amplitude QB. Mais,

pour avoir la longueur exacte de cette ombre, il prescrit d'ajouter à l'amplitude le demi-diamètre du Soleil. Ces notions sont aujourd'hui très vulgaires; ce chapitre nous prouve qu'Ebn Jounis en était en pleine possession; mais comme elles étaient alors, ou tout-à-fait nouvelles, ou peu répandues, il croit utile d'éclaircir tous ses préceptes par des exemples que nous nous dispenserons de rapporter.

SM étant la hauteur du Soleil sur le plan, QS sera la distance du Soleil au zénit de ce plan, l'ombre sera

$$\text{tang QS} = \cot \text{MS} = \frac{\cos \text{MS}}{\sin \text{MS}} = \frac{\cos h}{\sin h}.$$

Remarquez qu'Ebn Jounis ne fait ici aucun usage de sa Table des tangentes.

Quand QS sera de 45° , l'ombre sera égale au style. J'ignore si les Musulmans avaient quelque devoir religieux à remplir quand l'ombre était égale au style, c'est-à-dire vers le quart du jour; mais on voit plusieurs vestiges de l'importance qu'ils attachaient à cette égalité, que les gnomonistes modernes négligent entièrement.

Si $\text{QS} = 45^\circ$, on aura $\cos h = \sin h = \sin P \cos D = \sin 45^\circ$ et $\sin P = \frac{\sin 45^\circ}{\cos D}$.

ainsi, pour un jour quelconque, ou pour une longitude quelconque du Soleil, on aurait $\sin D = \sin \omega \sin \odot$; $\sin P = \frac{\sin 45^\circ}{\cos D}$ donnerait l'heure où l'ombre serait égale au style;

$$\sin \text{EM} = \frac{\sin D}{\sin 45^\circ} = \frac{\sin \omega \sin \odot}{\sin 45^\circ} = \left(\frac{\sin 23^\circ 35'}{\sin 45^\circ} \right) \sin \odot.$$

L'auteur, dont nous resserrons ici les préceptes, a calculé une table de EM pour tous les degrés de longitude de l'écliptique. J'en ai vérifié une douzaine de termes, d'après cette formule, et je les ai trouvés fort exacts. On y trouve donc pour tous les jours de l'année l'angle de l'ombre avec le rayon équatorial QE, à l'instant où la longueur du style est égale à celle de l'ombre; cet angle est désigné sous le nom générique d'*azimut*.

A ces préceptes, qui conviennent exclusivement au cadran oriental ou occidental, il ajoute les règles suivantes pour tout cadran vertical dont la déclinaison sera connue (fig. 37).

Lorsque le centre du Soleil est à l'horizon en A, sa hauteur sur le

plan déclinant ZB est égale à $AB = QB - QA =$ déclin. du plan — amplitude ortive $= \delta$. Soit O le pôle du plan, $BO = 90^\circ$; AO est la distance du Soleil levant au pôle du plan; l'ombre sera

$$\text{tang OA} = \cot OB = \cot \delta = \frac{\cos \delta}{\sin \delta}.$$

Quand le Soleil aura une hauteur $CS = h'$ sur l'horizon, sa distance au plan sera Sx et $\sin Sx = \sin ZS \sin SZx = \cos h' \sin \delta' = \sin h$; et pour ce moment, la longueur de l'ombre sera $\text{tang SO} = \cot Sx = \cot h = \frac{\cos h}{\sin h}$.

Si l'on a mesuré cette ombre, on connaîtra Sx , et l'on aura

$$\frac{\sin Sx}{\sin ZS} = \frac{\sin h}{\cos h'} = \sin SZx = \sin \delta' = \sin (CZQ + QZB),$$

δ' étant la différence entre l'azimut du moment et le plan du cadran; ou la somme de la déclinaison du cadran et de l'azimut actuel, compté du point est.

C'est ainsi qu'il faut interpréter cette partie équivoque du chapitre, pour lui donner un sens raisonnable.

Telle est, nous dit Ebn Jounis, la méthode des anciens; elle est exacte pour l'azimut, mais pour l'ombre, il faudra avoir égard au demi-diamètre du Soleil, comme il est dit au chapitre du cadran horizontal.

Les chapitres XXVII, XXVIII, XXIX et XXX manquent dans le manuscrit d'Ebn Schathîr.

Chapitre XXXI. Trouver l'ascendant sans le secours de l'ascension oblique (fig. 38).

$$\begin{aligned} \sin \gamma OQ : \sin \gamma Q :: \sin \gamma QO : \sin \gamma O &= \sin \text{ascend.} = \frac{\sin (90 + M) \cos H}{\sin O} \\ &= \frac{\cos \text{asc. dr. milieu du ciel} \cos \text{haut. du pôle}}{\sin \text{angle de l'écliptique avec l'horizon}}, \end{aligned}$$

règle connue depuis Hipparque;

$$\sin ZO : \sin ZCO :: \sin ZC : \sin ZOC = \cos COR = \frac{\sin ZC \sin ZCO}{\sin ZO},$$

$$\cos \text{angle de l'éclipt. et de l'horizon} = \frac{\cos \text{haut. point culminant} \cdot \cos \text{obliquité}}{\cos \text{déclin. du point culminant}},$$

$$\text{puis} \quad \sin OC = \frac{\sin RC}{\sin ROC},$$

ou

$$\sin \text{arc de l'éclipt. compris entre le mér. et l'hor.} = \frac{\sin \text{haut. du point culminant}}{\sin \text{angle de l'éclipt. et de l'hor.}}$$

et enfin

$$\text{ascendant} = \gamma O = \gamma C + CO$$

$$= \text{longit. point culm.} + \text{arc compris entre le mérid. et l'horizon.}$$

Ces règles, connues depuis Hipparque, ont cela de remarquable que le triangle ZOC dispensait de connaître $\cos O = \cos RC \sin C$ que donnerait le triangle RCO.

De même le triangle P γ C donne $\sin PC : \sin P\gamma C :: \sin P\gamma : \sin C$,
ou $\cos D : \cos \omega :: 1 : \sin C = \frac{\cos \omega}{\cos D}$.

Il eût été plus court de dire $\cos O = \cos RC \sin C$,

$$\cos \omega = \cos D \sin C, \text{ d'où } \sin C = \frac{\cos \omega}{\cos D}, \text{ et } \cos O = \frac{\cos RC \cos \omega}{\cos D}.$$

Rien ne nous dit quelle voie a prise Ebn Jounis; mais pour suivre la seconde, il aurait fallu connaître et appliquer deux fois le théorème de Géber; il est donc plus probable qu'Ebn Jounis a suivi la première.

Dans la première expression $\sin \gamma O = \frac{\cos M \cos H}{\sin O}$, mettons $\frac{\cos \gamma C}{\cos D}$ pour $\cos M$, et $\cos H'$ pour $\sin O$, nous aurons

$$\sin \gamma O = \frac{\cos \gamma C \cos H}{\cos MC \cos H'}.$$

dernière expression d'Ebn Jounis. Rien de tout cela n'est nouveau.

Les chapitres XXXII et XXXIII manquent.

L'un enseignait à trouver le milieu du ciel par les ascensions de l'ascendant, lorsqu'on n'a pas les ascensions droites.

Ce titre est un de ceux qu'on ne peut entendre qu'après la lecture du chapitre. Si par *ascension de l'ascendant* il entend son ascension oblique, il n'y a véritablement pas de problème; car l'ascension oblique diminuée de 90° , est l'ascension droite du milieu du ciel; d'où l'on conclut la longitude du point culminant, qu'il appelle le *milieu du ciel*.

S'il entend la *différence ascensionnelle*, on en conclura la déclinaison; pourvu que l'on connaisse la hauteur du pôle, on aura l'ascension droite et le reste : ce n'est pas encore véritablement un problème.

S'il entend par ascension le *coascendant*, tel qu'il le définit chapitre XXXIV, ce qui reviendrait à dire, si l'on connaît le tems écoulé depuis le lever, la solution du problème se trouvera par des formules déjà données, et semblables à celles que nous allons retrouver.

L'autre chapitre enseignait à trouver l'arc de révolution de la sphère entre deux hauteurs données, lorsque la latitude du lieu et le lieu du Soleil sont *inconnus*.

Le problème ainsi présenté paraît insoluble. En effet, soient h et h' les deux hauteurs

$$\begin{aligned}\sin h &= \cos P \cos H \cos D + \sin H \sin D, \\ \sin h' &= \cos P' \cos H \cos D + \sin H \sin D, \\ \sin h - \sin h' &= \cos H \cos D (\cos P - \cos P') \\ &= 2 \cos H \cos D (\sin^2 \frac{1}{2} P' - \sin^2 \frac{1}{2} P) \\ &= 2 \cos H \cos D \sin \frac{1}{2} (P' - P) \sin \frac{1}{2} (P' + P),\end{aligned}$$

et

$$\sin \frac{1}{2} (P' - P) = \frac{\sin h - \sin h'}{2 \cos H \cos D \sin \frac{1}{2} (P' + P)}.$$

$P' - P$ serait l'arc de révolution de la sphère, mais il dépend de trois inconnues H , D et $(P' + P)$; on trouverait la même chose par l'Analemma,

$$\begin{aligned}\text{MA} : \text{NB} &:: \sin h : \sin h' :: \text{MO} : \text{NO} \text{ (fig. 39)}, \\ \sin h - \sin h' : \sin h &:: \text{MO} - \text{NO} : \text{MO} :: \text{MN} : \text{MO}, \\ \text{MN} &= \left(\frac{\sin h - \sin h'}{\sin h} \right) \text{MO};\end{aligned}$$

or $\text{MA} = \sin h = \text{MO} \cos H$ et $\text{MO} = \frac{\sin h}{\cos H};$

donc $\text{MN} = \left(\frac{\sin h - \sin h'}{\sin h} \right) \frac{\sin h}{\cos H} = \left(\frac{\sin h - \sin h'}{\cos H} \right),$

et $ab = \frac{\text{MN}}{\cos D} = \frac{\sin h - \sin h'}{\cos H \cos D} = \cos P' - \cos P.$

La même difficulté subsiste. Mais supposez H et D connus et non pas *inconnus*, vous pourrez calculer P et P' par les trois côtés; vous aurez l'angle $P' - P$ qui mesurera la révolution cherchée. Je crois donc qu'il y a quelques mots omis dans le manuscrit où M. Caussin a pris ce titre.

Chapitre XXXIV. Déterminer l'*ascension* (ou le coascendant de l'azim.).

L'*ascension*, ou *coascendant de l'azimut*, est l'arc de l'équateur qui traverse l'horizon pendant le tems que le centre du Soleil emploie à passer de l'horizon à un azimut donné. Voilà ce qu'on ne pouvait deviner; car cette définition ne se trouve dans aucun traité moderne. Pour comprendre la solution arabe, il ne sera pas inutile de la chercher d'abord par nos méthodes.

Souvenons-nous que l'azimut pour les Arabes, était ce que nous nommons *amplitude*.

Mettant donc $A = 90^\circ - Z$ dans nos formules, nous aurons

$$\sin D = \sin A \cos H \cos h + \sin H \sin h.$$

Nous avons vu (page 126) comment Ebn Jounis résout les équations de ce genre, où l'inconnue est représentée par son sinus et son cosinus.

Il nous prescrit de chercher la hauteur h qui convient à l'amplitude donnée; il suppose la déclinaison connue; la hauteur étant déterminée, on a

$$\cos D : \cos A :: \cos h : \sin \text{angle hor.} = \frac{\cos A \cos h}{\cos D} = \sin C;$$

c'est la formule de l'auteur.

A présent, pour connaître l'ascension ou l'arc de révolution de la sphère, depuis le lever, nous chercherions

$$\cos \text{arc semi-diurne} = -\tan H \tan D.$$

C'est encore un précepte d'Ebn Jounis. Nous aurons donc

$$\text{arc semi-diurne} - C = \text{arc de révolution} = \text{ascension.}$$

Le problème n'est pas aussi simple qu'il le paraît. L'angle horaire C se trouve par son sinus; il peut être obtus aussi bien qu'aigu, du moins à certaines heures de la journée, dans les signes septentrionaux. Les tables donneront dans ce cas $C' = 180^\circ - C$.

La formule, dans ce cas, devient

$$\text{arc semi-diurne} - (180^\circ - C') = \text{arc sem.} + C' - 180^\circ.$$

Il faut connaître si l'angle est aigu ou obtus. C'est à G^h que l'angle est droit; en conséquence, l'auteur cherche la hauteur du Soleil à l'instant où l'angle C est droit, c'est-à-dire quand le Soleil est dans le cercle de G^h . Il ne donne pas la règle, mais elle est bien simple. Soit AB cette hauteur;

$$AB = \sin h' = QA \sin PQO = \sin D \sin H \text{ (fig. 40).}$$

C'est le dernier terme de $\sin h = \cos P \cos H \cos D + \sin D \sin H$.

$\sin h' = \sin D \sin H$, parce que $\cos P = 0$. Aboul Hassan, dans sa Gnomonique, fait un usage fréquent de cette hauteur.

Avant ce moment, la hauteur h ou EF sera moindre que h' ; dans ce cas, c'est-à-dire

si $h < h'$, il est évident que EPO (qu'il appelle *asc.*) = arc semi-d. + $C' - 180^\circ$,
 si $h = h'$, $C = 90^\circ$, l'angle APO = arc semi-d. $- 90^\circ$ = différence ascens.,
 si $h > h'$, l'angle horaire ZPG sera aigu, tel que le donnent les tables, et
 OPG = ascension = arc semi-diurne $- C$;

voilà pour le matin. Pour le soir, l'ascension sera = arc semi-d. + C ; tant que $h > h'$;

si $h = h'$, l'angle horaire est de 90° , ascension = arc semi-diurne + 90° ,

si $h < h'$, l'angle est obtus, asc. = arc semi-diurne + $180^\circ - C$;

voilà les six règles de l'auteur pour les signes septentrionaux ; elles se simplifient à l'équateur où $D = 0$. $Tang h = \sin A \cos H$ et $\sin C = \cos A \cos h$; et comme l'arc semi-diurne est de 90° , la formule devient asc. = $90^\circ \mp C$.

Ce sont encore les préceptes de l'auteur.

Pour les arcs méridionaux, C est toujours aigu ; ainsi

$$\text{ascension} = \text{arc semi-diurne} \mp C.$$

La solution de l'auteur est donc identique à la nôtre. Son moyen pour savoir si l'angle est obtus ou aigu, est fort simple. Nous pourrions calculer C par sa cotangente avec l'azimut, la hauteur et la latitude du lieu, mais ce moyen serait plus long.

Chapitre XXXV. Le gnomon d'un cadran horizontal étant perdu, et la latitude du lieu inconnue, déterminer cette latitude et retrouver la hauteur du gnomon.

Ce titre nous promet des renseignements sur la Gnomonique des Arabes.

Décrivez autour du centre du gnomon (du pied du style) un cercle que vous diviserez en ses 360° . L'auteur dit un cercle égal à l'un des cercles divisés qui sont sur le *destour* ; c'est sans doute une espèce de *rapporteur*, et rappelez-vous qu'à toute latitude, l'arc diurne équinoxial est de 180° , et chaque heure de 15° .

De l'extrémité de l'ombre d'une heure quelconque de l'équinoxial, menez une droite occulte au centre du gnomon ; marquez le point où cette ligne coupe le cercle ; posez sur cette marque une des pointes du compas et l'autre pointe à l'intersection de la ligne méridienne et du cercle ; puis conservant la même ouverture de compas, transportez-la sur le *destour*, et notez le nombre de degrés compris entre les deux points, ce sera la valeur en degrés de l'angle compris entre l'ombre et la méridienne (c'est-à-dire l'azimut de cette ombre). Soit d cet azimut, C le complément de l'angle horaire compté du lever, ou l'angle horaire compté de midi ;

$$\frac{\sin C}{\sin d} = \cos h, \quad \text{puis} \quad \frac{\sin h}{\cos C} = \cos H,$$

la hauteur du pôle étant connue, vous déterminerez la hauteur h' pour une heure quelconque et la longueur du gnomon.

Pour entendre cette construction, cherchons-la par nos formules.

Sur le cadran horizontal, les angles des ombres avec la méridienne sont les angles azimutaux du Soleil. Soit O le pied du style, EQ l'équinoxiale, OQ une ligne horaire quelconque, ou l'ombre de cette heure;

$$\frac{EQ}{OQ} = \sin O \text{ (fig. 41).}$$

Connaissant l'azimut O, vous aurez

$\sin Z : \sin P :: \cos D : \cos h = \frac{\sin P \cos D}{\sin Z} = \frac{\sin P}{\sin Z} = \frac{\sin P}{\sin O} = \left(\frac{OQ}{EQ}\right) \sin P$; vous pouvez mesurer EQ et OQ, vous connaissez $\sin P$ par le choix de l'heure; vous aurez donc $\cos h$; mais $OQ = \frac{G \cos h}{\sin h} = G \cot h$, G étant le gnomon perdu; donc $G = OQ \left(\frac{\sin h}{\cos h}\right)$; enfin à l'équateur, $\sin h = \cos P \cos H$ et $\cos H = \frac{\sin h}{\cos P}$. Le problème est donc résolu.

Au lieu de faire $\frac{EQ}{OQ} = \sin Z = \sin O$, l'auteur cherche sur un rapporteur l'angle O ou *eq*. Cela revient au même. Pour trouver la hauteur h , il fait comme nous $\cos h = \frac{\sin P}{\sin Z}$, puisque son angle C, complément de l'angle horaire compté du lever équinoxial, est encore notre angle P. Il fait comme nous $\cos H = \frac{\sin h}{\cos P}$, et nous dit simplement que la hauteur du gnomon se déduira de la longueur de l'ombre; c'est dire assez qu'il fait encore comme nous, $G = OQ \tan h$.

Il résulte de ce chapitre, que les Arabes faisaient marquer à leurs cadrans les heures temporaires, ce que nous savions d'ailleurs, et que ces cadrans n'avaient qu'un simple style droit au lieu d'axe, ce que nous savions également. On trouve un autre problème de gnomonique dans le chapitre XXVIII; il s'agit de marquer sur le cadran le zénit de la Mecque; il se trouve dans Albategni. Le problème du chapitre XXVII s'y trouve pareillement.

Le chapitre XXXVI est intitulé: étant donnés deux points de l'écliptique dont la hauteur est égale, déterminer cette hauteur, si l'on connaît la hauteur du pôle.

Si ces deux points ont même hauteur, ils sont à distance égale du nonagésime; le nonagésime sera donc connu, puisqu'il sera le milieu de l'arc qui va de l'un à l'autre point.

Le complément de la hauteur demandée sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la base sera $\frac{1}{2}(L - L')$, et l'autre côté sera 90° — angle de l'écliptique et de l'horizon, ou distance zénitale nonagésime; ainsi $\sin h = \cos \frac{1}{2}(L - L') \sin O$; il restera donc à trouver $\sin O = \sin$ angle de l'écliptique avec l'horizon.

Le nonagésime sera $L' + \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}L' = \frac{1}{2}(L + L')$,
le point orient $\frac{1}{2}(L + L') + 90^\circ = \frac{1}{2}(L + L' + 180^\circ) = \text{ascend.}$

Soit A la longitude de l'ascendant

$$\cos A \sin \omega \sin O - \cos \omega \cos O = -\cos H \text{ ou } \cos H = \cos O \cos \omega - \sin \omega \sin O \cos A;$$

on aura donc l'angle O et par conséquent h. Mais O est dans le cas ambigu, l'équation est du second degré, et le calcul sera long; d'ailleurs les Arabes n'avaient pas cette formule qui sert à trouver le troisième angle.

Soit (fig. 42) γQR l'équateur, γAO l'écliptique, N le nonagésime;

$$\gamma N = \frac{1}{2}(L + L'), \gamma O = \frac{1}{2}(L + L') + 90^\circ, ZA = ZB = 90^\circ - h,$$

$$\sin h = \cos ZA = \cos ZN \cos NA = \cos \frac{1}{2}(L - L') \cos ZN = \cos \frac{1}{2}(L - L') \sin O,$$

$$\sin OR = \sin \omega \sin \gamma O, \sin QR = -\tan H \tan OR,$$

$$\tan \gamma R = \cos \omega \tan \gamma O, \gamma Q = \gamma R - QR,$$

$$\sin \gamma O : \cos H :: \sin \gamma Q : \sin \gamma OQ;$$

toutes ces formules étaient bien connues des Arabes et même des Grecs; ainsi ce problème n'annonce rien de nouveau en Trigonométrie; mais il est possible que l'auteur ait trouvé des moyens qui ne fussent qu'à lui.

Chapitre XXXVII. Trouver le degré du zodiaque qui passe au zénit à certaines latitudes. Ce problème se trouve dans Ptolémée.

Chapitre XXXVIII. Des latitudes. Il n'y est question que de la latitude de la Lune. Ce chapitre est principalement historique. La définition que donne l'auteur de la plus grande latitude ou de l'inclinaison de la Lune est la même que celle de Ptolémée, ce qui est tout simple, puisqu'il n'avait rien changé à cette théorie; il ajoute que les anciens diffèrent entre eux sur cette latitude; qu'Hipparque et Ptolémée la faisaient de 5° , et que les Persans ne la disaient que de $4^\circ 30'$. Il est à remarquer que Chrysococca et Schahcholgius ont également omis de nous parler de l'inclinaison de l'orbite lunaire. En nommant les Persans après Hipparque

et Ptolémée, Ebn Jounis nous autorise à les croire plus modernes. Nous avons remarqué (tome I, p. 230) que les Indiens ont toujours supposé $4^{\circ}30'$; mais nous ignorons l'époque de cette mauvaise détermination. L'ont-ils reçue des Persans ou la leur ont-ils communiquée? c'est ce qui paraît assez indifférent.

Aboul-Abbas al Fadhl ben Hâtem al Tebrizy (de Tauris) dit que l'ayant calculée d'après les observations de Ahmed et Mohammed, fils de Mousa ben Schaker, il avait trouvé $4^{\circ}45'$; ce qui se rapproche beaucoup de ce que donne Ahmed ben Abdalla, surnommé Habash, d'après les auteurs de la Table vérifiée. Albategni rapporte que l'ayant mesurée, il avait trouvé 5° comme Hipparque et Ptolémée.

Aboul Hassan Aly ben Amajour dit qu'il l'a mesurée un grand nombre de fois, et qu'elle lui a paru souvent plus considérable que celle d'Hipparque; et il ajoute qu'il y a trouvé des différences très sensibles.

Voilà un passage digne de remarque; d'après les connaissances modernes, il est certain que la latitude varie de 5° à $5^{\circ}\frac{1}{3}$ à fort peu près. Ainsi Aboul Hassan Aly ben Amajour paraît avoir suivi ces observations avec plus de soin et de succès que tous ses prédécesseurs sans aucune exception. Il est possible qu'Albategni, ayant retrouvé par hasard une latitude très peu différente de celle d'Hipparque, ait cru trop facilement cet élément bien constaté, quoique la quantité qu'il lui assigne soit un *minimum*.

Quant à moi, dit Ebn Jounis, je l'ai mesurée moi-même plusieurs fois, et je l'ai trouvée de $5^{\circ}3'$. Il est singulier qu'il n'ait pas mieux profité de la remarque de Ben Amajour, et qu'il n'ait pas cherché à démêler ces différences très sensibles. Il est à croire qu'il aura toujours observé dans les mêmes circonstances, car s'il eût suivi la Lune un peu assidûment, il eût été comme impossible qu'il n'eût jamais aperçu une variation qui est de plus de $8'$ tant en plus qu'en moins. On voit par la suite de son récit que l'assertion de Ben Abdallah Habash, sur la détermination des auteurs de la Table vérifiée, est infirmée par Aboul-Thyhsend ben Aly, qui a été présent aux deux observations faites à Bagdad et à Damas. Ses tables portent 5° ; et si, par l'observation, il eût trouvé $4^{\circ}46'$, ou que ceux qui observaient en sa présence, eussent trouvé cette même latitude, il s'ensuivrait qu'il ne l'aurait pas insérée dans ses tables telle qu'elle aurait été observée, quoiqu'il y eût donné les moyens mouvemens déterminés par les auteurs de la Table. Mais, sur ces moyens mouvemens, il est d'accord avec Yahia ben Abi Mansour; on peut donc, dit encore Ebn Jounis, adopter la latitude qu'il nous donne.

D'ailleurs Aboul Abbas al Fadhl ben Hâtem al Tebrizy n'a-t-il pas donné, dans ses Tables astronomiques, deux tables particulières de la latitude de la Lune ? l'une, selon Hipparque et Ptolémée; l'autre, selon ce que dit Habash. S'il avait eu confiance en ce qu'on disait des auteurs de cette table, il n'aurait donné que la latitude qu'ils avaient trouvée, ainsi qu'il a fait pour les moyens mouvemens. Enfin, conclut Ebn Jounis, j'ai moi-même plus de confiance en mes propres observations.

En effet, Ebn Jounis trouvant à très peu près la même latitude qu'Hipparque, Ptolémée et Albategni, pouvait s'arrêter à ce résultat; de ce qu'il n'a point remarqué les différences indiquées par Ben Amajour, on serait tenté de conclure qu'il a moins bien observé; mais il faut songer que cette latitude doit être affectée des erreurs que l'on commettait sur la parallaxe; c'est ce qui fait l'incertitude de cet élément, et disculpe un peu les Arabes. Ajoutons encore que l'équation de 8' de Tycho pouvait aisément se perdre dans les erreurs des observations, lorsque cette équation était un peu loin de ses deux limites.

Après cette notice historique, que nous avons rapportée textuellement, malgré sa longueur, Ebn Jounis enseigne à calculer la latitude pour tous les points de l'orbite. Il fait L = inclinaison de l'orbite et

$$\sin \lambda = \frac{\sin L \sin (C - \Omega)}{\text{rayon}}; \text{ ou soit } \frac{\sin \text{total}}{\sin (C - \Omega)} = \phi, \text{ on aura } \sin \lambda = \frac{\sin L}{\phi};$$

c'est une division à faire au lieu d'une multiplication; il semble qu'il eût été plus simple de faire $\left(\frac{\sin L}{\text{rayon}}\right) = \phi$ et $\sin \lambda = \phi \sin (C - \Omega)$; mais c'est une vérification.

De cette équation, il tire

$$\sin (C - \Omega) = \frac{\sin \lambda}{\sin L} \quad \text{et} \quad \sin L = \frac{\sin \lambda}{\sin (C - \Omega)},$$

équations qui, selon les circonstances, font trouver la distance au nœud ou la plus grande latitude; mais il ne nous dit pas de quelle méthode il s'est servi pour trouver son inclinaison de 5° 3'.

Ce chapitre est terminé par une Table de la latitude, calculée de 10 en 10' de distance au nœud, pour $L = 5^\circ 3'$, et accompagnée d'une Table des différences pour 1, 2, 3, 4 et 5'.

Le nœud ascendant s'appelle *mégiaz al schumâl*, passage du nord; le nœud descendant s'appelle *mégias al génoub*, passage du sud; ce sont des expressions analogues à l'*anabibazon* et au *catabibazon* des Grecs.

Chapitre XXXIX. Déterminer la distance d'une étoile à l'équateur, quand elle a une latitude.

Pour avoir la déclinaison des étoiles ou des planètes, soit D cette déclinaison, d la déclinaison du point L de l'écliptique qui a même longitude, ω l'obliquité, λ la latitude de l'étoile; faites

$$\sin d \cos \lambda = \sin A \quad \text{et} \quad \sin \lambda \cos \omega = \sin B, \quad \sin D = \sin A + \sin B.$$

La formule moderne est $\sin D = \sin \omega \sin L \cos \lambda + \cos \omega \sin \lambda$; mais $\sin d = \sin \omega \sin L$; la méthode est donc identique à la nôtre; elle se déduit du théorème fondamental par une substitution bien simple qui suppose la longitude connue, sans quoi le problème serait indéterminé; aucun triangle n'a pu donner directement $\sin d \cos \lambda$, ni $\sin \lambda \cos \omega$. Cet exemple seul démontrerait que les Arabes avaient le théorème qui donne le troisième côté par les deux autres et par l'angle compris; mais nous en avons bien d'autres preuves.

L'auteur donne, pour les différens cas des déclinaisons d et D boréales ou australes, des préceptes que notre règle des signes rend inutiles.

Autre méthode. Prenez la distance à l'équinoxe le plus voisin. Soit L cette distance et $90^\circ - L$ son complément; cherchez les déclinaisons d et d' qui conviennent à ces deux arcs.

Nous avons trouvé ci-dessus, page 24, l'équation (3), de laquelle, par un simple renversement, on déduit

$$\sin D = \frac{\sin \phi \cos \omega}{\cos \lambda'} = \frac{\sin (\lambda + \lambda') \cos \omega}{\cos \lambda'};$$

λ est la latitude de l'astre et λ' la latitude du point de l'équateur qui a la même longitude que l'astre; cette formule est la règle de l'auteur. Pour trouver λ' , que nous aurions en faisant $\sin L \tan \omega = \tan \lambda'$, l'auteur, qui ne fait aucun usage des tangentes, est réduit à rejeter cette équation qui lui est bien connue; il fait $\sin \lambda' = \frac{\sin d}{\cos d'}$ par un théorème que nous avons démontré au chapitre XIII, et que nous retrouverons à l'article d'Aboul Wéfa. d' est la déclinaison qui a lieu à 90° de L, et voilà pourquoi l'auteur prescrit d'abord de chercher les déclinaisons d et d' des arcs L et $90^\circ - L$ dans les Tables de l'écliptique.

Il enseigne à se servir de ces tables, en changeant l'argument, c'est-à-dire en considérant la longitude donnée comme une ascension droite; avec cette ascension fictive, il apprend à trouver la longitude qui y cor-

respond; quand on a la longitude fictive, qui répond à l'ascension droite fictive, on prend, dans la table, la déclinaison qui lui convient, et cette déclinaison est la latitude du point de l'équateur qui a la même longitude que l'astre; cette même latitude est celle que nous appelons λ' . Cet exemple, qui enseigne à prendre une longitude pour une ascension droite, est le plus ancien que je me souvienne d'avoir vu. Il est assez rare chez les modernes, et je ne connais guère que Mayer qui, pour s'épargner une table des angles de l'écliptique et du méridien, ait donné des préceptes de ce genre, pour trouver ces angles par la table des déclinaisons. Ici de même, l'auteur ayant besoin d'un angle, cherche la déclinaison à 90° de là; le complément de cette déclinaison est l'angle dont il a besoin.

Cet usage des tables est ce que l'auteur donne comme une troisième méthode. Au fond, elle est identique à la seconde.

Chapitre XL. Déterminer la hauteur méridienne des étoiles.

Le précepte est fort ancien. Cette hauteur est $90^\circ - (H - D) = 90^\circ + D - H$; il suffit donc de connaître la déclinaison de l'étoile, et l'auteur vient d'en indiquer les moyens dans le chapitre précédent.

Autre méthode. Faites $h' = 90^\circ - D =$ hauteur de l'étoile dans la sphère droite; alors, si la déclinaison est boréale, $h' + H = h''$; H est la hauteur du pôle dans le lieu de l'observation, h'' la hauteur cherchée.

L'auteur détaille, à son ordinaire, tous les cas qui peuvent se présenter, et il nous apprend que personne encore n'avait parlé de cette méthode. On voit qu'Ebn Jounis ne veut rien perdre.

Il donne un exemple pour *al Hâdi*, c'est-à-dire pour α du Taureau ou Aldébaran.

Chapitre XLI. Déterminer la latitude du lieu par la hauteur méridienne. C'est l'inverse du problème précédent; il suffit de retourner les formules.

Chapitre XLII. Déterminer l'arc diurne ou l'arc nocturne d'une étoile et le sinus verse de son demi-arc au-dessus de l'horizon.

Les Grecs savaient déjà que l'arc semi-diurne P se calcule par la formule

$$\cos P = -\tan H \tan D = -\frac{\sin H}{\cos H} \cdot \frac{\sin D}{\cos D};$$

ainsi

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} P = \sin \text{verse } P = 1 + \tan H \tan D;$$

pour l'arc semi-nocturne, il suffit de changer le signe de $\tan D$, qui change aussi quand la déclinaison est australe.

Chapitre XLIII. Déterminer le degré qui culmine avec une étoile.

Si l'étoile n'a pas de latitude, elle culmine avec le point qu'elle occupe dans l'écliptique; quelle que soit sa latitude, si elle a 90° ou 270° de longitude, elle culmine avec l'un ou l'autre de ces points. Dans tout autre cas, l'étoile ne culmine pas avec le point auquel elle correspond sur l'écliptique; et pour déterminer le point culminant, il faut d'abord passer par l'ascension droite. Soit λ la latitude de l'étoile, λ' celle du point de l'équateur qui a la même longitude que l'étoile; nous aurons (fig. 43)

$$\begin{aligned} \text{tang } AB &= \text{tang } (\lambda + \lambda') \cos B = \text{tang } (\lambda + \lambda') \sin \omega \cos L, \\ \text{tang } \gamma B &= \frac{\text{tang } L}{\cos \omega} \quad \text{et} \quad \gamma A = (\gamma B - AB). \end{aligned}$$

Les Arabes connaissaient tous ces moyens, ou du moins ils en avaient l'équivalent; mais le défaut de tangentes les rendait fort incommodes.

Ebn Jounis fait

$$\begin{aligned} \cos L \cos \lambda &= \cos \gamma C, \quad \frac{\sin \lambda}{\sin \gamma C} = \sin C \gamma \alpha, \quad C \gamma A = \omega + C \gamma \alpha, \\ \sin D &= \sin \gamma C \sin (\omega + C \gamma \alpha), \end{aligned}$$

et enfin

$$\sin \gamma A = \sin \gamma C \sin C = \frac{\sin \gamma C \cos (\omega + C \gamma \alpha)}{\cos D} = \frac{\cos awel \cos inhira}{\cos D};$$

il nomme *awel* le complément de l'hypoténuse γC , et *inhira*, l'angle $C \gamma A$; *inhira* paraît indiquer toujours un angle ou une inclinaison.

Deuxième méthode. Quand vous avez calculé D comme ci-dessus, vous pouvez faire $\cos R = \frac{\cos L \cos \lambda}{\cos D}$, et cette méthode n'aurait pas l'ambiguïté du sinus; mais Ebn Jounis ne pouvait sentir cet avantage, et dans l'une comme dans l'autre méthode, il détaille tous les cas qui peuvent se rencontrer dans la pratique. Notre méthode par les tangentes serait plus simple et plus expéditive, et n'aurait aucune incertitude.

Pour entendre la troisième méthode de l'auteur, reprenons notre formule

$$\text{tang } AB = \text{tang } (\lambda + \lambda') \sin \omega \cos L = \frac{\sin (\lambda + \lambda') \sin \omega \sin (90^\circ - L)}{\cos (\lambda + \lambda')}.$$

Cherchez la déclinaison D' dont le sinus $D' = \sin \omega \sin (90^\circ - L)$, et mettez pour $\cos (\lambda + \lambda')$ la valeur $\cos AC \cos AB$; vous aurez

$$\text{tang } AB = \frac{\sin (\lambda + \lambda') \sin D'}{\cos AC \cos AB},$$

et
$$\sin AB = \frac{\sin(\lambda + \lambda') \sin D'}{\cos D} = \frac{\sin(Ca + aB) \sin D'}{\cos AC}.$$

Les Tables de l'écliptique vous donneront la longitude fictive γB qui répond à la longitude γa , prise pour une ascension droite; elles vous donneront en même tems la déclinaison aB de ce point. Vous aurez $(aB + aC) = (\lambda + \lambda')$; vous avez D' , vous avez la déclinaison D par ce qui précède; vous aurez donc AB et $\gamma A = (\gamma B - AB)$, d'où la longitude γR du point culminant.

Mais, en cet endroit, le texte paraît altéré, car l'auteur fait $\frac{\sin \omega \sin L'}{\cos \omega}$, ou $\tan \omega \sin L' = \sin A'$; il ferait donc un sinus de ce qui est une tangente, ce qui pourrait être corrigé par la suite du calcul; mais il donne aussitôt $\sin AB = A' \left(\frac{\sin D}{\cos D} \right)$, ce qui n'a pas de sens; je lis $\frac{\sin(Ca + aB) \sin D'}{\cos D} = \frac{\sin(Ca + aB) \sin \omega \cos L}{\cos D}$, et j'efface $\cos \omega$ qui est au dénominateur; alors $\sin \omega \cos L = \sin A'$ sera le sinus de ma déclinaison D' .

Chapitre XLIV. Trouver le point de l'écliptique qui se lève ou se couche avec une étoile donnée. Ce problème a été résolu pour la première fois par Hipparque, dont la solution ne laissait à désirer qu'un peu plus de facilité et de brièveté.

Si l'étoile a une latitude, Ebn Jounis prescrit de chercher d'abord l'ascension droite du degré qui passe au méridien avec elle, par le problème précédent. Ajoutez 90° , vous aurez le point de l'équateur à l'horizon pour le moment où l'étoile est au méridien. De cette ascension droite, retranchez l'arc semi-diurne, le reste sera l'ascension droite du point de l'écliptique qui se lève avec l'étoile; avec cette ascension droite, vous aurez le point de l'écliptique.

Pour abréger ces opérations, à l'ascension droite du point qui médie avec l'étoile, il ajoute ou retranche la différence ascensionnelle, ce qui lui donne l'ascension oblique qui lui fait trouver dans les tables le point cherché de l'écliptique.

Pour connaître le point de l'écliptique qui se couche avec l'étoile, à l'ascension droite du point de l'équateur qui se lève avec elle, ajoutez l'arc diurne de l'étoile, la somme sera l'ascension droite du nadhir (ou point opposé) du point de coucher. Avec ce nadhir, cherchez, dans la table, le point de l'écliptique qui se lève; prenez-en le nadhir (c'est-à-dire ajoutez 180°), vous aurez le point qui se couche.

Cette méthode était déjà fort ancienne ; en voici une autre :

Soit $\mathcal{R}'$ le point de l'équateur qui passe au méridien avec l'étoile ;

A l'arc semi-diurne de l'étoile :

$\mathcal{R}'' = \mathcal{R}' - A$ sera le degré qui culminera au moment du lever de l'étoile ;

$\mathcal{R}'' + 90^\circ$ le point qui se lèvera avec l'étoile, alors la Table des ascensions obliques vous donnera le point de l'écliptique ;

$\mathcal{R}' + A = \mathcal{R}'''$ sera le point qui médie au coucher de l'étoile ;

$\mathcal{R}''' + 90^\circ$ sera le point de l'équateur qui se trouve à l'horizon au même moment.

Avec ce dernier point, la Table des ascensions obliques du lieu vous donnera le point de l'écliptique qui se lève ; vous y ajouterez 180° pour avoir le point qui se couche avec l'étoile.

Ces tables et cette doctrine sont en entier des inventions d'Hipparque.

Le chapitre XLV manque ; il paraît une suite du précédent, puisqu'il traite du lever des étoiles, pour savoir si elles se lèvent de jour ou de nuit. A tout ce qu'on vient de lire il suffit d'ajouter la connaissance du lieu du Soleil pour l'instant du calcul.

Chapitre XLVI. Déterminer l'ascendant par la hauteur d'une étoile fixe. Nous avons vu, dans les chapitres précédents, comment les Arabes calculent l'angle horaire de l'étoile et le dayer (ou la partie écoulée du jour), par la hauteur de l'étoile ; on connaîtra donc l'ascension droite du milieu du ciel et le point ascendant de l'écliptique. Hipparque avait résolu ce problème, mais les Arabes en ont abrégé le calcul par leurs nouvelles règles trigonométriques et par l'usage qu'ils ont fait du théorème fondamental de notre Trigonométrie moderne.

Deuxième méthode. Déterminez d'abord le dayer, ajoutez-le à l'ascension oblique du nadhir du Soleil dans le lieu donné, vous aurez l'ascension oblique de l'ascendant, et, avec cette ascension, les Tables vous donneront l'ascendant.

Aujourd'hui la hauteur nous donne l'angle horaire ; en le comparant à l'ascension droite de l'étoile, on aurait celle du milieu du ciel, d'où l'on conclurait aussitôt l'ascendant par une seule règle. L'embarras, pour les Grecs et les Arabes, était de réduire le problème en tables pour le mettre à la portée des astrologues. Aujourd'hui que nos tangentes et nos logarithmes ont simplifié le calcul, il est devenu totalement inutile, puisque heureusement il n'y a plus d'astrologues ; mais on peut se consoler de ce qu'ils ont été autrefois en si grand nombre. Sans eux

l'Astronomie serait née beaucoup plus tard, puisqu'il paraît constant que les premiers astronomes n'ont guère été que des astrologues, et qu'ils ont fourni des matériaux précieux à Hipparque.

Chapitre XLVII. Déterminer le dayër d'une étoile d'après la hauteur, et réciproquement.

Ce chapitre ne contient que des applications et des exemples numériques des règles données ci-dessus au chapitre XLII. L'auteur continue de se servir d'Al Thaïr, qui lui a fourni ses exemples précédents.

Chapitre XLVIII. Calculer la longitude d'une étoile d'après sa latitude et sa déclinaison.

L'équation moderne serait $\sin D = \sin \omega \cos \lambda \sin L + \cos \omega \sin \lambda$,

d'où $\frac{\sin D}{\sin \omega} - \sin \lambda \cot \omega = \cos \lambda \sin L$,

et $\frac{\frac{\sin D}{\sin \omega} - \sin \lambda \cot \omega}{\cos \lambda} = \sin L = \frac{\sin D - \sin \lambda \cos \omega}{\sin \omega \cos \lambda}$.

L'auteur fait

$$\sin I' = \frac{\sin D}{\sin \omega}, \quad \sin I'' = \sin \lambda \cot \omega, \quad \text{et} \quad \sin L = \frac{\sin I' \pm \sin I''}{\cos \lambda}.$$

nouvelle preuve de l'emploi très fréquent du théorème fondamental de la Trigonométrie moderne.

Il explique tous les cas en détail, ce qui lui est d'autant plus nécessaire, que $\sin L$ trouvé par ses moyens, peut appartenir aux quatre quarts différens du cercle; mais on voit que, malgré toutes ses règles, $\sin L$ peut appartenir à un arc de plus ou de moins de 90° ; il ajoute donc que l'on connaîtra la longitude, si l'on sait d'avance en quel quart elle se trouve; mais avec notre règle des signes, il suffit de savoir en quelle moitié elle se trouve.

La seconde méthode, qui est la même au fond, se présente sous une forme plus extraordinaire.

L'auteur fait $\sin I' = \sin(\omega \mp D)$, et $\sin I'' = \cos(\omega \mp D)$; puis

$$\begin{aligned} Q &= (\sin I' + \sin \lambda) \cot \omega = [\sin(\omega \mp D) + \sin \lambda] \cot \omega \\ &= (\sin \omega \cos D \mp \cos \omega \sin D + \sin \lambda) \cot \omega \\ &= \cos \omega \cos D \mp \cos \omega \cot \omega \sin D + \sin \lambda \cot \omega; \end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned}
\sin L &= \frac{\sin \Gamma - Q}{\cos \lambda} = \frac{\cos(\omega \mp D) - \cos \omega \cos D \pm \cos \omega \cot \omega \sin D - \sin \lambda \cot \omega}{\cos \lambda} \\
&= \frac{\cos \omega \cos D \pm \sin \omega \sin D - \cos \omega \cos D' \pm \cos \omega \cot \omega \sin D - \sin \lambda \cot \omega}{\cos \lambda} \\
&= \frac{\pm \sin \omega \sin D \pm \cos \omega \cot \omega \sin D - \sin \lambda \cot \omega}{\cos \lambda} \\
&= \frac{\pm \sin^2 \omega \sin D \pm \cos^2 \omega \sin D - \sin \lambda \cos \omega}{\sin \omega \cos \lambda} = \frac{\pm \sin D - \sin \lambda \cos \omega}{\sin \omega \cos \lambda},
\end{aligned}$$

ce qui est encore notre formule et la règle donnée par Albategni (p. 20), pour un autre problème. Ebn Jounis supprime tous les développemens; mais il est certain que son calcul est identique au nôtre, quoiqu'il en diffère un peu par la forme. J'aurais pu rejeter le double signe, et supposer la déclinaison boréale aussi bien que la latitude, sauf à changer le signe de $\sin D$ pour une déclinaison australe, et celui de $\sin \lambda$ pour une latitude australe. Par là nous serons dispensés de suivre l'auteur dans l'énumération des divers cas qui peuvent se présenter. Tantôt il considère ω comme une déclinaison boréale, et tantôt comme une déclinaison australe; il distingue aussi les cas où ω est plus petit ou plus grand que D . Nous aurions L avec moins d'embarras; mais comme c'est par son sinus qu'on le trouve, il nous restera toujours l'incertitude entre L et $(180^\circ - L)$, mais nous saurons du moins dans quelle moitié de l'écliptique se trouvera l'étoile.

L'auteur calcule deux exemples, l'un pour Al Hâdi, Adébaran, dont la latitude est australe, et l'autre pour Al Thaïr, l'Aigle, dont la latitude est boréale. Les deux déclinaisons sont boréales; la première est dans les signes septentrionaux, la seconde dans les signes méridionaux: ces deux étoiles reviennent souvent.

Chapitre XLIX. Calculer la longitude d'une étoile par sa déclinaison et par le point de l'écliptique qui culmine avec elle.

C'est le problème dont Albategni nous a donné une solution si étrange dans son chapitre XXV; voyez ci-dessus, p. 23.

Cherchez la déclinaison δ du point culminant; faites, suivant les cas, la somme ou la différence ($D \mp \delta$) des deux déclinaisons. [Nous mettrons en général ($D - \delta$)]; cherchons $\sin(D - \delta)$ et $\cos(D - \delta)$; nous aurons (fig. 5 et page 24)

$$\sin \lambda = \sin(D - \delta) \sin B = \sin(D - \delta) \frac{\sin R}{\sin L} = \sin(D - \delta) \frac{\cos \omega}{\cos \delta};$$

tout est connu dans ces deux dernières expressions, fréquentes chez les Arabes. Ayant ainsi la latitude, la déclinaison et l'ascension droite, qui

est la même que celle du point culminant, on aura la longitude par le chapitre précédent, ou plus simplement par la formule $\cos L = \frac{\cos A \cos D}{\cos \lambda}$.

C'est la seconde méthode de l'auteur, qui, suivant son usage, change $\cos L$ et $\cos A$ en $\sin(90^\circ - L)$ et $\sin(90^\circ - A)$; et compte ainsi les ascensions droites et les longitudes du colure voisin, au lieu de les compter de l'équinoxe; ce qui fait croire que les Arabes aimaient à chercher l'inconnue par son sinus plutôt que par son cosinus, parce qu'ils n'avaient qu'une périphrase pour exprimer le cosinus.

Chapitre L. Déterminer l'amplitude ortive ou occase d'un astre.

Nous avons déjà vu bien des fois la formule $\sin A = \frac{\sin D}{\cos H}$. Ce chapitre ne contient pas autre chose.

Chapitre LI. Déterminer l'azimut d'un astre.

Soit h la hauteur de cet astre et A l'amplitude; faites:

$$\sin \Delta = \sin h \left(\frac{\sin H}{\cos H} \right) = \sin h \tan H,$$

$$\sin \Delta' = \sin \Delta - \sin A \quad \text{et} \quad \sin \text{azimut} = \frac{\sin \Delta'}{\cos h} = \cos Z:$$

Il faut se souvenir que les Arabes comptent l'azimut du point est.

On voit que si $A > \Delta$, Δ' sera négatif et l'astre sera entre le premier vertical et le méridien nord.

A changera de signe, si la déclinaison est australe:

$\sin \Delta$ est la ligne AC , $\sin A = BC$, $AB = AC - BC$ (fig. 27).

Les chapitres LII et LIII manquent. Les titres sont:

Trouver la hauteur d'un astre par son azimut.

Trouver la hauteur d'une étoile à l'instant où elle n'a pas d'azimut.

Ces deux problèmes sont extrêmement faciles, et les deux chapitres peu à regretter.

Chapitre LIV. Déterminer la hauteur du pôle de l'écliptique.

On sait que cette hauteur est égale à la distance zénitale du nonagésime, et qu'elle a pour complément l'angle de l'écliptique avec l'horizon, qui s'appelle aussi *hauteur du nonagésime*. Nous aurons donc (fig. 25)

$$\begin{aligned} \sin H' &= \sin ZN = \sin ZC \sin C = \frac{\sin ZC \cos \omega}{\cos \delta} \\ &= \frac{\sin \text{dist. zén du point culminant} \cos \text{obliquité}}{\cos \text{déclin. du point culminant}} \end{aligned}$$

On serait bien tenté de croire, d'après cette expression, qu'Ebn Jounis:

connaissait le théorème de Géber ; nous avons vu qu'il connaissait....

$$\sin C = \frac{\sin \gamma E}{\sin \gamma C}, \text{ et } \frac{\sin \gamma E}{\sin \gamma C} = \frac{\cos a}{\cos b}; \text{ voyez page 106.}$$

Soit $L' = CO$; le triangle rectangle MCO donnera

$$\sin CO : \sin T :: \sin TC : \sin COT = \cos H' = \frac{\sin \text{haut. du point culminant}}{\sin L'}.$$

L'auteur distingue assez inutilement les cas où CO surpasse 90° .

Chapitre LV. Déterminer la distance du Soleil au centre de la Terre :

Soit A l'anomalie moyenne, e = excentricité = CT (fig. 44),

$$ST = (\overline{SP}^2 + \overline{TP}^2)^{\frac{1}{2}} = (\overline{SC} + \overline{CP}^2 + \overline{TP}^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + 2e \cos A + e^2 \cos^2 A + e^2 \sin^2 A)^{\frac{1}{2}} \\ = (1 + 2e \cos A + e^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'auteur s'en tient à l'avant-dernière expression, et nous avertit des cas où $\cos A$ est négatif. Ces formules supposent la moyenne distance = 1 ; l'auteur nous prescrit de les multiplier par $1765^s 59' 28'' = 1765,65777$, alors elles donneront la distance en demi-diamètres de la Terre.....

$\frac{1}{1765,65777} = \sin 1' 56'' 51'''$; telle sera la parallaxe du Soleil pour la distance moyenne. Voilà pourquoi Ebn Jounis nous a dit ci-dessus que la parallaxe du Soleil n'est que de deux minutes. Il ne nous donne pas les fondemens de sa nouvelle détermination ; mais le calcul de sa formule $(1 + 2e \cos A + e^2 \cos^2 A + e^2 \sin^2 A)$ en quarts le conduit au nombre $49.361.893.761''$, nombre qu'il exprime en *chiffres indiens*. Ainsi nous acquérons la certitude qu'à l'époque où Ebn Jounis écrivait, l'Arithmétique indienne était introduite chez les Arabes ; ce qui s'accorde avec ce que nous avons rapporté tome I, p. lv, d'après le témoignage d'Averroès, qui nous dit que cette introduction s'est faite vers l'an 1000. Cette notation était sans doute beaucoup plus ancienne dans l'Inde, mais on pourrait penser qu'elle n'y existait pas encore à l'époque où ce pays fut visité par les philosophes grecs, ou conquis par Alexandre.

Ebn Jounis ajoute qu'au lieu de $1765,65777$, on aurait, suivant Ptolémée $1169^s 1' 47''$; Ptolémée nous dit cependant que cette distance est 1210, et même en refaisant son calcul, j'ai trouvé 1217,42.

L'auteur n'a pas vu que sa formule développée devenait $(1 + 2e \cos A + e^2)^{\frac{1}{2}}$ qui était plus facile à calculer, et que pour abréger les opérations, il aurait pu la mettre en une table unique. Il a calculé la table de $e \sin A$, qui peut

aussi servir à trouver $e \cos A$; mais il reste toujours à élever au carré les deux parties de la formule, et à extraire la racine de la somme. Rien n'empêchait de faire de la distance une table dépendante de l'argument A . Sa table est calculée sur la formule $2^{\circ} 6' 10'' \sin A = e 60^{\circ} \sin A$; c'est qu'il suppose de 60° la distance moyenne que nous prenons pour unité.

Le triangle SCT donne encore

$$\sin T : \sin C :: SC : ST = \frac{\sin \text{anomalie moyenne}}{\sin \text{anomalie vraie}};$$

il fait ensuite le sinus l'équation du centre $2^{\circ} 6' 10'' \sin \text{anom. vraie}$, ce qui donne pour *maximum* $2^{\circ} 0' 30''$.

Chapitre LVI. Déterminer la distance de la Lune au centre de la Terre.

Soit

$$\begin{aligned} Q' &= e \sin 2(\odot - \odot), \quad Q'' = e \cos 2(\odot - \odot); \\ e &= 10^{\circ} 19', \quad p = 49^{\circ} 41', \quad R = (p^2 - Q'^2)^{\frac{1}{2}} = (p^2 + Q')^{\frac{1}{2}}(p - Q')^{\frac{1}{2}}, \\ V' &= R + Q'' = \text{distance cherchée.} \end{aligned}$$

Il remarque que Q'' devient négatif avec $\cosinus 2(\odot - \odot)$; ce calcul est pareil à celui qu'il a fait pour le Soleil, à la réserve du signe de Q'' ; on voit qu'il connaissait la formule générale $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$. Les valeurs $10^{\circ} 19'$ et $49^{\circ} 41'$ sont celles de Ptolémée.

V' est la distance du centre de l'épicycle au centre de la Terre. Pour avoir la distance des centres de la Lune et de la Terre, il suit un procédé tout semblable. p' est le rayon de l'épicycle $= 5^{\circ} 1' 14'' 23'''$;

$$\begin{aligned} Q''' &= p' \sin \text{anom. corrigée}, \quad Q'''' = p' \cos \text{anom. corr.}, \\ V'' &= [(V' + Q''')^2 + Q''''^2]^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

Q'''' devient négatif avec le cosinus; V'' sera la distance des centres de la Lune et de la Terre; $V'' \left(\frac{59}{60}\right)$ la distance évaluée en demi-diamètres de la Terre.

$$V'' \left(\frac{59}{60}\right) = V'' \left(\frac{60-1}{60}\right) = V'' - \frac{V''}{60}.$$

Il ajoute que cette distance est celle qui sert à calculer les parallaxes; il suit en cela l'exemple de Ptolémée, qui prend 59 pour distance moyenne.

Nous voyons au reste qu'Ebn Jounis ne fait d'ailleurs aucun change-

ment à la théorie de Ptolémée, d'où il résulte que ses parallaxes et ses diamètres apparens auront l'inexactitude que Copernic a reconnue le premier.

Seconde méthode pour le centre de l'épicycle.

Faites $\sin K' = \frac{Q'}{r}$, et $K = r \cos K'$; alors $V' = K + Q''$; Q'' change de signe avec le cosinus; voyez nos formules, tome II, p. 197.

Dans ce calcul, on voit encore un nombre de 11 chiffres écrit en caractères indiens; et comme probablement on était alors peu familiarisé avec cette Arithmétique, Ebn Jounis prend le soin de nommer successivement tous les chiffres qui composent ce grand nombre, en commençant par les unités.

Troisième méthode, dite de l'ombre sexagésimale (c'est-à-dire de la tangente.)

Faites $Q' = V' + Q''$ et $\frac{Q'}{Q''} = \tan h$. Cherchez l'arc h dans la Table des ombres sexagésimales; alors $V'' = \frac{Q''}{\cos h}$ et $V = V'' \left(\frac{59}{60}\right)$. En effet

$$V'' = [(V' + Q'')^2 + Q''^2]^{\frac{1}{2}} = Q'' \left[\left(\frac{V' + Q''}{Q''} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} = Q'' (1 + \tan^2 h)^{\frac{1}{2}} \\ = Q'' \sec h = \frac{Q''}{\cos h}.$$

Nous ne ferions pas autrement aujourd'hui. Voilà donc un arc subsidiaire trouvé par sa tangente, et un binôme converti en une sécante, et puis en un cosinus. C'est le premier exemple que je trouve d'un artifice de calcul si curieux. Voyez cependant pag. 111, 114 et 126, des formules auxquelles il n'a pu arriver que par ce même moyen.

L'auteur expose ensuite la construction et l'usage des tables qu'il a calculées pour faciliter ces diverses opérations. La première est celle de $10^{\circ} 19' \sin$ argument, qui donne également $10^{\circ} 19' \cos$ argument.

La seconde a pour formule $49^{\circ} 41' \sin$ argument.

Nous avons eu ci-dessus

$$R = (r^2 - Q'^2)^{\frac{1}{2}} = r \left(1 - \frac{Q'^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} = r (1 - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = r \cos \varphi = r \sin (90 - \varphi),$$

$$\frac{Q'}{r} = \sin \varphi; \text{ d'où } Q' = r \sin \varphi = 49^{\circ} 41' \sin \varphi.$$

Cherchez, dans la table, à quel arc φ répond la quantité Q' , qui ne peut jamais passer $10^{\circ} 19'$; prenez-en le complément ($90^{\circ} - \varphi$), lequel vous servira à trouver dans la même table $R = r \sin (90 - \varphi)$.

Cet artifice de calcul est tout au moins aussi adroit que le précédent. Je n'en connais aucun autre exemple ni ancien ni moderne. Nulle part je n'ai vu une table servir à trouver la quantité qui doit ensuite lui servir d'argument.

La troisième table donne les valeurs $p' \sin$ argument et $p' \cos$ argum., c'est-à-dire Q''' et Q'' ; après quoi

$$V'' = [(V' + Q''')^2 + Q''^2]^{\frac{1}{2}} = Q'' \left[\left(\frac{V' + Q'''}{Q''} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} = Q'' (1 + \tan^2 \psi)^{\frac{1}{2}} \\ = Q'' \sec \psi = \frac{Q''}{\cos \psi};$$

c'est ce qu'il a nommé ci-dessus *méthode de l'ombre sexagésimale*.

Les méthodes suivantes ont été ajoutées dans le manuscrit; elles sont d'une autre main, ce qui ne prouve pas qu'elles soient d'un auteur différent.

Quatrième méthode. Prenez l'équation de la Lune, que vous ajouterez ou retrancherez, suivant les cas, pour avoir le lieu vrai *dans l'orbite inclinée*.

Faites $\sin$ équation $= \sin I'$, et $p' \sin G = \sin I''$; G est le *mouvement propre égalé*, c'est-à-dire l'anomalie vraie; puis $V'' = \frac{\sin I'}{\sin I''}$.

Dans la théorie de Ptolémée, l'équation du centre due à l'épicycle est d'autant plus grande, que la distance V'' est plus petite; en sorte que $V'' \sin$ équation vraie $= \sin$ équat. moyenne; d'où

$$V'' = \frac{\sin \text{équation moyenne}}{\sin \text{équation vraie}};$$

telle est, autant que j'ai pu voir, cette méthode, dont je ne garantirais pas la parfaite exactitude.

Cinquième méthode. Soit $A = 2 (\odot - \ominus)$, $e = 10^\circ 19'$, $p = 49^\circ 41'$,
 $\sin E = \frac{e \sin A}{p}$, $A' = A - E$,

$$V' = \frac{e \sin A'}{\sin A} = \text{dist. des centres de l'excentrique et de la Terre},$$

$$E' = \text{équation de la Lune}, \quad Q' = p \cos E', \quad Q'' = p \sin E'',$$

$$R = (p^2 - Q''^2)^{\frac{1}{2}}, \quad V' = R + Q', \quad \text{et} \quad V = \left(\frac{59}{60} \right) V'';$$

ces deux méthodes n'ont rien de bien curieux; voyez nos formules, tome II, p. 197.

Sixième méthode pour les tems des conjonctions et des oppositions.

Divisez le mouvement horaire vrai de la Lune par $32'33''31'''32''$, le quotient sera la distance cherchée; mais on nous prévient qu'elle ne sera pas d'une grande précision.

Septième méthode par les observations.

Soit p la parallaxe de hauteur, $\sin p = \frac{\cos h}{V''}$, et $V'' = \frac{\cos h}{\sin p}$.

Chapitre LVII. Déterminer la hauteur d'un astre qui a une latitude; sans introduire la déclinaison de l'astre dans le calcul.

Soit H' la hauteur du pôle de l'écliptique, L la distance de l'astre au point orient ou couchant de l'écliptique; faites

$$\begin{aligned} \sin I' &= \sin L \cos H', \quad \text{puis} \quad \sin I'' = \cos L \cos H', \\ \sin A &= \frac{\sin L \cos H'}{\cos I''} = \frac{\sin L \cos H'}{(1 - \cos^2 L \cos^2 H')^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin L \cos H'}{(1 - \cos^2 H' + \sin^2 L \cos^2 H')^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sin L \cos H'}{(\sin^2 H' + \sin^2 L \cos^2 H')^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin L \cot H'}{(1 + \sin^2 L \cot^2 H')^{\frac{1}{2}}} = \frac{\tan \phi}{(1 + \tan^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\tan \phi}{\sec \phi} = \tan \phi \cos \phi = \sin \phi \quad (\text{fig. 38}); \end{aligned}$$

A est donc un angle auxiliaire. Le reste du chapitre manque, et l'on ne voit pas ce que l'auteur faisait de A . Mais $\sin L \cot H' = \tan \phi = \tan$ latitude du point de l'horizon qui a même longitude que l'astre; ... $\sin I' = \sin L \cos H'$ serait le sinus de la hauteur du point de l'écliptique qui a même longitude que l'astre. La latitude ϕ du point de l'horizon pourrait s'ajouter à la latitude de l'astre; $(\phi + \lambda)$ serait alors la somme des deux latitudes, en supposant que λ est boréal.

L'angle que $(\phi + \lambda)$ ferait avec l'horizon, se trouverait en faisant $\cos L \cos H' = \cos B$, et l'on aurait $\sin h = \sin(\phi + \lambda) \sin B$; l'angle A de l'auteur serait donc notre ϕ , I'' serait $(90^\circ - B)$.

Les préceptes que l'auteur donne pour former $(\phi \pm \lambda)$, suivant les cas, nous portent à croire que nous avons rétabli ce qui manque à la solution.

Le chapitre LVIII manque. Le titre était: Trouver la différence azimutale entre l'ascendant et un astre qui a une latitude. Ce problème n'a rien de difficile.

Le chapitre LIX manque de même. Il traitait du calcul de la conjonction et de l'opposition, matière qui ne promet rien de neuf.

Chapitre LX. Parallaxe de hauteur du Soleil et de la Lune.

Il est douteux que ce chapitre soit d'Ebn Jounis, car il y est dit que la parallaxe $\odot$ est de $2' 51''$; on n'y voit d'ailleurs que des formules vulgaires qui même y sont défigurées.

L'auteur nous dit qu'il a retranché la parallaxe de la hauteur calculée de la Lune, pour en conclure la hauteur apparente, qu'il a trouvée parfaitement conforme à l'observation qu'il en avait faite avec un instrument bien vérifié. Cette conformité n'était due sûrement qu'à un grand hasard, puisque ses parallaxes et ses demi-diamètres étaient le plus souvent d'une grande inexactitude.

On trouve ensuite une multitude de règles de parallaxes qui n'apprennent rien, qui ne pourraient servir que rarement, et seulement dans la zone torride: nous n'en ferons aucune mention; et enfin cette règle peu rigoureuse, parallaxe égalee = $\frac{\text{parallaxe. vitesse diurne de la Lune}}{12^{\circ} 6'}$.

Les chapitres suivant manquent dans le manuscrit, depuis LXI jusqu'à LXXVI inclusivement; en voici les titres, suivant M. Caussin.

LXI. De l'angle de la longitude et de la latitude.

Ebn Jounis a déjà résolu ces problèmes. Ce chapitre ne pouvait guère être qu'une application des théories précédentes.

LXII. Des angles de l'écliptique avec le méridien.

Ce chapitre nous aurait appris si l'auteur connaissait le Théorème de Géber.

LXIII. De la parallaxe et du lieu apparent du Soleil.

Dans le chapitre LV, l'auteur nous a donné ses parallaxes et ses règles de calcul; ici probablement il nous aurait appris ce qui l'avait porté à donner $1' 57''$ de parallaxe au Soleil.

LXIV. Des diamètres du Soleil, de la Lune et de l'ombre. Nous n'avons aucune idée des valeurs que l'auteur assignait à ces diamètres; nous savons seulement qu'il avait conservé le rapport établi par Ptolémée entre le diamètre de la Lune et celui de l'ombre.

LXV. Déterminer la distance de l'extrémité de l'ombre au centre de la Terre.

La solution de ce problème dépend des quantités qui se trouvaient dans le chapitre précédent; elle dépendait aussi des distances que nous connaissons par le chapitre LV.

LXVI. Trouver le demi-diamètre de l'ombre par les distances de la Lune et de l'extrémité de l'ombre au centre de la Terre.

Suite des chapitres précédents.

LXVII. De la différence en demi-diamètres de la Terre, entre la plus grande et la plus petite distance du Soleil.

Nous pourrions refaire ce chapitre d'après ce que nous avons lu plus haut, mais ce serait un soin bien inutile.

LXVIII. Du diamètre du Soleil dans toutes ses distances.

Pour refaire ce chapitre, il nous manque la connaissance du diamètre à la distance moyenne.

LXIX. Du diamètre de la Lune. } Même remarque.

LXX. Du diamètre de l'ombre. }

LXXI. Du mouvement inégal du Soleil dans une heure égale.

LXXII. Du mouvement inégal de la Lune dans une heure égale.

L'auteur n'avait probablement que les règles de Ptolémée pour ce calcul; la théorie était trop peu avancée, trop conforme à celle des Grecs, pour que ce chapitre nous cause beaucoup de regrets.

LXXIII. Trouver, par les tables, les diamètres du Soleil et de la Lune, et le demi-diamètre de l'ombre.

Ce chapitre aurait pu nous consoler de la perte des tables.

LXXIV. Des éclipses de Lune.

LXXV. Des éclipses de Soleil.

Il y a toute apparence que la doctrine de l'auteur était celle de Ptolémée.

LXXVI. De l'apparition et de la disparition des étoiles.

Ptolémée avait dit là-dessus tout ce qu'on pouvait dire.

Chapitre LXXVII. Du point d'incidence des radiations des astres, selon l'opinion la plus générale.

Un astre peut être dans un des quatre pivots ou points cardinaux; en ce cas, la distance de l'astre à ce pivot est nulle.

Ou bien il peut être entre deux pivots à une certaine distance de l'un et de l'autre, ce qui comprend quatre cas.

1^{er} cas. Lorsque l'astre est entre la dixième maison et l'ascendant.

2^e cas..... entre l'ascendant et la quatrième maison.

3^e cas..... entre la quatrième maison et la septième.

4^e cas..... entre la septième maison et la dixième.

Chapitre LXXVIII. Il se divise en plusieurs sections.

Sect. 1^{re}. On y détermine d'abord les distances respectives en ascension droite.

Sect. 2^e. On calcul l'arc semi-diurne de l'astre.

Sect. 3^e. Les heures qui leur correspondent; ce sont les heures temporaires, qui sont toujours des sixièmes de l'arc semi-diurne.

Sect. 4^e. On détermine les points d'incidence à droite ou à gauche, pour les divers aspects, trine, quadrat ou sextile.

Nous trouverons, dans les astronomes du XV^e siècle, cette doctrine peu importante. Tout ce que nous pourrions regretter, ce seraient quelques règles de calculs qui auraient pu nous donner quelques lumières nouvelles sur la science trigonométrique des Arabes.

Chapitre LXXIX. Trouver les incidences des radiations des planètes, suivant une autre opinion.

Ce chapitre est encore moins intéressant de beaucoup que le précédent.

La fin de ce chapitre manque, ainsi que le commencement du chapitre LXXX, qui a pour titre : des projections.

Ce chapitre est long et obscur. Le problème des projections est l'un des plus compliqués de l'Astrologie ; il ne pourrait nous intéresser que sous le rapport trigonométrique. L'auteur ne démontre rien ; partout il faut deviner les moyens qui ont pu le conduire aux règles souvent très compliquées sur lesquelles il établit ses calculs. Quand ces règles sont fidèlement transcrites, on peut trouver le mot de l'énigme ; mais si ces règles sont incomplètes, si le copiste les a défigurées, on se trouve dans l'embarras que nous avons éprouvé au chapitre XXV d'Albategnius. Nous avons perdu tout espoir de tirer de ce chapitre rien qui puisse avoir la moindre utilité, ou la moindre certitude.

Le chapitre LXXXI et dernier traite des révolutions des années du monde et des naivités, sujet encore plus futile, et qui présente les mêmes difficultés.

Aboul Wéfa al Buzgiani.

Cet auteur, dans le premier livre de son *Almageste*, avait exposé les principes généraux par lesquels commencent tous les traités sans exception. Nous passerons d'autant plus volontiers ce qu'il répète après tant d'autres, qu'il nous fournira des choses intéressantes qu'on n'avait pas encore dites, du moins aussi complètement ni aussi clairement.

Aboul Wéfa demeurait à Bagdad, la ville de la paix ; il nous raconte qu'il avait mesuré les hauteurs solstiales suivantes, en l'an 987 :

80° 10'

33. σ

47.10..... obliquité.. 23° 35'

113.10.... 56° 35' latitude... 33.25.

On voit qu'Aboul Wéfa était contemporain d'Ebn Jounis.

Au chapitre VI, après avoir exposé la théorie des sinus, il définit d'autres lignes trigonométriques qu'il emploiera dans son ouvrage, c'est-à-dire les ombres sexagésimales ou tangentes, pour les faire servir à la solution des différens problèmes de l'Astronomie sphérique.

L'ombre d'un arc est une ligne menée de l'extrémité de cet arc parallèlement au sinus, dans l'intervalle compris entre cette extrémité de l'arc et une ligne menée du centre du cercle par l'autre extrémité du même arc.

Ainsi l'ombre est la moitié de la tangente du double de l'arc, comprise entre les deux lignes (ou sécantes), menées du centre du cercle à l'une et à l'autre extrémités de l'arc double.

On nomme cette ombre, *ombre prime*, *ombre versa*, et l'on appelle *diamètre de l'ombre*, la ligne menée du centre à l'extrémité de l'ombre.

L'ombre droite est l'ombre du complément de l'arc.

Le module est égal au demi-diamètre du cercle.

Il suit de là, 1°. que le rapport des ombres verses au module ou mékias, est égal au rapport des sinus et des cosinus des mêmes arcs.

2°. Que le rapport des ombres droites au module est celui des cosinus aux sinus.

3°. Que par *ombre absolue*, sans autre désignation, il faut entendre l'ombre verse, et que le rapport de cette ombre à son diamètre est celui du sinus au rayon.

4°. Que le rapport de l'ombre droite au module, est égal au rapport du module à l'ombre verse.

C'est ce que l'auteur démontre, comme on le fait encore aujourd'hui, par les triangles semblables :

$$\text{tang} = \frac{\sinus}{\cosinus}, \text{ cotang} = \frac{\cosinus}{\sinus};$$

ces formules sont dans Albategni, mais il n'en a pas senti l'importance.

Nous nous servons, par anticipation, du mot cotangente, pour éviter les périphrases; du reste, nous donnons la traduction littérale des définitions de l'auteur.

Divisez le sinus par le cosinus, vous aurez l'ombre exprimée en partie du rayon = 1.

Pour exemple, il donne pour 30°,

$$\text{tang} = 0^{\circ} 34' 58'' 27''' 38'''' \text{ et } \text{cot} = 1.43^{\circ} 55' 22'' 58'''';$$

Bressius a donné long-tems après

$$0.54.38.27 \dots\dots\dots 1.43.55.21.$$

Pour avoir les diamètres (où les sécantes), nous ajoutons le carré du module au carré de l'ombre; la racine carrée de la somme est le diamètre cherché.

Ainsi pour le diamètre de 30° , on prendra $\sqrt{1+3}=2=\text{coséc de } 30^\circ$,

$$\text{ou bien } \frac{1}{\sin \text{ arc}} = \text{coséc de l'arc} = \frac{\text{cotang}}{\cosin}.$$

Il y a ici une lacune; il est aisé de la remplir par la formule...
 $\text{séc} = \sqrt{1 + \text{tang}^2},$

$$\frac{\text{tang}}{\sin} = \frac{1}{\cosin} = \text{diamètre ombre verse}; \quad \frac{1}{\sin} = \text{diam. ombre droite},$$

$$\text{tang} = (\text{séc}^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{cot} = (\text{coséc}^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{tang} = \frac{\text{séc}}{\text{coséc}}, \quad \text{cot} = \frac{\text{coséc}}{\text{séc}};$$

personne ne croyait ces formules aussi anciennes.

L'auteur ajoute qu'il a calculé les ombres pour les arcs de 15 en 15', et qu'il en a fait une table en quatre colonnes. Dans la première se trouvaient les tangentes, depuis 15' jusqu'à $89^\circ 45'$; dans la seconde, étaient les cotangentes de $89^\circ 45'$ à $0^\circ 15'$.

Dans la troisième colonne étaient les ombres pour un rayon de 60, selon ce qui convient à la plus grande facilité des calculs; et dans le cas où l'ombre surpasse 60, il suppose des unités d'un ordre supérieur. Ce sont les soixantaines d'unité, ou les sexagènes déjà employées par Théon.

Enfin, dans la quatrième colonne, se trouvaient les soixantièmes des différences d'ombre, d'une ligne à la suivante; en supposant, ce qui est suffisamment exact, que de 15 en 15' on peut interpoler par de simples parties proportionnelles.

On voit que l'auteur s'était contenté de donner l'expression des sécantes, et qu'il n'a pas jugé qu'il valût la peine de les calculer.

On n'a point cette Table des tangentes d'Aboul Wéfa; mais, ce qui nous importait, était d'avoir la date certaine de leur introduction dans le calcul trigonométrique.

Livre II, chapitre III. Détermination de l'obliquité première, c'est-à-dire de la déclinaison des points de l'écliptique.

$$\sin D : \sin D' :: \sin \omega \sin \odot : \sin \omega \sin \odot' :: \sin \odot : \sin \odot';$$

l'auteur ajoute

$$\sin \odot : \sin \odot' :: \sin \delta : \sin \delta' :: \sin \mathcal{R} : \sin \mathcal{R}';$$

il suppose apparemment

$$\sin \delta = \sin \omega \sin \odot = \sin \omega \sin \mathcal{R}, \quad \sin \delta' = \sin \omega \sin \odot' = \sin \omega \sin \mathcal{R}';$$

mais on aurait

$$\tan \odot : \tan \odot' :: \cos \omega \tan \odot : \cos \omega \tan \odot' = \tan \mathcal{R} : \tan \mathcal{R}'.$$

Après des applications qu'on trouve partout, il détermine l'entrée du Soleil aux différens signes de l'écliptique, par des déclinaisons observées aux jours voisins, et par des parties proportionnelles. Cette méthode donnerait trop peu de précision dans le calcul du vrai moment du solstice; il y substitue le calcul de deux instans où les déclinaisons auront été égales et par conséquent à même distance du solstice; mais il ne faut pas qu'il y ait un intervalle considérable, de peur que l'inégalité du mouvement n'affecte le résultat. Cette réflexion est juste; mais si l'intervalle est peu considérable, on retombe dans l'inconvénient de la lenteur du mouvement en déclinaison, qui exigerait des observations plus précises qu'on ne savait encore les faire.

Livre I, chapitre IV. De la déclinaison seconde. C'est celle qui se calcule par la formule

$$\tan D = \tan \omega \sin \mathcal{R}, \quad \text{et qui donne} \quad \tan D : \tan D' :: \sin \mathcal{R} : \sin \mathcal{R}',$$

ou celle qui s'obtient en faisant

$$\tan \delta = \tan \omega \sin \odot, \quad \text{qui donne} \quad \tan \delta : \tan \delta' :: \sin \odot : \sin \odot';$$

pour exemple il suppose $\odot = 10^\circ$, et trouve

$$\sin 10^\circ \tan 25^\circ 35' = 4^p 32' 55'' 51''' = \tan 4^\circ 20' 50'' 48'';$$

il fait aussi

$$\sin \odot = \frac{\tan \delta}{\tan \omega}.$$

Voilà enfin les tangentes naturalisées. On a

$$\sin D = \sin \omega \sin \odot, \quad \text{et} \quad \tan \delta = \tan \omega \sin \odot,$$

$$\sin D : \tan \delta :: \sin \omega \sin \odot : \tan \omega \sin \odot :: \sin \omega \sin \odot : \frac{\sin \omega}{\cos \omega} \cdot \sin \odot :: \cos \omega : 1,$$

et

$$\tan \delta = \frac{\sin D}{\cos \omega}, \quad \text{et} \quad \sin D = \tan \delta \cos \omega.$$

Il donne et démontre de même des formules analogues pour l'équateur, et les calcule réellement par sa Table des ombres.

L'auteur nous donne ensuite cette analogie qui suppose les quantités

$$\sin D' = \sin \omega \sin \odot, \quad \text{tang } D'' = \text{tang } \omega \sin \odot \quad \text{et} \quad \sin d' = \sin \omega \cos \odot, \\ \sin D'' : \sin D' :: 1 : \cos d'.$$

Il la démontre synthétiquement, mais sa démonstration m'a paru passablement obscure; voici ce que je trouve en complétant la figure.

Soient (fig. 45) deux demi-cercles PTP', PAP, qui s'entrecoupent en P et P', pôles du grand cercle RTAC.

Soit un arc incliné QRB de 90°, en sorte que QR + RB = 90°; des pôles E et E' de QB, menez les demi-cercles E'QE, E'BE, en sorte que E' et E soient les pôles de QRB,

l'arc AB perpendicul. sur RA sera la décl. prime de RB, AB = D';

QT perpendicul. sur RT sera la décl. prime de RQ, QT = d';

BC perpendicul. sur RB sera la décl. seconde de RB, BC = D'';

RQ perpendicul. sur RQ sera la décl. seconde de RQ, RQ = d'';

QB étant de 90° et perpend. sur E'BE, le point Q sera le pôle de EBE';

BQ étant de 90° et perpend. sur E'QE, le point B sera le pôle de EQE';

$$\begin{aligned} \gamma BA = QBF = QF = 90^\circ - FE = 90^\circ - ABC = 90^\circ - RQ \\ = 90^\circ - d''; \text{ donc } ABC = RQ = d'', \end{aligned}$$

$$BC\gamma = BCT = F'T = 90^\circ - \gamma CQ = 90^\circ - QT = 90^\circ - d' = 90^\circ - F'P',$$

$$TQ\gamma = F'QB = F'B = 90^\circ - BC = 90^\circ - D' = 90^\circ - RQT = 90^\circ - E'QF' \\ = 90^\circ - E'F'; \text{ ainsi } BC = RQT = D' = 90^\circ - TQ\gamma,$$

$$QRT = QR\gamma = FA = 90^\circ - AB = 90^\circ - D' = 90^\circ - PF,$$

$$QC = 90^\circ, T = 90^\circ; \text{ donc } CT = 90^\circ, C \text{ est le pôle de } P'QP;$$

$$BQ = 90^\circ, BQR = 90^\circ, RB = 90^\circ, A = 90^\circ; \text{ donc } AR = 90^\circ = CT;$$

$$\text{donc } RT = AC; R \text{ est le pôle de } P'AP.$$

On voit donc, sans aucun calcul, que $D' = 90^\circ - QR\gamma$, $D' = RQT$; $d' = 90^\circ - BCA$, et $d'' = ABC = 90^\circ - \gamma BA$; chacune des quatre déclinaisons est équivalente à un angle placé de l'autre côté de la figure; chacune de ces déclinaisons est le complément d'un angle de position, placé à 90° de cette déclinaison. $a' = 90^\circ - d''$; $A' = 90^\circ - D'$; $a'' = 90^\circ - d'$; $A'' = 90^\circ - D'$.

Les triangles rectangles QTγ et BAC donnent

$$\cos a' = \sin d'' = \sin \gamma \sin \gamma R = \sin \omega \cos R, \text{ théorème de Géber,}$$

$$\sin BC : \sin BA :: 1 : \sin a''$$

$$\sin D'' : \sin D' :: 1 : \cos d', \text{ théorème d'Aboul Wéfa,}$$

Le triangle BPQ donne $\sin B : \sin QP :: \sin Q : \sin BP$,
 $\sin B : \cos TQ :: \sin TQ \gamma : \cos BA$,
 $\cos d'' : \cos d' :: \cos D'' : \cos D'$,
ou $\frac{\cos d''}{\cos d'} = \frac{\cos D''}{\cos D'}$, ou $\frac{\cos RT \cos TQ}{\cos TQ} = \frac{\cos AB \cos AC}{\cos AB}$,
et $\cos RT = \cos AC$, ou $RT = AC$.

$\tan RT = \tan AC = \sin AB \tan ABC = \sin \gamma \sin \gamma B \cot \gamma BA$
 $= \sin \gamma \sin \gamma B \cos \gamma B \tan \gamma = \sin \omega \tan \omega \sin L \cos L$,
 $\cos RT = \cos AC = \frac{\cos D''}{\cos D'} = \frac{\cos d''}{\cos d'}$ et $\frac{\sin A'}{\sin A''} = \frac{\sin a'}{\sin a''}$,
 $\sin RT = \sin AC = \frac{\sin D' \sin d''}{\cos d'} = \frac{\sin d' \sin D''}{\cos D'}$.

$\sin AB = \sin BC \sin C$, ou $\sin D' = \sin D'' \cos d'$,
 $\sin TQ = \sin RQ \sin R$, ou $\sin d' = \sin d'' \cos D'$,
 $\frac{\sin AB}{\sin TQ} = \frac{\sin D'}{\sin d'} = \frac{\sin D'' \cos d'}{\sin d'' \cos D'}$, ou $\sin D' \cos D' \sin d'' = \sin d' \cos d' \sin D''$,
ou $\frac{\sin d D'}{\sin d d'} = \frac{\sin D''}{\sin d''}$,
 $\sin AB \cdot \sin TQ$, ou $\sin D' \sin d' = \sin D'' \sin d'' \cos d' \cos D'$,
ou $\tan D' \tan d' = \sin D'' \sin d''$.

Aboul Wéfa n'a pas donné ces théorèmes.

Résumé de cette doctrine des déclinaisons.

La construction générale des Grecs, simplifiée par la supposition des angles droits et des côtés complémentaires les uns des autres, avait fait trouver isolément les quatre théorèmes qui composaient alors toute la doctrine des triangles rectangles. Ces théorèmes étaient

$$\sin C = \sin A \sin C'', \quad \tan C = \tan A \sin C', \quad \cos C'' = \cos C \cos C', \\ \tan C' = \cos A \tan C''. \quad (\text{Tome II, p. 51.})$$

Cette construction, ainsi simplifiée, offrait deux triangles, complémentaires l'un de l'autre; les deux premiers théorèmes transportés d'un triangle à l'autre, donnaient les théorèmes 3° et 4°; mais cette construction était insuffisante pour trouver le 5° et le 6°. Ils étaient dans une autre construction de Ptolémée, qui ne les a point aperçus. (Tome II, p. 64.)

La figure d'Aboul Wéfa nous offre trois triangles enchaînés l'un à l'autre, dont deux sont réciproquement complémentaires; le 3° n'a point son correspondant; ma figure 45 offre quatre triangles qui sont complé-

mentaires deux à deux. La figure est ainsi plus complète et plus symétrique; mais les trois triangles d'Aboul Wéfa suffisaient, avec les deux premiers théorèmes grecs, pour découvrir et démontrer les quatre autres théorèmes, et de plus le théorème aujourd'hui parfaitement inutile d'Aboul Wéfa.

Le triangle γTQ donne $\sin QT = \sin \gamma \sin \gamma Q$ 1^{er} théorème, d'où triangle γBC $\cos C = \cos a'' = \sin \gamma \cos \gamma B$; c'est le théorème de Géber.

γTQ donne $\tan QT = \tan \gamma \sin \gamma T$ 2^e théorèm., d'où triangle γBC $\cot C = \cot a'' = \tan \gamma \cos \gamma C$; ce théorème n'a été connu ni des Grecs ni des Arabes.

Le triangle γBC donne $\sin \gamma B = \sin a'' \sin \gamma C$ 1^{er} théorèm., d'où..... γTQ $\cos \gamma Q = \cos QT \cos \gamma T$, théorème connu des Grecs et des Arabes.

γBC $\tan \gamma B = \sin BC \tan a''$... 2^e théorèm.,
 γTQ $\cot \gamma Q = \cos A' \cot QT$,
 ou..... $\tan QT = \cos A' \tan \gamma Q$,
 théorème connu des Grecs et des Arabes.

Triangle ABC $\sin D' = \sin D'' \sin a''$ 1^{er} théorème,
 ou..... $\frac{\sin D'}{\sin D''} = \cos d'$, ou $\frac{\sin AB}{\sin BC} = \cos QT$,
 théorème d'Aboul Wéfa. Cette construction était donc riche et féconde. L'auteur n'en a pas senti tous les avantages. S'il n'a pas énoncé formellement le théorème de Géber, souvent entrevu par lui et par Ebn Jounis, la cause en est peut-être la répugnance des Arabes à chercher une inconnue par son cosinus, par la raison que leur table ne donnait que des sinus; voilà pourquoi ils changeaient $\cos a''$ en $\sin QT$ ou $\sin d'$. S'ils avaient cette aversion pour les cosinus, ils étaient encore moins familiarisés avec les cotangentes; on concevra donc qu'ils n'aient point aperçu $\cot A' = \cos C'' \tan A$, et cependant la table d'Aboul Wéfa lui donnait, sur la même ligne, la tangente et la cotangente.

Dans le chapitre V, il démontre la formule $\sin R \cos D = \cos \omega \sin \odot$, dont on ne voit pas bien l'utilité, quand on a la formule $\tan R = \cos \omega \tan \odot$, qu'on pourrait écrire $\frac{\sin R}{\cos R} = \cos \omega \frac{\sin \odot}{\cos \odot}$, d'où $\frac{\sin R \cos \odot}{\cos R} = \cos \omega \sin \odot$,
 ou $\frac{\sin R \cos R \cos D}{\cos R} = \sin R \cos D = \cos \omega \sin \odot$; il s'en sert pour trouver

$\sin R = \frac{\cos \omega \sin \odot}{\sin D}$, c'est-à-dire l'ascension droite par l'obliquité, la longitude et la déclinaison. Il fait encore

$$\cos R = \frac{\cos \odot}{\cos D}, \quad \sin R = \tan D \cot \omega,$$

$$\sin R = \sin \odot \sin \text{angl. de position} = \sin \odot \cos d'', \quad \text{enfin } \cot R = \frac{\cot \odot}{\cos \omega}.$$

Le chapitre VI est intitulé : Méthode inverse des ascensions droites ; c'est-à-dire calcul de la longitude par l'ascension droite. Voici ses formules :

$$\sin \odot = \frac{\sin R \sin D''}{\sin D'} = \frac{\sin R}{\cos d''} = \frac{\sin D}{\sin \omega}, \quad \text{et enfin } \cot \odot = \cos \omega \cot R.$$

Cette dernière, qu'il calculait par sa Table des tangentes, était bien plus sûre dans la pratique ; elle était aussi beaucoup plus simple, et rendait les premières tout-à-fait inutiles.

Dans le chapitre VII, il calcule l'amplitude ortive par les formules

$$\sin A = \frac{\sin D}{\cos H} = \frac{\sin \omega \sin \odot}{\cos H} = \sin A' \sin \odot,$$

$$\text{en faisant } \sin A' = \sin \text{amplitude solstitiale} = \frac{\sin \omega}{\cos H}.$$

Nous avons trouvé ces mêmes formules dans l'ouvrage d'Ebn Jounis son contemporain ; il est à croire qu'elles étaient plus anciennes, puisque deux astronomes qui habitaient des lieux différents, et n'avaient entre eux aucune correspondance, les donnent tous deux simultanément, sans dire qu'ils en soient les auteurs.

Résumé de la Trigonométrie des Arabes.

Voilà tout ce que nous avons pu recueillir de la Trigonométrie des Arabes. Voyons en quoi elle diffère de celle des Grecs et de celle des modernes.

Albategnius a substitué les sinus aux cordes, et ce changement, qui simplifiait toutes les méthodes des Grecs, a été généralement adopté par les Arabes, qui d'ailleurs ont conservé tous les théorèmes démontrés par Ptolémée.

Albategnius paraît avoir considéré les triangles sphériques dans leur projection sur le plan d'un grand cercle. L'Analemme de Ptolémée, qui lui avait fourni l'idée des sinus et des sinus verses, paraît aussi lui avoir

facilité la solution des problèmes les plus usuels. Ainsi il a donné des règles équivalentes à notre formule fondamentale

$$\cos C' = \cos A'' \sin C \sin C' + \cos C \cos C',$$

ou $\sin h = \cos P \cos H \cos D + \sin H \sin D$. (Voyez p. 21 ci-dessus.)

Il a modifié cette solution pour trouver, soit l'angle horaire, soit la hauteur de l'astre, quand on connaît les heures temporaires écoulées depuis le lever (p. 25).

Pour trouver l'angle horaire, il aurait pu dégager l'inconnue P , et faire

$$\cos P = \frac{\sin h - \sin H \sin D}{\cos H \cos D};$$

il a transporté cette formule à l'azimut (p. 17); mais, pour l'angle horaire, il a fait (p. 20)

$$\sin^2 \frac{1}{2} P = \frac{\cos (H - D) - \sin h}{\cos H \cos D};$$

cette transformation heureuse lui épargnait une multiplication. Ebn Jounis a changé depuis $\cos H \cos D$ en $\frac{1}{2} [\cos (H - D) + \cos (H + D)]$, et c'est le premier exemple qu'on trouve de cette pratique connue sous le nom de *prostaphérèse*. (Voy. p. 112.)

Pour trouver l'ascension droite et la déclinaison par la longitude et la latitude, Albategnius a modifié de nouveau la solution générale du cas où l'on connaît deux côtés et l'angle compris; sa méthode n'emploie que des sinus, et elle est identique à celle que Tycho a simplifiée par l'introduction des tangentes. Il a été moins heureux dans deux problèmes dont la solution dépendait de formules qui lui étaient familières, et qu'il suffisait de retourner; mais nous aimons à croire que ses chapitres XXV et XXVI ne sont pas de lui.

Il a connu les formules des tangentes et des cotangentes; il en annonce des tables, mais il n'a su en tirer qu'un parti très médiocre; il paraît avoir eu quelque idée des sécantes et des cosécantes. (Voyez p. 16.)

Ebn Jounis, venu cent ans plus tard, a fait quelques pas et s'est arrêté avant d'atteindre le but. Il a fait des tables des tangentes; il leur a donné le rayon 60' comme aux sinus; rien ne s'opposait plus à l'introduction de ces lignes dans le calcul des triangles. Ebn Jounis a manqué cette découverte, qui se faisait de son tems à Bagdad.

Aboul Wéfa a donné les formules des tangentes et des cotangentes, et même celles des sécantes et des cosécantes, dont personne encore

n'avait parlé. Il a calculé des tables de tangentes et cotangentes seulement; il s'en est servi pour simplifier le calcul des formules connues, mais il n'a point trouvé les formules qui manquaient à la Trigonométrie des Grecs et des Arabes. Il nous a fait connaître une théorie plus curieuse qu'utile des déclinaisons prime et seconde que son idée des tangentes rendait superflue, et il a laissé passer sans les voir les deux théorèmes des angles de position des points de l'écliptique, dont l'un fut découvert cent ans plus tard par l'arabe Géber.

Aboul Wéfa paraît avoir fait peu d'usage de la projection orthographique; il considère les triangles eux-mêmes.

Ebn Jounis, à l'imitation d'Albategnius, a principalement étudié cette projection. Il en a tiré des formules commodes et curieuses; il a employé un arc de l'horizon qu'il appelle *hissah de l'azimut*, c'est-à-dire différence entre l'azimut actuel de l'astre et l'azimut de son lever. Il en détermine la projection par la formule très simple $\text{tang hissah} = \sin \text{haut. de l'astre} \times \text{tang haut. du pôle}$; il combine cet arc avec l'amplit. ortive, et en tire la solution de divers problèmes que la Trigonométrie moderne ne résout pas toujours avec la même facilité. Il nous fait connaître une solution toute nouvelle du problème qui cherche la hauteur et l'azimut par l'angle horaire, la déclinaison et la hauteur du pôle (p. 117); cette solution est la plus simple qu'on puisse imaginer, quand on ne sait pas employer les tangentes.

Enfin, ce qui nous paraît sur-tout remarquable, c'est l'usage qu'il a fait le premier des tangentes, des sécantes et des sinus, pour déterminer des arcs subsidiaires qui simplifient les formules et dispensent de ces extractions de racines carrées qui rendaient les méthodes si pénibles. Ces artifices de calcul, aujourd'hui si communs, sont restés long-temps inconnus en Europe, et ce n'est que 700 ans plus tard qu'on en trouve quelques exemples dans les ouvrages de Simpson. (*Voy.* p. 151.)

Il résulte de ces comparaisons, que les Arabes connaissaient, comme les Grecs, le théorème des quatre sinus; qu'ils ont trouvé l'une des quatre formules analytiques des triangles obliquangles; qu'ils n'ont pas connu les deux autres; qu'ils y ont suppléé avec beaucoup d'adresse, et que Géber seul a vu, mais pour les triangles rectangles seulement, la troisième de nos formules actuelles. Nous verrons plus loin que Viète le premier a complété la solution analytique du triangle sphérique obliquangle.

C'est à M. Sédillot que nous devons ces notions curieuses que nous avons extraites de sa traduction d'Ebn Jounis, complétée d'après le

manuscrit d'Ebn Schathir, et de celle d'Aboul Wéfa qu'il a faite d'après le manuscrit arabe 1138 de la Bibliothèque du Roi. Il est le premier qui nous ait fait connaître les tables des ombres ou des tangentes, dont les Arabes ont fait un si fréquent usage dans leur Gnomonique; enfin il vient de fixer d'une manière certaine l'auteur et la date de leur introduction dans le calcul trigonométrique. On pensait assez généralement que cette innovation si utile était due à Regiomontanus, mais elle n'a eu lieu, du moins en Europe, qu'après la mort de cet astronome, et près de 600 ans plus tard que chez les Arabes, dont malheureusement les ouvrages n'ont pas été assez répandus. Ils existaient pourtant dans les bibliothèques, mais personne ne s'était donné la peine de les lire, ou d'en donner des extraits. Nous avons cité, p. 5, d'après un passage de Weidler, un Mohamed Ebn Yahya Ebnol Wapha Albuzgiani, comme auteur d'un *Almageste*, ou d'un *Système astronomique*. Ce titre, le nom de l'auteur, l'âge où il a vécu, tout prouve que cet Almageste est le livre où se trouvaient consignées les tables et les formules des tangentes. Weidler, à la page 222, ajoute que ce même Aboul Wéfa Albuzgiani est encore auteur du *Zig Alshamel*; qu'il avait osé examiner et corriger les observations faites du tems d'Almamon, et que ses tables avaient été commentées par Seïd Ali Alkushi et son fils. Il serait bien à désirer qu'on nous fit connaître la composition et les élémens de ces tables. On ne peut douter que l'auteur ne fut un observateur soigneux et un calculateur intelligent. M. Sédillot se propose de donner des notices plus complètes de l'Almageste d'Aboul Wéfa, du manuscrit d'Ebn Schathir, de celui de Leyde et de tous ceux qu'il pourra se procurer. De ce qu'il a traduit jusqu'à ce jour, nous nous sommes contenté de tirer ce qui convenait à notre plan, qui était de faire connaître les méthodes des Arabes, leurs instrumens et les découvertes qu'ils ont faites dans la science du calcul astronomique.

Nous avons ci-dessus exprimé nos regrets de la perte des chapitres où Ebn Jounis avait donné ses parallaxes et peut-être aussi les fondemens sur lesquels il les avait établies. Nous avons (p. 48) témoigné quelque surprise de ce qu'Albategnius donnait à Mercure périégée une parallaxe égale à celle de la Lune apogée; ce qui fait assez entendre que, dans ses idées, toutes les orbites planétaires devaient se suivre de près, sans jamais s'entrecouper, parce que, suivant la doctrine d'Aristote, chaque planète est enchâssée dans une sphère solide qui lui donne le mouvement que nous observons. Il y a grande apparence que ces idées péripatéti-

ciennes avaient été adoptées sans beaucoup d'examen par les Arabes. Cependant, en nous avertissant que les distances de la Terre aux centres des épicycles de Vénus et de Mercure étaient arbitraires, Ptolémée y avait mis cette restriction, que ces distances devaient pourtant être assez grandes pour que les parallaxes de ces deux planètes fussent insensibles. Mais il ne paraît pas que Ptolémée ait attaché lui-même à cette condition assez d'importance pour la soumettre à l'épreuve du calcul, et pour s'assurer si elle était compatible avec la solidité des sphères d'Aristote. Le fait est qu'en aucun endroit il n'a fait mention de la parallaxe de ces deux planètes, quoique, dans son système, cette parallaxe dût surpasser celle de 5' qu'il donnait au Soleil, dont il tient compte dans ses calculs, et dont il a donné des tables.

Albategnius, grand admirateur de Ptolémée, n'a pu, sans de fortes raisons, s'écarter d'une manière si étrange des idées de son modèle, en ce qui concerne la parallaxe de Mercure; il m'a semblé que son motif avait dû être le principe de la solidité des sphères, combinée avec les elongations de Mercure et de Vénus en digression; j'ai pensé que la même raison pouvait avoir contraint Ebn Jounis à augmenter la distance du Soleil dans la proportion de 3 à 2, ce qui réduisait la parallaxe du Soleil à deux minutes environ; car d'ailleurs il serait assez difficile d'imaginer par quel moyen, par quelles observations, Ebn Jounis aurait pu prouver directement que la parallaxe du Soleil doit être diminuée d'une minute. Pour éclaircir ce soupçon, le moyen est facile.

Ptolémée fait la parallaxe de la Lune apogée de 53'34". Pour laisser un petit intervalle entre la sphère de la Lune et celle de Mercure, réduisons cette parallaxe à 53' pour Mercure. La distance périgée sera $P = \frac{1}{\sin 53'} = \text{coséc } 53' = 64,858$, en prenant pour unité le demi-diamètre du globe terrestre.

Soit r le rayon de l'épicycle de Mercure; $(P + r)$ sera la dist. moyenne, et $(P + 2r)$ la distance apogée.

Soit E l'elongation la plus grande ou la digression à la distance moyenne; nous aurons $(P + r) \sin E = r$, $P \sin E = r - r \sin E$,

$$\begin{aligned} r &= \frac{P \sin E}{1 - \sin E} = \frac{P}{\text{coséc } E - 1} = \frac{P}{\sec (90^\circ - E) - 1} \\ &= \frac{P}{1 + \tan (90^\circ - E) \tan (45^\circ - \frac{1}{2} E) - 1} = P \tan E \tan (45^\circ + \frac{1}{2} E). \end{aligned}$$

Pour Mercure, $E = 22^\circ 46'$, $45^\circ + \frac{1}{2} E = 56^\circ 25'$; donc $r = 40,948$,

$P + r = 105,804$, $P + 2r = 146,752$. Afin de laisser un peu d'intervalle entre les orbites, supposons que la distance périégée de Vénus soit $P' = 148^\circ$. $E = 46^\circ 20'$, $45^\circ + \frac{1}{2}E = 68^\circ 10'$, $r' = 387$, $P' + r' = 555$, $P' + 2r' = 922$.

Ptolémée fait la distance du Soleil 1210; il resterait donc, entre les sphères de Vénus et du Soleil, un intervalle de 288 qui aura paru nécessaire pour que Vénus en conjonction supérieure, ne fût pas brûlée par les rayons du Soleil. D'ailleurs nous avons négligé, dans notre calcul, les excentricités de Mercure, de Vénus et du Soleil, qui diminueraient considérablement cet excédant 288. Voilà donc la supposition d'Albategni expliquée, et nous voyons ce qui l'a forcé à donner à Mercure une parallaxe si énorme, et dont cependant on ne voit pas que les Arabes aient tenu compte dans la rectification des élémens de cette planète.

Une parallaxe de $53'$ pour Mercure est réellement inadmissible; Ebn Jounis l'aura senti sans doute; pour la diminuer, il paraît qu'il s'est vu obligé d'éloigner le Soleil; il a réduit à moins de $2'$ la parallaxe du Soleil; il m'a paru curieux de calculer celle qu'il donnait à Mercure. C'est ainsi que j'ai formé la table suivante d'après la formule

$$r = P \tan E \tan (45^\circ + \frac{1}{2} E).$$

Table des parallaxes et des distances des planètes inférieures.										
Parall. de ♀ périg.	P	r	P + r	P + 2r	P'	r'	P' + r'	P' + 2r'	Parall. de ♀ périg.	Parall. de ♀ apog.
53'	64.858	40.948	105.804	146.752	148	387.0	535	922	23' 14"	3' 44"
50	69	43.557	112.557	156.114	158	413.2	571.2	984.2	21.45	3.30
45	77	48.607	125.607	174.214	176	460.2	636.2	1096.4	19.32	3.9
40	87	54.92	141.92	196.84	199	520.4	719.4	1239.7	17.16	2.46
30	115	72.6	187.6	260.2	261	682.5	743.5	1626.0	13.10	2.7
20	173	109.2	282.2	391.4	393	1027.7	1420.7	2448.4	8.45	1.24

La première colonne offre les suppositions que j'ai faites successivement pour la parallaxe de Mercure périégée. La seconde, sous le titre P, donne la distance périégée qui résulte de la parallaxe de la première colonne; la troisième, sous le titre r, montre le rayon de l'épicycle pour la même supposition; la quatrième, (P + r), est la distance moyenne ou la distance du centre de l'épicycle; (P + 2r) est la distance apogée de Mer-

cure; P' , qui diffère peu de $(P + 2r)$, est la distance périégée de Vénus dans chaque hypothèse; $(P' + r')$, la distance du centre de l'épicycle; $P' + 2r'$, la distance apogée de Vénus.

On voit déjà qu'en réduisant à $40'$ la parallaxe périégée de Mercure, la distance apogée de Vénus 1239.7, surpasse la distance du Soleil, que Ptolémée fait de 1210; ainsi, dans l'hypothèse de Ptolémée, Mercure périégée devait avoir un peu plus de $40'$ de parallaxe.

Supposons qu'Ebn Jounis, effrayé de cette parallaxe, ait voulu la réduire à $50'$; il a dû trouver pour la distance de Vénus périégée 1626 demi-diamètres de la Terre; il aura en conséquence donné au Soleil une distance de..... 1766

ce qui laisse entre les sphères de Vénus et du Soleil un intervalle de 140 qui ne paraîtra pas trop considérable, d'après les raisons rapportées ci-dessus.

Réduisons la parallaxe à $29'$; P sera 118.45, $r=74.843$, $P+r=193.293$, $P+2r=268.136$, $P'=269$, $r'=705.41$, $P'+r'=972.41$, $P'+2r'=1675.82$
distance du ☉..... 1766

il ne restera plus qu'un intervalle de..... 90.18

Si nous réduisons la parallaxe à $28'$, nous aurons $P=122.78$, $r=77.507$, $P+r=200.287$, $P+2r=277.794$, $P'=279$, $r'=729.56$, $P'+r'=1008.56$, $P'+2r'=1838.1$, qui surpassera de 72 la distance qu'il assigne au Soleil. Il est donc très probable qu'il a donné de 29 à $50'$ de parallaxe à Mercure périégée, et certainement plus que $28'$.

Les deux dernières colonnes de la table donnent les parallaxes de Vénus périégée et apogée; dans l'hypothèse de $50'$ pour Mercure périégée, ces parallaxes sont $15' 10''$ et $2' 7''$, d'où résulterait environ $8'$ de parallaxe pour Vénus en digression.

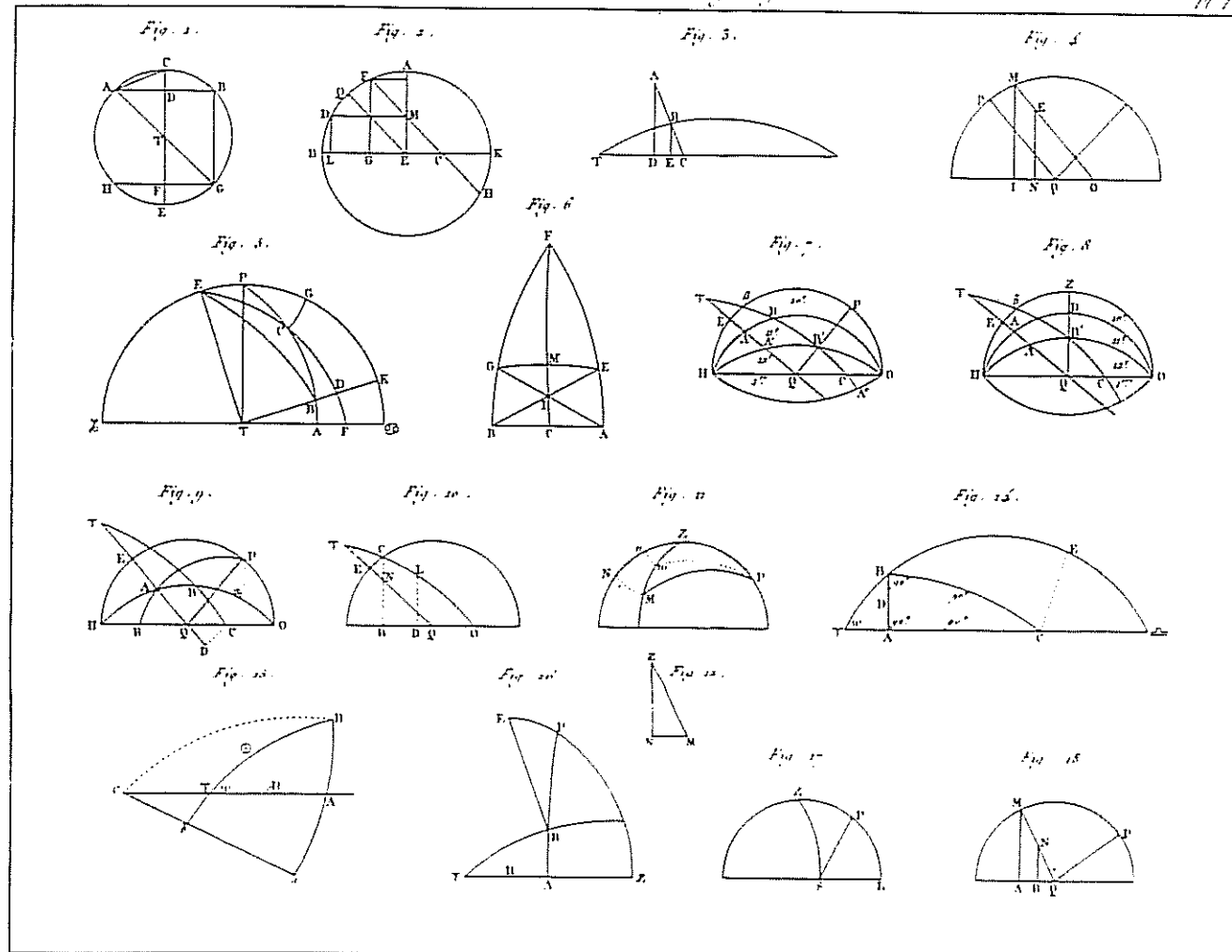
La parallaxe de Mercure apogée diffère peu de celle de Vénus périégée; ainsi, dans ce système, les parallaxes extrêmes de Mercure seraient $50'$ et $13'$, d'où résultent environ $22'$ de parallaxe pour Mercure en digression.

En négligeant la parallaxe des planètes inférieures, comme il paraît que l'ont fait les Arabes, il s'ensuivrait qu'ils ont cru Ptolémée, lorsqu'il a dit que les parallaxes étaient insensibles, sans s'inquiéter de l'obstacle de la solidité des sphères.

Albategnius et Ebn Jounis auront rappelé cette solidité; le premier

l'aura admise avec toutes ses conséquences, et il a donné 53' de parallaxe à Mercure; Ebn Jounis aura cherché à diminuer cette parallaxe autant que possible; et en la réduisant à 30', il aura senti la nécessité de réduire à moins de 2' la parallaxe du Soleil. Il n'a rien ajouté sur les parallaxes de Mercure et de Vénus. Il n'en faut pas conclure qu'il ait regardé comme insensibles ou peu importantes des parallaxes de 8' et de 22'; mais il ne s'est point occupé de la rectification des Tables des planètes.

Halley a reproché à Albategnius son trop de respect et de confiance pour Ptolémée. Il y a quelque apparence que ce reproche doit s'étendre à toute l'école arabe. Ce respect superstitieux pour tout ce qui venait des anciens, a produit le malheureux système de la trépidation. On pourrait conclure de tout ce que nous avons rapporté, que les Arabes, observateurs assidus et scrupuleux, calculateurs habiles et intelligens, ont été, en fait de théorie, trop timides et trop confians. Alpétrage et Gêber seuls ont montré plus d'indépendance; mais on ne voit de ces deux auteurs ni observations ni calculs. Ebn Jounis a rassemblé des éclipses de Lune, pour en déduire les erreurs des Tables de Ptolémée. Il a assigné trois causes à ces erreurs; mais il n'a dit nulle part comment il a combiné ces trois causes, pour en conclure les corrections qu'il a faites aux tables; on voit que ces corrections sont peu de chose. Admettons qu'il soit parvenu à diminuer les erreurs, ce qui n'est pas bien prouvé; il n'en résulterait pas encore bien clairement que ses tables nous donnent les mouvemens de la Lune, tels qu'ils étaient de son tems, ni même tels qu'ils ont dû être quelques siècles auparavant. Il paraît qu'il a regardé comme exactes les époques de Ptolémée; il aurait fallu tout recommencer. L'a-t-il fait et comment l'a-t-il fait? C'est ce que nous ignorons. Il nous parle d'une correction de 7 à 8' à faire aux commencemens des éclipses qu'on aperçoit toujours trop tard. Cette quantité n'est-elle pas un peu arbitraire? La fin observée à la vue simple n'aurait-elle pas aussi besoin d'une correction un peu plus petite et qui serait additive? A-t-il fait cette correction aux éclipses qu'il rapporte? Les donne-t-il telles qu'elles ont été réellement observées? Voilà malheureusement bien des causes d'incertitude.



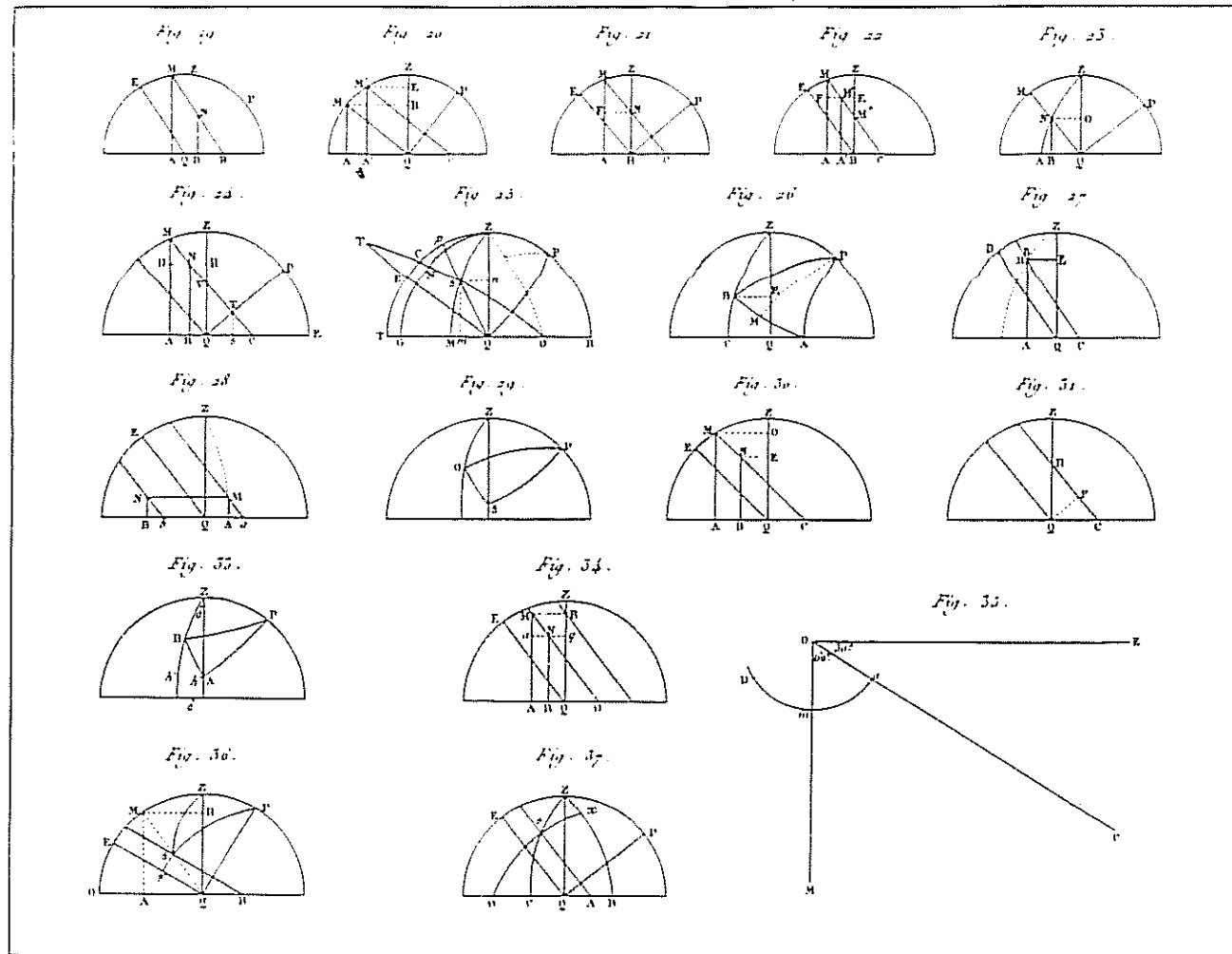


Fig. 38.

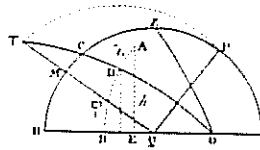


Fig. 39.

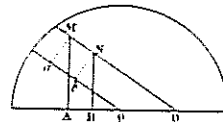


Fig. 40.

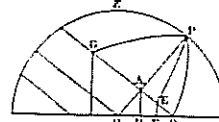


Fig. 41.

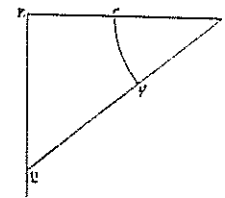


Fig. 42.

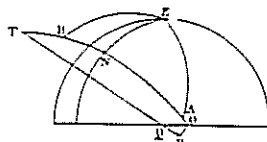


Fig. 43.

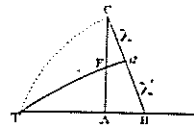


Fig. 44.

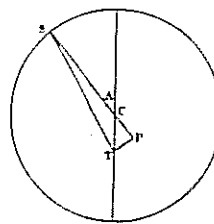


Fig. 45.

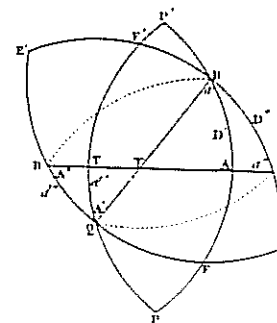


Fig. 46.

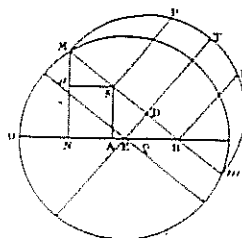


Fig. 47.

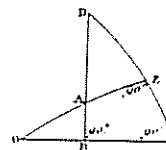


Fig. 48.

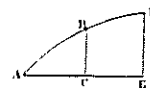


Fig. 49.

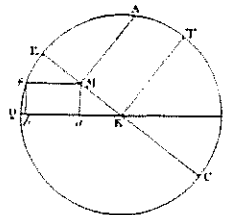


Fig. 50.

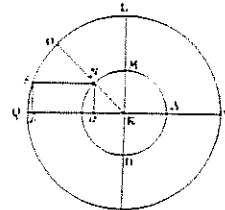


Fig. 51.

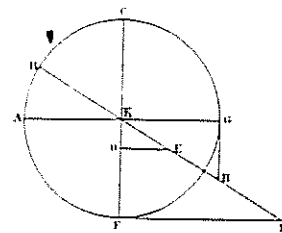
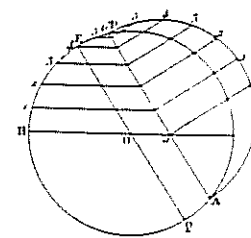


Fig. 52.



La grande Table Hakémile, par L. ANI. SÉDILLOT.

Des voix autorisées ont, à plusieurs reprises¹, manifesté le regret que les travaux entrepris depuis près d'un demi-siècle pour faire connaître les astronomes et les mathématiciens arabes, aient reçu si peu d'encouragements, et que des intérêts d'un ordre tout personnel aient transformé en une polémique interminable des questions destinées à ouvrir un champ nouveau aux recherches des savants.

Nous-même, en 1853², exprimions une pensée semblable en rappelant combien il importerait de compiler, d'une manière méthodique, les débris épars de la science arabe, qui restent enfouis dans les principales bibliothèques de l'Europe.

Des faits nombreux et nouveaux, mis par nous en lumière, constituent déjà un ensemble de matériaux assez considérable pour que M. Hankel ait jugé le moment venu d'écrire une *Histoire des Mathématiques chez les Arabes*, ainsi que le constatent les auteurs du *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, publié par l'École des Hautes Études³, déplorant la mort prématurée de ce jeune savant; c'est également la nomenclature que nous avons donnée des astronomes arabes et de leurs écrits⁴ qui a fourni à M. Hœfer la matière d'un des chapitres les plus

Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1868, t. LXVII, p. 1110; 1871, t. LXXIII, p. 808; — *Bulletin de l'Athénée Oriental*, 1868, t. II, p. 110.

¹ Voy. notice *Oloug Beg*, t. II, p. 290.

² Cahier de mai 1874, p. 254.

³ Voy. *Oloug Beg*, t. I, Introd., p. VIII-CL.

CONGRÈS DE 1873. — II.

intéressants de son *Histoire de l'astronomie*¹. Le petit traité des *Connues géométriques* de Hassan ben Haithem a pu suggérer à M. Chasles l'idée de rétablir les trois livres des *porismes* d'Euclide, travail qui fait, à si juste titre, l'admiration du monde savant². La description raisonnée que nous avons faite des *Astrolabes arabes* de la Bibliothèque Nationale a servi de base aux belles publications de Williams H. Morley. Enfin, c'est sur nos indications que feu Woepcke a composé son mémoire sur les *Méthodes arabes*, communiqué à l'Académie des Sciences en 1854³, et c'est à nous qu'on doit une appréciation plus exacte des origines de l'*algèbre* que nous tenons des Arabes ; et, s'il faut à jamais déplorer la perte du *manuscrit grec* de l'ouvrage de Diophante, que le cardinal Du Perron déclarait avoir vu entre les mains du mathématicien G. Gosselin⁴, on peut espérer que nous retrouverons un jour la *version arabe*, car nous savons de source certaine que Diophante a été traduit et commenté par Aboul-Wefâ, dont le nom a si souvent retenti dans l'enceinte de l'Académie.

Ce que les Khalifes de Bagdad ont fait pour les livres grecs qu'ils nous ont conservés par des traductions d'une exactitude scrupuleuse, tels que les *Coniques* d'Apollonius, l'*Almageste* de Ptolémée, etc., les modernes n'ont pas su le réaliser pour les manuscrits arabes que la politique et l'esprit religieux ont détruits avec tout ce qui portait un cachet musulman ; aussi nos bibliothèques publiques ne nous offrent-elles aujourd'hui qu'un bien petit nombre d'ouvrages

¹ Paris, 1873, p. 252-273.

² Paris, 1860, in-8.

³ *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXIX, p. 603.

⁴ Sédillot, *Les Professeurs de mathématiques et de physique générale au Collège de France*, 1869, p. 294.

complets ou des fragments de livres dont les originaux existent sans doute encore chez quelques *oulémas* de Constantinople ou de Fez; mais les recherches entreprises pour se les procurer sont difficiles et dispendieuses, et jusqu'à présent les résultats ont été nuls.

Au premier rang des ouvrages qu'il s'agirait d'acquérir se trouve la grande *Table Hakémite* qui, selon D'Herbelot, forme quatre tomes¹ et comprend quatre-vingt-un chapitres, dont nous possédons vingt-deux dans le manuscrit de Leyde et dix-huit dans le manuscrit arabe de la Bibliothèque nationale, n° 1112, ancien fonds; trois chapitres seulement, traduits une première fois vers 1760 par Des Hautesrayes, professeur au Collège de France, ont été publiés en 1804 par le citoyen Caussin², et ont servi à Laplace et à Delambre pour leurs travaux. Les astronomes de tous les pays réclament depuis longtemps une édition complète de ce qui nous est parvenu de cet illustre auteur.

En ce moment même où l'on nous apprend qu'Arzachel (Alzarkîal) admettait, avant Keppler, l'hypothèse du mouvement elliptique des planètes³, dont Copernic, si nous en croyons M. Curtze⁴, établissait la possibilité en 1853, ne trouvons-nous pas, chez les Arabes, des observations du passage de Vénus sur le Soleil (Alkendi, en 839), de Mercure (Averrhoës, *Ebn Roschd*, vers 1180), et de traînées d'étoiles filantes en octobre 902 et 1202⁵? Les Arabes attachaient un très-grand prix aux observations astronomiques, et

¹ *Bibliothèque orientale*, p. 934.

² Paris, Imprimerie de la République, an XII, in-4.

³ *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 1864, t. LIX, p. 765.

⁴ *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, publié par l'École des Hautes Études, cité plus haut; janvier 1874, p. 27.

⁵ *Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1849, t. XXIX, p. 637, 638 et 746.

Casiri cite des recueils dus à Hassan ben Haithem qui ne nous sont pas parvenus. Les observations rapportées par Ebn Jounis dans les trois chapitres publiés comprennent plus d'un siècle, mais il faut bien reconnaître que la traduction fournie par Caussin est loin d'être irréprochable : confusion de noms, erreurs de chiffres, absence de toute critique. Les chapitres que Caussin ne nous a pas donnés contiennent l'introduction des *Tangentes* et des *Sécantes* dans les calculs trigonométriques, le gnomon à trou substitué au *cercle indien*, décrit par Proclus, dont le style, comme le remarque Ebn Jounis lui-même, ne marquait que l'ombre du bord extérieur du disque solaire, la diminution progressive de l'obliquité de l'écliptique, une détermination exacte de la précession des équinoxes, les variations de la latitude de la lune, etc., etc.

Au ix^e siècle de notre ère, les auteurs de la *Table vérifiée*, corrigeaient, par des observations nouvelles, les erreurs des *Tables de Ptolémée*; au x^e siècle, c'est la *Table vérifiée* qui devient l'objet d'une nouvelle révision, et tandis qu'Aboul-Wéfa, à Bagdad, après une longue suite d'observations, modifie profondément les théories grecques, Ebn Jounis, au Caire, signale les rectifications que les travaux de ses devanciers lui font juger nécessaire, et la grande *Table Hakémite* nous offre le tableau des progrès de la science astronomique à cette époque éloignée.

Malheureusement l'imprimerie n'existait pas alors, et nous n'avons que des fragments de cet important ouvrage; mais nous voyons dans ces fragments, qu'Ebn Jounis observa, le 30 octobre 1007 (le vendredi 23 *safar*, 398 de l'hégire, le 14 *tischrin* II, 1319 d'Alexandre, le 26 *aban-mah* 376 d'Iezdedjerd, 10 *hatour*, 724 de Dioclétien le Romain, roi d'Égypte), une conjonction de Saturne et de Jupiter, dans le

pieu de la Vierge¹, d'après la *Table vérifiée*, et que cette conjonction n'eut lieu, ainsi qu'il le constate lui-même, que le 7 novembre.

Les Tables d'Ebn Jounis ont joui, en Orient, d'une grande renommée ; elles ont servi de base à celles de Nassir-eddin Thousi, directeur de l'observatoire de Méraguh, en 1260; en Chine, à celles de Gemal-eddin et de Co-chéou-king, vers 1280, et à celles du prince tartare Oloug Beg, 1436, dernier représentant de l'Ecole arabe.

M. EMMANUEL LATOUCHE fait une communication sur les idées que professent les musulmans au sujet de *la Vierge Marie*, مریم *Meryém*, d'après les auteurs orientaux et communique, à cette occasion, plusieurs peintures orientales représentant la mère du Christ.

M. le Dr LESBINI (Grèce) fait un rapport au nom de la Commission chargée d'examiner les comptes du trésorier. Les conclusions de ce rapport sont approuvées et l'assemblée vote des remerciements à M. Duchâteau pour les soins qu'il a mis à la tenue des livres du Congrès, ainsi qu'aux membres de la Commission administrative et de la Commission financière qui ont géré, pendant la période d'organisation, les fonds de l'association internationale.

La séance est levée à onze heures et demie.

¹ Manuscrit Arabe, ancien fonds, n° 112, f° 12.



Die von Ibn Jūnis in Kairo beobachteten Mond- und Sonnenfinsternisse.

Nach Theodor von Oppolzer's „Kanon der Finsternisse“

berechnet von

Dr. Armin Wittstein.

Mondfinsternisse.

Julianisches Datum.	Wochentag.	Mittlere Zeit Greenwich des				Größe in Zellen.	In Kairo		
		Anfangs der Finsternis.	Endes der Finsternis.	Anfangs der Totallit.	Endes der Totallit.		Anfang.	Größe Phase.	Ende.
979 Mai 14.	Mittwoch	h m 2 50	h m 5 48	h m —	h m —	8.8	unsichtbar	unsichtbar	sichtbar
979 November 6.	Donnerstag	7 59	11 7	—	—	10.3	sichtbar	sichtbar	„
980 Mai 2.	Montag	10 44	14 24	11 45	13 23	19.2	„	„	„
981 April 21.	Freitag	13 33	15 7	—	—	2.1	„	„	„
981 Oktober 15.	Sonntag	13 48	16 0	—	—	4.3	„	„	„
983 März 1.	Donnerstag	9 55	13 19	11 14	12 0	13.1	„	„	„
986 Dezember 16.	Samstag	14 35	17 47	—	—	11.1	„	„	unsichtbar
990 April 12.	Sonabend	8 13	11 43	—	—	9.1	„	„	sichtbar
1001 September 5.	Freitag	2 23	5 33	—	—	10.6	unsichtbar	unsichtbar	„
1002 März 1.	Sonntag	9 28	13 6	10 32	12 2	17.2	sichtbar	sichtbar	„

In dieser Tabelle sind, ebenso wie in der folgenden, die Zeitangaben im Sinne der astronomischen Zeitungsweise, nach welcher der Tag mit dem bürgerlichen Mittag beginnt, zu verstehen; so ist z. B. die siebente Horizontalreihe zu lesen: 986 Dezember 19. Montag, 2 Uhr 35 Minuten morgens Beginn der Mondfinsternis. 5 Uhr 47 Minuten morgens Ende der Finsternis.

Die Wochentage wurden durch Rechnung und, in beiden Tabellen, vollkommen mit Ibn Jūnis übereinstimmend erhalten.

Sonnenfinsternisse.

Julianisches Datum.	Wochentag.	Mittlere Zeit Greenwich			GröÖte Phase in Zollen.	In Kairo			Art der Finsternis.
		des Anfanges.	der grÖÖsten Phase.	des Endes.		Anfang.	GrÖÖte Phase.	Ende.	
977 Dezember 12.	Donnerstag	h m s 18 9 56	h m s 19 16 23	h m s 20 22 50	7.4 südl.	sichtbar	sichtbar	sichtbar	total, zentral
978 Juni 8.	Sonnabend	0 2 4	1 28 54	2 55 44	6.3 südl.	"	"	"	ringförmig, zentral
979 Mai 28.	Mittwoch	4 4 40	4 54 22	5 44 4	5.1 nördl.	"	unsichtbar	unsichtbar	ringförmig, zentral
985 Juli 20.	Montag	2 33 52	3 16 33	4 3 14	3.5 südl.	"	sichtbar	sichtbar	total, zentral
993 August 19.	Sonntag	17 33 41	18 44 16	19 54 51	11.2 nördl.	"	"	"	total, zentral
1004 Januar 24.	Montag	1 39 48	2 47 31	3 55 14	11.9 nördl.	"	"	unsichtbar	ringförmig-total, zentral

Addiert man zu allen Zeitangaben 2 Stunden 5 Minuten und zu denen der Sonnenfinsternisse überdies noch 9 Sekunden, so erhält man die mittleren Ortszeiten Kairo. Die Beobachtungszeiten des Ibn Jūnis hat schon vor beinahe 30 Jahren Simon Newcomb in seinen *Researches on the Motion of the Moon* (Washington, 1876) mitgeteilt¹⁾. Von vier Beobachtungen

¹⁾ Des Weiteren, so hinsichtlich der Verwertung der Kairensen Beobachtungen zur Verbesserung der mittleren Mondlänge usw., muß ich auf meine so gut wie unbekannt gebliebene Schrift, behandelnd Ein Beispiel zum Theodor von Oppolzer'schen „Kanon der Finsternisse“, Leipzig (K.F. Köhler's Antiquarium), 1888, verweisen.

— 977 Dezember 12, 980 Mai 2, 981 April 21, 986 Dezember 18 — sagt Ibn Jūnis, sie seien zu Karāfa (القراة) angestellt worden. Damit meinte er wohl die Moschee dieses Ortes der südlichen Nachbarschaft Kairos, eines Ortes, der einst Begräbnisstätte für die Bewohner von Fostāt (فسطاط) war. Die Moschee hieß مسجد أبي جعفر احمد بن نصر المغربي und ist nicht zu wechseln mit der „Moschee des Observatoriums“, die ebenfalls in Karāfa, aber über 100 Jahre nach dem Tode des Ibn Jūnis, von الانضل, dem Sohn des بدر

الجمالى, erbaut wurde und letzterem u. a. zur Aufstellung seiner Armillarsphäre diente.

Sonst hat Ibn Jūnis möglicherweise auf einer Anhöhe (الشرف, الجرف) beobachtet, welche noch zur Zeit des Maḥrīzi (im 15. Jahrhundert) den Namen „Observatorium“ trug, von dem es aber ungewiß ist, ob er schon zu Lebzeiten des Ibn Jūnis im Gebrauche war, oder ob er erst unter Al-Aḡḡal entstand, der auf derselben Höhe eine Moschee errichtet und später zu astronomischen Zwecken benützt hatte. Es scheint sich hier um einen Ausläufer des Moḡaḡḡam-Gebirges in der Nähe der Citadelle, vielleicht um diese selbst, zu handeln.

Von den von Ibn Jūnis beobachteten Momenten geben, nach Newcomb (bei dem übrigens die Mondfinsternis vom 5. September 1001 fehlt), 7 eine tadellose Zeitbestimmung; 7 sind von zweiter, 15 7 von dritter Güte.

Das 20. Kapitel der großen Håkemitischen Tafeln des Ibn Jūnis: „Über die Berechnung des Azimuts aus der Höhe und der Höhe aus dem Azimut“.

Zu Herrn Geheimrat Hermann Wagners 80. Geburtstag übersetzt und erläutert von C. Schøy, Essen.

Ibn Jūnis, einer der größten arabischen Astronomen, lebte am Hofe des Chalifen El-Hākem zu Kairo gegen das Jahr 1000 n. Chr. (+ 1009). Sein groß angelegtes astronomisches Tafelwerk benannte er nach seinem Gönner, dem Chalifen El-Hākem. Leider ist es nicht vollständig erhalten; die ersten 22. Kapitel finden sich zu Leiden, (Legatum Warnerianum) andere Teile in Oxford. Das ganze Werk umfaßt 81 Kapitel. Seit längerer Zeit mit dem Studium einzelner Kapitel beschäftigt, fand ich das oben genannte 20. recht lehrreich und habe es deshalb vollständig übersetzt; das anscheinend oft ganz originelle Werk ist bis auf drei Kapitel (III bis V übersetzt von Caussin de Perceval und abgedruckt in t. VII der Notices et Extraits d. Mss. d. l. Bibl. Nat. p. 16—240) dem des Arabischen nicht Kundigen noch immer unzugänglich. Ich hoffe im Laufe der Zeit eine Anzahl Kapitel verdeutschen und erläutern zu können, wie vorstehendes, das erste Ergebnis meiner arabischen Studien. Es folgt nun die möglichst wörtliche Übersetzung und anschließend ein kurzer Kommentar.

„Das Azimut ist der Bogen des Horizontes zwischen zwei Punkten; der eine von ihnen ist der Schnittpunkt des Horizontes mit dem (Himmels)äquator, der andere der Schnittpunkt von Horizont und Höhenkreis. Und es wird in vier Teile eingeteilt; in einen ost-nördlichen und einen ost-südlichen, sowie einen west-südlichen und west-nördlichen Teil. Und was den östlichen anbetrifft, so wird er gefunden, wenn die Sonne den Meridian noch nicht passiert hat, der westliche aber wird gefunden, wenn die Sonne schon durch den Mittagskreis hindurchgegangen ist, und meistens erreicht die Sonne (im Azimut) 90° , und jenes ist der Fall, wenn sie im Meridian steht, ausgenommen an den Orten, welche keine geographische Breite haben, denn zu Anfang des Widders oder der Wage insbesondere gibt es dort (am Äquator) für keinen von diesen beiden irgendein Azimut, weil der Himmelsäquator an jenen Orten der Höhenkreis ist, dem kein Azimut zukommt; denn er geht durch den Osten, das Zenit und den Westen. Und du findest in betreff der Ermittlung des Azimuts viele beweiskräftige (schlagende) Methoden, unter ihnen solche, welche auf seine Berechnung gehen und andere, die ihr ferne stehen, und ich habe die nächstliegenden gewählt und die schwierigeren übergangen, und dies ist der Zeitpunkt für den Beginn, doch bei Gott ist der Erfolg.

Berechnung des Azimuts: Wenn die Sonne im Anfang des Widders oder im Anfang der Wage steht und du willst jenes, so ziehe den Sinus der Höhe zur Beobachtungszeit vom Sinus der Meridianhöhe der Sonne ab, und was übrig bleibt, das multipliziere mit dem Sinus der Ortsbreite und teile das Produkt durch den Kosinus der Breite des Ortes, und was herauskommt, das ziehe vom Kosinus der Meridianhöhe ab und multipliziere den Rest mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und was sich ergibt, das bestimmt sein (des Azimuts) Bogenmaß, und sein Bogen ist das Azimut der Sonne für jene Höhe, wörtlich: der Betrag der Sonne, ich meine, ihren augenblicklichen Ort, wo die Höhe gemessen wurde. a.

Beispiel: Die Sonne stehe im Anfang des Widders, und ihre Höhe sei 20° , die geographische Breite sei 30° , die Höhe (des Teils) der Sonne im Meridian ist dann 60° , ihr Sinus $51^\circ 57' 41'' 29'''$, der Kosinus der Meridianhöhe 30° , der Sinus der Höhe zur Beobachtungszeit $20^\circ 31' 16'' 20'''$, der Kosinus der Ergänzung, ich meine den 70° Sinus, $56^\circ 22' 53'' 36'''$. Ziehst du den Sinus der Höhe der Beobachtungszeit vom Sinus der Meridianhöhe ab, so bleibt $31^\circ 26' 25'' 9'''$. Multiplizierst du dies mit dem Sinus der Ortsbreite, und die ist 30° , so kommt $943\ 12\ 34\ 30$ heraus, und wenn du dies Produkt durch den Kosinus der Breite

dividiert, so resultiert der Quotient $18^{\circ} 9' 6'' 29'''$, (näherungsweise) und ziehst du ihn vom Kosinus der Meridianhöhe ab, so bleibt als Rest $11^{\circ} 50' 52'' 31'''$. Du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, so ist das Resultat $12^{\circ} 36' 29'' 52'''$, sein Bogen, das ist der Bogen des Azimuts für die Höhe 20° zu Anfang des Widders (oder der Wage), ist dann $12^{\circ} 7' 50''$.

Zweite Art der Berechnung des Azimuts: In diesem Falle multiplizierst du den Sinus der Höhe (zur Beobachtungszeit) mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite. Das Resultat ist der Ichtilaf des Horizontes, und du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und was herauskommt, das bestimmt sein Bogenmaß (des Azimuts), und es wird sein Bogen das Azimut jener Höhe sein, und bei Gott ist der Erfolg. b.

Dritte Art der Berechnung des Azimuts. Du multiplizierst den Sinus des Dä'ir vom halben Tagesbogen, falls die Zeit vor Mittag war, mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und was herauskommt, das bestimmt das Bogenmaß des Azimuts, und sein Bogen ist das östliche Azimut, und falls die Zeit nach Mittag war, so multipliziere den Sinus des Restes vom Tagesbogen mit dem Sinus der Ortsbreite und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und das Resultat bestimmt das Bogenmaß, und das, was sein Bogen ist, das ist das westliche Azimut, und bei Gott ist der Erfolg. c.

Beispiel: (Und) die Sonne stehe im Anfang des Widders, und die Höhe sei 30° , der Dä'ir vom halben Tagesbogen sei $35^{\circ} 15' 51'' 58'''$, sein Sinus ist $34^{\circ} 38' 27'' 40'''$. Du multiplizierst ihn mit dem Sinus der Ortsbreite und erhältst 1030 137. Du teilst dieses durch den Kosinus der Höhe, und es geht aus der Teilung 20 hervor, und das ist der Sinus des Azimuts; sein Bogen ist das Azimut selbst bei der Höhe 30° im Beginn des Widders oder im Beginn der Wage, nämlich $19^{\circ} 28' 16'' 27'''$, und bei Gott ist der Erfolg.

Vierte Methode zur Berechnung des Azimuts: Du multiplizierst den Sinus des Restes vom halben Tagesbogen, wenn die Zeit vor Mittag lag, und wenn es nach Mittag war, so multipliziere den Sinus des Dä'ir nach der Hälfte des Tages mit dem Sinus totus, und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und das Ergebnis bestimmt seinen Bogen, und was sein Bogen ist, ist das Ergänzungszimut, subtrahiere es von 90° , und was bleibt, das ist das Azimut jener Höhe. d.

Beispiel: Die Höhe sei 30° , der Dä'ir vom Tagesbogen zu Beginn des Widders oder der Wage $35^{\circ} 15' 51'' 58'''$. Du ziehst dies von 90° ab, und es bleibt $54^{\circ} 44' 8'' 2'''$. Der Sinus hiervon ist ungefähr $48^{\circ} 58' 32'' 59'''$. Du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, der ist $51^{\circ} 57' 41'' 29'''$, und es kommt $58^{\circ} 9' 22'' 59'''$ heraus, der zugehörige Bogen ist $70^{\circ} 31' 43'' 5'''$, und dies ist die Abweichung von der Mittagslinie; du ziehst sie von 90° ab, und es bleibt $19^{\circ} 28' 16'' 55'''$, und dies ist das Azimut der Sonne, und beide Beispiele stimmen bis zu den Sekunden überein und sind erst in den Terzen verschieden, und dies ist eine starke Annäherung.

Berechnung des Azimuts aus den Tafeln des Sechzigerschattens: Und wenn du die Kenntnis des Azimuts zu Beginn des Widders oder der Wage aus den Schattentafeln wünschst, so nimm, was dem Beginn des Widders in jener Breite gegenübersteht, von der du das Azimut aus den Schattentafeln berechnen willst, und wenn eine Interpolationsrechnung nötig ist, so führe sie aus, und was sich schließlich ergibt, das multipliziere mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch das, was als Schatten(zahl) der Höhe (in der Tafel) gegenübersteht, und das Resultat bestimmt den Bogen des Azimuts, und sein Bogen (selbst) ist das Azimut jener Höhe. e.

Beispiel: Die Sonne im Beginn des Widders, und die Höhe 40° und die Breite 30° ; der Schatten am Sechziger-Gnomon zu Beginn des Widders $34^{\circ} 38' 28''$, und das ist es, was in der Schattentafel der Zahl 60° gegenübersteht, als Sechzigerschatten, und es steht dort ferner der 40 der Höhe in der Tafel des Sechzigerschattens $71^{\circ} 30' 20''$ gegenüber. Du multiplizierst den Schatten zu Beginn des Widders mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Schatten der Höhe; der Quotient ist $29^{\circ} 4' 2''$, der zugehörige Bogen, und das ist das Azimut der Sonne

für die Höhe 40° im Anfang des Widders oder der Wage, ist $28^\circ 58' 36''$, und dies ist der Fall beim Sechzigerschatten. Falls du die Berechnung mittels des Zwölfer-Gnomons willst, so multipliziere den Schatten zu Beginn des Widders, und er ist $6^\circ 55' 44''$, mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Schatten (der Höhe 40°) und der ist $14^\circ 18' 4''$, und das Resultat der Teilung ist $29^\circ 4' 4''$, der zugehörige Bogen ist $28^\circ 58' 38''$.

Andere Methode zur Berechnung des Azimuts aus dem Schatten. Du multiplizierst den Schatten der Höhe zu Beginn des Widders in der Breite, in welcher du das Azimut berechnen willst, mit dem Ergänzungsschatten (Schatten des Ergänzungswinkels) der Höhe zur Beobachtungszeit und teilst das Produkt durch 60, wenn du es beim Sechzigerschatten gemacht hast, und der Quotient bestimmt seinen Bogen, (des Azimuts) und der Bogen ist das Azimut jener Höhe, und wenn du es mit dem Zwölfer-Schatten ausführst, so teilst du das Produkt durch 144 Minuten, und was herauskommt, bestimmt seinen Bogen, und sein Bogen ist das Azimut jener Höhe. In diesem Fall also multiplizierst du den einen der beiden Schatten mit dem andern. Dann teilst du das Produkt durch zwölf, falls deine Rechnung (Ausführung) mit dem Zwölfer-Schatten geschieht, und was herauskommt, das multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt ebenso durch zwölf, und was sich ergibt, das bestimmt seinen Bogen, und was sein Bogen ist, das ist das Azimut jener Höhe. 1.

Beispiel mit dem Sechzigerschatten: Die Höhe mit ihrem (früheren) Betrag von 40° , ihre Ergänzung = 50° , ihr Schatten = $50^\circ 20' 45''$, des Sechziger-Gnomons. Du multiplizierst ihn mit dem Schatten zu Beginn des Widders, und der ist $34^\circ 38' 28''$ und teilst das Produkt durch den Sinus totus, das Ergebnis ist annähernd $29^\circ 4' 2''$, der entsprechende Bogen ist das Azimut der Höhe von 40° im Beginn des Widders oder der Wage an einem Orte, dessen Breite 30 ist, nämlich $28^\circ 58' 36''$, wie es sich zuerst ergab, und bei Gott ist der Erfolg.

Beispiel mit dem Schatten des Zwölfergnomons: Der Schatten zu Beginn des Widders in einer Breite von 30° ist $6^\circ 55' 42''$, der Schatten der Ergänzungshöhe, ich meine den Schatten bei 50° , ist $10^\circ 4' 9''$. Du multiplizierst den einen von diesen beiden Schatten mit dem andern und erhältst als Produkt $69\ 45\ 45\ 9\ 58$, du teilst dies durch 224, so folgt $29^\circ 4' 4''$. Der zugehörige Bogen ist das Azimut der Höhe 40° zu Beginn des Widders und der Wage, nämlich $28^\circ 58' 38''$, wie es zuerst beim Zwölfergnomon herausgekommen war, und falls du $69\ 45\ 45\ 9\ 58$ durch 12 geteilt hättest: $5\ 48\ 48\ 45\ 47$. Du multiplizierst dies mit dem Sinus totus und teilst das Produkt wiederum durch 12, es kommt $29^\circ 4' 4''$ heraus; der zugehörige Bogen ist $28^\circ 58' 38''$, und bei Gott ist der Erfolg.

Kenntnis des Azimuts der Sonne, falls sie in den nördlichen oder südlichen Sternbildern steht. Wenn du das Azimut in diesem Falle kennen willst, so ziehe den Sinus der Höhe zur Beobachtungszeit vom Sinus der Mittagshöhe ab, multipliziere mit dem Sinus der geographischen Breite und teile das Ergebnis durch den Kosinus der Ortsbreite. Was herauskommt, das merke und beachte wohl, und falls die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht und das Gemerkte größer ist als der Kosinus der Mittagshöhe, so wisse, daß das Azimut nördlich ist. Alsdann ziehst du den Kosinus der Mittagshöhe von dem im Gedächtnis Bewahrten ab, die Differenz multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe. Das Ergebnis bestimmt den Bogen des Azimuts, und was an Bogen herauskommt, das ist das Azimut im Norden, und wenn die Höhe östlich war, so ist das Azimut zwischen dem Osten und Norden, und wenn die Höhe westlich war, so liegt das Azimut zwischen Westen und Norden, und wenn das im Gedächtnis Behaltene dem Kosinus der Mittagshöhe gleich ist, so hat die Sonne in diesem Augenblick überhaupt kein Azimut, und dies ist der Fall in jenem größten Kreis, welcher durch den Osten, das Zenit und den Westen hindurchgeht, und wenn das im Gedächtnis Bewahrte kleiner ist als der Kosinus der Meridianhöhe, so wisse, daß das Azimut südlich ist. Alsdann ziehst du das, was bei der Teilung herauskommt, vom Kosinus der Meridianhöhe ab, und was verbleibt, das multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und es bestimmt das Ergebnis das Bogenmaß des Azimuts, und was sein Bogen ist, das

ist das Azimut der Sonne im Süden, und falls die Zeit vor Mittag lag, so war es zwischen Osten und Süden, und wenn sie nach Mittag lag, so war es zwischen Westen und Süden, und wenn die Sonne in den südlichen Sternbildern steht, so ziehst du das im Gedächtnis Bewahrte vom Kosinus der Mittagshöhe ab, multiplizierst die Differenz mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und das Ergebnis bestimmt das Bogenmaß des Azimuts, und der Bogen selbst ist das Azimut der Sonne im Süden, doch bei Gott ist der Erfolg. g.

Beispiel: Die Sonne stehe im Anfang des Stiers, die Breite sei 30° und die Höhe 20° , die Deklination der Sonne sei $11^\circ 32' 22''$. Du hast noch die Höhe zu Beginn des Widlers im Gedächtnis, und sie ist 60° , und so folgt für die Mittagshöhe (der Sonne) $71^\circ 32' 22''$, der Sinus hiervon ist $56^\circ 54' 45''$, der Kosinus $18^\circ 59' 56''$, der Sinus der Höhe zur Zeit der Beobachtung $20^\circ 31' 56''$, der Kosinus $56^\circ 22' 54''$, du ziehst den Sinus der Höhe der Beobachtungszeit vom Sinus der Mittagshöhe ab, und es bleibt $36^\circ 22' 49''$. Du multiplizierst diesen Betrag mit dem Sinus der Ortsbreite und dividierst durch den Kosinus der Breite, so kommt $21^\circ 4' 38''$ heraus, und weil dies größer ist, als der Kosinus der Meridianhöhe, so weißt du, daß das Azimut nördlich ist; nunmehr ziehst du den Kosinus der Meridianhöhe von diesem Betrag ab, und es bleibt $2^\circ 4' 41''$. Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe zur Beobachtungszeit, und es kommt heraus $2^\circ 8' 28''$. Sein Bogen ist $2^\circ 2' 41''$ und dies ist das Azimut der Sonne im Norden. Darauf mache die Höhe 30° , der Ort der Sonne sei derselbe, desgleichen die Breite. Der Sinus der Höhe ist 30° , der Kosinus $51^\circ 57' 41''$. Du ziehst den Sinus der Höhe zur Beobachtungszeit vom Sinus der Meridianhöhe ab, und es bleibt $26^\circ 54' 45''$. Dies multiplizierst du mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst es durch deren Kosinus, und es kommt $15^\circ 32' 56''$ heraus, und da es kleiner ist als der Kosinus der Mittagshöhe, so weißt du, daß das Azimut südlich ist. Nunmehr ziehe den Betrag vom Kosinus der Meridianhöhe ab, so bleibt $3^\circ 26' 40''$. Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und so kommt $3^\circ 59' 48''$ heraus, und der zugehörige Bogen ist $3^\circ 49' 4''$, als Azimut der Sonne für die Höhe 20° . So ist also für die Sonne im Beginn des Stiers für eine Sonnenhöhe von 20° das Azimut nördlich und $= 2^\circ 2' 41''$, und für eine Höhe von 30° ist es im Beginn des Stiers südlich und $= 3^\circ 49' 4''$, und beide Beispiele sind für die Breite von 30° berechnet worden, und bei Gott ist der Erfolg.

Zweite Art und Weise der Berechnung des Azimuts: Du berechnest aus der Höhe zur Beobachtungszeit den Ichtiläuf al-ufq (Unterschied auf dem Horizont), und was das Unterschiedene anbetrifft (nämlich den Ichtiläuf), so multiplizierst du den Sinus der Höhe mit dem Sinus der Breite des Ortes und teilst das Produkt durch den Kosinus der Breite, und zum Unterschied von der eben besprochenen Methode berechnest du (jetzt) den Sinus der Aufgangsrichtung (der Sonne) und das ist, daß du den Sinus der Sonnendeklination mit dem Sinus totus multiplizierst und das Produkt durch den Kosinus der Breite dividierst. Darauf beachtest du, daß die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht und der Ichtiläuf al-ufq kleiner ist als der Sinus der Aufgangsrichtung, dann weißt du, daß die Sonne im Norden steht. Du ziehst alsdann den Ichtiläuf al-ufq vom Sinus der Aufgangsrichtung ab, die Differenz multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, der Quotient bestimmt das Bogenmaß (des Azimuts) und der Bogen selbst ist das Azimut der Sonne im Norden, und war die Höhe östlich, so war demnach das Azimut zwischen Osten und Norden, und wenn sie westlich war, so lag es zwischen Westen und Norden, und falls der Ichtiläuf al-ufq dem Sinus der Aufgangsrichtung gleichkommt, so hat die Sonne in diesem Augenblick überhaupt kein Azimut, und wenn endlich der Ichtiläuf al-ufq größer ist als der Sinus der Aufgangsrichtung, so weißt du, daß die Sonne im Süden steht, du subtrahierst alsdann den Sinus der Aufgangsrichtung vom Ichtiläuf al-ufq und die Differenz multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, was sich ergibt, das bestimmt das Bogenmaß, und der Bogen selbst ist das Azimut der Sonne im Süden, und wenn die Höhe eine östliche war, so lag das Azimut zwischen Osten und Süden, war sie westlich, so lag es zwischen Westen und Süden, und dies fand für die Sonne in den nörd-

lichen Sternbildern statt, und wenn sie in den südlichen steht, so zähle den Ichtilāf al-ufq und den Sinus der Aufgangsrichtung zusammen, und was sich ergibt, das multipliziere mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und was herauskommt, bestimmt den Azimutbogen, und der Bogen selbst ist das Azimut der Sonne im Süden. h.

Beispiel: In der Breite 30 sei die Sonne im 15.° des Stiers, und die Höhe fürs erste 30°; die Deklination der Sonne ist alsdann 16° 26', der Sinus hiervon 16° 57' 26". Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Breite, und es ergibt sich 19° 36' 0", und das ist der Sinus der Aufgangsrichtung der Sonne im Norden, und du multiplizierst den Sinus der Höhe, und der ist 30°, mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite, und es kommt 16° 19' 14" heraus, und dies ist der Ichtilāf al-ufq und weil er kleiner ist als der Sinus der Aufgangsrichtung im Norden, so weißt du, daß das Azimut nördlich ist. Nunmehr ziehst du den Ichtilāf al-ufq vom Sinus der Aufgangsrichtung ab, und es bleibt 2° 16' 46". Diesen Wert multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und der ist 51° 57' 41", und so erhältst du 2° 26' 45", der entsprechende Bogen, und er ist das Azimut im Norden, ist 2° 30' 51", und bei Gott ist der Erfolg. — Darauf möge die Höhe 34° 26' 29" sein, der Sinus hiervon ist 33° 56' 58". Du multiplizierst ihn mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite, und es ergibt sich 10° 36' 0", als Ichtilāf al-ufq und weil er dem Sinus der Aufgangsrichtung gleich ist, so weißt du, daß die Sonne gar kein Azimut hat, falls ihre Höhe 34° 26' 29" war. — Nunmehr sei die Höhe der Sonne 50°, der Sinus derselben 45° 57' 45". Dies multiplizierst du mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst durch deren Kosinus, dann kommt 26° 22' 12" heraus, und dies ist der Ichtilāf al-ufq und weil er größer ist als der Sinus der Aufgangsrichtung, und der ist 19° 36' 0", so weißt du, daß das Azimut südlich ist. Du ziehst alsdann den Sinus der Aufgangsrichtung vom Ichtilāf al-ufq ab: es bleibt 6° 56' 12". Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, so erhältst du 10° 46' 30", der zugehörige Bogen, und der ist 10° 21' 42", ist das Azimut der Sonne im Süden für die Höhe von 50° in der Breite 30°. — Als dann möge die Sonne im 15. Grade des Skorpions stehen, und ihre Höhe sei 30°. Der Sinus der südlichen Aufgangsrichtung ist 19° 36' 0", der Ichtilāf al-ufq der Höhe 30° in der Breite 30° ist 16° 19' 14" und weil der Grad der Sonne ein südlicher ist, zählst du beide Beträge zusammen, und sie ergeben 35° 55' 14". Du multiplizierst dies mit dem Sinus totus und dividierst es durch den Kosinus der Höhe und es kommt 42° 36' 56" heraus. Der Bogen ist 45° 16' 48". Dies in der Breite 30°, die Sonne im 15. Grad des Skorpions, die Höhe 30°, dann also das Azimut im Süden 45° 16' 48", und bei Gott ist der Erfolg.

Dritte Methode über die Berechnung des Azimuts. Du multiplizierst den Sinus des Restes vom halben Tagesbogen, falls die Zeit vor Mittag lag, und wenn sie nach Mittag lag, den Sinus des Dā'ir des Nachmittags mit dem Kosinus der Sonnendeklination und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und was sich ergibt, das bestimmt den Bogen des Azimuts, und der gefundene Bogen ist das vollständige Azimut, du ziehst es von 90° ab, so ist der Rest das Azimut selbst, und wisse, daß das vollständige Azimut die (Winkel-) Entfernung von der Mittagslinie ist, und wenn der Rest vom halben Tagesbogen größer als 90° ist, resp. der Dā'ir vom halben Tag, so ziehst du ihn von 180° ab, und machst alsdann, was bleibt, zu Bogen. i.

Beispiel. Die Sonne stehe im Anfang des Steinbocks, Höhe und Breite seien 30°. Der Dā'ir des halben Tagesbogens 46° 16' 15", der Rest vom halben Tagesbogen 28° 16' 26". Du multiplizierst seinen Sinus mit dem Kosinus der Sonnendeklination, und es ergibt sich 45° 14' 44' 30' 46' 14". Du teilst mit dem Kosinus der Höhe und erhältst 29° 55' 16", der zugehörige Bogen ist 29° 54' 46", und dies ist das ganze Azimut, ich meine seine (Winkel-) Entfernung von der Mittagslinie, du ziehst es von 90° ab, und es bleibt 60° 5' 14" als Azimut der Sonne für die Höhe und Breite 30° zu Beginn des Steinbocks, doch bei Gott ist der Erfolg.

Berechnung des Azimuts nach einem anderen Beispiel: Der Ichtülf al-ufq der Höhe 30 sei $17^{\circ} 19' 14''$ und der Sinus der Aufgangsrichtung zu Beginn des Steinbocks $27^{\circ} 43' 7''$, du zählst beide zusammen, und ihre Summe ist $45^{\circ} 2' 21''$. Du multiplizierst dies mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und es kommt $52^{\circ} 9' 26''$ heraus, sein Bogen, und das ist das Azimut der Sonne zu Beginn des Steinbocks, ist $60^{\circ} 5' 14''$.

Anderes Beispiel. In diesem ist, unter der Bedingung, daß der Rest des halben Tagesbogens größer als 90° ist, die Breite 30° , der Ort der Sonne die Mitte des Stiers, die Höhe östlich und 5° ; der halbe Tagesbogen $99^{\circ} 48' 38''$, der Dä'ir vom halben Tagesbogen $6^{\circ} 4' 55''$, der Rest vom halben Tagesbogen $93^{\circ} 44' 33''$, und weil er größer ist als 90° , so ziehst du ihn von 180° ab, und es bleibt $86^{\circ} 15' 6''$, der Sinus hiervon ist $59^{\circ} 52' 38''$, du multiplizierst ihn mit dem Kosinus der Sonnen-deklination und die ist $17^{\circ} 32' 56''$, und teilst das Produkt durch den Kosinus der Sonnenhöhe und der ist $59^{\circ} 46' 18''$, und es kommt heraus $57^{\circ} 38' 44''$, der zugehörige Bogen ist $73^{\circ} 53' 44''$, und dies ist das vollständige Azimut, ich meine seine Entfernung (in Bogen) von der Mittagslinie; du ziehst es von 90° ab, und es bleibt das nördliche Azimut von $16^{\circ} 6' 16''$.

Betrachte folgendes Beispiel: Berechne jetzt genau das gleiche Azimut wie im vorhergehenden Beispiel der schon erwähnten Beispiele. Der Ichtülf al-ufq für eine Höhe von 5° ist nach der für einen Ichtülf der Breite 30° berechneten Tabelle¹⁾ $4^{\circ} 1' 9''$ und der Sinus der Aufgangsrichtung im 15° des Stiers, nach der Tafel²⁾ $19^{\circ} 36' 0''$. Du ziehst den Ichtülf des Horizontes vom Sinus der Aufgangsrichtung ab, weil die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht, und der Ichtülf des Horizontes der kleinere ist, und es bleibt $15^{\circ} 34' 51''$. Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, es kommt heraus $16^{\circ} 38' 39''$; sein Bogen ist das Azimut der Sonne, nämlich $16^{\circ} 6' 19''$, und so hättest du das Azimut gefunden, falls der Dä'ir des halben Tages $193^{\circ} 33' 11''$ und die Höhe 5° wäre, denn wenn du von diesem Dä'ir den halben Tagesbogen abziehst, bleibt $93^{\circ} 44' 33''$, und das ist der Dä'ir des Nachmittags und du machst es mit ihm wie du es zuerst gemacht hast, und es kommt das Azimut $16^{\circ} 6' 16''$ heraus wie es zuerst herauskam, und das erste Azimut ist ostnördlich, und das zweite westnördlich und die erste Höhe östlich und die zweite westlich, und bei Gott ist der Erfolg.

Vierte Methode über die Berechnung des Azimuts. Du multiplizierst den Sinus der Sonnendeklination mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Sinus der Ortsbreite, und was herauskommt, das merke und behalte es gut im Gedächtnisse, und wenn die Sonne in den nördlichen Sternbildern war und der Sinus der Höhe, den du willst, kleiner ist als das im Gedächtnis Behaltene, so weißt du, daß das Azimut der Sonne im Norden ist, nun ziehst du den Sinus der Höhe von dem Gemarkten ab; die Differenz multipliziere mit dem Sinus der Ortsbreite und teile das Produkt durch den Kosinus der Breite und was herauskommt, das multipliziere mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und das Ergebnis bestimmt seinen Bogen (des Azimuts) und der Bogen selbst, das ist das Azimut für jene Höhe im Norden, und wenn der Sinus der Höhe dem im Gedächtnis Behaltenen gerade gleich ist, so hat die Sonne kein Azimut, und es ist dies die Höhe ohne Azimut, und wenn der Sinus der Höhe größer ist als das im Gedächtnis Bewahrte, so weißt du, daß das Azimut südlich ist; du ziehst alsdann das Gemarkte vom Höhengsinus ab, das Verbleibende multiplizierst du mit dem Sinus der Breite und teilst es durch den Kosinus der Breite, das Ergebnis multiplizierst du mit dem Sinus totus und dividierst es durch den Kosinus der Höhe, was herauskommt, das bestimmt seinen Bogen, und der Bogen ist das Azimut der Sonne im Süden. Falls die Sonne in den südlichen Sternbildern stand, so mußttest du den Sinus der Höhe zu dem im Gedächtnis Gemarkten hinzuzählen, das Ergebnis mit dem Sinus der Breite multiplizieren und durch den Kosinus der Breite

¹⁾ Im 18. Kapitel, fol. 307 des Leidener Mssr. stehen zwei Tafeln für den Ichtülf al-ufq, die eine für die Breite Kairo ($\varphi = 30^{\circ}$), die andere für die Breite von Bagdad ($\varphi = 33^{\circ} 25'$).

²⁾ Im gleichen Kapitel finden sich für die eben angeführten Breiten die Tafeln für den Sinus der Morgenweite.

dividieren, weiterhin mit dem Sinus totus multiplizieren und endlich mit dem Kosinus der Höhe dividieren. Das Resultat bestimmt den Bogen des Azimuts, und der Bogen selbst ist das Azimut der Sonne im Süden, und wisse, daß das im Gedächtnis Behaltene der Sinus der Höhe ohne Azimut ist, allerdings nur in den nördlichen Sternbildern, und was die südlichen anbetrifft, so gibt es in ihnen fürwahr keine Höhe ohne Azimut; jedoch nur für jegliche nördliche Breite, in betreff der südlichen Breiten jedoch ist es gerade umgekehrt: da gibt es nur Höhen ohne Azimut in den südlichen Sternbildern, nicht aber für die nördlichen. k.

Beispiel: Dafür sei der Abstand der Sonne vom Frühlingspunkt 45° , ihre Stellung (in der Ekliptik) fürs erste die Mitte des Stiers, ihre Höhe 30° und die Deklination $16^\circ 26'$; der Sinus hiervon ist $16^\circ 58' 26'' 36'''$. Du multiplizierst dies mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Sinus der Ortsbreite, so kommt $33^\circ 57' 54''$ heraus, es ist der im Gedächtnis zu behaltende Betrag, und das ist hier der Sinus der Höhe ohne Azimut, weil die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht, und da die Höhe 30° ist, so ist der Sinus auch 30° , und das ist weniger als der Sinus der Höhe ohne Azimut. Du weißt, daß das Azimut der Sonne im Norden liegt, nunmehr ziehst du den Sinus der Höhe vom Sinus der Höhe ohne Azimut ab, und es bleibt $3^\circ 57' 54''$ übrig. Diesen Rest multiplizierst du mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Ergebnis durch den Kosinus der Höhe (du teilst ferner durch den Kosinus der Ortsbreite), es geht aus der Teilung $2^\circ 36' 55''$ hervor, der zugehörige Bogen ist $2^\circ 30' 51''$ als Azimut der Sonne im Norden, also Resultat für dieses Beispiel: $2^\circ 30' 51''$. Ferner sei die Sonne in derselben Stelle der Ekliptik, ihre Höhe aber $34^\circ 26' 30''$, der Höhengsinus $33^\circ 57' 54''$, und weil er gleich dem im Gedächtnis Behaltene, d. h. dem Sinus der Höhe ohne Azimut, ist, so weißt du, daß die Sonne in diesem Augenblick kein Azimut hat. Wiederum sei die Sonne im gleichen Punkt der Ekliptik, aber ihre Höhe 40° , der Sinus hiervon $38^\circ 34' 2''$, und weil dieser Betrag größer ist als das im Gedächtnis Behaltene, ich meine als der Sinus der Höhe ohne Azimut, so weißt du, daß das Azimut südlich ist. Darauf ziehst du von ihm den angemerkten Betrag, und der ist $33^\circ 57' 54''$ ab, und es bleibt $4^\circ 36' 8''$. Dies multiplizierst du mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst durch deren Kosinus, so folgt $4^\circ 40'$, und diesen Betrag multiplizierst du wiederum mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, welcher $45^\circ 57' 45''$ ist, so kommt $3^\circ 38' 52''$ heraus, der zugehörige Bogen ist $3^\circ 29' 34''$, also das südliche Azimut der Sonne in diesem Beispiel = $3^\circ 29' 34''$. Darauf lasse die Sonne vom anderen (Herbst) Äquinoktium 45° absteigen, dies ist der Fall in den südlichen Sternbildern und bedeutet die Mitte des Sternbildes des Skorpions; dann ist die Deklination und deren Sinus unverändert¹⁾, und wenn du letzteren mit dem Sinus totus multiplizierst und durch den Sinus der Breite dividierst, kommt $33^\circ 57' 54''$, wie es zuerst für das im Gedächtnis Bewahrte herauskam. Darauf nimm die Höhe zu 30° an, der Sinus ist 30° , und weil die Sonne in den südlichen Sternbildern steht, so zählst du den Sinus der Höhe und das im Gedächtnis Bewahrte zusammen, und beide ergeben zusammen $63^\circ 57' 54''$, diese Zahl multiplizierst du mit dem Sinus der Breite und teilst durch den Kosinus der Breite, und es kommt $36^\circ 45' 44''$ heraus, du multiplizierst es mit dem Sinus totus und teilst durch den Kosinus der Höhe, und es resultiert $42^\circ 36' 56''$, der entsprechende Bogen ist $45^\circ 16' 45''$. Die Sonne in 15° des Skorpions, die Breite 30° , die Höhe 30° , dann das südliche Azimut $45^\circ 16' 45''$, und bei Gott ist der Erfolg.

Fünfte Methode über die Berechnung des Azimuts aus der Höhe und dem östlichen Winkel, und das ist die Ergänzung jenes Winkels zu 90° , den der Verbindungsbogen des augenblicklichen Sonnenortes mit dem Aufgangspunkt und der durch letzteren gehende Vertikalkreis miteinander bilden. Du multiplizierst den Sinus der Entfernung der Sonne vom Auf- oder Untergangspunkt, d. h. der Entfernung von jenem der beiden, welcher der Sonne am nächsten liegt, mit dem Kosinus des östlichen Winkels und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, was herauskommt ist der Sinus der Distanz des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkte, wenn du deine Berechnung gemacht hast, falls die Sonne im Osten war, und das Ergebnis

¹⁾ D. h. ihrem absoluten Betrage nach.

ist der Sinus des Abstands ihres Azimuts vom Untergangspunkt, falls du deine Berechnung für die Stellung der Sonne auf der Westseite gemacht hast. Und merke dir das Ergebnis wohl. Darauf sieh zu, ob die Richtung der Morgenweite nördlich ist, und ob der Bogen, den du durch Rechnung ermittelt hast und der die Entfernung des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkt darstellt, kleiner ist als die Morgenweite. Du weißt, daß das Azimut der Sonne im Norden liegt, alsdann ziehst du den Bogen der Entfernung des Azimuts vom Aufgangspunkt von der Morgenweite ab, was bleibt, das ist das Azimut der Sonne im Norden, und wenn der Bogen der Entfernung des Azimuts vom Aufgangspunkt der Morgenweite gerade gleich ist, dann hat die Sonne kein Azimut, und wenn der Bogen der Entfernung des Azimuts vom Aufgangspunkt größer ist als die Morgenweite, so weißt du, daß das Azimut der Sonne im Süden ist. Du ziehst nunmehr die Morgenweite vom Bogen der Entfernung des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkt ab, der Rest ist das Azimut der Sonne im Süden, und wenn die Morgenweite im südlichen Quadranten liegt, so zählst du zu ihr die Entfernung des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkt hinzu, das Ergebnis dieser Addition ist das Azimut der Sonne im Süden, und dies ist auch der Zusammenhang ihrer beiden Entfernungen in westlicher Richtung mit dem Bogen der Entfernung des Azimuts der Sonne vom Untergangspunkt, doch bei Gott ist der Erfolg. l.

Beispiel: Die Breite 30° , die Sonne im Anfang des Stiers, der Dä'ir 45° , der Aufgangspunkt ab von den Zwillingen $21^\circ 19'$, die Morgenweite nördlich und $26^\circ 11' 55''$, die Höhe der Sonne $38^\circ 41' 28''$, der Kosinus hiervon $46^\circ 49' 55''$, der östliche Winkel $58^\circ 55' 14'' 2'''$, sein Sinus $48^\circ 4' 58''$, sein Kosinus $34^\circ 54' 42''$, der Teil, welcher zwischen Sonne und Aufgangspunkt liegt, $51^\circ 16' 59''$, sein Sinus $46^\circ 49' 6'' 55'''$. Du multiplizierst den Teil des Sinus, der zwischen Sonne und Aufgang liegt, und er ist $46^\circ 49' 6''$ mit dem Kosinus des östlichen Winkels und der ist $55^\circ 14' 42''$, und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und der ist $46^\circ 49' 55''$, und es kommt heraus $35^\circ 14' 4''$, sein Bogen, und das ist die Entfernung des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkte, ist $35^\circ 45' 50''$. Hiervon ziehst du den Bogen der Morgenweite, und der ist $26^\circ 11' 55''$, ab, und es bleibt als Azimut der Sonne im Süden $9^\circ 34' 55''$, jedoch nur im Süden, weil die Entfernung des Azimuts größer ist als die Morgenweite, welche gen Norden liegt.

Sechste Methode über die Berechnung des Azimuts. Du nimmst das, was zwischen Sonne und Aufgangspunkt oder Untergangspunkt liegt, je nachdem der eine von beiden Punkten ihr näher liegt, und was das ist, das ziehe von 90° ab, und was bleibt, von dem wisse den Sinus, und du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, das Ergebnis bestimmt den Bogen, und diesen Bogen ziehst du von 90° ab, und was bleibt, das ist die Entfernung des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkt, dies unter der Bedingung, daß die Sonne später den Meridian erreichen wird, und wenn sie schon dort war, so ist ihr Winkel die Entfernung ihres Azimuts vom Westen. Nunmehr kennst du die Morgenweite, und wenn sie im nördlichen Quadranten liegt und der Bogen des Abstandes des Azimuts der Sonne vom Aufgangspunkt kleiner ist als die Morgenweite, so weißt du, daß das Azimut auch in diesem Quadranten liegt. Als dann ziehst du den Bogen der Distanz des Azimuts vom Aufgangspunkt von der Morgenweite ab, der Rest ist das Azimut der Sonne im Norden, und wenn die Distanz der Morgenweite gleich ist, so hat die Sonne in diesem Augenblick kein Azimut, und wenn sie größer ist als die Morgenweite, so ziehst du von ihr die Morgenweite ab, der Rest ist das Azimut der Sonne im Süden, und wenn die Morgenweite südlich ist, so addierst du sie zu der Distanz des Azimuts vom Aufgangspunkt, die Summe ist das Azimut der Sonne im Süden, und du machst es ebenso, wenn die Sonne im Westen steht, und es sich um die Abendweite und die Entfernung des Azimuts der Sonne vom Untergangspunkt handelt, so Gott will, der mächtig ist. m.

Beispiel: Die Sonne im Beginn des Stiers, die Breite gleich wie beim Dä'ir 45° , der Aufgang der Zwillinge $21^\circ 16' 59''$; die Ostrichtung im Norden $26^\circ 10' 16''$, die Höhe der Sonne $38^\circ 41' 38''$, die Ergänzungshöhe $51^\circ 18' 22''$, der Kosinus der Sonnenhöhe $46^\circ 49' 55''$, die Distanz der Sonne vom Aufgangspunkt $51^\circ 17' 19''$, ihre Ergänzung $38^\circ 42' 41''$, deren Sinus $37^\circ 31' 26''$. Du multiplizierst ihn mit

dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, es kommt $48^{\circ} 4' 29''$ heraus, der Bogen ist $53^{\circ} 14' 56''$, du ziehst ihn von 90° ab, es bleibt $36^{\circ} 45' 4''$, und das ist der Abstand des Azimuts der Sonne vom Aufgang und weil die Morgenweite im Norden ist, ziehst du sie vom Bogen der Entfernung der Sonne vom Aufgang ab, und es restiert als Azimut der Sonne im Süden $9^{\circ} 34' 48''$, nahezu das, was zuerst herauskam.

Siebente Möglichkeit. Du kennst in diesem Falle die Höhe der Sonne und ihre Winkelentfernung vom Meridian. Sieh zu, und wenn die Zeit vor Mittag liegt, so ziehst du vom halben Tagesbogen den Dā'ir ab, und was sich ergibt, von dem wisse den Sinus genau, und seinen Betrag multipliziere mit dem Kosinus der Sonnendeklination und teile mit dem Sinus totus, das Ergebnis bestimmt den Bogen, und diesen Bogen ziehst du von 90° ab. Der Rest ist die Entfernung des Sonnenmittelpunktes vom Ostpunkt, und wenn dies der Fall ist, so steht die Sonne in der östlichen Hälfte der Himmelskugel, ich meine, daß sie dann den Dā'ir des halben Tages noch nicht zurückgelegt hat, und wenn sie im westlichen Teil steht, und das ist der Bogen, welcher zwischen Sonnenmittelpunkt und Westpunkt liegt, so wisse den Sinus dieses Bogens, und der Name des Bogens ist al-ba'd, damit wir seinen Namen genau kennen. Darauf multipliziere den Sinus der Sonnendeklination mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Sinus ba'd, was herauskommt, bestimmt den Bogen der Gleichung der Breite, und falls die Deklination eine nördliche ist, so ziehst du sie von der Ortsbreite ab, ist sie aber südlich, so addierst du sie zur Breite, und was herauskommt, nach der Vermehrung oder Verminderung, das ist die danach korrigierte Breite, und wisse ihren Sinus und Kosinus. Nunmehr multipliziere den Sinus ba'd mit dem Kosinus der korrigierten Breite und teile das Produkt durch den Sinus totus, und das Resultat gibt die Höhe der Sonne, du subtrahierst sie von 90° , und wisse den Sinus, und der Restes ist der Kosinus der Höhe, den du dir wohl merkst, dann multiplizierst du den Sinus ba'd mit dem Sinus der korrigierten Breite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, und das Resultat gibt das Azimut der Sonne. Ziehe den ba'd von 90° ab, und wisse den Sinus des Restes, du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe, was herauskommt, bestimmt einen Bogen, es ist dies die Ergänzung des Azimuts, ziehe sie von 90° ab, so ist der Rest das Azimut der Sonne. a.

Beispiel: Und die Sonne im Anfang des Steinbocks, und die Hälfte des Tagesbogens in der Breite $30^{\circ} = 75^{\circ} 24' 4''$, und der Dā'ir von der Hälfte des Tagesbogens ist $15^{\circ} 24' 4''$, du ziehst ihn vom halben Tagesbogen ab und es bleibt 60° , gleichermaßen ist der Sinus hiervon $51^{\circ} 57' 41''$, der Kosinus der Sonnendeklination ist $54^{\circ} 59' 19''$. Du multiplizierst den einen von diesen zweien mit dem anderen und teilst das Produkt durch den Sinus totus, es ergibt sich $64^{\circ} 34' 16'' 5'''$, der zugehörige Bogen ist $52^{\circ} 31' 55''$, dies ziehst du von 90° ab, und es bleibt $37^{\circ} 28' 5''$ und das ist al-ba'd, dessen Sinus ist $30^{\circ} 29' 57''$, und dies ist also der Sinus des Bogens des ba'd, du merkst ihn und multiplizierst den Sinus der Sonnendeklination und der ist $24^{\circ} 0' 38''$ mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Sinus ba'd, es kommt $39^{\circ} 37' 40''$ heraus, der entsprechende Bogen, und das ist der Bogen der Gleichung der Breite, ist $41^{\circ} 7' 24''$, südlich, weil die Deklination südlich ist. Du vermehrest ihn um die Ortsbreite und es ergibt sich die korrigierte Breite zu $71^{\circ} 7' 24''$, der Sinus ist $56^{\circ} 46' 38''$, die Ergänzung der korrigierten Breite ist $18^{\circ} 52' 36''$, der Sinus $19^{\circ} 24' 48''$, du multiplizierst ihn in dem Sinus der Distanz des Sonnenmittelpunktes vom Ostpunkte, und der ist $36^{\circ} 29' 57''$, und teilst das Produkt durch den Sinus totus, es kommt $11^{\circ} 48' 31'' 51'''$ heraus, der zugehörige Bogen, und das ist die Höhe der Sonne für diesen Augenblick, ist $11^{\circ} 21' 2''$, die Ergänzung der Höhe $78^{\circ} 38' 58''$, der Kosinus der Höhe ist $59^{\circ} 49' 35''$. Du multiplizierst nunmehr den Sinus ba'd, und der ist $36^{\circ} 29' 57''$, mit dem Sinus der korrigierten Breite, und der ist $56^{\circ} 46' 38''$, und teilst das was herauskommt, durch den Kosinus der Höhe, es ergibt sich $35^{\circ} 13' 31''$, der zugehörige Bogen, und das ist das Azimut der Sonne, ist $35^{\circ} 58' 2''$, und bei Gott ist der Erfolg.

Achte Methode. Über die Kenntnis des Azimuts aus einem Bogen, welcher vermehrt oder vermindert wird um den Betrag der Morgenweite. Wenn du jene

Kenntnis des Azimuts der Sonne aus diesem Bogen willst, so ziehe in Erwägung, daß deine Rechnung vor dem Mittag angestellt ist, und stelle den Dä'ir, d. h. den Revolutionsbogen der Sphäre fest, und wenn die Zeit Nachmittags liegt, so stelle den Rest des halben Tagesbogens fest, und was immer in jedem Falle sich ergibt, von dem nimm die Hälfte und wisse den Sinus dieser Hälfte, und dessen Betrag multiplizierst du mit dem Kosinus der Deklination der Sonne, und was sich ergibt, das dividierst du durch den Sinus totus, dann verdopple den dazu gehörigen Bogen und ziehe dessen Wert von 90° ab; merke dir den Sinus des Restes und multipliziere ihn mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, zu dem Ergebnis suche den Bogen, den du von 90° abziehst, der Rest ist die Gleichung der Morgenweite, und wenn die Morgenweite im nördlichen Quadranten liegt, so erwäge: Wenn sie größer ist als der Bogen der Gleichung, so ziehst du von ihr den Bogen der Gleichung ab, der Rest ist das Azimut der Sonne im Norden, und wenn die beiden Bogen einander gleich sind, so hat die Sonne kein Azimut, und wenn der Bogen der Gleichung größer ist als die östliche Richtung (Morgenweite) so ziehe von ihr den Betrag der Morgenweite ab, der Rest ist das Azimut der Sonne im Süden, doch bei Gott ist der Erfolg. o.

Beispiel: Die Sonne im Anfang des Steinbocks, die Breite 30° , die Höhe 30° , der Dä'ir des halben Tagesbogens $47^\circ 17' 55''$, die Hälfte hiervon $23^\circ 38' 57'' 1''$ der Sinus hiervon $24^\circ 4' 47''$. Du multiplizierst ihn mit dem Kosinus der Sonnen-deklination, und der ist $54^\circ 59' 59''$, und das ergibt $3231\ 11\ 38\ 24\ 58$, du teilst dies durch den Sinus totus, so kommt annähernd $22^\circ 3' 11'' 38'''$ heraus. Der zugehörige Bogen ist $21^\circ 33' 53''$, verdopple ihn, und es gibt $43^\circ 7' 46''$. Dies subtrahierst du von 90° , und es bleibt $46^\circ 52' 14''$. Der Sinus hiervon ist $43^\circ 47' 19''$. Dies multiplizierst du mit dem Sinus totus und teilst es durch den Kosinus der Höhe, so kommt $50^\circ 33' 46''$ heraus. Der Bogen hierzu ist $57^\circ 25' 41''$. Du ziehst ihn von 90° ab, es bleibt $32^\circ 34' 19''$, und das ist der Bogen der Gleichung der Aufgangerichtung, und weil die Aufgangerichtung $27^\circ 30' 53''$ gen Süden liegt, so addierst du dies zum Bogen der Aufgangerichtung und es ergibt sich als Azimut der Sonne im Süden $60^\circ 5' 12''$. Dies Beispiel ist ebenfalls ganz nach der Sinustafel berechnet, und du hattest es schon früher auf andere Weise, aber im Resultat mit der letzten Rechnung übereinstimmend berechnet.

Letzte Darlegung über diese Methode. Wenn die Höhe bekannt ist, sowie deren Azimut, d. i. ihre Richtung und die Ortsbreite bekannt und wenn die Sonnen-deklination bekannt ist, und wenn du den nördlichen oder südlichen Abschnitt (Teil der Sonne in der Ekliptik) kennst, so ist auch ihre Entfernung vom Äquinoktium bekannt, und wenn ein Stern sich einem dafür darbietet¹⁾, und wenn sein Abstand vom Äquinoktium bekannt ist, so ist das Verfahren jenes, daß du den Sinus der Höhe mit dem Sinus der Breite multiplizierst und das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite dividierst, und es ist dieser Ausdruck alsdann der Ichtülf des Horizontes; du behältst ihn im Gedächtnis. Darauf multiplizierst du den Sinus des Azimutes mit dem Kosinus der Höhe und teilst das Produkt mit dem Sinus totus, das Ergebnis ist der Asl. Merke auch ihn wohl, und nun beachte: Wenn die Sonne in den nördlichen Sternbildern und das Azimut nördlich ist, so addierst du den Asl und den Ichtülf des Horizontes, das Ergebnis ist der Sinus der Aufgangerichtung, und wenn sie in den nördlichen Sternbildern, das Azimut aber südlich ist, so ziehe den Asl vom Ichtülf des Horizontes ab, der Rest ist wiederum der Sinus der Aufgangerichtung, und wenn die Sonne in den südlichen Sternbildern steht, so ziehe den Ichtülf des Horizontes vom Asl ab, der Rest ist ebenfalls der Sinus der Morgenweite, und falls du den Sinus der Morgenweite kennst, so multiplizierst du ihn mit dem Kosinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Sinus totus, das Ergebnis ist der Sinus der Sonnen-deklination, der zugehörige Bogen wird alsdann die Sonnen-deklination sein oder des Sternes Deklination, der ähnlich der Sonne, keine Breite hat, und wenn du für den Stern die Nachtstunde, welche sich dir ergab, berechnet hattest, so ist das seine Entfernung vom Äquinoktium, und bei Gott ist der Erfolg. p.

¹⁾ Der also, ähnlich der Sonne, keine Breite (astronomische) hat.

Beispiel. Die Breite 30° , die Höhe 20° , das nördliche Azimut $7^\circ 54' 10''$, der Sinus der Höhe $20^\circ 31' 16''$, du multiplizierst ihn mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite, es kommt $11^\circ 50' 33''$ heraus, und das ist der Ichtilāf des Horizontes, den du dir wohl merkst. Darauf multiplizierst du den Sinus des Azimuts, und der ist $8^\circ 14' 48''$ mit dem Kosinus der Höhe, und der ist $56^\circ 22' 54''$ und teilst dies Produkt durch den Sinus totus, es ergibt sich $7^\circ 45' 50''$, und das ist der Aşl. Bewahre ihn im Gedächtnisse, und weil die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht und auch das Azimut nördlich ist, so addierst du den Aşl zum Ichtilāf des Horizontes, es kommt $19^\circ 36' 23''$ heraus und das ist der Sinus der Morgenweite, du multiplizierst ihn mit dem Kosinus der Ortsbreite, und der ist $51^\circ 57' 41''$, und teilst das Produkt durch den Sinus totus, so erhältst du $16^\circ 58' 26'' 36'''$, der zugehörige Bogen, und das ist die nördliche Sonnendeklination, ist $16^\circ 26'$, und wenn du für den Stern die Nachtstunde (?), welche sich für dich ergibt, als Stunde der Deklination (?) berechnet hastest, so ist dies die Entfernung jenes Sterns vom Äquinoktium. Darauf setze als Höhe 50° an, das südliche Azimut $10^\circ 21' 42''$. Du multiplizierst den Sinus der Höhe, $46^\circ 57' 45''$ mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst durch den Kosinus der Ortsbreite, so kommt $26^\circ 32' 12''$ heraus, und das ist der Ichtilāf des Horizontes, du merkst ihn wohl, und multiplizierst den Sinus des Azimuts, $10^\circ 46' 30''$, mit dem Kosinus der Höhe, $38^\circ 34' 2''$, und teilst das Produkt durch den Kosinus der Ekliptikschiefe, so ergibt sich $6^\circ 56' 12''$, und das ist der Aşl. Du merkst ihn und subtrahierst ihn vom Ichtilāf des Horizontes, $26^\circ 32' 12''$, weil die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht und das Azimut südlich ist, so bleibt als Rest $19^\circ 36'$, und dies ist der Sinus der Morgenweite. Du multiplizierst ihn mit dem Kosinus der Ortsbreite und teilst mit dem Sinus totus, so ergibt sich $16^\circ 58' 26'' 36'''$, als Sinus der nördlichen Deklination, der Bogen der nördlichen Deklination ist $16^\circ 26''$, und wenn du umgekehrt nach dem Grad der Zeichen in der Deklinationstafel zählst, so ergibt sich dir der Abstand (in Länge) der Sonne vom Äquinoktium = 45°). Nunmehr sei die Breite, wie vorher, = 30° , und die Höhe 35° , das südliche Azimut $50^\circ 4' 56''$, die Sonne in jenem südlichen Quadranten, der vom Beginn der Waage bis zum Ende der Fische reicht. Du multiplizierst zuerst den Sinus der Höhe $34^\circ 24' 58''$ mit dem Sinus der Breite, 30° und teilst das Resultat durch den Kosinus der Breite, $51^\circ 57' 41''$, so kommt heraus $19^\circ 52' 9''$, und das ist der Ichtilāf des Horizontes; du behältst ihn im Gedächtnisse und multiplizierst den Sinus des Azimuts, $40^\circ 0' 24''$ mit dem Kosinus der Höhe $49^\circ 8' 57''$ und teilst das Produkt durch den Sinus totus, es ergibt sich $37^\circ 41' 11''$, und das ist der Aşl. Du ziehst von ihm den Ichtilāf des Horizontes ab, weil das Azimut südlich ist und die Sonne in den südlichen Zeichen steht, was verbleibt, das ist der Sinus der Morgenweite und gleich $17^\circ 59' 2''$. Du multiplizierst dies mit dem Kosinus der Ortsbreite und dividierst mit dem Sinus totus, es ergibt sich $15^\circ 25' 48'' 27'''$ annähernd, der zugehörige Bogen, d. i. die südliche Deklination der Sonne, ist $15^\circ 54' 8''$ oder nach den Tafeln der astronomischen Länge ist ihre Entfernung vom Äquinoktium = 40° , und bei Gott ist der Erfolg."

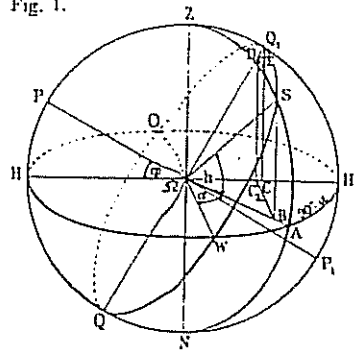
Kommentar zum XX. Kapitel der Häkemitischen Tafeln.

ad a. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Regel kann in folgender Weise erbracht werden. Es sei in der Figur 1 (S. 108) HOH, W der Horizont, Z das Zenit, N der Nadir und QWQ, O der Himmelsäquator, der den Horizont bekanntlich im Ost- und Westpunkt schneidet und gleichzeitig die Bahn der Sonne am Tag des Äquinoktiums vorstellt, wo die Sonnendeklination = 0 ist. Es ist also OQW die Ost-Westlinie, von der aus die Araber das Azimut zählten. PP₁ ist die Weltachse, die zum Horizont unter dem Winkel φ (Ortsbreite, Polhöhe) geneigt ist. Die augenblickliche Höhe der Sonne (S) ist

$$\text{arc } SA (= \angle AQS) = h.$$

¹⁾ Nach Formel $\sin \delta = \sin \epsilon \cdot \sin \lambda$ folgt hieraus $\epsilon = 23^\circ 35'$. Diesen Wert teilt der Autor im 11. Kapitel als von ihm selbst gefundenen, neben vielen früheren arabischen Werten für die Ekliptikschiefe mit.

Fig. 1.



Wir fällen jetzt zuerst das Lot SB vom Ort der Sonne S auf den Horizont und ziehen ΩB , welches natürlich im Strahl ΩA liegen muß. Von B fällen wir auf die Nord-Südlinie HH_1 das Lot BC_1 , das parallel der Ost-Westlinie ist. In C_1 errichten wir auf HH_1 die Senkrechte $C_1 D$, die ganz in der Meridianebene (Papierebene) liegt. Da sie vom Horizont bis zum Äquator reicht, so ist sie $= BS$, und deshalb ist $BSDC_1$ ein Rechteck, folglich $DS = C_1 B$, ebenso $DS \perp CC_1$. Sei der Radius der Himmelskugel $= r = 60$ partes = sinus totus, so hat man der Reihe nach:

$$CQ_1 = r \cdot \cos \varphi; \quad C_1 D = C_1 S = r \cdot \sin h,$$

$$Q_1 S = CQ_1 - C_1 S = r(\cos \varphi - \sin h) = DQ_1 \cos \varphi; \quad DQ_1 = \frac{Q_1 S}{\cos \varphi}$$

$$\Omega D = \Omega Q_1 - DQ_1 = r - r \cdot \frac{\cos \varphi - \sin h}{\cos \varphi} = r \left(1 - \frac{\cos \varphi - \sin h}{\cos \varphi} \right)$$

$$\frac{\Omega C_1}{\Omega D} = \sin \varphi; \quad \Omega C_1 = \sin \varphi - \frac{\cos \varphi - \sin h}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi$$

$$\sin \alpha = \frac{\Omega C_1}{\Omega B} = r \cdot \frac{\sin \varphi - \frac{\cos \varphi - \sin h}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi}{r \cdot \cos h} \quad \text{q. e. d.}$$

Vereinfacht lautet das Resultat:

$$r \cdot \sin \alpha = r \cdot \frac{\sin h \cdot \sin \varphi}{\cos h \cdot \cos \varphi} \quad \dots \dots \dots (I)$$

ad h. Hier tritt ein der arabischen Astronomie eigener Begriff auf: Der „Ichtilâf des Horizontes“. Er ist identisch mit dem was Abû'l Hasan und andere die *Hişsa* nennen. Um ihn in einer Formel darzustellen, sei auf nebenstehende Figur 2 verwiesen. Sie ist eine Meridianprojektion der Himmelskugel. BB_1 ist ein Parallelkreis (Tageskreis) der Sonne mit der Deklination δ . Der Ichtilâf al-ufq ist jetzt dargestellt durch eine gerade Linie auf dem Nord-Süd-Durchmesser HH_1 des Horizontes, genommen vom Fußpunkt des Sinus der Höhe im augenblicklichen Orte des Gestirns bis zum Durchschnitt des Horizont- und Parallelkreis-Durchmessers¹⁾.

S_1 = Ort der Sonne im Höhenkreis $H_2 H_3$ (arc $H_1 H_3 = h$), also Ichtilâf al-ufq = GT .

Nun verhält sich

$$\Omega Q_2 : Q_1 Q_2 = GT : GS_1.$$

Es ist aber

$$\Omega Q_2 = \sin \varphi; \quad Q_1 Q_2 = \cos \varphi; \quad GS_1 = \sin h,$$

mithin

$$GT = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \sin h \quad \dots \dots \dots (II)$$

Teilt man diesen Ausdruck (II) noch durch $\cos h$ und fügt links und rechts den sinus totus $= r$ als Faktor bei, so ist man auf unsere Formel (I) geführt.

¹⁾ Vgl. Journal asiatique 1692, S. 429.

ad c. Auch hier tritt uns ein spezifisch arabischer Begriff aus der sphärischen Astronomie entgegen: „Der Dä'ir“. Er ist der seit Sonnenaufgang bereits verflossene Teil des Tagesbogens.

Aus beistehender Figur liest man ab:

$$\text{Dä'ir} = \text{arc } O\Sigma = \text{arc } W\Sigma'.$$

Angenommen, die Sonne stehe am Vormittag im Punkte Σ des Himmelsäquators und sei daher genau im Osten aufgegangen, so ist

$$\frac{ON}{O\Sigma} = \sin \text{Dä'ir}; \quad ON = r \cdot \sin \text{Dä'ir}.$$

Anderseits ist das Lot

$$NB = r \cdot \sin h = ON \cdot \cos \varphi.$$

Also $\frac{\sin h}{\cos \varphi} = \sin \text{Dä'ir}$, mithin ist nach (I):

$$\sin \alpha = \frac{\sin \text{Dä'ir} \cdot \sin \varphi}{\cos h}, \quad \text{q. e. d.}$$

ad d. Anwendung des Sinussatzes auf das schiefwinklige sphärische Dreieck Zonit—Pol—Sonne.

ad e. Nach Formel (I) ist

$$r \cdot \sin \alpha = r \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin h}{\cos h},$$

oder nach unserer Schreibweise

$$r \cdot \sin \alpha = r \cdot \tan \varphi \cdot \tan h = r \cdot \frac{\tan \varphi}{\cotg h}.$$

Die zwei Größen $\tan \varphi$ und $\cotg h$ — oder nach arabischer Schreibweise $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ und $\frac{\cos h}{\sin h}$ — sind aber leicht aus den Schattenlängen eines Gnomons zu ermitteln, bzw. aus den Schattentafeln herauszulesen. Zu Beginn des Widders ist, falls q die Höhe des Gnomons bedeutet, die Länge des Mittagsschattens $= q \cdot \tan \varphi$. Und ebenso ist die Größe $q \cdot \cotg h$ die Schattenlänge zur Zeit der Beobachtung. In diesem Beispiel sehen wir, wie weit die arabische Mathematik, bzw. Astronomie, die Tangente und Kotangente in die Rechnung einbezog.

ad f. Schatten zu Beginn des Widders $= q \cdot \tan \varphi$,
 Schatten der Ergänzung der Höhe $= q \cdot \tan h$,
 Produkt beider Schatten $= q^2 \cdot \tan \varphi \cdot \tan h$,
 $\sin \alpha = \tan \varphi \cdot \tan h$,
 folglich $\frac{\text{Produkt}}{q^2} = \sin \alpha$.

ad g. Auch für den allgemeinen Fall, daß die Sonnendeklination $\neq 0$ ist, sondern einen positiven oder negativen Wert hat, bedient sich Ibn Jünis, ähnlich wie am Anfang, zur Ermittlung des Azimuts der sogenannten Projektionsmethode. Wir wollen den Sachverhalt an beistehender Fig. 5 erläutern. Wiederum sei QQ_1 der zum Horizont unter dem $\angle 90^\circ - \varphi$ geneigte Himmelsäquator. Parallel zu ihm läuft der Tageskreis der Sonne BB_1 , dem für einen gegebenen Tag die (unveränderliche) Deklination δ zukommt, also

$$\text{arc } BQ = \text{arc } B_1Q_1 = \delta.$$

W ist wiederum der Westpunkt des Horizontes, $W\Omega$ die Äquinoktiale, von der aus das Azimut α zu zählen ist. Angenommen, die Sonne stehe augenblicklich in S , so ist $\text{arc } WR = \alpha$. Wir fällen zuerst das Lot SA , das in der Ebene $ZSRN$

Fig. 3.

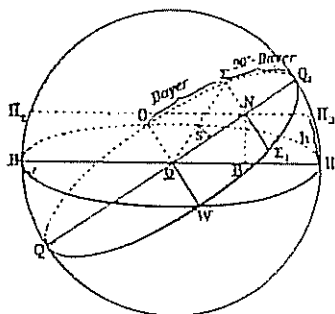


Fig. 4.

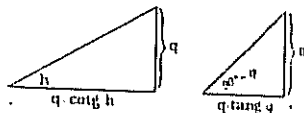
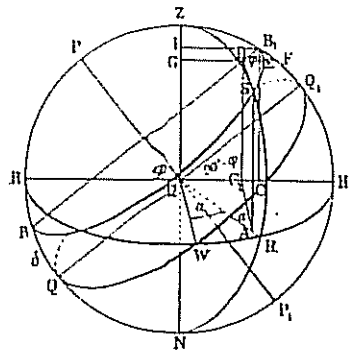


Fig. 5.



liegt und deshalb auf den horizontalen Radius ΩR auftreffen muß. Ferner machen wir $AC_1 \perp HH_1$, dann ist notwendigerweise wie früher $C_1D = AS$ und $AC_1 = SD$, d. h. $ASDC_1$ ein Rechteck. Die Mittagshöhe der Sonne ist $\text{arc } B_1H_1 = 90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ - (\varphi - \delta)$, die Höhe zur Zeit der Beobachtung $= \text{arc } SR = \text{arc } H_1F = h$. Zieht man noch $B_1J \parallel GF \parallel HH_1$ und fällt auch von B_1 in der Meridian- oder Papierebene das Lot B_1C , so hat man zunächst:

$$B_1S = \sin [90^\circ - (\varphi - \delta)] - \sin h \quad (\text{Radius } \Omega Q = 1)$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck B_1DS :

$$B_1S = B_1D \cdot \cos \varphi, \quad \text{mithin}$$

$$B_1D = \frac{\sin [90^\circ - (\varphi - \delta)] - \sin h}{\cos \varphi} \quad (1)$$

Andersseits ist nach Konstruktion

$$\begin{aligned} GD = DC_1 &= \Omega A \cdot \sin \alpha = \cos h \cdot \sin \alpha \\ \cos h \cdot \sin \alpha &= DC - DC_1 = B_1J - CC_1 \\ &= \cos [90^\circ - (\varphi - \delta)] - D S = \cos [90^\circ - (\varphi - \delta)] - B_1D \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

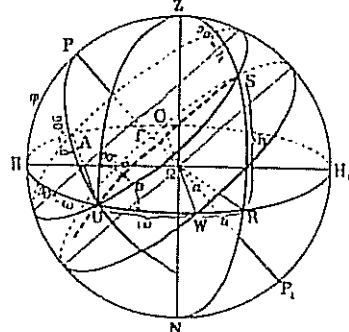
Setzt man nunmehr den Wert von B_1D aus (1) in (2) ein, so resultiert:

$$\sin \alpha = \frac{\cos [90^\circ - (\varphi - \delta)] - \frac{\sin [90^\circ - (\varphi - \delta)] - \sin h}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi}{\cos h} \quad (3)$$

welche Formel der algebraische Ausdruck des Textes unter g) ist, wobei der Autor allerdings vergessen hat, daß das im Gedächtnis Bewahrte auch mit dem Sinus der Ortsbreite zu multiplizieren ist. Durch Vereinfachung von (3) erhält man leicht den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie, angewandt auf das Dreieck Zenit—Pol—Sonne, aber weder Al-Battāni, noch Ibn Jūnis haben den Satz in seiner Allgemeinheit erkannt und angewandt¹⁾.

ad h. Löst man Formel (3) im Falle g) auf, so findet man

Fig. 6.



$$\sin \alpha = \frac{\sin \varphi \cdot \sin h - \sin \delta}{\cos \varphi \cdot \cos h} = \frac{\sin \varphi \cdot \sin h - \sin \delta}{\cos h} \quad (1)$$

Der Minuend des Zählers ist der Ichtilaf des Horizontes; die Bedeutung des Subtrahenden ergibt sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck HPU der nebenstehenden Fig. 6 in der alles die frühere Bedeutung hat. U ist der Untergangspunkt der Sonne und WU die Abendweite ω , die auch gleich der Morgenweite ΛO ist. Aus genanntem Dreieck folgt unmittelbar:

$$\sin \delta = \sin \omega \cdot \cos \varphi,$$

$$\sin \omega = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi},$$

so daß (1) sich schreiben läßt

$$\sin \alpha = \frac{\text{Ichtilaf} - \sin \omega}{\cos h},$$

womit der Text zu h) aufgeheilt ist.

¹⁾ Bei Al-Battāni findet sich die Regel anders dargestellt (indische Methode), doch auch so, daß sie auf den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie führt. (Kap. IX des *Opus astronomicum*.) Vgl. dazu die Bemerkungen A. v. Braunmühl's in seinen Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, Leipzig 1900, S. 53, und von demselben Autor: „Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie“, *Nova Acta*, Abhandlungen d. Kais. Leopold-Carol-Deutschen Akademie d. Naturforscher, Halle 1898, S. 24 ff. (71. Band.)

ad i. Sinussatz im schiefwinkligen Dreieck Zenit—Pol—Sonne.

ad k. Formel (1) läßt sich auch so schreiben:

$$\sin \alpha = \frac{\left(\sin h - \frac{\sin d}{\sin \varphi} \right) \sin \varphi}{\cos h \cdot \cos \varphi} \quad \dots \dots \dots (2)$$

und für $\alpha = 0$ wird $\sin h_{\alpha_0} = \frac{\sin d}{\sin \varphi}$, so daß man statt (2) auch hat

$$\sin \alpha = \frac{\sin h - \sin h_{\alpha_0}}{\cos h \cdot \cos \varphi} \cdot \sin \varphi \quad \dots \dots \dots (3)$$

womit k) dem Verständnis keine Schwierigkeiten mehr macht.

ad l. Es sei S mit dem Untergangspunkt U durch den Großkreisbogen $SU = f$ verbunden, und $\angle SUR$ sei jener östliche — in unserer Zeichnung westliche — Winkel. Die Anwendung des Sinussatzes auf das sphärische Dreieck SUZ gibt:

$$\frac{\sin f}{\cos h} = \frac{\sin UR}{\cos \sigma}, \quad \text{oder:} \quad \sin UR = \frac{\sin f \cdot \cos \sigma}{\cos h},$$

alles weitere klar.

ad m. Die Anwendung des sogenannten Pythagoräischen Lehrsatzes auf der Kugel auf das rechtwinklige sphärische Dreieck SUR gibt

$$\cos f = \cos h \cdot \cos UR$$

oder
$$\frac{\sin (90^\circ - f)}{\cos h} = \sin (90^\circ - UR).$$

Die Umsetzung auf Sinusfunktionen geschieht in Rücksicht auf die Verwendung der Sinustafeln.

ad n. Da W der Pol zum Meridian $HPZH_1N$ ist, so ist $WF = 90^\circ$ und $\angle ZFS = 90^\circ$. Aus den zwei rechtwinkligen sphärischen Dreiecken ZSF und PSF folgt

$$\begin{aligned} \sin FS &= \sin (90^\circ - ba'd) = \cos d \cdot \sin s & (s = \text{Stundenwinkel}) \\ \sin d &= \sin ba'd \cdot \cos PF \\ \sin h &= \sin ba'd \cdot \cos ZF. \end{aligned}$$

Nun ist arc ZF auch $= \angle ZWS$, und der Sinussatz ergibt aus Dreieck ZSW:

$$\sin \alpha = \frac{\sin ba'd}{\cos h} \cdot \cos ZF \quad \text{q. e. d.}$$

ad o. Zum Verständnis dieser Jünischen Regel sei durch S und U ein Großkreis gelegt, so daß das gleichschenklige, sphärische $\triangle PUS$ entsteht. Ein Perpendikel von P auf US trifft in der Mitte L auf, so daß arc LS = arc LU = y, der zugehörige Dâ'ir = σ ist. Aus $\triangle PLS$ folgt

$$\sin y = \cos d \cdot \sin \sigma.$$

und aus $\triangle URS$: $\cos 2y = \cos h \cdot \cos UR$, womit man UR findet usw.

ad p. Bildet man in (1) S. 110 das Produkt

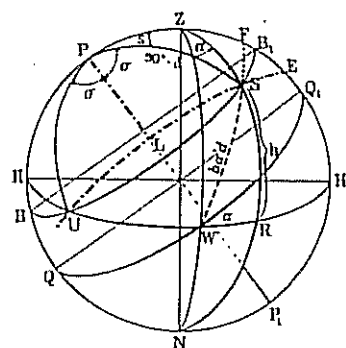
$$\sin \alpha \cdot \cos h = \frac{\sin \varphi \cdot \sin h}{\cos \varphi} - \frac{\sin d}{\cos \varphi}, \quad \text{und setzt es} = A\varphi^1), \text{ so}$$

kann man auch schreiben

$$A\varphi^1 = \text{Ichtilâf} - \sin UR \quad \text{usw.}$$

^{1) A\varphi^1 = \text{Wurzel, Ursprung.}}

Fig. 7.



Über eine arabische Methode, die geographische Breite aus der Höhe der Sonne im 1. Vertikal („Höhe ohne Azimut“) zu bestimmen.

Zum 60. Geburtstag des Herrn Prof. Dr. E. Anding in Gotha, nach der arabischen Handschrift 143 (Leiden) dargestellt.

Von C. Schøy in Essen a. d. R.

Die ältere Zeit kennt in der Hauptsache nur zwei Verfahren zur Ermittlung der Ortsbreite. Das geläufigste war die Messung der Meridianhöhe der Sonne. Die Erhebung der Sonne bei ihrem Durchgang durch den Mittagskreis ist gleich der Äquatorhöhe vermehrt oder vermindert um die augenblickliche Sonnendeklination. Und da die Äquatorhöhe die Ergänzung der Polhöhe oder Ortsbreite zu 90° ist, so kennt man bei bekannter Sonnendeklination auch die Polhöhe. Die zweite Methode, nämlich die Mittelbildung aus der oberen und unteren Kulminationshöhe eines Zirkumpolarsterns, die sich bereits bei al-Huwärizmi¹⁾ und al-Battāni²⁾ nachweisen läßt, dürfte praktisch kaum eine Rolle gespielt haben, wenigstens findet sich in der älteren Literatur kein Beispiel einer Polhöhebestimmung letzterer Art. Man hielt sich im konkreten Fall wohl immer an die Sonne. Die arabischen Astronomen sind dann so verfahren, daß sie auf einer möglichst wagerechten und ganz glatten Marmorplatte einen rund gedrehten, spitz auslaufenden Stift (miqjās) genau senkrecht errichteten und dessen Schatten beobachteten, bis er die vorher durch den Fußpunkt des Schattenwerfers gezogene Mittagslinie mit seiner Spitze traf. In diesem Augenblick wurde die Höhe des Sonnenmittelpunktes mit einem Astrolab genommen. a).

Der Kairiner Astronom Ibn Yūnus († 1009 zu Kairo) aber lehrt in seinen Hākemitischen Tafeln — nach meiner Ansicht dem bedeutendsten Werk arabischer Astronomie — noch mehrere andere höchst originelle Methoden zur Bestimmung der Ortsbreite, an deren Bekanntmachung die Geschichte der mathematischen Geographie ein Interesse hätte. Sie sind teils in der arabischen Handschrift Nr. 143 des Legatum Warnerianum zu Leiden, teils in dem Mscr. Hunter 331 der Bodleyana zu Oxford enthalten. Durch die gütige Vermittlung der Herren Dr. C. van Arendonk in Leiden und Dr. A. Cowley in Oxford kam ich in den Besitz der Photos dieser wichtigen Partien des Yūnusischen Werkes.

Die geographische Breite seines Wohnortes Kairo (genauer Fustāt³⁾) oder Altkairo, was südwestlich von der Zitadelle, westlich von al-Qarāfa lag und heute ein Trümmerfeld ist), hat Ibn Yūnus in mehrfacher Weise bestimmt und dieselbe zu 30° oder auch zu 30° und einige Minuten gefunden. Diese Bestimmungen sind daher äußerst exakt, wo die Breite Fustāts faktisch genau 30° ist. Ebenso wie andere arabische Astronomen, maß er die Meridianhöhe der Sonne in Kairo, sowohl bei Beginn des Krebses, als auch bei ihrem Eintritt in den Kopf des Steinbocks und leitete daraus die Ortsbreite zu 30° , die Ekliptikschiefe zu $23^\circ 35'$ ab. Aber er verwandte daneben auch ein anderes Verfahren, die Breite Kairos zu ermitteln, dessen Urheber er wohl selbst ist, nämlich die höchst merkwürdige Praktik, statt der Meridianhöhe die Höhe der Sonne im Ostwestkreis zur Zeit des Sommersolstitiums zu messen, oder, wie die Araber sich ausdrücken: die „Höhe ohne Azimut“, da sie dies, entgegen uns, von der Ostwestlinie aus zählen.

Da die Methode der Breitebestimmung aus Beobachtungen im 1. Vertikal in der praktischen Astronomie vor kaum 100 Jahren zum ersten Male angewandt worden ist, so möchte ich in Anbetracht der nahezu 1000jährigen Priorität des Ibn Yūnus seinen Anteil möglichst vollständig zur Geltung bringen, und so führe ich alle Stellen, wo er von dieser Methode spricht, wörtlich an.

Auf S. 224 und 225 des Leidener Mscr., Kap. XI, erfährt man über die Ziehung der Ostwestlinie und die Höhe ohne Azimut zuerst Näheres. Es heißt dort:

¹⁾ Die astronomischen Tafeln des Muh. ibn Māsā al-Khwārizmī von H. Suter, Kopenhagen 1914, S. 18 und 71.

²⁾ al-Battānī sive Albatēnī Opus Astronomicum a C. A. Nallino, Mailand 1903, I S. 15, Kap. VI.

³⁾ Der Name Fustāt kommt von fossatum = unwallt, ummauert. Er bedeutet hier nicht „arab. Bezeichnung für Zelt“, wie Franz Pascha in seinem hübschen Werkchen „Kairo“, Leipzig 1903, S. 3, sagt.

„Und ich habe oftmals meine Aufmerksamkeit auf die Höhe ohne Azimut zu Beginn des Krebses gelenkt, auf die Azimute vieler Höhen im Osten und Westen, und ich bin beiden mit äußerster Gründlichkeit nachgegangen. Ich fand diese Ermittlung mit dem, was sich mir hinsichtlich der Deklination durch die Beobachtung ergab, und diese theoretischen Untersuchungen legen für die Beobachtung Zeugnis von der Richtigkeit ab. Und ich habe diese zwei Stellen auf der Himmelskugel ausgewählt, weil, wenn der Ort der Sonne an ihnen um viele Minuten von der Wahrheit abweicht, dies die Untersuchung nicht merklich beeinträchtigt, wegen der geringen Abweichung der Sonne an diesem Tage. Deshalb ist die Breite Kairos $30^{\circ} 3'$.

Und bei der Zeichnung der Ostwestlinie für die Ermittlung der Höhe ohne Azimut ist eine Schwierigkeit die, daß, wenn sie um ein Merkliches von der Wahrheit abweicht, die Höhe ohne Azimut östlich und westlich verschieden ist. Und wer sich dieser Höhe zu Beginn des Krebses bedienen will, der möge die Ostwestlinie auf einer horizontalen Marmorfläche, die sehr ebenmäßig und aus ganz weißem Marmor ist, ziehen, für den Ein- und Austritt des Schattens einen oder zwei Tage vorher. Und weil der Betrag, um den die Sonne an diesem Tage ihre Deklination ändert, vom Eintritt bis zum Austritt des Schattens (bezüglich der Ostwestlinie) ganz unmerklich ist, so ist auch ihre Höhe beim Schattenaus- tritt keine meßbar verschiedene (von der des Eintritts).

Dann stelle auf die Marmorplatte einen Gnomon (šahs), der ganz senkrecht steht, genau richtig hin, und zwar ehe die Spitze des Schattens die Linie erreicht. Dann warte, bis die Schattenspitze die Linie erreicht, und schreibe die Sonnenhöhe in dem Augenblick auf, bewahre sie im Gedächtnis und tu ebenso nach dem zawāl (Kulmination, Abstieg) der Sonne. Wenn alsdann die beiden Höhen übereinstimmen, so ist die Ostwestlinie richtig, wenn sie aber voneinander abweichen, so ist sie nicht richtig. Sind nun beide Höhen richtig, so füge man zu der Höhe noch die Höhenparallaxe, b), hinzu, und was sich dann ergibt, das ist die Höhe ohne Azimut. Doch bei Gott ist der Erfolg.

Und wenn einer die Stelle, wo die Höhe beim Ein- und Austritt des Schattens gemessen wird, mit einem Kreis umgibt, so wäre, falls er die Ostwestlinie mittels des indischen Kreises, c), ziehen wollte, dies das beste. Nun hat mancher von den Alten — ich meine von denen, die vor Ptolemaeus waren —, sich auf das Messen durch den Schatten der Tagesmitte verlassen; aber der Schatten gibt nicht die Höhe des Sonnenmittelpunktes wegen eines Fehlers, den ich noch erwähnen werde, wenn ich von den Schatten handle, d), so Gott will. Auch Hermes, e), und andere haben das schon erwähnt, ich meine das Messen mittels der Schatten.

Ich sage also — doch bei Gott ist der Erfolg — siehe ich habe in diesem zīg (astronom. Tafelwerk) eine Abhandlung dargestellt, über die Ortsbreite und die größte Deklination (beide herausgebracht) aus dem Schatten der Meridianhöhe zu Beginn des Steinbocks und dem Schatten der Höhe ohne Azimut zu Beginn des Krebses. Und dies ist eine Abhandlung, die einen verständigen Mann verlangt, der da weiß, was das Messen verlangt. Und beim Messen muß er zunächst ein richtiges Instrument haben; dann gebrauche er es mit Verstand und vollende seine Arbeit in richtiger Reihenfolge, und bei Gott ist der Erfolg.“

Zu diesen Ausführungen des Autors sei bemerkt: Er gibt für die Berechnung der Höhe ohne Azimut im 18. Kapitel der Leidener Handschrift, S. 359, mehrere Vorschriften, die in unsere Formelsprache übersetzt, sich so ausnehmen:

$$\sin \eta = \frac{\sin \varepsilon \cdot \sin \lambda}{\sin \varphi} \quad \dots \dots \dots (I)$$

$$\sin \eta = \frac{\sin 90^{\circ} \cdot \sin \delta}{\sin \varphi} \quad \dots \dots \dots (II)$$

$$\sin \eta = \frac{\sin m \cdot \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad \dots \dots \dots (III)$$

$$\sin \eta = \frac{\sin m \cdot \cos (\varphi - \delta)}{\sin (\varphi - \delta) + \sin m} \quad \dots \dots \dots (IV)$$

$$\sin \eta = \cos (\varphi - \delta) - \sin (\varphi - \delta) \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad \dots \dots \dots (V)$$

wobei η die Höhe ohne Azimut, ε die Ekliptikschiefe, δ und λ Deklination und Länge der Sonne, m die Morgen- oder Abendweite und φ die Ortsbreite bedeutet. Den Beweis der Formeln gibt der Autor nicht; ich möchte ihn hier übergehen und für die geometrische Ableitung sämtlicher fünf Ausdrücke auf Delambre¹⁾ verweisen. Wie man sieht, berechnet sich die Höhe η stets aus dem Sinus. Damals war die Sinustafel für die numerische Ausrechnung fast ausschließlich in Verwendung; nur ganz vereinzelt wird auch die Schattentafel (Tangens- oder Kotangententabelle) benutzt, f). Nach (I) hat Ibn Yûnus eine Tafel für η berechnet, unter der Voraussetzung, daß $\varphi = 30^\circ$; $\varepsilon = 23^\circ 35'$ ist und die Sonnenlänge λ in ganzen Graden fortschreitet. Ich gebe nebenstehendes kleine Bruchstück derselben. Daraus erkennt man, daß η um die Tage des Sommer-

λ	η		
	°	'	''
77°	51	13	43
78°	51	30	26
79°	51	45	50
80°	51	59	52
81°	52	12	55
82°	52	24	32
83°	52	33	50
84°	52	43	47
85°	52	51	19
86°	52	57	32
87°	53	2	24
88°	53	5	53
89°	53	8	1
90°	53	8	43

solstitiums herum in Kairo recht beträchtlich ist, die Refraktion also für die Genauigkeitsverhältnisse der damaligen Zeit zu vernachlässigen war. Es ist mithin die Verwendung der Höhe ohne Azimut in niedrigeren Breiten zur Ermittlung von φ ohne Bedenken zulässig. Die zwei im Sperrdruck gegebenen Sätze können sich wohl nur auf die Ortsbreite beziehen, die „geringe Abweichung“ auf die Konstanz der Sonnendeklination in der kurzen Zeit, während der die Sonne in Kairo an diesem Tage die Südseite eines Ostwestvertikals bescheint. Daß aber die Höhe ohne Azimut in unserm Fall für die Breitebestimmung ganz ausgezeichnet ist, erkennt man sogleich, wenn man (II) nach der Breite auflöst. Es folgt

$$\sin \varphi = \frac{\sin \delta}{\sin \eta}$$

und daraus durch logarithmische Differentiation

$$\cotg \varphi \cdot d \varphi = \cotg \delta \cdot d \delta - \cotg \eta \cdot d \eta.$$

Bei konstant gehaltenem δ vereinfacht sich diese Fehlergleichung, und es wird (da $d\delta = 0$)

$$d \varphi = - \tan \varphi \cdot \cotg \eta \cdot d \eta \quad \text{. (VI)}$$

Mit den Zahlenwerten $\varphi = 30^\circ$, $\eta = 53^\circ 8'$ erhält man aus (VI)

$$d \varphi = -0.433 \cdot d \eta \quad \text{. (VII)}$$

Das Minuszeichen erklärt sich daraus, daß mit wachsender Ortsbreite die Höhe ohne Azimut abnimmt. Es bringt also nach (VII) für die Breite von Kairo ein Fehler in der Höhe ohne Azimut nur etwa den 0.4 fachen Fehler in der Breite hervor; ist also η beispielsweise 2' falsch, so ist der Fehler in φ nur etwa 51".

Wie indessen Ibn Yûnus zu seiner Wahrnehmung kam, daß ein Fehler in der Höhe ohne Azimut für die Breite in geringerem Grade fühlbar sei, lehrt die interessante geschichtliche Notiz, die er uns über die Breitebestimmung Kairos hinterließ. Es heißt im Kapitel XI, S. 241:

„Und schon seit längerer Zeit vertraten die Gelehrten unserer Stadt die Ansicht, daß deren Breite 29° sei. Doch es wurde mir berichtet, daß ihre wissenschaftliche Art weniger trefflich zu sein schien als diese, bis daß ich sie schließlich verwarf und in Widerspruch geriet mit der ganzen Gelehrtenzunft unserer Zeit, die da behauptet, daß die Meridianhöhe auf 29° hinweise. Und ich bemerke, daß auch ich sie maß, und ich wählte dazu den Abstieg der Sonne in den Kopf des Krebses, um das Maximum der Sonnendeklination zu haben, weil dann bei der Höhe ohne Azimut und auch bei der Meridianhöhe g) das nicht in Erscheinung tritt, was sonst deutlich wahrnehmbar wäre, auch wenn der Ort der Sonne um viele Minuten von dem durch Rechnung ermittelten abweicht. Alsdann zog ich gegen die Zeit des Eintritts der Sonne in den Kopf des Krebses die Ostwestlinie mittels des indischen Kreises an dieser Stelle und verbesserte sie so lange, bis es zuletzt zwischen dem Abstand des Eintritts des Schattens vor der Mittagslinie und dem Abstand seines Austritts keinen wahrnehmbaren Unterschied mehr gab. Und ich habe die Linien

¹⁾ Histoire de l'astronomie du moyen âge. Paris 1819, S. 114.

vorher genau untersucht, indem ich sie bei heiterem Wetter jeden Tag prüfte, bis daß ihre Richtigkeit außer Zweifel stand.

Darauf richtete ich auf der Ostwestlinie einen rund gedrehten Gnomon auf, prüfte ihn und untersuchte ihn ganz gründlich auf seine Richtigkeit. Und ich beobachtete die Spitze seines Schattens, bis daß sie in die Nähe der Linie gelangte. Dann nahm ich die Sonnenhöhe mit einem Astrolabium, das Ḥamid ibn 'Alī Mardīnī¹⁾ verfertigt hatte, gleich der augenblicklichen Höhe; ich beobachtete sie beharrlich, und sie vermehrte sich noch ein klein wenig, bis daß die Schattenspitze des Gnomons auf die Ostwestlinie fiel, und jetzt war die augenblickliche Höhe etwas größer als 53°. Es bezeugt diese Messung, daß die Breite 30° oder sehr nahe daran ist. Ich hatte aber auch schon die Höhe ohne Azimut für die Breite von 29° ausgerechnet: sie betrug 55° 36' 48", in der Breite 30° dagegen ist sie 53° 8' 45", unter der Voraussetzung, daß die größte Deklination 23° 35' ist.

Doch ich beobachtete auch den Schatten des miqjās, bis daß seine Spitze die Mittagslinie erreichte, und maß die Meridianhöhe mit dem Astrolab selbst. Sie betrug korrigiert²⁾ 83° 35', und dies beweist wiederum, daß die Breite 30° ist. Und ich verwandte viel Sorgfalt und Mühe darauf und erlangte dadurch dies Resultat, und es wurde für die Bestimmung der Meridianhöhe an den meisten Orten bis zur Breite 30° in der gleichen Weise verfahren.

Und es fand die Messung auf dem Hause meines Großvaters Yūnus ibn 'Abd A'lā statt — Gott erbarme sich seiner! — Als dann wurde der Astronom Abū'l Farāğ Aḥmed ibn 'Alī ibn al-Ḥasan, bekannt als Ibn at-Taḥḥān (Sohn des Müllers) darauf aufmerksam. Es war dieser Mann bewandert in den Zweigen der Wissenschaft (der Astronomie) und ein trefflicher Gelehrter; er wollte gern selber dabei sein, und so lud ich ihn dazu ein. Da tat er eine Äußerung, die keinen der Gelehrten befremden wird, nämlich die, daß für die Sonne der Verfasser der erprobten Tafeln die Ära ihrer Beobachtung schon fern liegt, und daß es wahrscheinlich sei, daß die Sonne ihren Ort, den sie zur Zeit der Schule jener eingenommen habe, bereits verlassen hätte. Aber woran ich nicht zweifle, das ist die Messung bei Beginn des Steinbocks, und der Grund dafür ist, daß keine Lücke, welche dazwischen liegt, bewiese, daß der Ort der Sonne dann schon etwas verändert ist.

Wie oben schon erwähnt, stand die Sonne damals im Beginn des Krebses. Wir warteten auf ihren Abstieg zum Beginn des Steinbocks, und Abū'l Farāğ informierte den Abū'l Ḥasan Muḥammed ibn 'Abd al-Warīṭ ibn al-Lubānī über das, was zwischen uns war. Da kamen sie (beide) mir zuvor. Es war noch ein Tag bis zum Eintritt der Sonne in den Kopf des Steinbockes, der Messung des Schattens und der Meridianhöhe, und es bemerkte Abū'l Ḥasan, daß der Schatten den Beweis dafür erbracht hätte, daß die Breite 29° sei. Wir versammelten uns am darauffolgenden Tage, dem Tag des Eintritts der Sonne in den Steinbock, auf dem Dach der Ġāmi' al-'atīq³⁾, und wir bedienten uns zur Messung einer glatten Marmorfläche, die ich geprüft hatte; es war ihre Richtigkeit tadelfrei und nicht minder richtig die Wage⁴⁾. Dann übten wir noch etwas Geduld im Nivellieren der Bodenfläche, bis daß sie uns ganz befriedigte, und nunmehr machten wir die Platte mit Gips fest. Wir fixierten auf ihr eine Marke und machten sie zum Mittelpunkt. Und ich erstellte einen Gnomon, (ṣahs) . . . und ich erprobte ihn und fand (den Fehler) aus der Spitze seines Schattens durch Vorwärts- und wieder Rückwärtsdrehen h) gegen den Fingernagel; ich beseitigte seinen Fehler, indem ich eine Feile nahm, mit der er gefeilt wurde, bis er ganz fehlerlos war. Darauf maßen wir seinen Meridian-

¹⁾ Lesung des letzten Wortes nicht ganz sicher; es kann auch Mardī heißen.

²⁾ d. h. von der Höhenparallaxe der Sonne befreit.

³⁾ d. i. die Moschee des (Feldherrn des Chalifen 'Omar) 'Amar ibn al-'Āṣ in Fuṣṭāt. Vgl. für nähere Details über diese älteste Moschee Kairo: Bädcker: Ägypten, 1913, S. 40 und Franz Pascha a. a. O. S. 4 ff.

⁴⁾ Die Horizontalität der Flächen wurde u. a. durch Nivellieren mit einer Art Setzwage bestimmt, die man auf den verschiedensten Stellen aufsetzte. Vgl. E. Wiedemann: Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften X, Erlangen, 1906, S. 316 ff.

daselbst zu $\varphi = 54^\circ 10' 47''$ bestimmt. (Vgl. Astronom. Nachr. 1828, VI. Bd., Nr. 126, S. 141—143, wo Hansen den Besselschen Gedanken weiter ausführt.) Jedoch ist zu der Methode Bessels zu bemerken, daß sie nicht einer genauen Koinzidenz des Vertikalkreises, den das Durchgangsinstrument beschreibt, mit der Ebene des 1. Vertikels bedarf; auch beobachtet man im Besselschen Fall nicht die Höhe eines Sterns im 1. Vertikel, sondern die Zeiten, bei denen der Stern in diesem Vertikal 2 mal durch den Faden des Fernrohrs geht. Sind diese Zeiten t und t_1 , so ist nach Bessel:

$$\tan \varphi = \tan d \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (t_1 + t)}{\cos \frac{1}{2} (t_1 - t)}$$

Es hat also, streng genommen, die Methode Bessels mit der des Ibn Yünus nichts zu tun. Bessel selbst nennt als Urheber des Gedankens, im 1. Vertikal zu beobachten, Olaus Römer, (1644—1710) über dessen Instrumente (und Beobachtungen) P. Horrebow in der Basis Astronomiae, Havniae, 1735, handelt. Im VII. Kap. dieses interessanten Buches ist de Machina Roemeri Azimuthali (pag. 43) die Rede, aber es findet sich kein Hinweis auf die Bestimmung der Breite mit dieser Machina, vielmehr liest man pag. 21: „Solae meridianae altitudines per instrumentum fixum faciles et certae sunt pro latitudinibus investigandis.“ Als Breite für die Turris Astronomica Tuseulani Roemeri findet man (pag. 142) $\varphi = 55^\circ 40' 59''$ angegeben. Vermutlich ist φ durch Meridianhöhen bestimmt worden. Auch die Methode von S. G. Böhm: „Geographische Breite und Azimut zugleich aus bloßen Azimutbeobachtungen der Circumpolarsterne, ohne Kenntnis und Hilfe der Zeit auf das genaueste zu finden.“ (Abh. d. K. Böhm. Gesellsch. d. Wiss., Prag, 1855) hat doch andere Tendenzen. Mehr Verwandtschaft mit unserem Problem zeigt der „Nuovo metodo per determinare la latitudine mercè le altezze di due stella prossime ad un medesimo semi-circolo di declinazione“ des Professors der Navigation am Instituto Nautico di Recco, Antonio Bono, (Genova, 1876) auf welches kleine Schriftchen mich Herr Professor A. Wademeyer, Berlin, hinwies. Darinnen wird aus Gründen, deren Erörterung hier zu weit führte, vorgeschlagen, die gleichzeitigen Höhen zweier bekannten Sterne nahe dem 1. Vertikal zu nehmen.

Eine mit der Yünusischen völlig identische Formulierung der Aufgabe habe ich (außer bei Weyer: „Vorlesungen über nautische Astronomie“, Kiel 1871, S. 97) bis jetzt nur in der Astronomie des Marins (par l'auteur des Mémoires de Mathématique et de Physique, rédigés à l'Observatoire de Marseille) à Avignon 1766, finden können. Das reichhaltige Buch ist — so heißt es im Vorwort — geschrieben, um dem Navigateur an Stelle der der praktischen Anwendungen gänzlich entbehrenden Astronomie nautique von de Maupertuis etwas Brauchbares zu bieten. Das Buch bringt eine Fülle von Aufgaben über das Nautische Dreieck: Zenit—Woltpol—Stern (Sonne), und in der Gruppe der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke auch die folgende:

„La hauteur du Soleil dans le 1^{er} Vertical est $25^\circ 26' 20''$, sa déclinaison $19^\circ 39' 10''$. On demande l'heure et la latitude.“ (p. 121) die Auflösung lautet:

$\log \sin 25^\circ 26' 20''$	comp. arit.
	0.366968
$\log \sin 19^\circ 39' 10''$	9.526752
$\log \sin 51^\circ 32'$	$= \log \sin de la latitude = 9.893740.$

In einer 2. Aufgabe dieser Art ist δ unverändert, $\eta = 29^\circ 21' 59''$, es findet sich $\varphi = 43^\circ 18'$. Eine nähere Bemerkung hierzu wird nicht gemacht, so daß den Autor wohl keine besonderen Gründe zur Formulierung der Aufgabe leiteten.

Die genaue Datierung der erstmaligen Verwendung der Höhe eines Gestirns im Ostwest-Vertikal zur Breitebestimmung durch einen abendländischen Astronomen, Geographen oder Nautiker, der den Nutzen der Methode ähnlich Ibn Yünus erkannte, wäre Aufgabe einer eigenen Untersuchung, zu deren Durchführung ich mich aber in meinem Wohnort — fernab von jeder nennenswerten wissenschaft-

lichen Bibliothek — ganz außerstande fühle. Nur wer in ähnlicher Literaturnot wie ich lebt, vermag diese ständige Hemmung richtig zu würdigen. So muß ich mich damit begnügen, in dieser Frage die primäre Quelle aufgeschlossen zu haben.

Anmerkungen.

a Über die Bestimmung der geographischen Breite aus der Meridianhöhe der Sonne unterrichtet uns Ibn Yūnus eingehend im 12. Kapitel der Hākemitischen Tafeln. (Leidener Hdschr. fol. 258.) Man liest dort:

„Wenn du auf diese Weise zur Kenntnis der Ortsbreite gelangen willst, so ermittle die äußerste Grenze der Zunahme der Sonnenhöhe bis zu ihrem Durchgang durch den Meridian. Beobachte sie schon am Anfang des Tages und sieh zu, wie sie wächst, bis daß sie endlich den Stillstand ihres Wachstums erreicht hat. Dann wird die erlangte größte Höhe aufgeschrieben, damit man ihren Betrag weiß. Wenn die Beobachtung mit einem Instrument gemacht wurde, das nicht genauer als auf zwei Minuten abzulesen gestattet, — ein Betrag, der das Maximum der Sonnenparallaxe im (Meridian) Höhenkreis darstellt¹⁾ — so übergehe die Parallaxe bis zu dieser Größe und halte (einfach) an der gemessenen Meridianhöhe für diesen Tag fest. Und wisse, daß Ptolemaeus den größten Betrag der Parallaxe zu 2' 51" angesetzt hat, unter der Bedingung, daß die Sonne die größte Entfernung vom Erdmittelpunkt hat, und er wird beim kleinsten Abstand derselben vom Erdmittelpunkt etwa 3' erreichen. Wenn du aber mit einem so großen Instrument beobachtet hast, daß 2' an ihm deutlich zu unterscheiden sind, so vermehrest du die beobachtete Sonnenhöhe noch um den Betrag ihrer Parallaxe gemäß dem, was du in der Tafel der Parallaxe der Sonnenhöhe findest, oder du berechnest den Betrag auf eine Weise, die ich später noch näher darlegen werde. Was sich dann ergibt, das ist die Meridianhöhe der Sonne an eben diesem Tage.

Du kannst für diesen Tag aber auch die Mittagslinie mit Hilfe des indischen Kreises ziehen. Du stellst am Morgen des betreffenden Tages einen Gnomon auf und suchst die fehlerlose Höhe der Sonne zu dem Zeitpunkt herauszubringen, wann die Schattenspitze des Gnomons gerade auf die Mittagslinie fällt; das ist alsdann die derzeitige Meridianhöhe der Sonne. Du verbesserst sie um den Betrag der Höhenparallaxe, wenn das Instrument, mit dem du die Höhe nimmst, einen solchen Betrag abzulesen gestattet; wenn nicht, so läßt du die ermittelte Höhe in ihrem Zustand . . .“

b Das ist das erstemal, daß in der Literatur die Berücksichtigung der Parallaxe der Sonnenhöhe verlangt wird. Freilich hat Delambre ganz recht, wenn er bemerkt²⁾: . . . „il recommande la correction due à la parallaxe du Soleil; le précepte était juste, mais prématuré. On ne la connaissait pas assez bien; il était plus sûr de la négliger . . .“

c Es ist der Kreis, den man auf glatter, völlig horizontaler Fläche um den Fußpunkt des Gnomons als Kreismittelpunkt schlug und dann zwei gleich lange Schatten vor- und nachmittags beobachtete. In der indischen Literatur ist er zuerst ausführlich behandelt im Surya-Siddhānta (Journ. of the American oriental. Soc., New-Haven 1860, S. 239) dessen Abfassung durch Lāṭa etwa ins 3. oder 4. Jahrhundert fällt. Für ein viel höheres Alter des indischen Kreises in Europa haben wir noch zwei römische Zeugnisse. Das erste stammt von Vitruvius, der diese Methode in de architectura I. Cap. 6 um das Jahr 15 v. Chr. beschreibt. Das zweite verdanken wir dem römischen Gromatiker (Feld

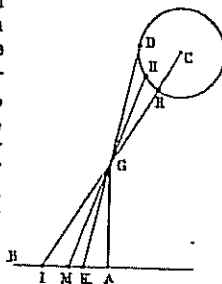
¹⁾ Leider existieren die Kapitel (60 und 63), in welchen Ibn Yūnus von der Parallaxe der Sonne und des Mondes handelt, nicht mehr. Aber er hat anscheinend auch seiner Parallaxen¹⁾ in der Ptolemaischen Werte zugrunde gelegt, die viel zu groß sind. (Horizontalparallaxe der Sonne in Wirklichkeit = 8.6"). Nach denselben (Ptolemaeus, Handbuch der Astronomie, deutsch v. K. Manitius, I. Teil, S. 323, Leipzig 1912) ist die Parallaxe der Sonne bei einer Höhe von 45° zwei Bogenminuten. Die Meridianhöhe beträgt im Wintersolstitium zu Kairo 36° 25', wenn man²⁾ für die Zeit des Ibn Yūnus die Ekliptikschiefe zu 23° 35' annimmt. Nach der Tafel des Ptolemaeus wäre also das Maximum der Sonnenparallaxe für $h = 36^\circ 25'$ etwa 2' 18".

²⁾ a. a. O. S. 102.

messer) Hyginus, der etwa um 100 n. Chr. lebte. (Vgl. für nähere Details: C. Schoy, Mittagslinie und Qibla, Ztschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde, Berlin 1915.)

d Auf fol. 238, Cap. XI des Leidener Ms. gibt Ibn Yûnus folgende bemerkenswerte „Abhandlung über den Schatten. Es haben einige der Früheren die Teile des Schattenmaßes zu 12, andere haben sie zu 60 gerechnet, und ich könne nur diese beiden Zahlen. Die Mehrzahl der Gelehrten aber hat sie zu 60 angenommen. Der Schatten heißt vor dem zawâl: zill und nach dem zawâl: fai'; so wird in der guten arabischen Sprache gesagt. Der Schatten aber, den die Männer der Wissenschaft meinen, ist der Teil des Sonnenscheins, den ein Gegenstand verdeckt, der senkrecht auf ebenen, dem Horizont parallelen Flächen steht. Und alle sind, soviel ich weiß, der Ansicht, daß der Schatten, der durch Beobachtung erhalten wird, der augenblicklichen Höhe des Sonnenmittelpunktes entspreche. Alle aber irren, und dabei ist einer in die Fußstapfen des anderen getreten, weil sie zu wenig nachdenken. Das Richtige jedoch ist, daß, wenn wir von der Spitze des senkrecht stehenden Gnomons eine gerade Linie in der Fläche des Höhenkreises ziehen, sie den Sonnenball in dessen Zenit berührt und in gerader Richtung zur Fläche geht, auf welche der Schatten fällt. Denn dieser Punkt ist das Ende des Schattens, den man durch die Beobachtung zu diesem Zeitpunkt findet, und die Höhe des Schattens ist die Höhe des Punktes, in welchem die gerade Linie, die wir gezogen haben, den Sonnenball berührt. Und es ist zwischen dieser Höhe und der Höhe des weiter herwärts gelegenen Sonnenmittelpunktes ein halber Durchmesser der Sonnenscheibe, wie klar gemacht wird im Buche al-akrûsâ¹⁾. Was ich oben dargelegt habe, wird evident durch einen geometrischen Beweis — mögen die Gelehrten durch diesen Beweis des Gesagten Richtigkeit erkennen, so Gott will. Ich stelle nun den allgemein zugegebenen Satz, über den man nicht streiten kann, auf, daß von jedem Punkte in Gedanken eine gerade Linie nach der Sonnenkugel gezogen werden kann, so lange kein Hindernis besteht, daß dieser Punkt im Sonnenschein liegt, und daß von keinem Punkte im Geiste eine gerade Linie zur Sonne gezogen werden kann, wenn ein Hindernis dafür besteht, d. h. der Punkt im Schatten liegt.

Beweis: Wenn wir eine gerade Linie ziehen, indem wir für sie den Abschnitt in Betracht ziehen, der die Bedingungen für die Fläche erfüllt, auf die der Schatten fällt, und wenn wir alsdann den Höhenkreis ausbreiten, das ist also die Linie AB, und es sei der auf ihr senkrecht stehende Gnomon AG, und wenn wir dann in der Fläche des Höhenkreises vom Sonnenball, dessen Mittelpunkt C ist, das Stück DHR abgrenzen, und wir ziehen darauf zwei gerade Linien in der Fläche des Höhenkreises: eine, die durch den Sonnenmittelpunkt und die Spitze des senkrecht stehenden Gnomons geht, das ist also die Linie CGJ, und welche die Linie AB in J trifft, und die Linie DGK, die den Sonnenball im Punkte D berührt, und die Linie AB in K trifft, so ergibt die Linie AJ die Höhe des Sonnenmittelpunktes C, und Linie AK gibt die Höhe des Punktes D, und ich behaupte nun, daß die Strecke JK im Sonnenschein liegt. Der Beweis dafür ist folgender: Wenn du vom Punkte M, der zwischen K und J liegt, eine gerade Linie nach der Sonnenkugel ziehst, so trifft sie dort zwischen den Punkten R und D in einem Punkt H auf, indem dafür kein Hindernis besteht. Linie MH geht durch den Punkt G, erreicht aber den Punkt D nicht. Und so ist klar, daß Punkt M im Sonnenschein liegt, weil es doch im Geiste klar ist, daß von ihm eine gerade Linie ausgeht, und noch



¹⁾ Ich weiß nicht, was das Buch al-akrûsâ ist. Herr Professor C. F. Seybold in Tübingen, dem ich auch sonst viele wertvolle Hinweise verdanke, dessen Tod ein empfindlicher Verlust für die Wissenschaft ist, teilte mir brieflich die, wie mir scheint, sehr glückliche Vermutung mit, *الأكروسا* al-akrûsâ könnte vielleicht *الأكروماتا* al-akrûmâtâ d. i. das griechische ἀκρόματα = Vorlesungen, Kollegien, Studien sein. In der Tat sind die zwei arabischen Wörter außerordentlich ähnlich.

viele gerade Linien sind möglich auf der Strecke zwischen den beiden Punkten R und D, ohne daß ein Hindernis besteht, und zwar nach jenen Punkten auf der Strecke JK. Und das war es, was wir beweisen wollten. Und bei Gott ist der Erfolg!"

e Es ist zweifellos Hermes Trismegistos (*τριμέγιστος*) gemeint. Dies ist die spätere griechische Benennung des ägyptischen Gottes Thoth, der in Ägypten den Beinamen aa aa „der Große, Große“ führte (griechisch auch *μέγας καὶ μέγας*) Thoth war der Gott des Maßes und der Zahl, der Schrift, der Künste des Verborgenen und der Verfasser heiliger Schriften. Die Griechen haben ihn als Erfinder früh ihrem Hermes gleichgesetzt und schrieben ihm insbesondere die Einteilung des Tages in 12 Stunden und die Erfindung der Astrologie und Musik zu. Sie gaben Stätten, wo sein Kult gepflegt wurde, den Namen Hermopolis. Später sank er mehr zum menschlichen Wesen, mit dem Charakter eines Weisen herab. Auf seine heiligen Bücher beriefen sich auch die Sabier oder Harraniter am oberen Euphrat, deren Sekte noch tief in die Zeit des Islām hinein bestand. Die Araber hielten Hermes für den Verfasser zahlreicher, philosophischer, medizinischer und astrologischer Werke und behaupteten die Existenz von 24 hermetischen astrologischen Schriften. Für nähere Details sei auf den lichtvollen Artikel: „Hermes Trismegistos“ von Kroll in Pauly Wissowa, Real-Encyclopädie d. klass. Altertumswiss., 8. Bd., Stuttgart 1913, S. 791–823 verwiesen, für eindringendere Studien der Hermetischen Literatur und Geschichte auf R. Reitzensteins „Poimandres“, Leipzig 1904, wo man S. 166–176 auch Näheres von dem Hermes der Sabier und Araber erfährt.

f Bei Ibn Yūnus fand ich bis jetzt nur ein einziges Mal die Tangens- und Cotangensfunktion, natürlich als Schatten, in einer Formel verwendet, und zwar bei der Berechnung des Azimuts α aus der Ortsbreite φ und der augenblicklichen Sonnenhöhe h zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen. Der Autor lehrt:

$$\sin \alpha = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin h}{\cos h} = \tan \varphi \cdot \tan h = \frac{\tan \varphi}{\cotg h},$$

wo $\tan \varphi$ der Mittagsschatten zur Zeit des Äquinoktiums, $\cotg h$ der Schatten bei der Sonnenhöhe h ist, falls man die Länge des schattenwerfenden Stiftes = 1 setzt. (Vgl. hierzu des Verf. Abhandlung: „Das 20. Kapitel der großen Hākimitischen Tafeln des Ibn Yūnis: Über die Berechnung des Azimuts aus der Höhe und der Höhe aus dem Azimut“, Ann. d. Hydr. usw., 48. Jahrg. [1920], S. 109.) Oft begegnet man ihr bei Abū'l Wafā', dem man die Einführung der „Schattenregel“ in die sphärische Trigonometrie zuschreibt. Dabei kann die unbekannte Größe auch in der Cotangente stehen; Abū'l Wafā' schlägt dann in der Schattentafel nach. (Pariser arab. Mscr. 2494, fol. 66ff.)

g Bekanntlich ändert sich die Höhe eines Gestirns in der Nähe des Meridians am wenigsten. Differenziert man die Grundgleichung des astronomischen Dreiecks

$$\sin h = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s,$$

wo s der Stundenwinkel ist, nach h und s , so findet man

$$dh = - \frac{\cos \varphi \cdot \cos \delta}{\cos h} \cdot \sin s \cdot ds.$$

Wie man sieht, wird $dh = 0$ für $\sin s = 0$, d. h. $s = 0$. Dann steht das Gestirn im Meridian.

h Der Sinn dieser Worte wird aus einer Bemerkung des Autors klar, die er im 11. Kapitel der Hākimitischen Tafeln, fol. 239 macht. Dort heißt es: „Und zu dem, woran man die Richtigkeit des Senkrechtstehens des Gnomons auf der dem Horizont parallelen Fläche erkennt, gehört, daß er, vorwärtsgehend (*muqbilān*, umgedreht) und wieder rückwärtsgehend (*mudbirān*, zurückgedreht) seinen Schatten in der Schattenfläche auf zwei ganz nahe beieinander liegende Punkte wirft, deren Abstand nur den Betrag hat, der der Fortbewegung der Sonne in ihrem Tageskreis während der Drehung entspricht...“ Damit ist die Drehung des Gnomons in dem rundgebohrten Loch zu verstehen, in dem sein Fuß ruht. Noch zwei andere Verfahren erwähnt Ibn Yūnus, nach denen man prüfen kann, ob der Gnomon senkrecht auf der Schattenfläche steht; bezeichnet aber

dieses als das genaueste. Delambre bemerkt hierzu: „... il faut bien vérifier la perpendicularité du gnomon; l'auteur en donne plusieurs moyens: le plus remarquable est de retourner l'instrument, et de faire des observations dans les deux situations opposées. C'est la première mention que je trouve de cette pratique aujourd'hui très répandue¹⁾.“

1 Vgl. Anmerkung d. Nimmt man den scheinbaren Halbmesser der Sonnenscheibe zu 15' bis 16' an, so folgt für die Breite Kairos, d. h. Fustâts, $\varphi = 29^\circ 43' + (15 \text{ bis } 16') \text{ also sehr nahe } 30^\circ$. Ist nämlich H die Meridianhöhe der Sonne, so gilt

$$\begin{aligned} H &= 90^\circ - \varphi + \delta \\ \varphi &= 90^\circ + \delta - H. \end{aligned}$$

Nun gibt der Gnomon ein um den halben Sonnendurchmesser zu großes H; berücksichtigt man dies nicht, so werden die mit dem Gnomon ermittelten Breiten um 15' bis 16' zu klein. (Vgl. auch: R. Wolf: Geschichte der Astronomie, München 1877, S. 375.)

2 Auf dem Zifferblatt einer derartigen Sonnenuhr bildet sich der Himmelsäquator als Gerade ab, die unter $90^\circ - \varphi$ zum Horizont geneigt ist. Auch aus den hyperbolischen Abbildern (Schattenkurven) der Wendekreise läßt sich die Ortsbreite leicht ablesen. (Vgl. für Details: C. Schöy: „Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhebestimmungen bei älteren Völkern“, Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte, Hamburg 1911, S. 28.)

1 Eine solche Stunde ist immer der 12. Teil des Lichttages, also im Winter kurz und im Sommer lang. Die Stundenlinien bilden sich als Kurven auf das Zifferblatt der Sonnenuhr ab. (Vgl. zu ihrer Theorie: H. Michnik: Beiträge zur Theorie der Sonnenuhren, Leipzig 1914.)

2 Schreibt man Formel III nach φ aufgelöst, so hat man

$$\tan \varphi = \frac{\sin m}{\sin \eta}$$

und daraus durch logarithmische Differentiation

$$\frac{2}{\sin 2\varphi} \cdot d\varphi = \cotg m \cdot dm - \cotg \eta \cdot d\eta$$

oder

$$2 \cdot d\varphi = \cotg m \cdot \sin 2\varphi \cdot dm - \cotg \eta \cdot \sin 2\varphi \cdot d\eta.$$

Setzt man hierin für Kairo ($\varphi = 30^\circ$) $\eta = 53^\circ 8'$ und $m = 27^\circ 30'$, so wird

$$d\varphi = 0.831 dm - 0.324 d\eta,$$

also wäre der Fehler, den η auf die Genauigkeit der Ortsbreite ausübte, hier noch geringer als bei der Bestimmung von φ aus η und δ . Freilich wird sich die Morgen- oder Abendweite der Sonne nur in Gegenden mit ganz reiner Luft genügend genau beobachten lassen. Daß dies in Ägypten, überhaupt im subtropischen Orient, sehr wohl möglich ist, und wie man dann (nach Proclus) zu verfahren hat, lehrt sehr anschaulich J. B. Biot (Mémoire sur divers points d'astronomie ancienne, Paris 1846, S. 46 ff.).

¹⁾ n. a. O. S. 102. Für Delambres Geschichte der Astronomie des Mittelalters hatte der französische Orientalist und Astronom J. J. Sédillot (1777–1832) verschiedene Partien der Hülke-mitischen Tafeln übersetzt und sie Delambre, der selbst des Arabischen unkundig war, zur Verfügung gestellt. Im Druck ist die Sédillotsche Übersetzung leider nicht erschienen. Sie ist wohl unauffindbar.

Die Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes durch Beobachtung der Meridianhöhe der Sonne oder mittels der Kenntnis zweier anderen Sonnenhöhen und den zugehörigen Azimuten nach dem arabischen Text der Hâkimitischen Tafeln des Ibn Yûnus.

Dargestellt von C. Schoy, Essen a. d. R.

(Hierzu Tafel 1.)

Schon früher wies ich darauf hin, daß der hervorragende arabische Astronom Ibn Yûnus in verschiedenen Kapiteln seines umfangreichen Werkes, den Hâkimitischen Tafeln, mehrere Methoden zur Bestimmung der Ortsbreite lehrt, die bis heute zum größten Teil noch unbekannt sind. An dieser Stelle möchte ich auf die Verfahren eingehen, die der islâmische Gelehrte zur Ermittlung der geographischen Breite aus Sonnenhöhen und Azimuten anwandte oder vorschlug. Sie sind im 12. und 21. Kapitel seines zig (astron. Tafelwerk) enthalten. Die Photographien dieser Partien des arabischen Textes hat mir Herr Dr. C. van Arendonk in Leiden gütigst vermittelt, außerdem, da er gleich mir der Ansicht ist, daß die Übersetzung eines derartigen Werkes dem Urtext möglichst genau entsprechen soll, sich die Mühe genommen, einen Teil meiner Übersetzung in grammatisch-stilistischer Hinsicht zu prüfen und zu verbessern, wofür ich Herrn Konservator van Arendonk auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen möchte.

Wie schon die Überschrift dieser Studie erkennen läßt, handelt es sich hier um zwei verschiedene Arten der Breitenbestimmung:

1. um die Auffindung der Ortsbreite aus der beobachteten Kulminationshöhe der Sonne,
2. um ihre Ermittlung aus der Kenntnis zweier verschiedenen Sonnenhöhen und den zugehörigen Azimuten.

Die erste Methode wird im 12. Kapitel gelehrt. Die ausführliche Klarstellung aller möglichen Fälle kann für heutige Anforderungen noch als muster-gültig bezeichnet werden. Da der Text dem Verständnis keinerlei Schwierigkeiten macht, so bringe ich gleich die wörtliche Übersetzung des 12. Kapitels und lasse in den Zusätzen auch einen Passus aus dem 11. Kapitel folgen, der von besonderem historischen Werte sein dürfte.

I.

Das 12. Kapitel: Über die Kenntnis der Breite der Städte und der übrigen Länder
durch Messen der Meridianhöhe der Sonne. S. 258.

Wenn du hierzu gelangen willst, so ermittle an jenem Tage zur Mittagszeit die maximale Sonnenhöhe. Dies erreicht man durch Beobachtung der Sonnenhöhe schon während des Vormittags, indem sie zunimmt, bis sie das Maximum in der Zunahme erreicht hat und dann wieder abnimmt, so daß du den höchsten Punkt kennst, den sie erreichte. Wenn die Beobachtung mit einem Instrument gemacht wird, auf welchem die 2 Minuten nicht deutlich werden, welche nach meiner Meinung das Maximum der Sonnenparallaxe im Höhenkreis ausmachen, so betrachte (das Resultat der Beobachtung) als ob es die Sonnenhöhe zur Mittagszeit an jenem Tage wäre. Und wisse, daß Ptolemäus die Parallaxe zu $2' 51''$ angesetzt hat unter der Voraussetzung, daß die Sonne in der größten Entfernung vom Erdmittelpunkt steht, und sie wird beim kleinsten Abstand derselben vom Erdmittelpunkt etwa $3'$ erreichen. Wenn die Höhe, die man genommen hat, mittels eines gedehnten (großen) Instrumentes erlangt wurde, auf welchem die 2 Minuten deutlich zu unterscheiden sind, so vermehre man die beobachtete Höhe noch um den Betrag ihrer Parallaxe, gemäß dem, was sich in der Tafel der Parallaxe der Sonnenhöhe findet, oder man berechnet diesen Betrag in einer Weise, die ich später noch näher darlegen werde. Was sich dann ergibt, das ist die Meridianhöhe der Sonne an eben diesem Tage. Du kannst aber auch an einem Tag mit Hilfe des indischen Kreises α die Mittagslinie herausbringen und am nächsten Tag während des Vormittags einen Gnomon darauf aufstellen und

genau die Höhe feststellen, wann die Schattenspitze des Gnomons gerade auf die Mittagslinie fällt. Das ist alsdann die derzeitige Meridianhöhe der Sonne. Berichtige sie weiter um den Betrag der Höhenparallaxe der Sonne, wenn ein Instrument benutzt wird, auf welchem dies deutlich wird, wenn nicht, so läßt du die ermittelte Höhe in ihrem Zustande. Die Höhenbestimmung auf die erste Art kann innerhalb eines einzigen Tages stattfinden, die andere nur in zwei Tagen.

Bezüglich des Höhenwinkels der Sonne, wie er durch Messung gefunden wird, lassen sich drei Fälle unterscheiden:

1. Die Meridianhöhe der Sonne ist gerade 90° ; ihr Mittelpunkt steht im Zenit.
2. Die Meridianhöhe ist kleiner als 90° .
3. Ein Fall, in welchem der Sonnenmittelpunkt auf dem Horizontkreise liegt, für welchen Fall es keine Höhe gibt.

Der zweite Fall liegt hinsichtlich der Sonnenhöhe zwischen dem 1. und 3. Fall.

Und wisse, daß man für die Höhe zwei Richtungen unterscheidet: eine nördliche, bei der der Sonnenmittelpunkt zwischen Zenit und Nordpunkt liegt, und eine

südliche, bei der sich besagter Punkt zwischen Zenit und Südpunkt befindet.

Ausführung zum ersten der drei Fälle,

nämlich demjenigen, in welchem die Meridianhöhe der Sonne genau 90° beträgt. Falls also die Höhe der Sonne an einem gewissen Orte 90° ist, und du willst die Breite dieses Ortes wissen, so stelle für den Mittag desselben Tages die Länge der Sonne in der Ekliptik fest. Befindet sich die Sonne gerade im Beginn des Widders oder der Wage, so hat der (Beobachtungs-)Ort keine Breite; die beiden Pole des Äquators liegen im Horizont; sie haben weder Erhöhung noch Senkung. Und falls die Sonne sich in einem anderen Sternbilde der Ekliptik befindet, so verschaffe dir zuerst die Kenntnis ihrer Deklination, sei es durch Berechnung oder mittels der Tafel c, dann entscheide, ob sie nördlich oder südlich ist. Kennst du alsdann die Deklination und deren Vorzeichen¹⁾, so wisse, daß die Deklination gleich der Breite dieses Ortes ist, und daß ihr Vorzeichen mit dem der Breite übereinstimmt, so daß, wenn die Deklination nördlich ist, auch die Breite nördlich ist, und wenn die Deklination südlich ist, auch die Breite südlich ist.

Zahlenbeispiel zum 1. Fall.

Setze voraus, daß die Sonne im Beginn des Widders stehe und ihre Mittagshöhe 90° sei; alsdann hat der Ort keine Breite. Ferner sei die von der Parallaxe befreite Sonnenhöhe $= 74^\circ$. Du subtrahierst sie von 90° , es bleiben 16° übrig. Dies ist die Ortsbreite, vorausgesetzt, daß die Sonne auch im Anfang des Widders steht, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen!

S. 259.

Behandlung des 2. Falles.

Er ist der, bei dem die Meridianhöhe der Sonne $< 90^\circ$ ist. Wenn die Höhe der Sonne $< 90^\circ$ ist, so ermittle, ob die Richtung dieser Höhe hinsichtlich des Zenits eine nördliche oder südliche ist. Dann bestimme den Ort der Sonne (in der Ekliptik) für diese Meridianhöhe an jenem Tage und ermittle die Deklination und ihr Vorzeichen. Beachte folgendes: Wenn die Richtung der Höhe mit dem Vorzeichen der Deklination übereinstimmt, in der Weise, daß beide zugleich nördlich oder südlich sind, so addiere beide. Und wenn ihre Summe gerade 90° gibt, so hat der Ort keine Breite. Wenn aber die Summe $> 90^\circ$ wird, so ziehst du 90° von ihr ab; was übrig bleibt, das ist die Breite des Ortes. Sind nun Deklination und Höhe nördlich, so ist auch die Breite nördlich; falls aber beide südlich sind, so ist auch die Breite südlich. Und ist die Summe $< 90^\circ$, so ziehst du sie von 90° ab; der Rest ist die Ortsbreite, sei es, daß die Deklination südlich und die Breite nördlich oder die Deklination nördlich und die Breite südlich ist. Wenn aber die Richtung der Deklination von der der Höhe ver-

¹⁾ Ich übersetze in diesem Falle „giba“ (= Richtung) mit „Vorzeichen“, um diese Stelle des Textes möglichst dem modernen Sprachgebrauch anzugleichen.

schieden ist, also die eine nördlich, die andere südlich ist, so ziehe die Deklination von der Höhe ab, falls die letztere größer ist als die erstere; was übrig bleibt, ziehst du von 90° ab; der Rest ist die Breite des Ortes. Und wenn du das Vorzeichen der Breite wissen willst, so beachte: Wenn die Deklination nördlich, die Höhe aber südlich ist, so ist die Breite nördlich, und wenn die Deklination südlich, die Höhe aber nördlich ist, so ist die Breite südlich. Und ist bei verschiedenem Vorzeichen von Deklination und Höhe die Deklination größer als die Höhe, so ziehe die Meridianhöhe von der Deklination ab; was sich ergibt, ist der Betrag der Abweichung des Pols vom Zenit. Ziehe ihn von 90° ab, so ist der Rest die Polhöhe an diesem Ort. Und wenn die Höhe der Sonne südlich ist, so ist es der Nordpol, der vom Zenit gen Süden abweicht. Wenn aber die Höhe der Sonne gen Norden liegt, so ist es der Südpol, der vom Zenit zur Nordrichtung abweicht.

Beispiel zum 2. Fall.

Nimm die Meridianhöhe der Sonne in diesem Beispiel zu 74° und die Sonne im Beginn der Zwillinge stehend an. Ihre Deklination sei $20^\circ 16' 20''$, und ihre Höhe ist nördlich, ich meine, daß die Sonne zwischen Zenit und Nordpunkt liegt. Denn addiere ich zu ihr die Deklination, so gibt das die Summe $94^\circ 16' 20''$. Weil dies mehr als 90° ist, so subtrahiere ich davon 90° ; es bleibt $4^\circ 16' 20''$, und das ist die Breite des Ortes. Liegt aber die Höhe zwischen Zenit und Süden, so ziehe ich die Sonnendeklination von der Meridianhöhe ab: es bleibt $53^\circ 43' 40''$. Dies ist die Kulminationshöhe der Sonne zu Beginn des Widders oder der Wage. Wenn sie von 90° abgezogen wird, bleibt $36^\circ 16' 20''$ als Ortsbreite übrig. Du läßt ferner die Sonne in 20° des Skorpions und demzufolge ihre Deklination $-17^\circ 50' 50''$ sein. Die Meridianhöhe betrage 50° . Weil die Deklination südlich ist, zählst du ihr die Meridianhöhe hinzu. Das gibt $67^\circ 50' 50''$. Dies ist gleich der Höhe des Kopfes des Widders. Du ziehst sie von 90° ab, und es bleibt $22^\circ 9' 10''$ als Ortsbreite oder Höhe des Nordpols übrig. — Beispiel der Höhe, die sich von der Südrichtung nach der Nordrichtung versetzt hat (hinübergebracht worden ist). Nimm den Ort der Sonne im Kopf des Krebses an; ihre Deklination ist $23^\circ 35'$, und die Meridianhöhe der Sonne stehe $103^\circ 35'$ vom Südpunkt ab, die Sonne stehe also zwischen Zenit und Norden. Du ziehst die Deklination von 90° ab; es bleibt $66^\circ 25'$ übrig. Dies ziehst du von der (nördlichen) Meridianhöhe der Sonne ab, und es bleibt 10° als die gesuchte Ortsbreite, und Allāh leitet zum Richtigen!

S. 260.

Der 3. Fall

ist derjenige, in welchem der Sonnenmittelpunkt, wann er den Meridian passiert, im Horizontkreise steht und sich nicht hebt und nicht senkt. Wenn also der Sonnenmittelpunkt bei seinem Durchgang durch den Meridian im Horizontkreise steht, und du suchst die Polhöhe dieses Ortes und deren Vorzeichen, so stelle zuerst den Ort der Sonne in der Ekliptik für die Tagesmitte des Beobachtungstages fest. Steht sie im Beginn des Widders oder der Wage, so ist die Breite des Ortes gerade 90° ; der Pol steht daselbst im Zenit. Befindet sich die Sonne aber an einer anderen Stelle des Tierkreises, so bestimme ihre Deklination und deren Vorzeichen, sowie die Richtung der Sonne, d. h. ob sie im Norden oder Süden steht. Und wenn Sonnenrichtung und Deklination gleichsinnig sind, so ziehst du die Deklination von 90° ab; das Ergebnis der Subtraktion ist die Breite des Ortes. Und falls die Sonne im Südpunkt in den Horizont kommt, so ist die Breite nördlich, und es ist umgekehrt, wenn sie im Nordpunkt in denselben gelangt. Sind beide Daten verschiedensinnig, ist also die Deklination nördlich und die Sonnenrichtung südlich, so ziehst du die Deklination von 90° ab; was übrigbleibt, ist die Höhe des Südpols an diesem Orte, indem er sich vom Zenit bis zur Gegend des Nordens entfernt hat. — Wir haben auf uns genommen die Darlegung über die Polhöhe und die Kenntnis der Breiten der Länder und Städte, d. h. die Kenntnis hiervon in bewohnten Ländern, in Theorie und Praxis, und Allāh leitet zum Richtigen!

Kenntnis der Meridianhöhe.

Dieser Abschnitt zerfällt in zwei Teile: Der erste Teil handelt von den Orten, die keine Breite haben, der andere von solchen mit Breite. Ich beginne mit den Orten ohne Breite; es sind diejenigen, die unter dem Äquator liegen.

Wisse, daß es für die Orte, die unter dem Äquator liegen, keine Höhen der beiden Pole gibt, vielmehr liegen beide Pole in ihren Horizontkreisen, und zwar in den Schnittpunkten des Meridians und Horizontes. Zu Beginn des Widders und der Wage geht die Sonne durch die Zenite (beider Horizontkreise), und wenn sie in den nördlichen Tierkreiszeichen steht, weicht sie von ihren Zeniten nach der nördlichen Richtung ab, und umgekehrt, wenn sie in den südlichen Zeichen steht. Wenn sie zu Beginn des Widders oder der Wage in den Meridian tritt, steht sie im Zenit, d. h. in 90° Höhe. Falls sie sich in einem anderen Tierkreiszeichen befindet, so ermittelst du ihre Deklination und ziehst sie von 90° ab; was übrig bleibt, das ist ihre Höhe von der nördlichen Seite aus. Falls sie in einem der südlichen Tierkreiszeichen steht, suchst du wiederum ihre Deklination auf und ziehst sie von 90° ab, was übrigbleibt, ist ihre Höhe von der Richtung des Südpunktes aus gezählt.

Im zweiten Teil, der von den Orten mit Breite handelt, muß man zwei Möglichkeiten unterscheiden, nämlich Ortsbreiten, in denen der Nordpol, und solche, in denen der Südpol sichtbar ist. Ist den Bewohnern der Nordpol in der Nordgegend sichtbar, so weicht der Äquator vom Zenit nach Süden ab, und die südliche Deklination reicht bis zur Nähe des Horizonts, die nördliche bis in die Nähe des Zenits. Ist hingegen den Bewohnern der Südpol sichtbar, so wisse, daß der Äquator vom Zenit nach Süden abweicht, und daß die nördliche Deklination bei ihnen dicht am Horizonte liegt, die südliche aber in der Nähe des Zenits.

Wenn man die Mittagshöhe an einem jener Orte, welche Breite haben, wissen will, so muß man erst dessen Breite kennen. Dann ziehe man sie stets von 90° ab; was übrigbleibt, das ist die Mittagshöhe der Sonne für den Beginn des Widders oder der Wage. Und wenn die Sonne in einem anderen Sternbild steht, so ermittle zuerst ihre Deklination und das Vorzeichen derselben hinsichtlich Norden oder Süden. Falls der Parallelkreis der Sonne gegen den Horizont hin liegt, so ziehe die Sonnendeklination von der Äquatorhöhe ab; was übrigbleibt, ist die Mittagshöhe der Sonne an diesem Tag. Wenn aber der Sonnenparallel bis nahe an das Zenit heranreicht, so vermehre die Deklination um die Äquatorhöhe in dieser Breite; was sich ergibt, sei es 90° oder nahezu 90° , das ist die derzeitige Meridianhöhe der Sonne. Überschreitet die Summe 90° , so ziehst du sie von 180° ab. Der Rest ist die Mittagshöhe der Sonne für diesen Tag. Und wisse, daß sie sich weggewendet hat von der Richtung der Äquatorhöhe an diesem Ort bis zur gegenteiligen Richtung, ich meine damit, daß die Höhe der Sonne zur Zeit der Äquinoktien nahe dem Norden war und sich jetzt der Südrichtung zuwendet, daß sie aber, wenn sie dem Süden benachbart ist, sich zum Norden wendet. Und falls die Sonne in ihrem Parallel sich dem Horizont nähert, und ihre Deklination der Höhe zur Zeit der Äquinoktien gleich ist, so wisse, daß dann der Sonnenmittelpunkt bei seinem Durchgang durch den Meridian im Horizonte liegt, ohne Erhebung und ohne Senkung. Und wenn die Deklination der Sonne größer ist als die Äquatorhöhe um einen Betrag, der kleiner ist als der halbe Sonnendurchmesser (Radius der Sonnenscheibe), so wisse, daß ihr Mittelpunkt schon unter dem Horizonte liegt, obgleich sie nicht ganz verborgen (unsichtbar) ist. Wenn die Deklination der Sonne aber um den Betrag ihres halben Durchmessers größer ist als die Äquatorhöhe, oder noch größer, so ist die Sonne für die Bewohner dieses Ortes nicht sichtbar, wenn sie in den Meridian kommt, und bei Alläh ist die Leitung zum Richtigen!

Meine Darlegung gilt für den Fall, daß die Deklination nahe an den Horizont, oder an das Zenit heranreicht im Zeitpunkt als man anfängt (?).

Beispiele über die Meridianhöhe der Sonne, falls der Ort eine Breite hat.

Ich verteile diese Beispiele auf drei Gruppen:

Bei der ersten Gruppe ist die Ortsbreite kleiner als die größte Deklination.

Dann sei die Ortsbreite der größten Deklination gleich.

Endlich übertrifft die Ortsbreite die größte Deklination an Größe.

Beispiele zur ersten Art: Nimm an, die Ortsbreite sei 20° und nördlich. Subtrahiere sie von 90° , so bleiben 70° ; dies ist die Äquatorhöhe dieses Ortes. Wenn die Sonne an einer dieser beiden Stellen (Beginn des Widders oder der Waage) steht, so ist ihre Mittagshöhe 70° ; die Sonne steht zwischen Zenit und Süden. Wenn die Sonne jedoch in einem andern Tierkreiszeichen steht, so kann es ein nördliches oder südliches Zeichen sein. Ich werde zuerst darlegen, was von ihr (der Sonne) gilt, wenn sie in den nördlichen Zeichen steht, nachher ein südliches Zeichen annehmen. Die Sonne stehe im 10° des Stieres; ihre Deklination ist mithin $+14^\circ 54' 8''$; folglich steht sie nahe am Zenit, und darüber habe ich oben schon gesprochen. Man kann zur Äquatorhöhe 70° die Deklination hinzuzählen, es ergibt sich alsdann die Mittagshöhe der Sonne für diesen Ort zu $84^\circ 54' 8''$. Du kannst aber auch die Deklination von der Breite subtrahieren; es bleibt dann $5^\circ 5' 52''$ übrig. Das ist die Zenitdistanz der Sonne. Ziehst du sie von 90° ab, so ergibt sich wiederum die Meridianhöhe zu $84^\circ 54' 8''$. —

Dann stehe die Sonne in $28^\circ 44' 48''$ des Stiers, und weil ihre Deklination S. 2 nördlich ist, zählst du sie zur Äquatorhöhe hinzu. Die Summe ist $= 90^\circ$ ¹⁾. Das ist die Meridianhöhe der Sonne für diesen Tag; die Sonne steht also im Zenit. Du kannst aber auch die Deklination von der Breite subtrahieren: Du erhältst kein Resultat; also weißt du, daß die Sonne zu Häupten steht.

Nimm ferner an, daß die Sonne im 10° der Zwillinge stehe; ihre Deklination ist $22^\circ 5' 0''$, und da sie nördlich ist, zählst du sie zur Äquatorhöhe, 70° , hinzu. Die Summe ergibt $92^\circ 5'$, und da dies $> 90^\circ$ ist, so weißt du, daß die Sonne sich von der Südrichtung schon abgewandt hat und sich zur Nordrichtung hinwendet; denn sie steht zwischen Zenit und Nordpol. Du ziehst $92^\circ 5'$ von 180° ab; es bleibt $87^\circ 55'$ als Meridianhöhe der Sonne. Du kannst in diesem Fall aber auch die Ortsbreite von der Deklination abziehen, da die Deklination das Größere ist; es bleibt alsdann $2^\circ 5'$ übrig; und das ist die Zenitdistanz der Sonne; ziehst du diese von 90° ab, so bleibt wiederum $87^\circ 55'$ als Meridianhöhe.

Weil also die Deklination größer ist als die Ortsbreite, so weißt du, daß sich die Meridianhöhe von der südlichen Richtung zur nördlichen gedreht hat und sich zwischen Zenit und Norden befindet. Dies gilt für den Fall, daß in den nördlichen Sternbildern die Ortsbreite kleiner ist als die größte Deklination.

Für die südlichen Sternbilder ist die Deklination stets von der Äquatorhöhe abzuziehen. So stehe die Sonne im Kopf des Skorpions; ihre Deklination ist alsdann $11^\circ 32' 22''$, und weil sie südlich (negativ) ist, ziehst du sie von der Äquatorhöhe, 70° , ab. Es bleibt $58^\circ 27' 38''$ übrig. Das ist die Mittagshöhe der Sonne für jenen Tag, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen! —

Beispiele zum zweiten Fall, bei dem die Ortsbreite gleich der größten Deklination $23^\circ 35'$ (Ekliptikschiefe) ist. Ziehe diese von 90° ab; es bleibt $66^\circ 25'$ als Äquatorhöhe. Stelle nun die Sonne in 15° des Stiers. Ihre Deklination beträgt $16^\circ 26'$. Falls du die Mittagshöhe willst, vermehrst du die Äquatorhöhe $66^\circ 25'$ um diese Deklination. Das gibt $82^\circ 51'$ für die Meridianhöhe der Sonne in dieser Ortsbreite, wenn sie in der Mitte des Stieres steht. Oder aber, du ziehst die Deklination von der Breite ab; es bleiben $7^\circ 9'$. Das ist die Zenitdistanz der Sonne. Ziehe sie von 90° ab, so bleiben $82^\circ 51'$, und das ist die Meridianhöhe der Sonne an jenem Tage.

Nimm alsdann die Sonne im Kopf des Krebses stehend an; ihre Deklination ist jetzt der Ekliptikschiefe gleich, d. h. $= 23^\circ 35'$. d Und falls du für diesen Tag die Meridianhöhe der Sonne ermitteln willst, so zähle sie zur Äquatorhöhe, $66^\circ 25'$, hinzu. Die Summe gibt gerade 90° . Dann steht die Sonne in ihrer

¹⁾ In diesem Fall ist nämlich die Sonnendeklination genau 20° .

oberen Kulmination im Zenit. Du kannst aber auch die Deklination von der Ortsbreite abziehen, und da du kein Resultat erhältst, so weißt du, daß die Sonne im Meridian im Zenit steht, d. h., daß ihre Höhe gerade $= 90^\circ$ ist.

Nunmehr stehe die Sonne in südlichen Sternbildern, und zwar möge sie sich im Anfang des Schützen befinden. Ihre südliche Deklination ist dann $= 20^\circ 16' 20''$; sie ist dem Horizont nahe, wovon ich schon oben sprach. Darum mußt du diese Deklination von der Äquatorhöhe abziehen. Es bleibt dann $46^\circ 8' 40''$, und das ist die Meridianhöhe der Sonne an jenem Tage, und es ist klar, daß die Höhe der Sonne in dieser Breite stets zwischen Zenit und Süden liegt, außer speziell zu Beginn des Krebses; denn dort erreicht sie das Zenit.

Beispiele zur dritten Gruppe.

Nimm hierbei die Ortsbreite größer an als die größte Deklination. Erstere möge 30° sein. Ziehst du sie von 90° ab, so bleiben 60° als Äquatorhöhe der Sonne. Sie liegt also zwischen Zenit und Süden. Dann möge die Sonne im 20. Grad des Widlers stehen; ihre Deklination ist $+ 7^\circ 51' 53''$, und weil sie nördlich ist, addierst du sie zur Äquatorhöhe an dem Orte, dessen Breite 30° ist. Es resultiert $67^\circ 51' 53''$ als Meridianhöhe für jenen Tag in der Breite von 30° . Du kannst aber auch die Sonnendeklination von der Ortsbreite abziehen; es bleibt dann $22^\circ 8' 7''$ übrig. Das ist die Zenitdistanz der Sonne. Subtrahiere sie von 90° ; es bleibt wiederum $67^\circ 51' 53''$, und das ist die Meridianhöhe der Sonne. Versetze die Sonne in den Beginn des Krebses. Falls du ihre Mittagshöhe wissen willst, zählst du ihre Deklination — und sie ist $23^\circ 35'$ — zur Äquatorhöhe hinzu, so ist die Summe $83^\circ 35'$. Und das ist die Meridianhöhe des Krebsanfangs in der Breite 30° . Du kannst aber auch die Deklination von der Ortsbreite abziehen: es bleibt dann $6^\circ 25'$. Das ist die Zenitdistanz der Sonne oder die Ergänzung ihrer Mittagshöhe zu 90° . Ziehst du sie von 90° ab,

Deklinations-

S. 228.				S. 229.				S. 230.				S. 231.			
Lg. *)	Dekl.	Lg.	Dekl.	Lg.	Dekl.	Lg.	Dekl.	Lg.	Dekl.	Lg.	Dekl.	Lg.	Dekl.	Lg.	Dekl.
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
0 10	0 4 0	5 10	2 3 58	10 10	4 2 58	15 10	6 0 30	20 10	7 55 41	25 10	9 47 45	30 10	11 35 54	35 10	13 19 21
20	0 8 0	20	2 7 52	20	4 0 55	20	6 4 23	20	7 50 28	20	9 51 25	20	11 39 20	20	13 22 42
30	0 12 0	30	2 11 52	30	4 10 52	30	6 8 10	30	8 3 10	30	9 55 5	30	11 42 57	30	13 26 9
40	0 16 0	40	2 15 50	40	4 14 49	40	6 12 8	40	7 7 9	40	9 58 45	40	11 45 45	40	13 29 24
50	0 20 0	50	2 19 50	50	4 18 46	50	6 10 0	50	10 10 10	50	10 2 24	50	11 48 50	50	13 32 44
1 0	0 24 0	6 0	2 23 49	11 0	2 22 41	16 0	6 18 33	21 0	10 14 55	26 0	10 3 41	31 0	11 51 20	36 0	13 35 41
10	0 28 0	10	2 27 47	10	2 26 38	10	6 23 45	10	10 18 22	10	10 9 45	10	11 54 50	10	13 38 41
20	0 32 0	20	2 31 46	20	2 30 34	20	6 27 37	20	10 22 5	20	10 13 22	20	11 57 50	20	13 41 41
30	0 36 0	30	2 35 45	30	2 34 30	30	6 31 29	30	10 25 54	30	10 17 0	30	12 0 58	30	13 44 41
40	0 40 0	40	2 39 44	40	2 38 28	40	6 35 20	40	10 29 40	40	10 20 38	40	12 3 57	40	13 47 41
50	0 44 0	50	2 43 42	50	2 42 22	50	6 39 12	50	10 33 26	50	10 24 10	50	12 6 56	50	13 50 41
2 0	0 48 0	7 0	2 47 41	12 0	2 46 17	17 0	6 43 3	22 0	10 37 11	27 0	10 27 54	32 0	12 9 55	37 0	13 53 41
10	0 52 0	10	2 51 40	10	2 50 13	10	6 46 54	10	10 40 50	10	10 31 31	10	12 12 54	10	13 56 41
20	0 56 0	20	2 55 38	20	2 54 8	20	6 50 45	20	10 44 40	20	10 35 8	20	12 15 53	20	13 59 41
30	1 0 0	30	2 59 36	30	2 58 4	30	6 54 35	30	10 48 25	30	10 38 45	30	12 18 52	30	14 0 41
40	1 4 0	40	3 3 35	40	3 1 59	40	6 58 26	40	10 52 9	40	10 42 22	40	12 21 51	40	14 3 41
50	1 8 0	50	3 7 33	50	3 5 54	50	7 2 16	50	10 56 5	50	10 45 58	50	12 24 50	50	14 6 41
3 0	1 12 0	6 0	3 11 31	13 0	3 9 40	18 0	7 6 23	23 0	10 59 37	28 0	10 49 35	33 0	12 27 49	38 0	14 9 41
10	1 16 0	10	3 15 29	10	3 13 44	10	7 10 10	10	11 3 21	10	10 53 9	10	12 30 48	10	14 12 41
20	1 20 0	20	3 19 27	20	3 17 39	20	7 14 46	20	11 7 4	20	10 56 45	20	12 33 47	20	14 15 41
30	1 24 0	30	3 23 25	30	3 21 33	30	7 18 36	30	11 10 47	30	10 59 11	30	12 36 46	30	14 18 41
40	1 28 0	40	3 27 23	40	3 25 27	40	7 22 25	40	11 14 30	40	11 1 55	40	12 39 45	40	14 21 41
50	1 32 0	50	3 31 20	50	3 29 21	50	7 26 14	50	11 18 13	50	11 5 29	50	12 42 44	50	14 24 41
4 0	1 36 0	9 0	3 35 18	14 0	3 33 15	19 0	7 30 24	24 0	11 21 55	29 0	11 9 34	34 0	12 45 43	39 0	14 27 41
10	1 40 0	10	3 39 16	10	3 37 0	10	7 34 12	10	11 25 42	10	11 13 37	10	12 48 42	10	14 30 41
20	1 44 0	20	3 43 14	20	3 40 58	20	7 38 0	20	11 29 29	20	11 17 30	20	12 51 41	20	14 33 41
30	1 48 0	30	3 47 12	30	3 44 57	30	7 41 48	30	11 33 1	30	11 21 44	30	12 54 40	30	14 36 41
40	1 52 0	40	3 51 10	40	3 48 55	40	7 45 36	40	11 36 42	40	11 25 17	40	12 57 39	40	14 39 41
50	1 56 0	50	3 55 8	50	3 52 44	50	7 49 24	50	11 40 23	50	11 28 40	50	13 0 38	50	14 42 41
5 0	1 59 54	10 0	3 59 2	15 0	3 56 37	20 0	7 53 13	25 0	11 44 4	30 0	11 32 22	35 0	13 1 37	40 0	14 45 41

*) Lg. = Länge der Sonne in der Ekliptik.

Eine noch genauere Deklinationstafel, die ebenfalls von Ibn Yünus herührt, findet man in der arabischen Handschrift Landberg Nr. 1038 (Berlin). Dort ist die Deklination in Graden, Minuten, Sekunden und Tertien angegeben, für alle Bogenminuten der Sonnenlänge und für jeden Grad auch von 60 einzelnen Sekunden.

ad d) Dem 11. Kapitel der Hākim. Tafeln entnehme ich folgende historisch bemerkenswerte Stelle über die Ekliptikschiefe:

S. 222.

Im Namen Gottes, des barmherzigen Erbarmers! Segne Allāh unseren Herrn Muḥammad und seine Familie! Macho es leicht, o Herr, durch deine Gewogenheit!

Das 11. Kapitel: „Über die größte Deklination und über den Schatten“.

Die größte Deklination (Ekliptikschiefe) ist ein Bogen jenes Großkreises, der durch die beiden Pole des Äquators und der Ekliptik geht, und dieser Bogen wird aus seinem Kreise zwischen dem Äquator und dem Tierkreis ausgeschnitten. Und es stellte Ptolemaeus die Größe dieses Bogens in (seinem) Almagest zu $23^{\circ} 51' 20''$ fest. Er berichtet davon mit den folgenden Worten: „Ich habe den Bogen, der vom äußersten Norden bis zur größten südlichen Amplitude reicht, d. h. den Bogen, der zwischen den Wendeln liegt, zu allen Zeitpunkten 47 Teile und mehr als $\frac{2}{3}$ Teile, dagegen weniger als $\frac{3}{4}$ Teile gefunden. So ergibt sich hieraus beinahe die Lehre, die Eratosthenes aufstellte, und in welcher Hipparch mit ihm übereinstimmte, nämlich, daß der Bogen, der zwischen den Wendeln liegt, 11 Teile von jenen betrage, deren 83 auf den halben Meridiankreis gehen“. Und dies ist das Ende von dem, was ich von den Worten des Ptolemaeus angeführt habe; ich aber sage, — und mit Gott gelangt man zum Richtigen —: Weil es bekannt ist, daß die größte Deklination die Hälfte des Bogens ist, der zwischen den Wendeln liegt, auf Grund dessen, was die Messung des Ptolemaeus notwendig macht, so muß die größte Deklination größer als $23^{\circ} 50'$ und kleiner als $23^{\circ} 52'$ sein. Was das anbetrifft, was Ptolemaeus auf Autorität von Eratosthenes und Hipparch mitteilt, so müssen wir, wenn wir das Maß der größten Deklination in Graden wissen wollen, auf Grund der Tatsache, daß auf den Kreisumfang 360° gehen, 11 mit 360 multiplizieren und das Ergebnis durch 83 dividieren. Was alsdann herauskommt, das ist der Betrag des Bogens, der zwischen den Wendeln liegt, $47^{\circ} 42' 39''$. Die Hälfte dieses Bogens ist gleich der größten Deklination, und sie beträgt demnach ungefähr $23^{\circ} 51' 20''$, und dies ist dasselbe, was auch Ptolemaeus in seiner Deklinationstafel festsetzt. Und ich kenne keine Beobachtung der (größten) Deklination zwischen Ptolemaeus und den Verfassern der erprobten Tafeln¹⁾ (aṣḥāb al-mumtaḥan) außer jener in den 160^{er} Jahren der Hīǧra²⁾. Der Beobachter berichtet, daß die größte Deklination $23^{\circ} 31'$ sei. Und was das anbetrifft, was die Urheber der erprobten Tafeln in ihren unserer Zeit nahen Beobachtungen gefunden haben, so haben sie in den Tagen al-Ma'mūns zu Bagdād in aṣ-Ṣammasija³⁾ untersucht Yahjā b. abī Maṣṣūr, Sened b. 'Alī al-Abbās b. Sa'id al-Ǧauhari und eine Anzahl anderer trefflicher Gelehrten, und sie haben sie (die Ekliptikschiefe) zu $23^{\circ} 33'$ gefunden. Es erwähnen dies Muḥammed b. Mūsā al-Ḥuārizmī in seinen Tafeln und Muḥammed b. Kaṭīr al-Fergānī in seinem Buch über die Konstruktion des Astrolabs, und die Sache ist allbekannt. — Es berichten die Personen, die nach dem Tode Yahjās b. abī Maṣṣūr in Damaskus Beobachtungen anstellten mit dem Instrument, das anzuwenden al-Ma'mūn ihnen befahl, als er gegen die Rumāier (Byzantiner) zog, nämlich Chāled 'abd al-Malek al-Merwarrūdī, Abū'l-Ṭaijib Sened b. 'Alī und 'Alī b. 'Iṣā al-Aṣṭorlābī und

¹⁾ Vgl. zu diesen Tafeln: H. Suter, „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke“, Leipzig 1900, S. 8.

²⁾ Das Jahr 160 der Hīǧra (beginnend mit dem 1. muḥarram) fängt mit dem 19. Oktober 776 an.

³⁾ Im Quartier Sammasija (Stadtviertel Bagdāds am Tor gleichen Namens) soll die Kanisa, d. i. das Beobachtungsgebäude für die Astronomen al-Ma'mūns gestanden haben. Seine Errichtung schreibt man dem Astronomen Abū'l-Ṭaijib Sened ben 'Alī zu. (Vgl. H. Suter, „Die Mathematiker und Astronomen usw.“, S. 13).

andere, daß sie die größte Deklination gleich $23^{\circ} 33' 52''$ gefunden hätten. Die Messung mit dem genannten Instrument fand im Jahre 201 der Ära Jezdegerd statt¹⁾. Weiterhin berichten die Söhne des Mūsā b. Šākir, daß sie die Meridianhöhe der Sonne bei ihrem Eintritt in den Steinbock zu Medinat as-Salām (Bagdād) am Donnerstag dem 3. der 5 dem Monat Ābān angehängten Tage im Jahre 237 der Ära Jezdegerd (16. Dezember 868) genommen und ihre korrigierte (genau bestimmte) Höhe $33^{\circ} 5'$ gefunden hätten. Damals stand die Sonne nach der in al-mumtahan gegebenen Berechnung bei ihrem Durchgang durch den Meridian in $29^{\circ} 47'$, (des vorausgehenden Sternbildes) und die Höhe wurde mit den beiden Ringen²⁾ bestimmt, die für die Messung in gleicher Weise angewendet werden. Und sie erwähnen ferner, daß sie schon vor dieser Messung, aber in Übereinstimmung mit ihrem Ergebnis, bei Beginn des Steinbocks, eine Messung angestellt hätten, und daß sie die Meridianhöhe der Sonne auch bei ihrem Abstieg in den Krebs, am ersten Tage des Monats Chordād des Jahres 237 der Ära Jezdegerd (17. Juni 868) gemessen und für ihre Höhe $80^{\circ} 15'$ gefunden hätten. Dabei war die Sonne bereits $10'$ weit in den Kopf des Krebses eingetreten. Diese beiden Messungen fanden in ihrer Wohnung statt, die an der Brücke in Bagdād lag. Zieht man die kleinere dieser beiden Höhen von der größeren ab, so bleibt $47^{\circ} 10'$ übrig, welcher Betrag das Doppelte der größten Deklination ist. Teilt man ihn durch 2, so ist die Hälfte die größte Deklination, nämlich $23^{\circ} 35'$; und das ist der Wert, zu dem man mittels dieser zwei Messungen gelangt. Es ergibt sich daraus die geographische Breite der Brücke bei der Bāb at-Tāq (Tor des Mauerbogens) von Bagdād zu $33^{\circ} 20' 3''$. Die Söhne des Mūsā b. Šākir berichten endlich, daß sie die Meridianhöhe der Sonne bei ihrem Eintritt in den Widder ebenfalls in ihrem Hause maßen, und zwar am Mittwoch, als noch zwei Nächte übrigblieben vom 1. Rabī' des Jahres 255⁴⁾. Dabei stand die Sonne $29^{\circ} 50'$ tief in den Fischen, und es war ihre Höhe nach Messung mit einem der Ringe $56^{\circ} 40'$ und mit einem anderen Ring $56^{\circ} 38'$. Und was Aḥmed b. 'Abdallāh Ḥabaš anbetrifft, so setzte er die größte Deklination in seinen erprobten Tafeln, die er al-Qānūn nennt, an zwei Stellen fest; in der Deklinationstafel zu $23^{\circ} 35'$, in der Tafel al-Taqwīm zu $23^{\circ} 33'$, und es sollte doch nur ein Wert sein. Und es erwähnt al-Māhānī, daß er die Meridianhöhe der Sonne in Surramanra'ā (Samarra) an dem Donnerstage maß, als noch 10 Tage vom Šafar des Jahres 243 der Hīğra übrigblieben, d. i. der Tag Zāmjād (der 28.) des Monats Ardebehišt⁵⁾, während sie ganz an der Grenze des Sternbildes der Zwillinge stand. Er fand die Höhe der Sonne zu $79^{\circ} 24'$. Ferner maß er sie zu Surramanra'ā an dem Donnerstag, als vom Šābān des Jahres 243 noch 5 Tage übrigblieben, das ist der Tag Anirān des Jahres 226 der Ära Jezdegerd⁶⁾. Die Sonne stand am Rande des Schützen, während sich ihre Meridianhöhe zu $32^{\circ} 13'$ fand. Er gab auf Grund dieser Zahlen die Breite von Surramanra'ā zu $34^{\circ} 12'$ an. Ich aber sage — und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen — wenn wir die kleinere dieser beiden Höhen von der größeren abziehen, so bleibt $47^{\circ} 11'$ übrig, und das ist

¹⁾ Das Jahr 201 der Ära Jezdegerd fällt am 26. April 832 an.

²⁾ Es dürfte sich wohl um eine Armillarsphäre d. i. „die Besitzerin von Ringen“ (Ringswerk; armilla = Ring. Armband) handeln, oder, da nur Meridianhöhen genommen werden, um Solstival- und Äquinoktialarmillen, die aber mit dem *κρίκος γαλῶκος* (Metallring) und dem *μεσημβρινός* (Meridiankreis) des Ptolemaeus identisch sein dürften. Für Details über den *κρίκος* vgl. das Handbuch der Astronomie des Claudius Ptolemaeus (herausgeg. v. K. Manitius, Leipzig 1912/13). I. Band, S. 136 u. Anmerk. S. 427. sodann „Weltall“, 1906, S. 242 ff. (v. Manitius); für Details über das Meridianinstrument: Prokl Diadochi *ὑποῤῥήσεις τῶν ἀστρονομικῶν ἐπιτηδεύσεων* (herausgeg. von Halm, Paris 1820, S. 78–83 und griechisch und deutsch von K. Manitius, Leipzig 1909, S. 41 ff.) sowie „Weltall“ 1906, S. 399 (v. Manitius).

³⁾ „Beauchamp a trouvé Bagdad par $33^{\circ} 19' 40''$ “. (Delambre, Histoire de l'Astronomie du moyen âge, Paris 1819, p. 125.)

⁴⁾ Das ist der 28. des 1. Rabī' des Jahres 255 der Hīğra = 16. März 869.

⁵⁾ Das ist der 20. des Šafar des Jahres 243 der Hīğra = 16. oder 17. Juni 857.

⁶⁾ Das ist der 25. des Šābān des Jahres 243 der Hīğra = 17. Dezember 857. Bekanntlich ist bei den Hīğra-Daten das Datum um einen Tag zweifelhaft; (ob Volkskalender oder astronomische Zählweise) der muhammedanische Tagesanfang ist abends, während der julianische Tag von Mitternacht an gerechnet wird. Vgl. F. K. Ginzel, Handbuch der math. u. techn. Chronologie. I. Bd., Leipzig 1906, S. 256.

das Doppelte der größten Deklination; die Hälfte davon ist $23^{\circ} 35' 30''$, und dieser Betrag ist die größte Deklination, zu der man auf Grund dieser Messungen gelangt, unter der Voraussetzung, daß jede Höhe eine von der Parallaxe befreite ist.

Und es sagt Abū'l Hasan Tābit b. Qorra: Ich habe alte vorptolemäische Verfahren gefunden, die darauf hinweisen, daß die größte Deklination $23^{\circ} 35'$ ist. Es erwähnt Muḥammed b. Ġābir b. Sinān al-Battānī, daß er nach seiner Messung $23^{\circ} 35'$ gefunden habe. Es sagt der treffliche Scherif Abū'l-Qāsim 'Alī b. al-Ḥusain b. Muḥammed abi-'Isā, bekannt als Ibn al-A'lam, ein Mann, ausgezeichnet durch Wissenschaftlichkeit und Einsicht, daß er sie ganz gründlich gemessen und als Ergebnis $23^{\circ} 34' 2''$ gefunden habe. Ebenso berichtet Abū'l Hasan aṣ-Ṣūfi 'Abder-rahman b. 'Omar, daß auch er die größte Deklination sehr gründlich bestimmt habe und zu dem Ergebnis $23^{\circ} 33' 45''$ gekommen sei. Und er besitzt eine (Ehren-) Stelle in der Wissenschaft des geometrischen Beweises, doch es ist Gott, der zum Rechten verhilft.

Und wisse, daß der für die Beobachtung gemachte Quadrant, falls er gesondert konstruiert und nicht ein von einem Vollkreis abgeteilter 4. Teil ist, bisweilen größer ist als der 4. Teil in Wirklichkeit, und bisweilen kleiner, während es auch möglich ist, daß er in Wirklichkeit ein Viertelkreis ist. Aber wie selten kommt dies vor! Wenn der für die Beobachtung angefertigte Quadrant größer als ein Viertelkreis ausgefallen ist, so wird die aus der Beobachtung herausgebrachte Deklination kleiner, als sie in Wirklichkeit ist. Ist der Quadrant aber kleiner, als ein Viertelkreis in Wirklichkeit ist, so kommt die Deklination aus der Beobachtung größer heraus, als sie in Wirklichkeit ist, weil die Beziehung eines und desselben Maßes auf jedes von zwei verschiedenen Maßen für das kleinere ein größeres Verhältnis ergibt als für das größere. Dasselbe gilt für eine Zahl in bezug auf jede zweier verschiedenen Zahlen, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen!

Und wisse, daß der Quadrant, wenn er für sich gesondert auf geometrische Weise konstruiert wird, in den meisten Fällen faktisch größer wird als ein Viertelkreis, wegen eines Grundes, der nur demjenigen bekannt ist, der in der Beobachtung scharf zusieht und subtil nachdenkt, aber dem Anfänger verborgen bleibt, ja selbst dem ständigen Beobachter, wenn ihm der Scharfblick mangelt; mit einem Wort: die Sache ist sehr schwierig. Doch Gott führt, wen er will, zu einer geraden Straße¹⁾, und der Erhabene sagt: Sprich: „Nicht kennt, wer in den Himmeln und auf der Erde ist, das Verborgene außer Gott“²⁾, und der Allmächtige sagt: Sprich: „Wahrlich, mein Herr bringt die Wahrheit heraus, er, der Kenner der verborgenen Dinge“³⁾. — Auch ich habe die Deklination der Sonne gemessen und sie zu $23^{\circ} 35'$ gefunden, unter der Bedingung, daß die Parallaxe der Sonne, wie sie in diesen Tafeln dargelegt wird, anders ist, als das was Ptolemaeus erwähnte, und dies ist, daß ich die von der Parallaxe befreite Meridianhöhe der Sonne um die Zeit ihres Eintritts in das Sternbild des Steinbocks kleiner als $36^{\circ} 21' 30''$ gefunden habe mit den Instrumenten unseres Herrn, des Herrschers der Gläubigen, al-'Azīz billāh Nizār abi al-Maṣṣūr, und ich erreichte in der Fehlerlosigkeit und Fassung ungefähr die äußerste Grenze, und so fand ich die von der Parallaxe befreite Höhe bei Beginn des Krebses gleich $83^{\circ} 31' 30''$, während sie (die Höhe) in der Beobachtung mit dem Sinnesorgane ihre größte Zunahme erreicht hatte. Und wenn du die kleinere dieser beiden Höhen von der größeren abziehst, so bleibt $47^{\circ} 10'$ übrig. Das ist das Doppelte der größten Deklination; die Hälfte davon ist $23^{\circ} 35'$, und das ist der Wert, der in diesen Tafeln festgehalten wird . . .“⁴⁾.

¹⁾ al-Qurān, Sure 2, 136.

²⁾ al-Qurān, Sure 20, 66.

³⁾ al-Qurān, Sure 34, 17.

⁴⁾ Nach S. Newcomb (Elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy, Washington 1895, pag. 196) gilt für die Ekliptikschiefe die Formel

$$e = 23^{\circ} 27' 5''.26 - 46''.945 \cdot T - 0''.0059 \cdot T^2 + 0''.00181 \cdot T^3,$$

wo T in Einheiten von 100 tropischen Jahren und mit dem Anfangspunkt 1900,0 gezählt ist. So ist z. B. für das Jahr 1900 n. Chr. $e = 23^{\circ} 34' 5''.07$, so daß Ibn Yānus die Ekliptikschiefe um $51''.93$ zu groß gefunden hatte.

Das 21. Kapitel der Hākimītischen Tafeln enthält Methoden der Breitenbestimmung, die ganz an moderne Ortsbestimmungen erinnern. Im 66. Bande des Grunert'schen Archivs, Jahrg. 1880 (S. 225 bis 238) hat C. Israël-Holtzwardt die sämtlichen theoretisch möglichen Fälle der Bestimmung der Polhöhe aufgeführt und dabei vier Gruppen unterschieden. Die nachstehenden Verfahren des Ibn Yānus gehören zur 3. Gruppe von Israël-Holtzwardt: „Auf die Kenntnis der Lage des Meridians gestützte Methoden“, speziell fußen sie auf der Kenntnis von Azimut und Höhe. Die Lösung einer solchen Aufgabe habe ich mit modernen mathematischen Hilfsmitteln gegeben in meiner Schrift: „Beiträge zur nautischen Astronomie“ (Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte, Jahrg. 1909, Nr. 1, S. 11). Es ist aber recht instruktiv, zu sehen, wie der arabische Gelehrte die Lösungen rein konstruktiv, nach dem Prinzip des Analemmas durchführt. Leider sind die Zahlenbeispiele so gewählt, daß man fast mit Gewißheit sagen kann, es habe Ibn Yānus von vornherein die Breite (Kairos) als bekannt vorausgesetzt und danach die Größe der — wohl nicht gemessenen — Azimute festgesetzt.

Ich gebe nicht die Übersetzung des ganzen 21. Kapitels, sondern breche nach den Darlegungen des Autors, die sich auf das beziehen, was uns interessiert, ab; es würden dann zunächst noch zwei weitere Zahlenbeispiele folgen und darauf noch einige weniger wichtige Dinge. Die Übersetzung, die jetzt folgt, ist möglichst wörtlich und ohne Auslassungen.

II.

Das 21. Kapitel: Über die Ermittlung der Ortsbreite und der Sonnendeklination, S. 372.

falls man kennt

- a) ein und dieselbe Sonnenhöhe in zwei einander entgegengesetzten Punkten der Ekliptik sowie das Azimut dieser Höhe in den beiden Punkten.

Hieraus ergibt sich also die Breite des Beobachtungsortes und die Deklination der Sonne, und falls es sich um einen Stern mit (astronomischer) Breite handelt, sein Abstand vom Himmelsäquator. Der Weg, der zur Kenntnis der beiden gesuchten Größen führt, ist der folgende: Du multiplizierst den Sinus eines jeden der zwei Azimute mit dem Kosinus der Höhe und teilst jedes der Produkte durch den Sinus totus¹⁾. Die Einzelergebnisse behalte im Gedächtnis. Dann addierst du beide und nimmst die Hälfte ihrer Summe, die du dir ebenfalls merkst. Und nun beachte: Ist eines der Azimute nördlich, das andere südlich, so ist die Hälfte dessen, was du dir gemerkt hast, der Sinus der Morgenweite, sind aber beide Azimute südlich, so ist die genannte Hälfte gleich dem Ichtīlāf des Horizontes²⁾ für diese (Sonnen-) Höhe. Wenn das, was sich dir ergibt, gleich dem Sinus der Morgenweite ist, so ziehe von ihm das ab, was aus der Division für das nördliche Azimut resultierte, oder ziehe es von dem ab, was sich für das südliche Azimut ergibt; denn beide Differenzen sind dasselbe. Was nach der Subtraktion verbleibt, ist der Ichtīlāf des Horizontes für diese Höhe und in dieser Ortsbreite. Quadriere ihn, ebenso den Sinus der Höhe, addiere beide Quadrate und nimm die Wurzel aus der Summe. Das Ergebnis der Radizierung merke dir. Multipliziere alsdann den Ichtīlāf des Horizontes mit sin. tot. und teile das Produkt durch die Quadratwurzel; das Resultat ist der Sinus der Ortsbreite. Multipliziere endlich den Kosinus der Breite mit dem Sinus der Morgenweite; das Resultat ist der Sinus der Sonnendeklination und der ihm entsprechende Bogen die Deklination selbst. a Und wenn du für einen Stern mit Breite gerechnet hattest, so ist das, was für dich resultiert, seine Äquatordistanz, und falls das Ergebnis deiner Rechnung der Ichtīlāf des Horizontes ist, dann multipliziere ihn mit sich selbst und tu dasselbe mit dem Sinus der Höhe. Addiere beide Quadrate und ziehe die Wurzel aus der Summe, deren Betrag du dir merkst. Multipliziere jetzt den Ichtīlāf des Horizontes mit sin. tot. und dividiere das Produkt durch den Betrag der Quadratwurzel. Das Ergebnis entspricht dem

¹⁾ Von jetzt ab schreibe ich für Sinus totus abkürzend: sin. tot.

²⁾ Dieser Begriff ist ausführlich erläutert in Ann. d. Hyd. usw. 1920, S. 108.

Sinus eines Bogens. Dieser Bogen ist die Ortsbreite. Behalte ihn im Gedächtnis. Ziehe jetzt den Ichtülf des Horizontes von dem ab, was sich aus der Division für das südliche Azimut ergab; was übrigbleibt, ist der Sinus der Morgenweite; multipliziere ihn mit dem Kosinus der Ortsbreite und teile das Produkt durch sin. tot. Was sich hieraus ergibt, ist der Sinus der Sonnendeklination, für einen Stern mit Breite aber ist das Ergebnis der Sinus seines Bogenabstandes vom Äquator. Und wenn du das, was sich aus der Division für das nördliche Azimut ergab, vom Ichtülf des Horizontes abziehst, so ist das, was übrigbleibt, tatsächlich derselbe Wert wie vorhin, nämlich der Sinus der Morgenweite. b

Beispiel (für) die Breite 30° ; die Höhe sei in jedem der zwei sich entgegengesetzten Orte der Ekliptik 20° ; das nördliche Azimut sei $12^\circ 27' 6''$ und das südliche betrage $39^\circ 29' 12''$. Du multiplizierst den Sinus des nördlichen Azimuts, $12^\circ 56' 14''$, mit dem Kosinus der Höhe, $56^\circ 22' 44''$; das Produkt teilst du durch sin. tot. Es kommt $12^\circ 9' 25''$ heraus. Diesen Wert behältst du im Gedächtnis. Den Sinus des südlichen Azimuts, der $38^\circ 9' 14''$ ist, multiplizierst du mit dem Kosinus der Höhe, $56^\circ 22' 44''$, und teilst auch dies Produkt durch sin. tot.; es resultiert $35^\circ 51' 11''$, welchen Betrag du dir gleichfalls merkst. Zähle die zwei Ergebnisse der Division zusammen; sie betragen $48^\circ 0' 36''$. Die Hälfte davon ist $24^\circ 0' 18''$, und das ist der Sinus der Morgenweite im Norden und im Süden. Davon ziehst du das ab, was aus der Teilung für das nördliche Azimut herauskam, und es bleibt $11^\circ 50' 53''$ übrig, und dies ist der Ichtülf des Horizontes für diese Höhe. Wenn du aber den Sinus der Morgenweite von dem für das südliche Azimut im Gedächtnis Bewahrten, nämlich $35^\circ 51' 11''$, abziehst, so bleibt tatsächlich wiederum $11^\circ 50' 53''$, und das ist fürwahr ein und dasselbe Resultat aus den beiden Verfahren (der Subtraktion). Du quadrierst diesen Wert und erhältst $140\ 22\ 35\ 6\ 49$; für das Quadrat des Sinus der Höhe, nämlich $20^\circ 31' 16''$, ergibt sich $421\ 6\ 57\ 36\ 16$. Durch Addition beider Quadrate bekommt man $561\ 29\ 32\ 43\ 5$. Die Wurzel hieraus ist angenähert $23^\circ 41' 46''$. Nunmehr multiplizierst du den Ichtülf des Horizontes mit sin. tot. und teilst das Produkt durch den Wert der Quadratwurzel; es ergibt sich aus der Division annähernd 30° , und zu diesem Sinuswert gehört der Bogen 30° , d. h. die Ortsbreite ist 30° ; doch es ist Gott, der zum Richtigen verhilft. —

Darauf multiplizierst du den Sinus der Morgenweite, der $24^\circ 0' 18''$ beträgt, mit dem Kosinus der Ortsbreite von 30° , d. i. $51^\circ 57' 41''$, und teilst das Produkt durch sin. tot., es kommt $20^\circ 47' 19'' 59''' 18^{IV} 18^V$ heraus, welcher Wert den Sinus der Deklination darstellt. Der entsprechende Bogen, $20^\circ 16' 20''$, ist die Deklination selbst. Falls du aber den Ichtülf des Horizontes — und er ist $11^\circ 50' 53''$ — mit 60° multiplizierst und das Ergebnis durch den Sinus der Höhe, $20^\circ 31' 16''$, teilst, so resultiert aus dieser Teilung tatsächlich $34^\circ 38' 29'' 37'''$. Das ist ein 60° Schatten, dessen zugehöriger Bogen rund 60° beträgt. Er stellt die Ergänzung der Ortsbreite dar; du ziehst ihn von 90° ab, und es bleibt 30° für die Ortsbreite übrig, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen! c

Ferner möge die Höhe 40° , das nördliche Azimut $19^\circ 10' 12''$, das südliche $39^\circ 49' 56''$ sein. Der Sinus des kleineren Azimuts ist $19^\circ 42' 8''$ und der des größeren $38^\circ 25' 57''$. Du multiplizierst jeden einen der beiden Sinus mit dem Kosinus der Höhe, d. i. $45^\circ 57' 46''$, und teilst jedes Produkt einzeln durch sin. tot.; es ergibt sich mit dem Sinus des kleineren Azimuts $15^\circ 5' 34''$; aus dem Sinus des größeren geht $29^\circ 26' 28''$ hervor. Du addierst die beiden Resultate der Division; ihre Summe ist $44^\circ 32' 2''$, und die Hälfte hiervon beträgt $22^\circ 16' 1''$. Dieser Wert ist gleich dem Ichtülf des Horizontes der Höhe 40° . Sein Quadrat ist $495\ 49\ 0\ 32\ 1$; das Quadrat des Sinus der Höhe ist $1487\ 25\ 50\ 164$. Du addierst beide und erhältst als Summe $1983\ 1450\ 485$. Die Quadratwurzel hieraus ist rund $44^\circ 32' 1''$. Merke ihren Wert im Gedächtnis. Dann multiplizierst du den Ichtülf des Horizontes, $22^\circ 16' 1''$, mit sin. tot. und teilst das Produkt durch die Wurzel; es kommt etwa 30° heraus, welches der Sinus der Ortsbreite von 30° ist, und es ist Gott, der zum Richtigen verhilft. — Darauf ziehst du den Ichtülf des Horizontes, $22^\circ 16' 1''$, von dem ab, was aus der Division für das größere Azimut herausgekommen war, nämlich $29^\circ 26' 28''$; es bleibt alsdann $7^\circ 10' 27''$.

übrig, welcher Betrag der Sinus der Morgenweite ist. Und auf gleiche Weise erhältst du das Resultat $7^{\circ} 10' 27''$, wenn du den kleineren der zwei der Teilung entfloßenen Werte, nämlich $16^{\circ} 5' 34''$, vom Ichtlauf des Horizontes abziehst. Es kommt dieser Betrag also gleichermaßen aus beiden Verfahren heraus. Jetzt multiplizierst du den Sinus dieser Morgenweite mit dem Kosinus der Breite, $51^{\circ} 57' 41''$, und teilst das Produkt durch sin. tot. Es resultiert $6^{\circ} 12' 46'' 46''' 47^{IV} 27^V 6^{VI}$, und dies ist der Sinus der nördlichen oder südlichen Sonnendeklination. Der entsprechende Bogen $5^{\circ} 56' 37''$ ist die Deklination selbst.

b) Andere Abhandlung über die Ermittlung der Ortsbreite, der Sonnendeklination und der Entfernung eines Sterns vom Äquator, falls der Stern eine Breite hat, und falls die Höhe ohne Azimut für einen nicht bekannten Ort (der Sonne) in der Ekliptik gegeben ist, dazu eine andere Höhe, das zugehörige Azimut und dessen Vorzeichen.

Nicht ist uns die Ortsbreite gegeben; damit wir sie kennenlernen, desgleichen die Sonnendeklination und den Abstand eines Sterns mit Breite vom Äquator, verfahren wir, wie ich's beschreibe:

Multipliziere den Sinus des Azimuts mit dem Kosinus der zugehörigen Höhe und teile das Produkt durch sin. tot. Das Ergebnis sei der erste Wert. Behalte ihn im Gedächtnis. Stelle alsdann den Sinus der Höhe ohne Azimut fest, ebenso den Sinus der Höhe mit Azimut und ziehe den kleineren Sinus vom größeren ab. Das Resultat dieser Subtraktion sei der zweite Wert. Erhebe den ersten und zweiten Wert ins Quadrat, addiere beide Quadrate und ziehe die Wurzel aus der Summe. Das Ergebnis merke dir. Multipliziere jetzt den ersten Wert mit sin. tot. und dividiere das Produkt durch die Quadratwurzel; der Quotient ist gleich dem Sinus der Ortsbreite, der zugehörige Bogen ist die Ortsbreite selbst. — Multipliziere ferner den Sinus der Breite mit dem Sinus der Höhe ohne Azimut und teile das Produkt durch sin. tot. Was herauskommt, ist der Sinus der Sonnendeklination; der entsprechende Bogen ist die Deklination selbst. Und wenn für einen Stern mit Breite gerechnet worden ist, so ist das, was sich dir ergibt, die Distanz dieses Sterns vom Äquator an Stelle der Deklination. d

Beispiel. Es sei die Höhe ohne Azimut für dieses Beispiel $53^{\circ} 8' 46''$. Der Sinus hiervon ist $48^{\circ} 0' 36''$. Die Höhe, deren Azimut bekannt ist, möge 40° sein, und ihr Azimut selbst sei $6^{\circ} 48' 43''$. Den Sinus hiervon, d. i. $7^{\circ} 7' 0''$, multiplizierst du mit dem Kosinus der Höhe, ich meine mit dem Sinus von 50° , dessen Wert $45^{\circ} 57' 46''$ beträgt. Das Produkt teilst du durch sin. tot. Es kommt $5^{\circ} 27' 6''$ heraus. Dies sei der erste Wert. Merke ihn! Nun ziehst du den Sinus der Höhe, d. i. $38^{\circ} 34' 2''$, vom Sinus der Höhe ohne Azimut ab; es bleibt $9^{\circ} 26' 34''$ als zweiter Wert. Du quadrierst den ersten Wert ($5^{\circ} 27' 6''$) und erhältst als dessen Quadrat $29\ 43\ 14\ 24\ 36$, was du dir merkst. Ebenso quadrierst du den zweiten Wert ($9^{\circ} 26' 34''$) und erhältst $89\ 9\ 57\ 46\ 16$ als dessen Quadrat. Du addierst beide Quadrate, was zu der Summe $118\ 52\ 12\ 11\ 52$ führt. Die Quadratwurzel hieraus ist annähernd $10^{\circ} 54' 13''$. Du merkst auch ihren Betrag. Und nunmehr multiplizierst du den ersten Wert mit sin. tot. und dividierst das Produkt durch die Quadratwurzel. Es ergibt sich rund 30° als Sinus der Ortsbreite. Der entsprechende Bogen, 30° , ist die Breite selbst, und mit Gottes Hilfe wird man zum Richtigen geführt. — Weiter multiplizierst du den Sinus der Höhe ohne Azimut mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch sin. tot., es kommt $24^{\circ} 0' 18''$ heraus. Das ist der Sinus der Sonnendeklination. Sie ist nördlich und $= 23^{\circ} 35'$. e Und nur eine nördliche Deklination ist möglich, weil die Höhe ohne Azimut nur dann möglich ist, wenn die Sonne in den nördlichen Sternbildern steht. S. 376.

Anderes Beispiel zu dieser Abhandlung: Im vorhergehenden Beispiel war die Höhe mit Azimut kleiner als die Höhe ohne Azimut; in diesem zweiten aber sei die Höhe ohne Azimut kleiner als die Höhe, die ein Azimut hat. Es sei die Höhe ohne Azimut in diesem Beispiel dieselbe wie im ersten, nämlich $53^{\circ} 8' 46''$, die Höhe mit dem bekannten Azimut sei 60° , das Azimut selbst $4^{\circ} 21' 41''$. Der Sinus dieses Azimuts ist $4^{\circ} 33' 46''$. Diesen Wert multiplizierst du mit dem Kosinus der Höhe, 30° , und teilst das Produkt durch sin. tot., es

ergibt sich $2^{\circ} 16' 53''$ als erster Wert, den du dir wohl merkst. Dann bestimmst du den Sinus der Höhe ohne Azimut, er ist $48^{\circ} 0' 36''$, und ebenso findest du für den Sinus der (anderen) Höhe $51^{\circ} 57' 41''$. Nimm die Differenz zwischen beiden; sie ist $3^{\circ} 57' 5''$ und gleich dem zweiten Wert. Du quadrierst den ersten und den zweiten Wert und erhältst als deren Quadrate die Zahlen 5 12 17 2 49 und 15 36 48 30 25. Und behalte den ersten Wert im Gedächtnis. Dann addierst du beide Quadrate. Die dadurch erlangte Summe ist 20,49 5 33 14. Die Wurzel hieraus ist genähert $4^{\circ} 33' 46''$. Auch dies Ergebnis merkst du dir. Nunmehr multiplizierst du den ersten Wert, $2^{\circ} 16' 53''$, mit sin. tot. und teilst das Produkt durch die Quadratwurzel; es kommt wiederum 30° als Sinus für die Ortsbreite heraus. Die Breite selbst ist 30° , und es ist Gott, der zum Richtigen verhilft. — Schließlich multiplizierst du den Sinus der Höhe ohne Azimut, $48^{\circ} 0' 36''$, mit dem Sinus der Breite, 30° , und teilst das Ergebnis durch sin. tot.: es resultiert $24^{\circ} 0' 18''$, und dies ist der Sinus der Sonnendeklination. Der entsprechende Bogen, $23^{\circ} 35'$ ist die Deklination selbst. f

Und wisse, daß die Höhe mit Azimut, falls sie kleiner ist als die Höhe ohne Azimut, im Norden liegt, daß sie aber im Süden liegt, wenn sie größer ist als die Höhe ohne Azimut.

c) Andere Abhandlung. Wenn du die Ortsbreite und die Sonnendeklination bestimmen willst, falls du zwei verschiedene Höhen, sowie die zu ihnen gehörigen Azimute kennst, und wenn das Azimut und die Stelle der Sonne (die Sonnenhöhe) von ein und demselben Vorzeichen (Richtung) sind,

s. 377. so verfährt du in der Weise, daß du den Kosinus einer jeden der beiden Höhen mit dem Sinus des zugehörigen Azimuts multiplizierst und jedes der beiden Produkte durch sin. tot. dividierst; was sich als Resultat für die kleinere Höhe ergibt, sei der naşib (Anteil, Portion) für die kleinere Höhe, und was für die größere Höhe herauskommt, sei der naşib für die größere Höhe. Du merkst dir jeden naşib einzeln für sich. Und nun beachte: Falls beide Azimute zugleich ein und desselben Vorzeichens sind, und zwar südlich oder nördlich, so ziehe den kleineren naşib vom größeren ab, und was bleibt, das sei der erste Wert. Wenn aber das eine der Azimute nördlich und das andere südlich ist, so addiere die beiden naşibā' (Anteile). Was sich nach der Addition ergibt, das ist der erste Wert, und falls du ihn ermittelt hast, so behalte ihn im Gedächtnis. Alsdann ziehe den Sinus der kleineren Höhe vom Sinus der größeren ab; die Differenz ist der zweite Wert. Quadriere ihn und tu ebenso mit dem ersten Wert. Addiere beide Quadrate und nimm die Wurzel aus der Summe, deren Betrag du im Gedächtnis behältst. Darauf multiplizierst du den ersten Wert mit sin. tot. und dividierst das Produkt durch die Quadratwurzel. Der Quotient ist gleich dem Sinus der Ortsbreite, und der zugehörige Bogen ist die Ortsbreite selbst. Und falls du die Ortsbreite kennst und du willst die Sonnendeklination wissen, so multipliziere den Sinus der ersten der beiden bekannten Höhen mit dem Sinus der Breite und teile das Produkt durch den Kosinus der Breite. Das Resultat ist der Ichtilāf des Horizontes für diese Höhe. Du bestimmst seinen Betrag, und nun beachte: Wenn das Azimut südlich ist, und die Sonne steht in den südlichen Sternbildern, so ziehst du den Ichtilāf des Horizontes vom naşib dieser Höhe ab; was übrigbleibt, ist der Sinus der Morgenweite. Steht die Sonne aber in den nördlichen Sternbildern, so ziehst du den naşib der Höhe vom Ichtilāf des Horizontes ab. Das Resultat ist gleich dem Sinus der Morgenweite, und falls das Azimut nördlich ist, so vermehre den naşib der Höhe um den Ichtilāf des Horizontes. Das Resultat ist der Sinus der Morgenweite. Falls du dessen Sinus kennst, so multipliziere ihn mit dem Kosinus der Breite, und merke dir das Ergebnis dieser Multiplikation. Du dividierst es durch sin. tot., der Quotient ist gleich dem Sinus der Sonnendeklination; der entsprechende Bogen ist die Deklination selbst. — Betrachte den Sinus der größten Deklination (Ekliptik-schiefe) als gegeben, teile mit ihm in den Sinus der Sonnendeklination; das Resultat der Division ist der Sinus des Abstandes der Sonne von einem der beiden Äqui-

noktien (Sonnenlänge); falls du für einen Fixstern mit Breite gerechnet hast, so ergibt sich dir sein Abstand vom Himmelsäquator. g

Beispiel: Die eine der beiden Höhen in diesem Beispiel sei 20° , deren nördliches Azimut betrage $7^\circ 54' 10''$; der zugehörige Sinus ist $8^\circ 14' 58''$; die andere Höhe sei 50° ; ihr südliches Azimut betrage $10^\circ 21' 42''$; der Sinus hiervon ist $10^\circ 47' 30''$. Du multiplizierst den Sinus eines jeden dieser beiden Azimute mit dem Kosinus der zugehörigen Höhe und teilst die Produkte durch sin. tot. Es ergibt sich als našib der kleineren Höhe $7^\circ 47' 7''$ und als našib der größeren $6^\circ 56' 12''$. Beide Werte behältst du im Gedächtnis. Und weil das eine der Azimute nördlich, das andere südlich ist, so zählst du beide ansibā zusammen. Ihre Summe ist $14^\circ 41' 19''$. Das ist der erste Wert, den du dir wohl merkst. S. 378. Dann ziehst du den Sinus der kleineren Höhe, $20^\circ 31' 16''$, vom Sinus der größeren Höhe, $45^\circ 17' 46''$, ab; es verbleibt $25^\circ 46' 30''$. Das ist der zweite Wert, den du dir ebenfalls merkst. Nunmehr quadrierst du den ersten Wert und erhältst $215\ 45\ 19\ 41$. Dies merkst du dir. Ebenso quadrierst du den zweiten Wert, wodurch sich $647\ 16\ 42\ 15$ als Quadrat des zweiten Wertes ergibt. Auch dies merkst du. Nun addierst du beide Quadrate; die Summe derselben ist $863\ 2\ 11\ 91$. Die Quadratwurzel hieraus ist rund $29^\circ 22' 39''$. Du merkst dir diesen Betrag. Dann multiplizierst du den ersten Wert, $14^\circ 41' 19''$, mit sin. tot. und teilst das Produkt durch die Quadratwurzel; es kommt annähernd 30° heraus. Der zu diesem Sinus gehörige Bogen ist 30° , und dies ist die Ortsbreite; doch es ist Gott, der zum Richtigen verhilft. Nachdem so die Breite bekannt ist, multipliziere man, um auch die Sonnendeklination zu ermitteln, den Sinus der einen der zwei Höhen, ich meine sin 20° , dessen Wert $20^\circ 31' 16''$ beträgt, mit dem Sinus der Breite und dividiere das Produkt durch den Kosinus der Breite; es ergibt sich $11^\circ 50' 53''$, welche Größe der Ichtilāf des Horizontes für die Höhe 20° ist. Und weil das Azimut nördlich ist, so vermehrest du den našib dieser Höhe, $7^\circ 45' 7''$, um den Ichtilāf des Horizontes, was zu $19^\circ 36' 0''$ führt. Das ist gleich dem Sinus der Morgenweite. Du multiplizierst ihn mit dem Kosinus der Breite, $51^\circ 57' 41''$, und teilst das Produkt durch sin. tot., es kommt $16^\circ 58' 26'' 36'''$ heraus; dies entspricht einem Sinus; der zugehörige Bogen $16^\circ 26'$ ist gleich der nördlichen Sonnendeklination. Und wenn die Rechnung für einen Stern mit Breite gemacht wurde, so ist das, was herauskommt, sein Abstand vom Äquator, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen!

Anderes Beispiel zu dieser Risāle (Abhandlung). Die Azimute mögen in diesem Beispiel beide dasselbe Vorzeichen haben, da sie ja im vorhergehenden verschiedensinnig waren; dort war nämlich das eine nördlich, das andere südlich. Es möge jetzt die kleinere Höhe 20° betragen, und ihr südliches Azimut sei $39^\circ 29' 12''$, während die größere Höhe 30° sei bei einem südlichen Azimut von $52^\circ 41' 6''$. Der Sinus dieses Azimuts ist $47^\circ 43' 8''$ ¹⁾. Du multiplizierst den Sinus eines jeden der beiden Azimute mit dem Kosinus der zugehörigen Höhe und teilst die Einzelergebnisse durch sin. tot. Es ergibt sich für den našib der kleineren Höhe $35^\circ 51' 11''$ und für den našib der größeren $41^\circ 19' 32''$, und weil beide Azimute ein und desselben Vorzeichens, nämlich südlich, sind, so ziehst du den kleineren našib vom größeren ab, wonach noch $5^\circ 28' 21''$ übrigbleibt. Das ist der erste Wert, den du dir wohl merkst. Jetzt subtrahierst du den Sinus der kleineren der beiden Höhen vom Sinus der größeren. Es verbleibt $9^\circ 28' 44''$ als zweiter Wert. Du quadrierst den ersten und den zweiten Wert und erhältst für deren Quadrate bzw. $29\ 56\ 53\ 43\ 21$ und $89\ 50\ 57\ 36\ 16$. Die Summe beider Quadrate beträgt $119\ 47\ 51\ 19\ 37$. Die Quadratwurzel hieraus ist rund $10^\circ 56' 43''$. Du merkst dir diesen Betrag. Nunmehr multiplizierst du den ersten Wert mit sin. tot. und teilst das Produkt durch die Quadratwurzel. Es ergibt sich annähernd 30° . Dies ist ein Sinus, dessen Bogen 30° ist, und das ist die Breite des Ortes. Darauf multiplizierst du den Sinus der einen Höhe, ich meine der von 20° , der $20^\circ 31' 16''$ beträgt, mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst S. 379.

¹⁾ Der Sinus des Azimuts von $39^\circ 29' 12''$ ist nicht gesondert angegeben. Er beträgt nach der Sinustafel des Autors $38^\circ 9' 14'' 6''' 381V$. (Vgl. die arab. Hdschr. Landberg, Nr. 1033, Berlin.)

das Produkt durch den Kosinus der Breite; es kommt $11^{\circ} 50' 53''$ heraus, und dies ist der Lichtlauf des Horizontes. Du ziehst ihn vom Maß dieser Höhe, nämlich $35^{\circ} 51' 11''$, ab, und es bleibt $24^{\circ} 0' 18''$ übrig, was gleich dem Sinus der Morgenweite ist. Dies multiplizierst du mit dem Kosinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch sin. tot. Das ergibt $20^{\circ} 47' 20''$, und dies ist der Sinus der Sonnendeklination; die entsprechende südliche Deklination ist $20^{\circ} 16' 20''$.

Doch ich kann die Ortsbreite in diesem Beispiel auch noch anders ermitteln, und zwar so, daß ich den ersten Wert mit 60° multipliziere und was sich ergibt, durch den zweiten Wert dividieren. Es kommt alsdann $34^{\circ} 38' 24''$ heraus, und das ist ein 60° Schatten. Der zugehörige Bogen ist rund 60° , was gleich der Mittagshöhe des Beginns des Widders ist. Ziehe es von 90° , so bleibt 30° als Ortsbreite, und es ist Gott, der zum Richtigen verhilft.

d) Andere Risale: Wenn die Meridianhöhe sowie eine andere Höhe vor oder nach der Tagesmitte bekannt sind, dazu außerdem das Azimut der letzteren nach Größe und Vorzeichen gegeben ist, so ist damit auch die Ortsbreite und die Sonnendeklination bestimmt. Und falls es sich um einen Fixstern mit Breite handelt, so ist seine Entfernung vom Himmelsäquator an Stelle der Deklination bestimmbar. Der Weg zur Ermittlung der gesuchten Stücke ist der folgende:

Du multiplizierst den Kosinus der bekannten Höhe mit dem Sinus ihres Azimuts und teilst das Produkt durch sin. tot. Das Resultat ist der Maß der Höhe, den du dir merkst. Und beachte: Wenn die Sonne in den südlichen Sternbildern steht, so ziehe den Maß der Höhe vom Kosinus der Meridianhöhe ab; was übrigbleibt, ist der erste Wert. Steht die Sonne aber in den nördlichen Sternbildern und ist das Azimut nördlich, so addiere den Maß der Höhe zum Kosinus der Meridianhöhe der Sonne; was sich ergibt, ist der erste Wert. Wenn aber das Azimut südlich ist, so ziehe den Maß der Höhe vom Kosinus der Meridianhöhe ab; was übrigbleibt, ist der erste Wert. Und falls du ihn berechnet hast, wird er ins Quadrat erhoben. Und du ziehst den Sinus der (beliebigen) Höhe vom Sinus der Meridianhöhe ab; der Rest ist der zweite Wert. Quadriere ihn, addiere beide Quadrate und ziehe die Quadratwurzel aus der Summe; was sich ergibt, das merke dir. Dann multiplizierst du den ersten Wert mit sin. tot. und teilst das Produkt durch die Quadratwurzel. Das Ergebnis ist ein Sinus, dessen Bogen gleich der Ortsbreite ist. Wenn du diesen Bogen von 90° abziehst, so ist der Rest die Höhe des Beginns des Widders oder der Wage. — Du kannst aber auch den ersten Wert mit 60° multiplizieren und das Produkt durch den zweiten Wert dividieren; der Quotient ist ein 60° Schatten. Ermittle den zugehörigen Bogen aus der Tafel der 60° Schatten; was sich an Bogen ergibt, ist die Ergänzung der Ortsbreite. Ziehe sie von 90° ab, so ist der Rest die Ortsbreite selbst. h

Erläuterungen zum 21. Kapitel der Hākimitischen Tafeln.

ad a) Zur Aufhellung dieser Lehren des Autors sei auf die zwei Figuren 1a und 1b auf Tafel 1 verwiesen. In denselben bedeutet HH_1 den Durchmesser des Horizontkreises, AQ den des Himmelsäquators, während MZ und MN bzw. die Richtung zum Zenit und zum Nadir ist. Die zwei Orte, wo die Sonne in zwei einander entgegengesetzten Punkten der Ekliptik gleiche Höhe h hat, seien S_1 und S_2 . Die augenblicklichen Sonnendeklinationen müssen dann von gleichem Betrag, aber entgegengesetztem Vorzeichen sein. Sie seien durch die Parallelkreise BB_1 und B_2B_3 dargestellt. ZWN ist der Höhenkreis ohne Azimut; W sei also der Westpunkt (Fig. 1a). Das Azimut des Sonnenortes S_1 ist Bogen $W\Sigma_1 = \alpha_1$, dasjenige von S_2 aber Bogen $W\Sigma_2 = \alpha_2$. Wir fällen von S_1 und S_2 die Lote S_1U und S_2S_4 auf die Horizontalebene. Die Fußpunkte dieser Lote, U und S_4 , müssen in der Ebene der Azimutkreise $ZS_1\Sigma_1N$ und $ZS_2\Sigma_2N$ liegen, also auf die Halbmesser des Horizontkreises $M\Sigma_1$ und $M\Sigma_2$ fallen. Ferner ist Bogen $WV =$ Bogen $WV_1 =$ Morgenweite m der Sonne. Die Lote von S_4 , V_1 , U , V auf den Durchmesser des Horizontes gefällt, treffen dort bzw. in G_1 , T_1 , G und T auf. Errichtet man in G und G_1 die Senkrechten GS und G_1S_2 , so stellen sie den

Abstand des Almuquantarats $H_2S_1S_2H_3$ vom Horizont dar und sind $= r \cdot \sin h$, falls man den Radius der Himmelskugel mit r bezeichnet. Mit der Bemerkung, daß $S_1Y \perp MW$ und (in Fig. 1b) $UX \perp MW$ ist und daß man unter Ichtilälf al-ufq (ufq = Horizont) die Strecke $TG = T_1G_1$ versteht, ist die Erläuterung der zwei Figuren 1a und 1b wohl ausreichend.

Nun liest man aus diesen Abbildungen der Reihe nach ab:

$$\begin{aligned} MS_1 &= r \cdot \cos h \\ S_1Y &= MG_1 = r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_2 \quad \dots \quad (I) \\ UX &= MG = r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_1 \quad \dots \quad (II) \end{aligned}$$

$$(I) + (II) = MG_1 + MG = r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_2 + r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_1 \quad \dots \quad (III)$$

Es ist weiterhin

$$\begin{aligned} MG &= MT - GT \\ MG_1 &= MT + GT \end{aligned}$$

das ist

$$\begin{aligned} MT &= \frac{1}{2}(MG + MG_1) \\ &= \frac{1}{2}(r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_1 + r \cdot \cos h \cdot \sin \alpha_2) \quad \dots \quad (IV) \end{aligned}$$

Dividiert man links und rechts mit r , so gilt für Fig. 1a

$$\frac{MT}{r} = \sin m = \frac{1}{2}(\cos h \cdot \sin \alpha_1 + \cos h \cdot \sin \alpha_2) \quad \text{q. e. d.}$$

Für Fig. 1b gilt:

$$\begin{aligned} MG + MT &= GT = G_1T_1 \\ MG &= G_1T_1 - MT \\ &= G_1T_1 - MT_1 \\ MG_1 &= G_1T_1 + MT_1 \end{aligned}$$

fürner ist

$$\text{Mithin} \quad \frac{1}{2}(MG + MG_1) = G_1T_1 = GT = \text{Ichtilälf al-ufq} \quad \text{q. e. d.}$$

Sodann liest man für Fig. 1a ab:

$$\begin{aligned} MT &= r \cdot \sin m \\ MG &= r \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos h \end{aligned}$$

folglich

$$MT - MG = GT = \text{Ichtilälf al-ufq} \quad \text{q. e. d.}$$

Aus Fig. 1b aber folgt

$$\begin{aligned} MG_1 &= r \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos h \\ MT_1 &= r \cdot \sin m \end{aligned}$$

mithin ist auch $MG_1 - MT_1 = G_1T_1 = \text{Ichtilälf al-ufq}$, q. e. d.

In den rechtwinkligen (schraffierten) Dreiecken TGS und $T_1G_1S_2$ ist $\angle TSG = \angle T_1S_2G_1 = \angle \varphi$ (Ortsbreite oder Polhöhe). Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{TG}{\sqrt{SG^2 + TG^2}}, \text{ oder} \\ r \cdot \sin \varphi &= \frac{r \cdot \text{Ichtilälf al-ufq}}{\sqrt{(r \cdot \sin h)^2 + (\text{Ichtilälf al-ufq})^2}} \quad \dots \quad (V) \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Es ist in Formel (V) zu beachten, daß die arabische Sinustafel nicht die reinen Sinuswerte aufführt, sondern stets das Produkt eines Sinus in den Radius r (sin. tot.).

Da PP_1 die Weltachse und $\angle HMP = \angle \varphi$ (Polhöhe) ist, so liest man endlich aus dem rechtwinkligen Dreieck TRM ab:

$$MR = r \cdot \sin \delta \quad (\delta = \text{Sonnendeklination})$$

$$\frac{MR}{MT} = \frac{r \cdot \sin \delta}{r \cdot \sin m} = \cos \varphi, \quad \text{das ist}$$

$$\sin \delta = \sin m \cdot \cos \varphi \quad \dots \quad (VI) \quad \text{q. e. d.}$$

ad b) Die Bestimmung der Äquatordistanz eines Sterns mit Breite ist wohl dahin zu verstehen, daß man dessen Höhe h mißt und mit Kenntnis der Ortsbreite φ den Ausdruck für den Ichtilälf des Horizontes

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \sin h$$

bildet. Dann ergibt sich auf bekanntem Wege der Äquatorabstand des Sterns. Aber zur Bestimmung zweier unbekannten Größen (Polhöhe und Äquatordistanz) genügt ein einziger Stern im vorliegenden Falle nicht. Die Darlegungen des Autors sind hier nicht ganz klar; ein Zahlenbeispiel gibt er für einen Stern nirgendwo.

ad c) Hier faßt der Autor in dem Ausdruck für den Ichtläf des Horizontes den Quotienten $\frac{\sin \eta}{\cos \varphi}$ als einen Schatten, d. i. eine Kotangente auf, indem er dafür setzt $\cotg(90^\circ - \varphi)$. Auch in der Schattentafel schleppten die arabischen Astronomen fast stets den Faktor r mit, der bei einem sogenannten 60^{er} Schatten = 60 partes war. Man sieht, daß Ibn Yûnus der Gebrauch der Tangente zwar nicht ferne lag, daß er sie aber vielleicht in Rücksicht auf seine Leser nur nebenbei erwähnt, wo zu seiner Zeit der Gebrauch des Sinus noch ganz dominierte.

ad d) Zur Erläuterung der Yûnusischen Vorschriften für diesen Fall sei auf Fig. 2 (Tafel 1) verwiesen. Wenn die Sonne in S den Ostwestkreis passiert, ist ihre Höhe („ohne Azimut“) = η , während sie in dem beliebigen Punkte S_1 den Betrag h_1 bei einem Azimut α_1 haben möge. Wiederum werde von S_1 auf den Horizont das Lot S_1S_2 gefällt, dessen Größe = $r \cdot \sin h_1$ sei. Ferner sei $S_2L_1 \perp HH_1$ und $S_1L_1 \perp BB_1$. Da LL_1 in der Meridianebene liegt und gleichzeitig vom Horizont bis zur Ebene des Almuqantarâts reicht, der durch S_1 geht, so ist $LL_1 = S_1S_2$, d. h. $LL_1S_1S_2$ ist ein Rechteck, mithin $S_1L_1 = S_2L_1$. Wir fällen weiter das Lot S_2X auf MW und errichten in X eine Senkrechte zum Horizont, die wir in Y zum Schnitt mit dem Umfang des Ostwestkreises ZWN bringen. Von Y fällen wir den Perpendikel YS_1 auf den Durchmesser NZ und verbinden außerdem S_1 mit L_1 , Y mit S_1 . Machen wir auch noch $SS_1 \perp BB_1 \perp NZ$, so ist $MS = r \cdot \sin \eta$, und wenn wir $SK \parallel ML_1$ ziehen, ist auch $KL_1 = r \cdot \sin \eta$. Nun liest man aus Fig. 2 ab:

$$ML_1 = S_2X = SK = r \cdot \sin h_1 \cdot \cos \alpha_1 = \text{erster Wert} = Q_1 \\ LK = LL_1 - KL_1 = LL_1 - MS = r \cdot (\sin h_1 - \sin \eta) = \text{zweiter Wert} = Q_2.$$

Somit ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck L_1SK :

$$r \cdot \sin \varphi = \frac{r \cdot SK}{\sqrt{SK^2 + LK^2}} = \frac{r \cdot Q_1}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}, \quad \text{q. e. d.}$$

Fällt man sodann noch auf den Durchmesser BB_1 des Parallelkreises der Sonne das Lot MR , welches also in der Weltachse liegt, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck ΣMR :

$$\frac{MR}{\Sigma M} = \sin \varphi; \quad \text{das ist}$$

$$r \cdot \sin \delta = \sin \varphi \cdot r \cdot \sin \eta, \\ \sin \delta = \sin \varphi \cdot \sin \eta^1), \quad \text{q. e. d.}$$

ad e) u. f) Der Wert $\delta = 23^\circ 35'$ ist die größtmögliche Deklination (Ekliptikschiefe).

ad g) Es sei auf Fig. 3 (Tafel 1) verwiesen, die nach den vorhergegangenen Erläuterungen sofort verständlich ist. Man liest ab:

$$ML_1' = r \cdot \cos h_1 \cdot \sin \alpha_1 = \text{näglb für } h_1^1) \\ ML_2' = r \cdot \cos h_2 \cdot \sin \alpha_2 = \text{näglb für } h_2^1)$$

In unserer Fig. 3 ist das Azimut α_1 südlich, α_2 aber nördlich. Durch Addition folgt also:

$$(I) \quad \dots \quad ML_1' + ML_2' = L_1L_2' = r(\cos h_1 \cdot \sin \alpha_1 + \cos h_2 \cdot \sin \alpha_2) = \text{erster Wert} = Q_1'.$$

Sodann liest man ab:

$$S_1S_1' = L_1L_1' = r \cdot \sin h_1 \\ S_2S_2' = L_2L_2' = r \cdot \sin h_2$$

$$(II) \quad \dots \quad L_1K = L_1L_1' - L_2L_2' = r(\sin h_1 - \sin h_2) = \text{zweiter Wert} = Q_2'.$$

Wiederum ist

$$(III) \quad \dots \quad r \cdot \sin \varphi = \frac{r \cdot L_2K}{\sqrt{L_2K^2 + L_1K^2}} = \frac{r \cdot Q_1'}{\sqrt{Q_1'^2 + Q_2'^2}}. \quad \text{q. e. d.}$$

Alles weitere ergibt sich nach dem früheren von selbst oder läßt sich unmittelbar aus einer Figur ablesen.

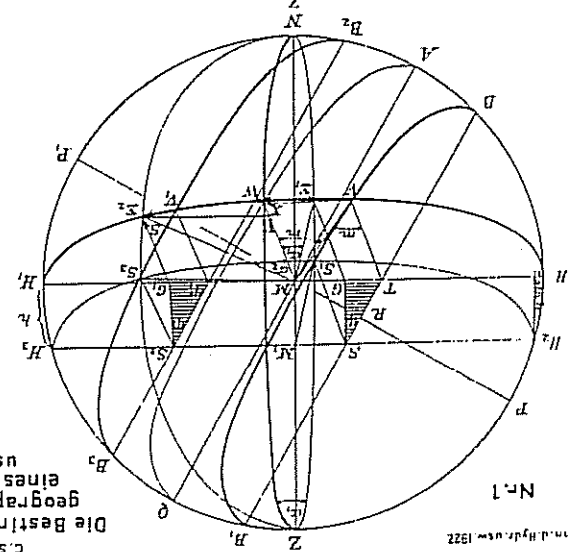
ad h) Da nach arabischer Zählweise das Azimut (α_1) im Meridian = 90° ist, so wird Formel (I) [ad g)]

$$Q_1' = r(\cos h_1 + \sin \alpha_2 \cdot \cos h_2) \quad \text{usw.}$$

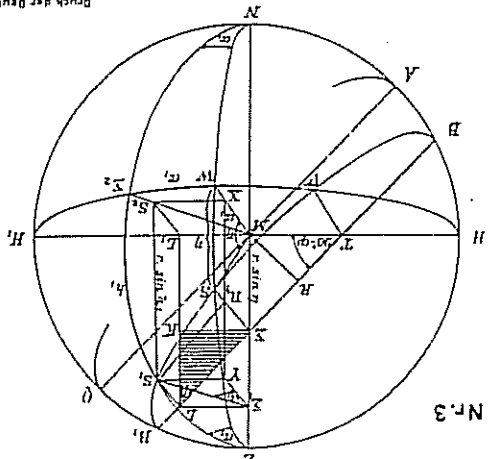
¹⁾ Vgl. das ad b), XII. Kap. Gesagte.

Die Bestimmung der
geograph. Breite
eines Ortes
usw.
C. Schöy:

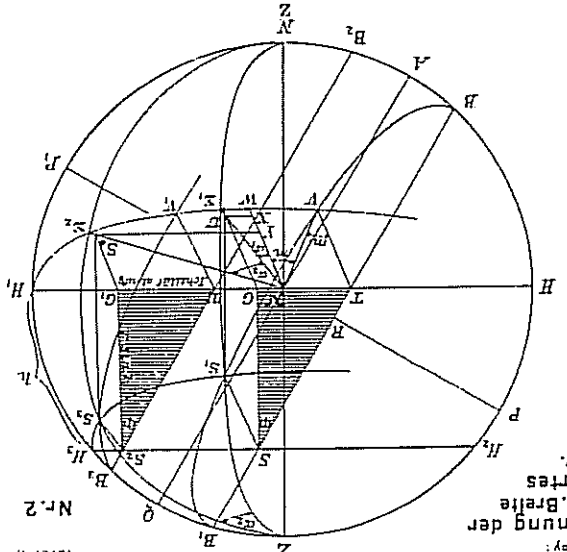
Tafel 1.



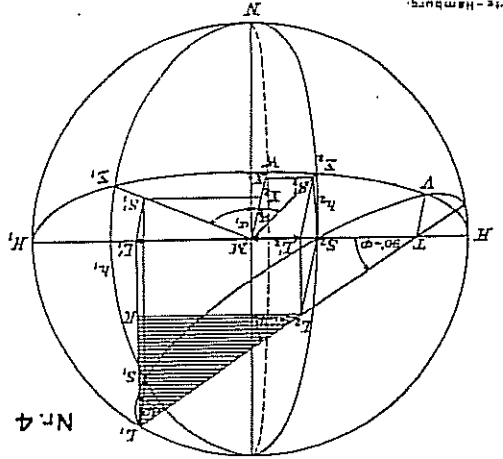
Nr. 1



Nr. 3



Nr. 2



Nr. 4

Beiträge zur arabischen Trigonometrie

(Originalstudien nach unedirten arabisch-astronomischen Manuscripten)

(Ein Festgruss zum 70. Geburtstag GUSTAF ENESTRÖMS in Stockholm)

In dieser Abhandlung möchte ich den Beweis erbringen, dass das Bild, welches wir bis heute von der arabischen Trigonometrie gewonnen haben, noch durchaus der Vervollständigung bedarf, und dies vor allem in Hinsicht auf *den Sinus und die Sinustafeln*. Ich hielt es daher für angezeigt, mehrere arabisch — astronomische Tafelwerke (ziğât) auf ihren trigonometrischen Gehalt hin zu untersuchen und lege die dabei erzielten Resultate dem für die Geschichte der Trigonometrie interessierten Leser vor.

Die folgende Studie zerfällt in zwei Teile. Die *erste Hälfte* enthält eine wörtliche Uebersetzung des *10. Kapitels der häkimitischen Tafeln* des Ibn Yunus († 1009), das von der Berechnung der Sinusse handelt und wohl zum Bedeutendsten gehört, was die arabisch-astronomische Literatur in dieser Beziehung aufzuweisen hat. Es gewährt seine Lectüre einen klaren Einblick in die trigonometrischen Praktiken der Araber und die Erstellung ihrer Sinustafeln. Anschliessend gebe ich im *zweiten Teile* die *Analyse einer kleineren Anzahl solcher Tafeln* arabischer Autoren, die bis jetzt noch unerschlossen sind.

I.

ABŪ 'L-ḤASAN 'ALĪ IBN 'ABDERRAḤMÂN IBN AḤMED IBN YŪNUS 'ABD AL-A'ĻĀ AṢ-ṢADAFĪ AL-MIṢRĪ, bekannt unter dem Namen IBN YŪNUS, ist neben AL-BATTANĪ († 929) wohl der grösste arabische Astronom. Sein Geburtsjahr ist unbekannt, da sein Vater, ein namhafter Historiker und Traditionist, 958/59 starb; so dürfte unser kairinischer Astronom wohl ein normales Alter erreicht haben. Ich mache diese Bemerkung, weil JOACHIM LELEWEL angibt, dass IBN YŪNUS 979 geboren sei (1). Er erfreute sich der besonderen Gunst der fātimidischen Chalifen AL-'Azīz

(1) Géographie du moyen Age, Bruxelles, 1852 t. I. page 43.

und AL-ḤĀKIM, deren Hofastronom er war, und in deren Auftrag er seine berühmten ḥākimitischen Tafeln ausarbeitete. Die arabischen Biographen machen über den Umfang des Werkes verschiedene Angaben. Nach ABŪ'l. FIDĀ' (1) und IBN CHALLIKĀN (2) bestand der ursprüngliche *ziġ al-ḥākimi* aus 4, nach anderen nur aus 2 Teilen. CAUSSIN DE PERCEVAL (3) neigt der Ansicht zu, dass IBN YUNUS 2 Ausgaben seines Werkes, die erste in 4, die zweite in 2 Volumes, gemacht habe, von denen die frühere AL-'Azīz, die spätere AL-ḤĀKIM gewidmet war. Dies glaubt CAUSSIN aus mehreren Stellen bei IBN CHALLIKĀN und aus den verschiedenen Ueberschriften, unter denen das Werk angeführt wird, schliessen zu müssen. Die Richtigkeit dieser Folgerung wird von H. SUTEN (4) bezweifelt, aber auch unser nachstehender Text weist darauf hin, dass 2 verschiedene Bearbeitungen durch IBN YUNUS existierten.

Leider ist *az-ziġ al-ḥākimi* in seiner Gesamtheit handschriftlich nicht erhalten. Die ersten 21 der 81 Kapitel finden sich in Leiden, (N^o 143 des Legat. Warnerian.) die folgenden 23 in Oxford (Mscr. Huntington N^o 331 der Bodleyana). Die grosse Sinus- und Deklinationstafel des Autors, die die Staatsbibliothek Berlin (Ms. Landberg N^o 1038) bewahrt, ist kein Fragment der ḥākimitischen Tafeln; die Fragmente im Escorial und in der viceköniglichen Bibliothek zu Kairo kenne ich nur den Ueberschriften nach.

Von dem trefflichen Werke, das mit seinen zahlreich eingestreuten historischen Erörterungen zugleich « *une espèce d'histoire céleste* » (5) darstellt, ist noch sehr wenig in abendländische Sprachen übersetzt. Von CAUSSIN (6) stammt die Uebersetzung des 4, 5, und 6. Kapitels. Diese 3 Kapitel enthalten hauptsächlich Beobachtungen von Finsternissen und Konjunktionen von älteren Astronomen und IBN YŪNUS selbst; sie sind daher von besonderem historischen Wert.

(1) *Annales musulmici*, t. II, pag. 619.

(2) IBN CHALLIKĀN's biographical dictionary, transl. from the arabic by MAC GUCKIN DE SLANE, Paris-London 1843-71. (Die Stelle steht bei CAUSSIN [s. die Note 4] in arab. Sprache, S. 29.)

(3) *Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque nationale*, t. VII, page 19.

(4) *Die Mathematiker u. Astronomen der Araber und ihre Werke*, Leipzig 1900, S. 78.

(5) MONTUOLA, « *Histoire des Mathématiques*, I », Paris an VII, pag. 366.

(6) a. n. O., pag. 16-240.

Im Jahre 1817 aber vollendete der ausgezeichnete Orientalist und Astronom J. J. SÉDILLOT (1777-1832) die Uebersetzung des ganzen Leidener Manuscripts und entdeckte ausserdem in einem Werke des Ibn AS-ŠĀTIR, (1304-1375/76) das der kgl. Bibliothek zu Paris angehört, 18 weitere Kapitel der Yûnusischen Astronomie. Diese Uebertragung durch SÉDILLOT hat J. B. DELAMBRE in seiner heute noch sehr lesenswerten « Astronomie du moyen âge », Paris 1819, ausgiebig benützt, (pag. 76-156) welche sozusagen bis heute noch immer das einzige umfassendere Quellenwerk über die hâkimitischen Tafeln ist (1). Im Druck ist SÉDILLOT's Uebersetzung leider nie erschienen. SÉDILLOT's Sohn, Louis AM. SÉDILLOT, bemerkt dazu: « Il eût été sans doute à désirer que la traduction de l'illustre orientaliste, mort en 1832, eût été imprimée, et cette publication aurait été faite depuis longtemps, si l'intérêt seul de la science guidait toujours ceux qui s'en proclament les chefs et si des attaques passionnées ne nous avaient détourné, malgré nous, de la route que nous nous étions proposé de parcourir (2) ». An derselben Stelle berichtet SÉDILLOT, dass DESHAUTERAYES dieselben Kapitel um 1758 übersetzt hätte, wie aus dem *Mémoire historique et littéraire sur le Collège royal de France* par M. l'abbé CLAUDE GOUET (II. Partie, 1758 pag. 130 et t. III pag. 364/365) folge. Aber diese Uebersetzung blieb ungedruckt. Endlich liest man bei GUSTAVE DUCAT (3): « Sédillot prépare une édition complète d'Ebn-Jounis etc. » Leider ist auch hiervon nichts im Druck erschienen, und die genannten Uebersetzungen oder Versuche sind wohl unauffindbar. MONTUCLA bemerkt, dass DE L'ISLE einen Teil dieses Werkes des Ibn Yûnus besessen habe, dessen weiteres Schicksal nach DE L'ISLE's Tod er nicht kenne (4).

Eine kleinere Zahl von Kapiteln der hâkimitischen Tafeln ist von mir in deutscher Uebersetzung (mit Kommentar) in den Jahrgängen 1920, 21 und 22 der « Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie » (Hamburg, Deutsche Seewarte) veröffentlicht worden, ebenso einige gnomonische Kapitel in meiner *Gnomonik der Araber* (Berlin, 1923) Für die gütigen Hilfeleistungen zur Ermöglichung der Publikation des nun folgenden 10. Kapitels möchte ich auch hier Herrn Dr. C. VAN ARENDONK in Leiden besten Dank sagen.

(1) Ausgiebig benützt von H. HANKEL: « Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter », Leipzig 1874, S. 288 ff.

(2) *Prolegomènes des Tables astronomiques d'Oloûg-Beg*. Paris 1847, p. 65.

(3) *Histoire des Orientalistes en Europe*, Paris 1868, page 140.

(4) ebenda.

DAS 10. KAPITEL :

Ueber die Ermittlung der Kreissehnen. (1)

Die Zahl der bekannten primitiven Sehnen ist 7. Es sind dies die Sehnen des Sechstel-, Drittel-, Viertel- und Zehntelkreises, sodann jene vom Supplement des Kreiszehntels, d. i. die Sehne des 2 Fünftelkreises, endlich die Sehne des Kreisfünftels und die seines Supplements, d. i. die Sehne des Kreisfünftels und -zehntels zusammen. Was die Sehne anbetrifft, welche das *Kreissechstel* unterspannt, so ergibt sie sich aus dem Beweise, wie er im Buch der Elemente (*kitāb al-uṣūl*) (2) steht, als halber Durchmesser des Kreises. Bezüglich der Sehne des *Kreisdrittels* beachte man, dass, falls man die Sehne eines gegebenen Bogens kennt, auch die Sehne seiner Ergänzung bis zum Halbkreis bekannt ist, weil der Winkel im Halbkreis stets 90° beträgt. Der Weg zu ihrer Auffindung ist deshalb der, dass man die bekannte Sehne und den Kreisdurchmesser quadriert, vom Quadrat des Durchmessers das Quadrat der Sehne subtrahiert und aus der Differenz der Quadrate die Wurzel zieht. Das Resultat ist alsdann die Sehne des Bogens, der bis zur Hälfte des Kreisumfanges übrig bleibt. So erhält man auf diese Weise die Sehne des Kreisdrittels, die Sehne des Kreissechstels als bekannt vorausgesetzt. Aber man ermittelt die Sehne des Drittels auch direkt im Wege des Beweises, wie deutlich gemacht ist im Buch der Elemente: wenn man sie nämlich quadriert, so ist das erlangte Quadrat das Dreifache des Quadrates über dem halben Kreisdurchmesser. Wenn wir also für den Durchmesser eine bekannte Zahl annehmen, ihre Hälfte ins Quadrat erheben, das Quadrat mit 3 multiplizieren und zuletzt die Quadratwurzel aus dem Resultat der Multiplikation ziehen, so erhalten wir die Sehne des Drittels, und Allah macht das Richtige treffen.

Was die Sehne des *Kreisviertels* anbelangt, so ist es evident, dass wenn in einem Kreis 2 Durchmesser sich rechtwinklig schneiden, und man alsdann den Endpunkt des einen Durchmessers mit den beiden Endpunkten des anderen Durchmessers durch 2 gerade Linien verbindet, jede der beiden Linien einen Viertelkreis unterspannt, d. h. einen rechten Winkel einschliesst, und dass der Durchmesser

(1) CAUSSIN gibt die ausführlichere Ueberschrift dieses Kapitels so an: "Des cordes du cercle, des sinus et de la manière d'en dresser des tables". (*Notices et extraits des Manuscrits de la Bibl. nat.*, t. VII, p. 82.)

(2) Es sind wohl die *Elemente* des EUKLID gemeint.

diesen rechten Winkel unterspannt. Deshalb ist bekannt, dass die Summe der Quadrate der beiden Linien dem Quadrate des Durchmessers gleich ist. Und wenn dies so ist, so quadrieren wir den Durchmesser und ziehen aus der Hälfte seines Quadrates die Wurzel. Das Resultat der Radizierung ist gleich der Sehne des Viertelkreises. Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man den halben Kreisdurchmesser mit dem ganzen multipliziert und aus dem Produkt die Quadratwurzel zieht, doch Allah leitet zum Rechten.

Es folgt jetzt die Berechnung der *Sehne des Zehntels*, weil diese Sehne, gemäss dem, was durch den im Buche der Elemente gegebenen Beweis feststeht, mit der Sehne des Sechstels in ein und demselben Kreise in einem Zusammenhang steht, und falls man beide Linien zu einer einzigen Geraden aneinanderlegt, so ist diese im mittleren und äusseren Verhältnis geteilt (1), wobei die Sehne des Sechstels der grössere Teil ist. Und weil beide (Teile), falls wir sie zusammenfügen, ein Verhältnis bilden gleich dem Verhältnis der (ganzen) geteilten Linie zu ihrem grösseren Teil, so ist es klar, dass wenn eine Linie im mittleren und äusseren Verhältnis geteilt ist, auch der grössere der beiden Teile in diesem Verhältnis geteilt wird, falls der grössere seiner 2 Teile dem kleineren Teile der ersten geteilten Linie gleich ist (2). So teilen wir also die Sehne des Sechstels nach dem mittleren und äusseren Verhältnis. Dann ist der grössere Teil die Sehne des Zehntels, und damit bekannt, und es ist evident, dass die Sehne, welche den Bogen, der bis zum Halbkreis übrig bleibt, unterspannt, nämlich $\frac{2}{5}$ des *Kreisumfanges*, ebenfalls bekannt ist.

Nunmehr folgt die Berechnung der *Sehne des Kreisfünftels*. Da die Sehne des Sechstels und Zehntels bekannt sind und aus dem im Buch der Elemente gegebenen Beweis hervorgeht, dass die Summe ihrer Quadrate gleich dem Quadrat über der Sehne des Fünftels ist, so ist es klar, dass die Sehne des Fünftels gefunden werden kann, und dadurch, dass man die Quadrate der Sehne des Sechstels und Zehn-

(1) D. i. nach dem goldenen Schnitt (*sectio aurea*). Bei Ibn YÖNUS steht wörtlich: « qasam chaṭṭ ʿala nisba dāt waṣṭ wa ṭarfain », d. h. « eine Linie nach einem Verhältnis teilen, dem eine Mitte und 2 Enden eignen ». GERHARD VON CREMONA (1114-1187) sagt in seiner Uebersetzung des arabischen EUKLID-KOMMENTARS von AN-NATĪZĪ († 922/23): « secundum proportionem habentem medium et duo extrema dividere ». (Vgl. über Näheres: J. TROPPKE, *Geschichte der Elementarmathematik*, IV, Berlin und Leipzig, 1922, S. 186.)

(2) Aus $a : b = b : (a + b)$ folgt auch: $b : a = a : (b - a)$.

tels addiert und aus ihrer Summe die Wurzel zieht. Was sich nach der Radizierung ergibt, ist gleich der Sehne der Fünftelkreises.

Darauf folgt die Bestimmung der *Sehne, die das Fünftel und Zehntel zusammen unterspannt*. Es ist evident, dass, falls man die Sehne des Fünftels kennt, damit auch die Sehne der Ergänzung bis zum Halbkreis gegeben ist d. i. die Sehne des Fünftels und Zehntels zusammen. Die Berechnung dieser Sehne geschieht in der Weise, dass wir vom Quadrat des Kreisdurchmessers das Quadrat der Sehne des Kreisfünftels subtrahieren und aus der Differenz der Quadrate die Wurzel ziehen. Was sich ergibt, ist die Sehne, die das Kreisfünftel und- zehntel zusammen unterspannt. Dies sind die 7 primitiven Sehnen und die Methoden, vormit man zu ihrer Kenntnis gelangt, und Alláh leitet zum Richtigen.

Jetzt lernen wir die Zahl vieler Sehnen aus den 4 Verfahren kennen, deren Darlegung PROLEMAIOS im 1. Buche seines *Almagest* gibt. Es sind dies die Methoden der *Halbierung* (*tansif*) der *Verdopplung* (*tadif*) der *Zusammensetzung* (*tarkib*) und der *Zerlegung* (*tafsil*). Die arithmetische Methode, die zu den Verfahren führt, beruht auf einem Beweis. Sie ist so, wie ich bei jedem der 4 Verfahren zu erwähnen hoffe, so Gott will.

1. *Die Halbierung* : Wenn ein Kreisbogen, die ihn unterspannende Sehne und der Durchmesser des zugehörigen Kreises bekannt sind, so ist auch die Sehne des halben Bogens bekannt.

2. *Die Verdopplung* ist die Sehne des doppelten Bogens.

3. *Die Zusammensetzung* : Wenn zwei von einander verschiedene Bögen bekannt sind, und wenn man ferner die Sehne eines jeden einzelnen Bogens, sowie den Kreisdurchmesser kennt, so ist auch die Sehne bekannt, die den aus den beiden verschiedenen Bögen zusammengesetzten Bogen unterspannt.

4. *Die Zerlegung* : Das ist der Fall, dass die Sehne des Bogens, welcher gleich dem Unterschied zweier Bögen ist, bekannt sein wird.

Angenommen, es sei die Sehne eines bekannten Bogens bei bekanntem Kreisdurchmesser gegeben, und man verlangt die *Sehne des halben Bogens*, so ist der Weg zu ihrer Ermittlung der, dass man die Sehne des Supplementärbogens vom Kreisdurchmesser abzieht, die Hälfte des Restes mit diesem Durchmesser multipliziert und aus dem, was sich ergibt, die Quadratwurzel zieht. Das Resultat der

Radizierung ist die Sehne der Hälfte des bekannten Bogens, und Alläh macht das Richtige treffen (1).

Was die Kenntnis der Sehne, die den doppelten Bogen unterspannt anbetrifft, so ist das Verfahren dies: Wir quadrieren die gegebene Sehne, dividieren ihr Quadrat durch den Durchmesser des Kreises, verdoppeln das Ergebnis und ziehen das, was wir durch die Verdopplung erhalten haben, vom Durchmesser ab. Der Rest ist die Sehne des doppelten Supplementärbogens. Wir quadrieren sie und ziehen ihr Quadrat vom Quadrat des Durchmessers ab. Die Differenz radizieren wir. Das Resultat der Radizierung ist die Sehne des doppelten Bogens, und bei Alläh ist die Leitung zum Richtigen. (1)

Und was die Kenntnis der Sehne des Bogens anbelangt, der sich aus 2 verschiedenen Bögen zusammensetzt, wo jeder eine derselben, sowie die ihn unterspannende Sehne und der Kreisdurchmesser bekannt sind, so ist der Weg der Ermittlung dieser Sehne der, dass wir die Sehne eines jeden einen der 2 Bögen mit der Sehne der Ergänzung des anderen zu 180° multiplizieren, darauf wenn wir wollen, die Produkte addieren und die Summe durch den Kreisdurchmesser dividieren. Was herauskommt, ist gleich der Sehne des aus den 2 Bögen zusammengesetzten Bogens. — Oder, falls wir wollen können wir auch jede eine Sehne der beiden Bögen mit der Sehne des Supplements des anderen Bogens multiplizieren und die beiden Produkte einzeln durch den Kreisdurchmesser dividieren und dann die Resultate der Divisionen addieren. Die Summe ist gleich der Sehne des aus 2 Bögen zusammengesetzten Bogens.

Und was die Kenntnis der Sehne des Bogens anbetrifft, der als Differenz zweier Bögen gegeben ist, wozu die Sehne eines jeden dieser 2 verschiedenen Bögen bekannt ist, ebenso der Durchmesser des Kreises in Betreff des Verfahrens der Zerlegung bekannt ist, so multiplizieren wir die Sehne eines jeden der 2 Bögen mit der Sehne des

(1) Diese Regeln der Sehnrechnung finden sich schon bei PTOLEMAIOS. (Vgl. *Ptolemäus Handbuch der Astronomie*, übersetzt und erklärt von K. MANTHUS, I, Leipzig, 1912, S. 30 ff.) Setzt man den halben Kreisdurchmesser = 1, ferner $\sin \alpha = \frac{1}{2} \text{ chord } 2\alpha$, so folgt aus obigem Text:

$$\frac{\sin \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

(Vgl. für nähere Details: A. VON BRAUNMÜLLER: *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, I, Leipzig, 1900, S. 28 und JOHN DAVID BOND: « The Development of trigonometric Methods ». (*Isis*, vol. IV, 1922, p. 302.)

anderen Supplementärbogens. Dann ziehen wir, wenn wir wollen, das kleinere der beiden Produkte vom grösseren ab und teilen das, was übrig bleibt, durch den Kreisdurchmesser. Was sich aus dieser Division ergibt, ist die verlangte Sehne. Wir können aber auch jedes eine der Produkte durch den Durchmesser dividieren und das kleinere Resultat dieser Division vom grösseren abziehen. Was übrig bleibt, ist gleich der Sehne des Bogens, welcher der Differenz der 2 Bögen gleichkommt, und Allāh macht das Richtige treffen.

Und wisse, dass, falls wir jedes eine der beiden Produkte der Multiplikation für sich einzeln durch den Kreisdurchmesser dividieren, die beiden aus der Division resultierenden Beträge in ihrer Summe gleich der Sehne sind, die den zusammengesetzten Bogen unterspannt, und dass, falls wir den kleineren Betrag vom grösseren abziehen, der Rest gleich der Sehne ist, die den Bogen der Differenz beider Bögen unterspannt.

Dies ist die Darlegung dessen, was die geometrischen Beweise dartun, und die Ueberführung davon in die arithmetischen Verfahren. Ich bediene mich in diesem *ziğ* (astronom. Tafelwerk) in den allermeisten Fällen der Sinus. Die zwischen den Sehnen der Bögen und dem Kreisdurchmesser vorhandenen (gefundenen) Beziehungen (Gleichungen) sind auch hinsichtlich der Sinus und dem halben Durchmesser in demselben Zustand vorhanden, wobei der Halbmesser der Sinus totus ist. Denn der Sinus eines jeden Kreisbogens ist gleich der Hälfte der Sehne des doppelten Bogens, und die Verhältnisse (Gleichungen), die hinsichtlich irgend welcher Werte gelten, gelten auch bezüglich ihrer Hälften. Und deshalb wende ich die Reduzierung (*taqṭī'*, eigentlich: Zerkleinerung) der Sehnen auf die Sinus an, weil ich mich ihrer in diesem *ziğ* bediene, nach vorhergehender Erörterung über die Zahl (der Teile) des Kreisdurchmessers, so Gott will.

Erörterung über die Zahl der Teile des Kreisdurchmessers.

Die Alten wichen in der Festsetzung der Zahl, die sie dem Kreisdurchmesser beilegte, voneinander ab. Es setzten sie HIPPARCH, PROLEMAIOS, die *Verfasser der erprobten Tafeln* (1) u. a. zu 120 Teilen (*partes*) fest. Und es sagen einige Gelehrte, dass diese Zahl für die Teile gewählt worden sei, weil sie sich jener Zahl nähere, die man

(1) Es sind diese Tafeln höchstwahrscheinlich die „mā'mūnischen“, die gemeinsam von den Astronomen AL-MĀ'MŪNĪS ausgearbeitet wurden.

für den Durchmesser erhalten muss, wenn man den Umfang des Kreises in 360 Teile teilt. Es ist nämlich durch Beweis klar geworden, dass das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser annähernd das von $3^{\circ} 8' 30'' : 1$ ist; und wenn wir die Linie des Umfangs, d. i. 360 Teile, durch $3^{\circ} 8' 30''$ dividieren, eine Zahl, welche gemäss dem, worüber sich viele von den Männern der Wissenschaft geeinigt haben, das Verhältnis des Umfanges zum Durchmesser ausdrückt, so ergibt sich aus der Teilung ungefähr $114^{\circ} 35' 20''$. Weil es nicht schön ist, diese Zahl zur Zahl des Durchmessers zu machen, wegen ihrer schwierigen Teilbarkeit und weil sie überdies keine ganze Zahl ist, so wählte man die ihr nächstliegende Zahl, die die meisten befriedigte, wegen der grossen Zahl der (in ihr enthaltenen) Teiler: das ist 120° . Deshalb sage ich — und Allah macht das Richtige treffen —, da nicht eine zur Arithmetik gehörige Angelegenheit die Wahl für die Zahl des Kreisdurchmessers bestimmt hat, weil die Sehnen und die Sinus auf die Bögen zurückgehen, so habe (auch) ich diese Zahl gewählt, sowie es die Trefflichen der Älteren und Späteren getan haben. Diese Zahl ist nämlich, wenn man mit ihren Stellenwerten (?) (marâtib) durchmultipliziert, von keiner solchen Vielheit, dass dabei viele Fehler vorkommen, und nicht so enge, dass dabei die Fehler zahlreich sind, obwohl ich in der Anwendung der Sinus und der Zerlegung (Teilung) der Bögen weit gegangen bin, wegen der vielen Fehler, denen man ausgesetzt ist, gewitzigt durch das, was dem trefflichen Hipparch zustiess, nach dem, was PTOLEMAIOS darüber im Almagest berichtet hat.

Eine Gruppe anderer statuierte 300 Minuten für die Zahl der Teile des Kreisdurchmessers, und sie wandten den Sinus an unter der Annahme, dass der Sinus totus = 150 Minuten sei. Nach meiner Meinung taten sie dies, damit die Abstände zwischen den Sinus auch dann noch weit bleiben, wenn sie (die Sinus) enge sind (die Differenzen im Argument klein sind)? Und wenn der Ausgleich nach einfachen Proportionalteilen geschieht, so ergeben sich von vornherein weite Zwischenräume hinsichtlich einer gradweisen Zerlegung. Derjenige aber, der die Teilung (Trennung) der Sinus bei der Annahme macht, dass der Sinus totus nur 10 Teile hält, läuft sehr stark Gefahr, bei Beengung Fehler zu begehen, nämlich, dass er eine geringe Zahl erhält wegen der Kleinheit der Stufen (marâtib) bei der Multiplikation, und so wird der Fehler bedeutend bei der Zusammendrängung der Sinus zwischen 89° und 90° , so dass $1''$ ungefähr $12'$ in Bogen veranlasst. Dies ist sehr bedenklich, und es ist klar, dass man

nicht umbin kann, das eine Mal die Tertien zu berücksichtigen und sie das andere Mal zu unterdrücken, gemäss dem, worüber die Arithmetiker übereingekommen sind. Die Multiplikation und Division findet nach einer von beiden (Möglichkeiten?) statt, und es ist nicht anders möglich als dass die Sinus, die sich aus der Teilung ergeben, ein wenig von der Wahrheit abweichen, vielleicht eine Sekunde oder mehr. Wenn es eine Sekunde ist, hat dies hinsichtlich des Bogens 12 Minuten zur Folge, falls der Ausgleich nach einfachen Proportionaltheilen bewerkstelligt wird. Wie dürfte man dann nachgiebig sein in einem Falle wie diesem, wozu noch kommt, dass wenn der Bogen $89\frac{1}{2}^{\circ}$ geworden ist, der Teil der zweiten Hälfte von dem (Grad =) Bogen (also) 90° wird, im Sinus nur ein Unterschied von $1''$ eintritt, bei der Annahme, dass der Sinus totus (nur) 10 Teile hält? Und vorausgesetzt, dass wir die richtige Zerlegung in Anwendung bringen, nämlich die Zerlegung, die fest (bleibend) ist, auf Grund des geometrischen Beweises. Wenn man aber die Wirklichkeit um $1''$ betrügt, befällt den Bogen ein Fehler von $\frac{1}{2}^{\circ}$, und das ist sehr viel. So ist es wohl angezeigt, uns von dieser Annahme abzuwenden, und mit Allâhs Hilfe suche ich mich vor Fehlern zu bewahren, und ich bitte ihn um gute Leitung.

Wenn es nun klar geworden ist, was ich im Vorhergehenden über die 7 primitiven Sehn und die 4 Methoden der Halbierung, Verdoppelung, Zusammensetzung und Zerlegung dargetan habe, und wenn es deutlich geworden ist, dass mittels deren Kenntniss die Sehn vieler Bögen bekannt werden können, so werde ich im Folgenden die Anwendung besprechen, damit das vorher Erwähnte an Klarheit und Deutlichkeit gewinne, so Gott will, erhaben ist er!

Ueber die Berechnung der Sinus und ihre Eintragung in die Tafel.

Da der 6. Teil des Kreises 60° ist, bei der Annahme, dass der ganze Umfang 360° hält, und da die zugehörige Sehne, gemäss dem, was durch Beweis klar ist, gleich der Hälfte des Kreisdurchmessers ist, und da die Hälfte der Durchmessers 60 Teile hält, unter der Annahme, dass auf den ganzen Durchmesser 120 Teile kommen, und wenn man alsdann die Hälfte eines jeden von beiden, nämlich die Hälfte des Bogens und die Hälfte der Sehne nimmt, so ist $\sin 30^{\circ} = 30^p$ (1) in

(1) Von jetzt ab schreibe ich abkürzend für Sinus : sin., für Teile (partes) p.; für Minuten : ' und so weiter.

der Sinustafel, und wir tragen dem Bogen von 30° gegenüber 30° für den zugehörigen Sinus ein. Jetzt kennen wir auch den Sinus der Ergänzung zu 90° , nämlich $\sin 60^\circ$, indem wir $\sin 30^\circ$ quadrieren, was 900 gibt und dasselbe mit $\sin. tot. tun.$ Er hat 60° , sodass sein Quadrat = 3600 ist. Dann ziehen wir 900 von 3600 ab; es bleibt 2700. Daraus ziehen wir die Quadratwurzel und erhalten ungefähr $51^\circ 57' 41'' 29''' 14''''$. Dies ist der Wert von $\sin 60^\circ$. Wir tragen ihn gegenüber der 60 in die Tafel ein. Da aber schon weiter oben die Rede davon war, dass die Sehne des Viertelkreises gleich der Quadratwurzel aus 7200 ist, so ist, wenn wir die Hälfte des Bogens nehmen, dies 45° , und wenn wir die Hälfte der Sehne nehmen, ist das die Wurzel aus 1800, das ist ungefähr $42^\circ 25' 35'' 3''' 53''''$. Dies ist der Wert von $\sin 45^\circ$, dessen Eintragung gegenüber der Gradzahl wir ebenfalls vornehmen. Und weil die Sehne des Sechstels und Zehntels eines jeden Kreises, falls man beide Strecken geradlinig aneinander legt und sich als eine einzige Gerade vorstellt, im Teilverhältnis des goldenen Schnittes stehen, wobei die Sehne des Sechstels der grössere Teil ist, so ist dies in Uebertragung auf die Sinus der Fall, dass auch $\sin 30^\circ$ und $\sin 18^\circ$, falls sie zu einer einzigen geraden Linie verbunden sind, in dem gleichen Teilverhältnis stehen. Die Erörterung in dieser Hinsicht habe ich vorher schon gegeben. Wenn nun $\sin 30^\circ$ nach dem goldenen Schnitt geteilt ist, so ist $\sin 18^\circ$ der grössere Teil. Wir teilen also 30° in der Weise nach dem goldenen Schnitt, dass wir $30^2 + 15^2 = 900 + 225$ bilden und alsdann aus der erlangten Summe die Quadratwurzel ziehen. Das Ergebnis ist etwa $33^\circ 32' 27'' 40''' 15''''$. Davon subtrahieren wir 15° , und es bleibt $18^\circ 32' 27'' 40''' 15''''$ als grösserer Teil der Strecke 30° , wenn sie nach dem goldenen Schnitt geteilt wird, und dies ist = $\sin 18^\circ$. Wir tragen ihn gegenüber dieser Gradzahl ein. Jetzt können wir aus $\sin 18^\circ$ auch den Sinus der Ergänzung, ich meine $\sin 72^\circ$, berechnen, und zwar in der Weise, dass wir $\sin^2 18^\circ = 63\ 46\ 952\ 41\ 40\ 30\ 3\ 45$ bilden und es von 3600, dem Quadrat des $\sin. tot.$, abziehen. Es bleibt $3256\ 13\ 50\ 7\ 18\ 19\ 29\ 56\ 15$. Die Wurzel hieraus ist ungefähr $57^\circ 348'' 12''' 27''''$, und das ist näherungsweise = $\sin 72^\circ$. Wir tragen seinen Wert gegenüber seiner Gradzahl ein. Und da im Buch der Elemente gezeigt wird, dass die Summe der Quadrate der 6 Ecks- und 10 Ecksseite in jedem Kreise dem Quadrate der 5 Ecksseite gleich ist, so ist, falls dies auf die Sinus angewendet wird:

$$\sin^2 18^\circ + \sin^2 30^\circ = \sin^2 36^\circ$$

Wir bilden also $\sin^2 30^\circ$ und $\sin^2 18^\circ$, welches letztere Quadrat

$= 63\ 46\ 9\ 52\ 41\ 40\ 30\ 3\ 45$ ist, und addieren beide. Das gibt : $1243\ 46\ 9\ 52\ 41\ 40\ 30\ 3\ 45$. Die Wurzel daraus ist $= \sin 36^\circ = 38^\circ 16' 1'' 36''' 52''$, näherungsweise. Nunmehr kennen wir auch sofort den Sinus der Ergänzung, d. h. $\sin 54^\circ$. Wir können jedoch auch auf dem Wege der Verdopplung zu $\sin 36^\circ$ gelangen, da $\sin 18^\circ$ bekannt ist. Die Methode ist also die folgende : es ist bereits gezeigt, dass $\sin 18^\circ$ angenähert $= 18^\circ 32' 27'' 40''' 15''$ ist, und daher dessen Quadrat $= 63\ 46\ 9\ 52\ 41\ 40\ 30\ 3\ 45$. Dies teilen wir durch $\sin$ tot., es ergibt sich aus der Division : $5^\circ 43' 46'' 9''' 52'' 41' 40''' 3''' 35'' 45''$; wir verdoppeln diesen Betrag und finden : $11^\circ 27' 32'' 19''' 45'' 23' 21''$. Das ziehen wir von $\sin$ tot. ab; es bleibt näherungsweise : $48^\circ 32' 27'' 40''' 15''$, d. i. $\sin 54^\circ$. Und es ist klar, dass $\sin 36^\circ$ bekannt wird durch die voraus gegangene Darlegung.

Dies die 7 primitiven bekannten Sinus, die die Hälften der 7 primitiven bekannten Kreissehnen sind, und Allah leitet zum Richtigen.

Ueber die Sinus, die man aus der Kenntnis der 7 primitiven Sinus ermitteln kann, im Wege der 4 Verfahren, die da sind : Die Halbierung, die Verdopplung, die Zusammensetzung und die Zerlegung.

Nunmehr gelangt man, nachdem die 7 primitiven Sinus bekannt sind, mittels der 4 erwähnten Methoden der Halbierung, der Verdopplung, der Zusammensetzung und der Zerlegung zur Kenntnis einer grossen Anzahl (neuer) Sinus werte. Was das anbelangt, was wir im Wege der *Halbierung*, nach Kenntnis der 7 vorausgegangenen Sinus ermitteln können, so erhalten wir also aus $\sin 18^\circ$ den Sinus der Hälfte (der Grade), und das ist $\sin 9^\circ$, und wenn wir $\sin 9^\circ$ kennen, so ist auch der Sinus der Ergänzung (zu 90°), d. i. $\sin 81^\circ$, berechenbar. Aus $\sin 30^\circ$ ermitteln wir den Sinus der Hälfte, nämlich $\sin 15^\circ$, aus dessen Kenntnis sich auch der Sinus der Ergänzung, nämlich $\sin 75^\circ$ ergibt. Aus $\sin 45^\circ$ findet man $\sin 22^\circ 30'$ und damit auch $\sin 67^\circ 30'$. Aus $\sin 54^\circ$ leiten wir $\sin 27^\circ$ ab und ermitteln damit auch $\sin 63^\circ$.

Was aber die *Verdopplung* hinsichtlich der 7 primitiven Sinus anbelangt, so lässt sich nichts anderes als diese Sinus ableiten, ja es wäre möglich gewesen, statt $\sin 36^\circ$ aus $\sin 30^\circ$ und $\sin 18^\circ$ zu berechnen — es ist ja $\sin^2 18 + \sin^2 30 = \sin^2 36$ — ihn aus $\sin 18^\circ$ allein zu finden, und zwar im Wege der Verdopplung. $\sin 30^\circ$ gibt im Wege der Verdopplung $\sin 60^\circ$, den man übrigens durch Ergänzung

aus $\sin 30^\circ$ kennt. Aus $\sin 36^\circ$ ergibt sich $\sin 72^\circ$, weil er der Sinus der Ergänzung von 18° ist. Aus $\sin 45^\circ$ findet man mittels des Verfahrens der Verdopplung $\sin 90^\circ$, der als $\sin. tot.$ bekannt ist. Es ist einleuchtend, dass sich im Wege der Verdopplung aus den Sinus der bekannten primitiven Bögen keine anderen Sinus ableiten lassen. Dies ist es also, was sich aus den 2 Verfahren der Halbierung und Verdopplung notwendig ergibt.

Die Methoden der *Zusammensetzung* und *Zerlegung* führen zur Kenntnis folgender Sinus : zum Sinus des Bogens, der sich durch Addition von 18° und 30° ergibt, nämlich $\sin 48^\circ$, und zum Sinus des Bogens, der zwischen beiden liegt, d. i. $\sin 12^\circ$. Aus der Kenntnis dieser beiden Sinus wird auch der Sinus der Ergänzung eines jeden bekannt, d. i. $\sin 42^\circ$ und $\sin 78^\circ$. Ferner gelangt man mittels $\sin 18^\circ$ und $\sin 45^\circ$ durch Addition zu $\sin 63^\circ$, durch Zerlegung zu $\sin 27^\circ$.

Und falls wir (allgemein) den Sinus eines Bogens kennen, so ist uns auch der Sinus seines Ergänzungsbogens bekannt, wie es im Vorhergehenden dargetan worden ist. Und wisse, dass 45° die Eigentümlichkeit hat, dass gilt :

$$\sin (45^\circ + \alpha) = \cos (45^\circ - \alpha) \quad (1).$$

Ist $\sin 18^\circ$ und $\sin 60^\circ$ gegeben, so erhält man im Wege der Zusammensetzung : $\sin 78^\circ$, woraus auch $\sin 12^\circ$ gefunden wird, und durch Zerlegung : $\sin 42^\circ$, und hieraus $\sin 48^\circ$. Und schon weiter oben war die Rede davon, dass sich diese Sinus auch aus $\sin 30^\circ$ und $\sin 18^\circ$ im Wege der Zusammensetzung und Zerlegung ergeben. Was $\sin 30^\circ$ und $\sin 36^\circ$ anbetrifft, so findet man mittels Zusammensetzung : $\sin 66^\circ$, woraus auch $\sin 24^\circ$ berechenbar ist. Mittels Zusammensetzung findet man ferner aus $\sin 30^\circ$ und $\sin 45^\circ$: $\sin 75^\circ$, und damit gelangt man zu $\sin 15^\circ$. Dieser Sinus findet sich auch durch Zerlegung ; ist er bekannt, so kennt man auch den Sinus der Ergänzung. Ferner ist nach dem vorher dargelegten klar, dass $\sin 15^\circ$ auch aus $\sin 30^\circ$ durch das Verfahren der Halbierung gefunden wird. Was $\sin 34^\circ$ und $\sin 50^\circ$ anbetrifft, so führt die Methode der Zusammensetzung zu $\sin 84^\circ$ und mit dessen Kenntnis zum Sinus der Ergänzung, d. i. $\sin 6^\circ$, dessen Wert im Wege der Zerlegung zwischen $\sin 36^\circ$ und $\sin 30^\circ$ schon früher gefunden worden ist. Im Wege der Zerlegung ergibt sich (auch) $\sin 24^\circ$ und damit der Sinus seiner

(1) Diese Formel steht natürlich in Worten im arabischen Text.

Ergänzung : $\sin 66^\circ$, welche 2 Sinus, wie klar ist, auch aus $\sin 30^\circ$ und $\sin 36^\circ$ ermittelt werden können. Aus $\sin 36^\circ$ und $\sin 45^\circ$ ergibt sich durch Zusammensetzung : $\sin 81^\circ$, durch Zerlegung : $\sin 9^\circ$. Auf $\sin 36^\circ$ und $\sin 60^\circ$ kann man nur die Methode der Zerlegung anwenden, die zur Kenntnis von $\sin 24^\circ$ führt (1), und damit auch zum Sinus der Ergänzung : $\sin 66^\circ$. Auch aus $\sin 45^\circ$ und $\sin 54^\circ$ kann man nur durch Zerlegung den (einen) Wert : $\sin 9^\circ$ finden (2), und daraus auch den Sinus der Ergänzung : $\sin 81^\circ$. Ebenso lässt sich auf $\sin 45^\circ$ und $\sin 60^\circ$ nur die Methode der Zerlegung anwenden, die auf $\sin 15^\circ$ führt, womit auch $\sin 75^\circ$ bekannt ist. Wendet man dieselbe Methode auf $\sin 54^\circ$ und $\sin 60^\circ$ an, so resultiert $\sin 6^\circ$, und damit gelangt man auch zu $\sin 84^\circ$.

Da nun klar dargelegt ist, was zu sagen war über die Sinus, die man mittels der 4 Verfahren berechnen konnte — und dies basierte auf der Kenntnis der 7 primitiven Sinus — lasse ich der Besprechung die praktische Ausführung folgen, damit der Sinn des Gesagten völlig klar werde, so Gott, der Erhabene, will.

Beispiel über die Halbierung. — Ich beschäftige mich zuerst mit 18° , und es soll mittels der Kenntnis seines Sinus und Cosinus (Sinus der Ergänzung) (3) der Sinus der Hälfte, d. i. $\sin 9^\circ$ gefunden werden, wie es oben erörtert ist. Wir nehmen also $\cos 18^\circ$, wofür wir näherungsweise $57^\circ 3' 48'' 12''' 27^{iv}$ finden, und ziehen diesen Betrag von $\sin. \text{tot.}$, der $= 60^\circ$ ist, ab. Es bleibt noch $2^\circ 56' 11'' 47''' 33^{iv}$ übrig. Davon nehmen wir die Hälfte, welche $1^\circ 28' 5'' 53''' 46^{iv}$ 30° ist. Hiermit multiplizieren wir den $\sin. \text{tot.}$ und bekommen $89\ 5\ 1346\ 30$. Die Quadratwurzel hieraus ist angenähert $9^\circ 23' 9'' 50''' 40^{iv}$. Dies ist $\sin 9^\circ$, doch Allāh macht das Richtige treffen.

Beispiel zu $\sin 30^\circ$. — Es sei verlangt, den Sinus der Hälfte, d. i. $\sin 15^\circ$ zu ermitteln. Wir ziehen $\cos 30^\circ$, ich meine $\sin 60^\circ$, $= 51^\circ 57' 41'' 29''' 14^{iv}$, von $\sin. \text{tot.} = 60^\circ$ ab, wonach $8^\circ 2' 18'' 30''' 46^{iv}$ verbleibt. Die Hälfte davon ist $= 4^\circ 1' 9'' 15''' 23^{iv}$. Wenn wir dies mit $\sin. \text{tot.}$ multiplizieren, erhalten wir $241\ 9\ 15\ 23$. Die Qua-

(1) Es wäre natürlich auch möglich gewesen „ tarkib “ auf die beiden Sinus anzuwenden und zu schreiben : $\sin (36^\circ + 60^\circ) = \sin (90^\circ + 6^\circ) = \cos 6^\circ = \sin 84^\circ$.

(2) Ebenso wäre $\sin (45^\circ + 54^\circ) = \sin (90^\circ + 9^\circ) = \cos 9^\circ = \sin 81^\circ$, u. s. w.

(3) Für Cosinus hat die arabische Trigonometrie kein eigenes Wort; sie gebraucht immer den Ausdruck : Sinus der Ergänzung (arabisch : *ğāib at-tamām*).

dratwurzel hieraus ist angenähert $15^{\circ} 31' 44'' 54''' 49^{iv}$. Dies ist der Wert von $\sin 15^{\circ}$, den wir durch tansif erlangt haben. Und auf diese Weise bringt man auch $\sin 22\frac{1}{2}^{\circ} = 22^{\circ} 57' 39'' 37''' 57^{iv}$ und weiter $\sin 11\frac{1}{4}^{\circ}$ heraus. Ebenso gelangt man von $\sin 9^{\circ}$ zu $\sin 4\frac{1}{2}^{\circ}$, von $\sin 15^{\circ}$ zu $\sin 7\frac{1}{2}^{\circ}$, von $\sin 22^{\circ}$ zu $\sin 11^{\circ}$ und so kennt man immer die Hälften der Hälften, bis zu welcher Grenze auch immer wir heruntersteigen wollen, und Gott führt zum Richtigen.

Beispiel über die Verdopplung. — Bereits früher erwähnte ich, dass es für uns sich ergab, $\sin 36^{\circ}$ mittels tansif zu berechnen, und der Weg hierzu ist in der oben gemachten Darlegung vorgezeichnet: nämlich, dass wir $\sin 18^{\circ} = 18^{\circ} 32' 27'' 40''' 15^{iv}$ quadrieren, was zu 343 46 9 52 41 40 30 3 45 führt, und dies durch $\sin. tot. = 60^{\circ}$ teilen, das Ergebnis der Division, nämlich $5^{\circ} 43' 46'' 9''' 52^{iv} 41^{vi} 3^{vii} 45^{ix}$, verdoppeln und den abgerundeten Betrag: $11^{\circ} 27' 32'' 19''' 45^{iv} 23^{v}$ von $\sin. tot.$ abziehen. Es bleibt $48^{\circ} 32' 27'' 40''' 15^{iv}$ als Wert von $\sin 54^{\circ}$. Damit ist auch der Sinus der Ergänzung, nämlich $\sin 36^{\circ}$, bekannt.

1. Beispiel über Zusammensetzung und Zerlegung.

Nimm in diesem Beispiel den einen der 2 Bögen der Zusammensetzung und der Zerlegung 18° und den anderen Bogen 30° , und wir wollen mittels tarkib $\sin 48^{\circ}$, mittels tafsil $\sin 12^{\circ}$ berechnen. Wir beschreiten dabei den Weg, dessen Beschreibung vorausging; d. h. wir multiplizieren $\cos 18^{\circ}$, d. i. $\sin 72^{\circ}$, dessen Wert $= 57^{\circ} 3' 48'' 42''' 27^{iv}$ ist, mit $\sin 30^{\circ}$, wodurch 1711 54 6 13 30 herauskommt. Diese Zahl teilen wir durch $\sin. tot. = 60^{\circ}$, und es ergibt sich aus der Division $28^{\circ} 31' 54'' 6''' 13^{iv} 30^{v}$. Ferner multiplizieren wir $\cos 30^{\circ}$ ($\sin 60^{\circ}$) dessen Betrag $= 51^{\circ} 57' 41'' 29''' 14^{iv}$ ist, mit $\sin 18^{\circ} = 18^{\circ} 32' 27'' 40''' 15^{iv}$. Man erhält die Zahlenfolge 963 25 10 42 54 42 9 38 30. Wiederum teilen wir sie durch $\sin. tot.$, es ergibt sich aus der Teilung $16^{\circ} 3' 25'' 10''' 42^{iv} 54^{v} 42^{vi} 9^{vii} 38^{viii} 30^{ix}$. Und was nun die Ermittlung von $\sin 48^{\circ}$ durch tarkib anbelangt, so zählen wir die beiden Ergebnisse der Divisionen zusammen und erhalten als Summe $44^{\circ} 35' 19'' 16''' 56^{iv} 23^{v}$. Und dies ist $= \sin 48^{\circ}$. Was nun aber die Methode der Zerlegung anbelangt, die also zur Kenntnis von $\sin 12^{\circ}$ führt, so ziehen wir das kleinere Resultat der Division, nämlich $16^{\circ} 3' 25'' 10''' 42^{iv}$ (angenähert) vom grösseren, d. i. angenähert $28^{\circ} 31' 54'' 6''' 13^{iv} 30^{v}$ ab; es bleibt $12^{\circ} 28' 28'' 55''' 30^{iv} 35^{v}$, und das ist näherungsweise $= \sin 12^{\circ}$.

2. Beispiel über Zusammensetzung und Zerlegung.

Nimm den einen der beiden Bögen zu 30° , den anderen zu 45° an. Ich habe auseinandergesetzt, wie man zur Kenntnis von $\sin 15^\circ$ gelangt, mittels tafsil. Nun wollen wir ihn auch kennen lernen durch Anwendung von tafsil auf die Differenz zwischen 45° und 30° , damit es klar werde, dass dieser Weg, wenn er auch (von dem anderen) verschieden ist, zu demselben Ergebnis führt. Deshalb multiplizieren wir $\sin 30^\circ = 30^\circ$ mit $\sin 45^\circ = 42^\circ 25' 35'' 3''' 53''''$ und erhalten $226 1 47 31 56 30$. Dies teilen wir durch sin. tot., es kommt aus der Division $21^\circ 12' 47'' 31''' 56'''' 30''''$ heraus. Dann multiplizieren wir $\cos 30^\circ$, d. h. $\sin 60^\circ$, dessen Wert $= 51^\circ 57' 41'' 29''' 14''''$ ist, mit $\sin 45^\circ$, dem der Wert $42^\circ 25' 35'' 3''' 53''''$ zukommt, und wir erhalten angenähert $2254 32 26 45 57 55 16 31 22$. Durch Division dieser Zahl mit sin. tot. kommen wir zu $36^\circ 44' 32'' 26''' 43'''' 57'''' 16'''' 31'''' 22''''$. Davon ziehen wir das ab, was sich zuerst ergab, und es bleibt $15^\circ 31' 44'' 54''' 59''''$ als Wert für $\sin 15^\circ$, errechnet im Wege der Zerlegung.

Nunmehr können wir den $\cos 15^\circ$, d. h. $\sin 75^\circ$ auf 2 Arten ermitteln: Die eine derselben besteht darin, dass wir $\sin 15^\circ$ quadrieren, wodurch wir angenähert $241 9 15 23$ erhalten; es ist dies die Zahl, aus der sich durch Radizieren wieder $\sin 15^\circ$ ergibt. Wir ziehen $241 9 15 23$ von 3600, dem Quadrat des sin. tot. ab; es bleibt $3358 50 44 37$. Die Wurzel hieraus ist angenähert $57^\circ 57' 19'' 58''' 43''''$, und dies ist $\sin 75^\circ$. Die andere Methode ist die der Zusammensetzung, und sie besteht darin, dass wir zu dem Resultat, das sich zuerst aus der Division bei Ermittlung von $\sin 15^\circ$ ergab, im Wege der Zerlegung, nämlich $21^\circ 12' 47'' 31''' 56'''' 30''''$, das andere (Teil) Resultat, nämlich $36^\circ 44' 32'' 26''' 43'''' 58''''$, addieren. Die Summe beträgt $57^\circ 57' 19'' 58''' 42'''' 28''''$, und das ist der angenäherte Wert von $\sin 75^\circ$, erhalten mittels tarkib, und Allāh leitet zum Richtigen.

Aus dem, was ich im Vorhergehenden deutlich dargelegt habe, geht hervor, welche Hinweise betreffs der Kreissehnen die Beweise des PROLEMAEUS geben, und wie diese Hinweise zu den arithmetischen Verfahren praktisch verwendet werden können, ohne dass ich für mich mehr als Auseinandersetzung in Anspruch nehmen möchte. Und es ist angezeigt, dass wir dem vorher darüber Gesagten ein Wort über die Sehne eines einzigen Teiles (Grades) folgen lassen, gemäß der Darlegung, die PROLEMAIOS gegeben hat.

Da chord 1° im Wege des Beweises nicht ermittelt werden kann, weil nämlich weder das $\tan\frac{1}{2}^\circ$ an einem Bogen, dessen Sehne bekannt ist, zu ihr führt, noch das $\tan\frac{1}{4}^\circ$, und sie sich auch nicht aus 2 Bögen, deren Sehnen einzeln bekannt sind, zusammensetzen lässt, ebenso wenig in $\frac{1}{2}^\circ$ (Zerlegung) zwischen 2 Sehnen stattfinden kann, und sie auch nicht Sehne eines Bogens ist, von dem die Sehne seines Ergänzungsbogens bekannt ist, so befolgte PROLEMAIOS bei seinem Verfahren einen Weg, welchen ich sofort erwähnen werde, so Gott will. Als er dies wollte, schickte er eine Aufgabe voraus, in der er den Beweis davon erbrachte, dass, wenn in einem Kreise 2 verschiedene Bögen liegen, das Verhältnis des Bogens der grösseren Sehne zum Bogen der kleineren Sehne grösser ist als das Verhältnis der längeren zur kürzeren Sehne. Und weil die Sehne (chorda) 3° aus dem Verfahren der Halbierung und Zerlegung bekannt ist, so ist es auch chord $1\frac{1}{2}^\circ$. Und da auch chord $\frac{3}{4}^\circ$ mittels $\tan\frac{1}{4}^\circ$ bekannt ist, so beträgt einerseits chord $1\frac{1}{2}^\circ = 1^\circ 34' 14'' 13'''$, anderseits chord $\frac{3}{4}^\circ = 0^\circ 47' 7'' 20'''$. Aus seinem Beweis (dem des PROLEMAIOS) geht klar hervor, dass

$$\frac{\text{arc } 1^\circ}{\text{arc } \frac{3}{4}^\circ}, \text{ d. i. } \frac{1\frac{1}{3}}{1} > \frac{\text{chord } 1^\circ}{\text{chord } \frac{3}{4}^\circ}$$

und so ist dann letzteres Verhältnis $< \frac{1\frac{1}{3}}{1}$. Wenn wir also chord $\frac{3}{4}^\circ$ um

ihr Drittel vergrössern, so ist nach der Ausarbeitung des PROLEMAIOS chord $1^\circ = 1^\circ 2' 51''$, und dies ist grösser als chord 1° , nach dem, was durch die von ihm vorausgeschickten Beweise klar geworden ist.

Dann kehrt er zu chord $1\frac{1}{2}^\circ$ zurück und erkennt, dass

$$\frac{\text{arc } 1\frac{1}{2}^\circ}{\text{arc } 1^\circ} > \frac{\text{chord } 1\frac{1}{2}^\circ}{\text{chord } 1^\circ}, \text{ und dies ist dann weniger als } \frac{\text{arc } 1\frac{1}{2}^\circ}{\text{arc } 1^\circ}$$

Nun nimmt er von chord $1\frac{1}{2}^\circ$ zwei Drittel; diese sind angenähert $1^\circ 2' 51''$. Und da beide Werte (für chord 1°) übereinstimmen, so erkannte er, dass die Vermehrung zu chord 1° von Seiten chord $\frac{3}{4}^\circ$ keinen Einfluss auf die Sekunden ausübt, während in den Terzen etwas hängen bleibt. Desgleichen ist die Verminderung hinsichtlich chord 1° von Seiten chord $1\frac{1}{2}^\circ$ in den Sekunden nicht merkbar. Deshalb folgerte er, dass es ($1^\circ 2' 51''$) chord 1° sei. Und da er somit chord 1° bis zur Genauigkeit in den Sekunden kannte, so war ihm auch die Sehne dessen, was bis zum Halbkreis am Bogen übrig bleibt, bekannt,

aus den 4 Verfahren, die da sind: Die Halbierung, die Verdopplung, die Zusammensetzung und die Zerlegung, doch bei Allāh ist die Leitung zum Richtigen.

Als ich $\sin 1^\circ$ kennen lernen wollte, schlug ich denselben Weg ein, den PROLEMAIOS gegangen war, nur dass ich den Sinus suchte, der $\sin 1^\circ$ am nächsten kam, d. h. dem Richtigen sich am meisten näherte. Also gehe ich von 18° aus, weil $\sin 18^\circ$ im Wege der geometrischen Ableitung bekannt ist; aus ihm gelange ich durch Halbierung zu $\sin 9^\circ$, dessen Wert $= 9^\circ 23' 9'' 50''' 40^{iv}$ ist, dann weiter mittels $\tan\frac{1}{2}$ zu $\sin 4\frac{1}{2}^\circ = 4^\circ 42' 27'' 9''' 52^{iv}$, zu $\sin 2\frac{1}{4}^\circ = 2^\circ 21' 20'' 7''' 11^{iv}$, und zuletzt zu $\sin 1\frac{1}{8}^\circ = 1^\circ 10' 40'' 59''' 31^{iv}$. Davon ziehe ich $\frac{1}{9}$ ab, und ich erhalte auf diese Weise für $\sin 1^\circ$: $1^\circ 2' 49'' 40''' 4^{iv}$ (1).

Nunmehr suche ich $\sin 1^\circ$ aus $\sin 15^\circ$ herauszubringen, und zwar ebenfalls im Wege der Halbierung. Dadurch gelange ich zuerst zu $\sin 7\frac{1}{2}^\circ$, dessen Wert $= 7^\circ 49' 53'' 39''' 26^{iv}$ ist, dann zu $\sin 3\frac{3}{4}^\circ = 3^\circ 55' 27'' 4''' 32^{iv}$, dann zu $\sin 1\frac{1}{8}^\circ = 1^\circ 57' 16''$..., endlich zu $\sin \frac{15}{16}^\circ = 0^\circ 58' 54'' 8''' 36^{iv}$. Dies vermehre ich um $\frac{1}{15}$, und so erhalte ich auf diese Weise für $\sin 1^\circ$: $1^\circ 2' 49'' 45''' 10^{iv}$.

So ist es klar, dass (für $\sin 1^\circ$) von Seiten $\frac{15}{16}$ mehr herauskommt als $\sin 1^\circ$ genau, wegen dessen, was deutlich ist durch den oben erwähnten Beweis, und klar, dass von Seiten $1\frac{1}{8}^\circ$ weniger herauskommt als $\sin 1^\circ$ genau. So liegt $\sin 1^\circ$ in Wahrheit zwischen beiden, aber dichter bei dem Wert, der sich von Seiten $\frac{15}{16}$ ergibt. Weil die Differenz zwischen $\frac{15}{16}$ und $1\frac{1}{8}$ nur $\frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ beträgt, und, falls wir $\frac{1}{16} : (\frac{1}{8} + \frac{1}{16})$ bilden, dies $= \frac{1}{3}$ ist, und falls wir weiter den Unterschied von $\sin 1^\circ$, errechnet aus $1\frac{1}{8}^\circ$, und $\sin 1^\circ$, errechnet aus $\frac{15}{16}^\circ$, suchen, dies $= 0^\circ 0' 0'' 5''' 6^{iv}$ ist, so ist $\frac{1}{3}$ davon $= 1''' 42^{iv}$. Ziehen wir dies von dem Wert $\sin 1^\circ$, errechnet aus $\frac{15}{16}^\circ$ ab, so erhalten wir auf diese Weise den Wert: $\sin 1^\circ = 1^\circ 2' 49'' 43''' 28^{iv}$. Nehmen wir aber $\frac{2}{3}$ der Differenz $= 3''' 24^{iv}$, und addieren es zu $\sin 1^\circ$, hergeleitet aus $1\frac{1}{8}^\circ$, so ergibt sich für uns: $\sin 1^\circ = 1^\circ 2' 49'' 43''' 28^{iv}$, und das ist dasselbe, wie das, was herauskommt, wenn man von $\frac{15}{16}$ ausgeht. Und Allāh macht das Richtige treffen.

(1) Die arab. Handschr. hat an dieser Stelle: $43'''$.

**Ueber das, was mir betreffs der angenäherten Berechnung
von $\sin 1^\circ$ in den Sinn kam, und was meines Wissens
noch keiner erwähnt hat.**

Es ist möglich $\sin 1^\circ$ mit einer sehr weitgehenden Genauigkeit zu berechnen mittels *taḍwīf* und *tafṣīl*, in der Art, wie ich sie sofort darlegen werde, nämlich, dass $\sin 3^\circ$ durch geometrische Ableitung aus der Differenz zwischen 18° und 15° durch Zerlegung bekannt ist. So steht es fest, dass $\sin 3^\circ = 3^\circ 8' 24'' 34''' 0^{iv}$ ist, und $\cos 3^\circ$, ich meine $\sin 87^\circ = 59^\circ 55' 3'' 58''' 46^{iv}$. Den Näherungswert für $\sin 1^\circ$ setze ich, gemäss dem, was sich für uns ergab, zu $1^\circ 2' 49'' 43''' 28^{iv}$ an, und $\cos 1^\circ$, ich meine $\sin 89^\circ$, zu $59^\circ 59' 27'' 6''' 7^{iv}$. Sodann kennen wir auch $\sin 2^\circ$ nach 2 Verfahren: das eine der beiden ist die Verdopplung, das andere die Zerlegung zwischen 3° und 1° . Wenn beide (Verfahren) zu einem übereinstimmenden Endergebnis führen würden, so wäre das $\sin 1^\circ$, gemäss dem, was wir vermutungsweise annahmen. Sind beide (Resultate) aber verschieden, so nehmen wir von ihrer Differenz die Hälfte. Dann sehen wir zu: Liegt ein Ueberschuss vor bei Anwendung der Verdopplung, so ziehen wir ihn von $\sin 1^\circ$ ab (d. h. diese Hälfte) ergibt sich aber ein surplus zu Gunsten der Zerlegung, so zählen wir seine Hälfte zu $\sin 1^\circ$ hinzu. Dies müssen wir einige Mal wiederholen, und wenn wir eine möglichst weitgehende Genauigkeit erreichen wollen, ich meine zum Beispiel die Erreichung derselben bis zur 10. Minute (1) so erreichen wir die primitiven Sinus ebenfalls oder noch mehr. Und je weiter wir $\sin 18^\circ$ und $\sin 15^\circ$ nachgehen, aus welchen beiden sich durch Zerlegung $\sin 3^\circ$ ergibt, desto besser ist das für unsere Zwecke, so Gott will.

Beispiel: Als angenäherter Wert von $\sin 1^\circ$ ist $1^\circ 2' 49'' 43''' 28^{iv}$ herausgekommen. Wir berechnen daraus $\cos 1^\circ$, ich meine $\sin 89^\circ$, dadurch, dass wir $\sin^2 1^\circ = 1^\circ 5' 47' 27'' 23' 13' 21' 4$ bilden, dann zuerst das Doppelte hiervon nehmen, d. i. $= 2^\circ 11' 34' 54'' 46' 26' 42' 8$ und es durch $\sin$. tot. dividieren. Es ergibt sich aus der Teilung $0^\circ 2' 11'' 34''' 54^{iv} 4^v 46^v 26^{vv} 42^{vvv} 8^{ix}$. Dies ziehen wir von $\sin$. tot. ab, und es bleibt als angenäherter Wert für $\sin 88^\circ: 59^\circ 57' 48'' 25''' 6^{iv}$, den wir uns merken. Darauf wird $\sin^2 1^\circ$ von 3600, dem Quadrat

(1) Worauf sich diese „Zehner“ (*‘awāšīr*) hier beziehen, kann ich nicht ausmachen. Vielleicht denkt der Autor an seine Sinustafel, die im Argument von $10'$ zu $10'$ fortschreitet.

des sin. tot., abgezogen, wonach 35 98 12 32 57 36 46 38 56 verbleibt. Das Radikalhier aus, nämlich $59^{\circ} 59' 27'' 6''' 7^{\text{iv}}$, ist angenähert $= \sin 89^{\circ}$. Nunmehr berechnen wir $\sin 2^{\circ}$, und zwar, da wir $\sin 88^{\circ}$ schon kennen, in der Weise, dass wir $\sin^2 88^{\circ} = 35\ 95\ 36\ 55\ 0\ 33\ 44\ 60\ 36$ bilden und dies vom Quadrat des sin. tot., nämlich 3600, abziehen; es bleibt 4 23 4 59 26 15 53 59 24. Die Wurzel hieraus ist angenähert $\sin 2^{\circ}$ und $= 2^{\circ} 5' 38'' 18''' 0^{\text{iv}}$. Dies im Wege der Verdopplung aufgrund der Annahme, dass $\sin 1^{\circ} = 1^{\circ} 2' 49'' 43''' 28^{\text{iv}}$ ist. Dann kann man $\sin 2^{\circ}$ mittels der Zerlegung, angewandt auf $\sin 3^{\circ}$ und $\sin 1^{\circ}$ berechnen: Zuerst multipliziere ich $\sin 1^{\circ} = 1^{\circ} 2' 49'' 43''' 28^{\text{iv}}$ mit $\sin 87^{\circ} = 59^{\circ} 55' 3'' 58''' 46^{\text{iv}}$. Das Ergebnis der Multiplikation ist: 62 44 33 29 24 432 23 28. Dies teile ich durch sin. tot., womit ich $1^{\circ} 2' 44'' 33''' 29^{\text{iv}} 24^{\text{v}} 32^{\text{vi}} 23^{\text{vii}} 28^{\text{viii}}$ erhalte, welchen Betrag ich mir merke. Dann multipliziere ich $\sin 3^{\circ}$ — und er ist gemässdem, was aus der Rechnung heraus kam, $3^{\circ} 8' 24'' 34''' 0^{\text{iv}}$ — mit $\sin 89^{\circ}$, dessen Wert, gemäss der Berechnung — $59^{\circ} 59' 27'' 6''' 7^{\text{iv}}$. Das Ergebnis diese Multiplikation ist $= 188\ 22\ 50\ 41\ 41\ 44\ 15\ 53$. Ich teile es durch sin. tot., wodurch sich $3^{\circ} 8' 22'' 50''' 41^{\text{iv}} 44^{\text{v}} 15^{\text{vi}} 53^{\text{vii}}$ ergibt. Das im Gedächtnis gemerkte, nämlich das Resultat von $\sin 1^{\circ} \cdot \sin 87^{\circ}$, ziehe ich hiervon ab, und es bleibt bei diesem Verfahren für den Wert von $\sin 2^{\circ}$: $2^{\circ} 5' 38'' 17''' 12^{\text{iv}}$ übrig. Doch es hatte sich für $\sin 2^{\circ}$ im Wege der Verdopplung der Wert $2^{\circ} 5' 38'' 18''' 0^{\text{iv}}$ ergeben. Der Ueberschuss von Seiten der Verdopplung ist 48^{iv} . Man nimmt jetzt die Hälfte davon $= 24^{\text{iv}}$ und zieht sie von $\sin 1^{\circ}$, den ich vorhin zu $1^{\circ} 2' 49'' 43''' 28^{\text{iv}}$ angenommen hatte, ab, weil ein surplus zu Gunsten der Verdopplung vorliegt, und so erhält man für $\sin 1^{\circ}$ nach diesem Verfahren den Näherungswert (1): $1^{\circ} 2' 49'' 43''' 4^{\text{iv}}$.

Es wäre möglich, auf diese Weise die Genauigkeit bis zu den Quinten und Sexten auszudehnen, aber wenn wir dies wollten, wäre es für uns notwendig, die primitiven Sinus auch mit äusserster Genauigkeit zu berechnen. Wenn wir aber doch $\sin 1^{\circ}$ bis auf die

1) Er nähert sich dem richtigen: $1^{\circ} 2' 49'' 43''' 11^{\text{iv}}$ mehr als der andere von IUN YÖNUS gefundene mit 28^{iv} . Er ist jedoch bei DELAMBRE (a. a. O., p. 100) und dementprechend auch von HANKEL (a. a. O., p. 288) nicht erwähnt. Bei A. von BRAUNMÜLL: *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, I, Leipzig, 1900, S. 62 erfahren wir auffallenderweise von der Genauigkeit der YÖNUSischen Sinustafeln überhaupt nichts.

Bemerkung über die Intervalle der Bögen der Sinus.

Was PTOLEMAIOS anbetrifft, so nahm er in den Bögen Intervalle von je $\frac{1}{2}^\circ$ und schrieb ihnen gegenüber die zugehörigen Chorden (werte) ein, was in den Sinus auf Intervalle von je $\frac{1}{4}^\circ$ hinauskommt; so hütete er sich (durch diese mittleren Intervalle) vor Fehlern, und Gelehrte von genauer Kenntnis dieser Dinge nehmen die Intervalle zu je

und

$$\frac{\Delta DHK}{\Delta DKE} > 2$$

Es ist aber :

$$\frac{\Delta DHK}{\Delta DKE} = \frac{HK}{KE}$$

also ist

$$HK > 2 \cdot KE$$

Hieraus ergibt sich durch „ tarkib „ :

$$\frac{HE}{EK} > 3$$

Es ist HE die halbe Sehne des doppelten Bogens von AB, d. h. die halbe Sehne des Bogens von 6° , oder auch : ED ist die halbe Chorde der Ergänzung des doppelten Bogens AB zum Halbkreis. Wir nehmen von HE einen Betrag, der kleiner ist als $\frac{HK}{3}$. Er möge = KE sein. Doch dieser Betrag ist nicht willkürlich) angenommen; er ist fest begründet in der Fehlerlosigkeit des Resultats. Wir ziehen zwischen EK und HK die kräftige Linie KD hindurch, und nun sind sich die beiden Dreiecke KHG und KED ähnlich. Es gilt, nach Umformung durch „ tarkib „, die Proportion :

$$HE : EK = GD : DK ;$$

woraus durch Multiplikation folgt :

$$HE \cdot DK = GD \cdot EK.$$

Falls sich diese 2 Flächeninhalte gleich sind, so kennen wir schon das Richtige (!) EK ist ein durch 2 Grenzen festgelegter Wert, und wenn beide verschieden sind, so vermehren wir noch den einen Wert um den Abzug des EK von $\frac{HE}{2}$, oder wir fügen durch eine Berechnung (in d. Berechnung) das hinzu, was die Umstände (Zustände) notwendig machen, bis beide gleich sind, oder wir senken das Produkt der Unterschiede bis zu jenem anderen das genauer ist als jenes, das verwendet wurde.

Jetzt kennen wir auch den Wert von HK. Der Perpendikel, gefällt auf HC, nämlich ZS. ist $= \frac{HK}{2}$, und dieser Perpendikel ist $= \frac{1}{2}$ chord ZB, deren Bogen (nämlich ZB) $= \frac{2}{3}$ des vorausgesetzten Bogens von 3° ist, und chord $(\frac{1}{2} BZ)$ ist das Gesuchte, ich meine chord AZ, die Sehne, die $\frac{AB}{3}$ unterspannt.

Und es ergab sich schon (früher) für uns : $HE = 0^\circ 3' 8'' 24''' 34^{IV}$. Wir nehmen einen kleineren Wert als sein Drittel, nämlich $0^\circ 1' 2'' 45''' 7^{IV} 37^V 6^{VI}$. Und wir

1° oder $\frac{1}{2}^\circ$ an. Und was die Festsetzung der Intervalle von je 1° anbe-
trifft, so hat sie bei eng aufeinander stehenden Werten Fehler im
Gefolge, besonders zwischen 89° und 90° .

Ein Beispiel zur Belehrung über das, was ich gesagt habe.

Sin 89° ergab sich durch subtile Rechnung gemäss dem, was ich
vorher herausgebracht habe, zu $59^\circ 59' 27'' 6''' 7''''$, und wenn ich dies
von $60''$, dem Wert des sin. tot., abziehe, so bleiben nur Sekunden,

machen jetzt mit den beiden entstandenen Flächen (inhalten) das, was oben ange-
geben wurde: es ergibt sich durch die Bildung des Produktes für eine jede
derselben: 0 3 8 10 46 37 13, in bis zu den *Sexsten* übereinstimmender Weise.
Von da ab sind beide Produkte verschieden in den Termen, die wir nicht mehr
benötigen. Die Hälfte von HK (in beiden Mss. steht, doch wohl fälschlich: HK) wird

$$0^\circ 1' 2'' 49''' 43'''' 11'''' 14''''.$$

Damit findet sich chord $1^\circ = \text{chord AZ} = 0^\circ 1' 2'' 49''' 51'''' 48''''$.

($\frac{HK}{2}$ ist, wie man sieht, $= \sin 1^\circ$; ich bin in dieser Zeit des Birūnī keinem
anderen, derartig genauen Wert für sin 1° begegnet).

In den *Prolegomenes des Tables Astronomiques d'Oloug-Beg* (Paris 1853)
macht uns L. AM. SÉDILLOT (S. 77 ff.) mit den Inhalt einer Abhandlung:
„Über die Ermittlung von sin 1° aus sin 3° “ bekannt die von dem 1336 vorstör-
benen Direktor der Sternwarte zu Samarra GIVĀT AD-DIN ĠAMŠID herrührt,
und die uns durch QĀDIZĀDEH, AK-RŪMĪ, bekannt unter dem Namen MIRAM
ČULĀUL, in seinem Kommentar zu den Tafeln des ULĀO BEG überliefert
ist. Da indessen die Vicerönigliche Bibliothek in Kairo die Abhandlung des
GIVĀT AD-DIN ĠAMŠID (allerdings in einer nach des Autors Tode erfolgten Nieder-
schrift), besitzt, so schien es von Interesse, dieses Unicum ebenfalls zu Rate zu
ziehen. Herr ʿALĪ AL-BIBLĀWĪ, Gouverneur (Naqib) der Scherife Aegyptens
in Kairo hatte wie schon einmal, die Güte, auf Veranlassung des Herrn Prof.
A. SCHAADE (Hamburg) mir eine Abschrift dieser Risāla fertigen zu lassen,
wofür ich beiden Herrn auch hier bestens danken möchte. Da die Ableitung der
Dreiteilungsgleichung etwas anders aussieht als bei MIRAM ČULĀUL, auch das
numerische Endergebnis bemerkenswert ist, so teile ich aus dem Inhalt der
Abhandlung einiges mit; die ungekürzte Darstellung soll bei einer anderen
Gelegenheit folgen.

Man erfährt, dass die Aufstellung der Dreiteilungsgleichung schon vor
ĠAMŠID von MAS'ŪD AT-TAĪB, (d. i. der Artz) zubenannt GIVĀT AL-KĀŠĪ — so der
Name des Autors geleistet worden ist, dass aber sowohl die Früheren als auch die
Neueren sich auf die Beantwortung von 6 Fragen beschränken mussten, und dass
sie insbesondere nicht die Durchführung der numerischen Ausgleichsrechnung zu
leisten vermochten, wegen der grossen Schwierigkeiten, bis dass das Problem
auch zu unserem Bruder (Fachgenossen), dem Freund der Wissenschaft, dem

und das, was auf sie folgt. Das ist: $0^{\circ}0'32''53'''53^{\text{iv}}$, und so ist es angezeigt für die Methode derjenigen, die zusammen mit dieser Teilung den Ausgleich nach Proportionalteilen anwenden, falls $\sin 89\frac{1}{2}^{\circ}$ gefunden werden soll, die Hälfte von $0^{\circ}0'32''53'''53^{\text{iv}}$ zu nehmen, und diese beträgt $0^{\circ}0'16''26'''56^{\text{iv}}30^{\text{v}}$. Wier addieren dies zu $59^{\circ}59'27''6'''7^{\text{iv}}$ und erhalten $59^{\circ}59'43''33'''4^{\text{iv}}$, und das ist $\sin 89\frac{1}{2}^{\circ}$. Rechnet man aber sehr genau hinsichtlich taqlī (Zerteilung), so findet

Unvergleichlichen seiner Zeit, dem SCHRIK AD-DIN MUH. IHN MAS 'UD AL-MAS 'UDI, kam. Er löste die Schwierigkeit der genauen Ermittlung von "šai" (Sache gesuchte Endgrösse = chord 2° = X) in (Beantwortung von) 19 Fragen, mit rascher Auffassung, die gerade das Ziel trifft, und mit durchbohrendem Scharfsinn....

Der Ableitung der Gleichung gehen folgende Definitionen voraus: Wenn man eine Grösse mit sich selbst multipliziert, so wird sie in dieser Hinsicht „*šai'*“ genannt, und ihr Quadrat „*mál*“, das Ergebnis der Multiplikation von „*šai'*“ in *mál* aber „*ka'eb*“ (kubus) und das von „*šai'*“ in *ka'eb* ist „*mál mál(in)*“ (Quadrat des Quadrates). Die Herleitung der kubischen Gleichung erscheint

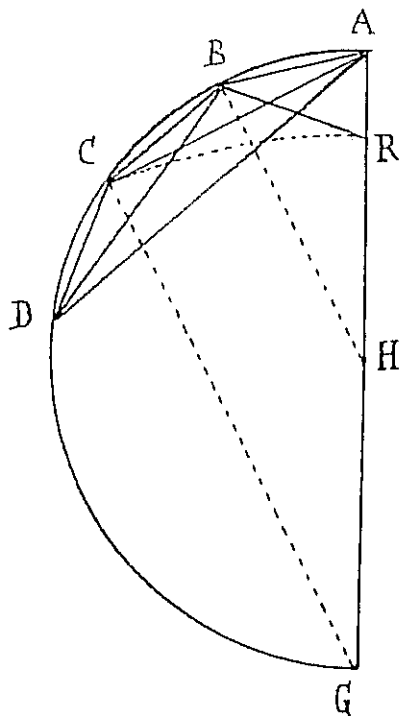


Fig. 2.

sich $59^{\circ}59'51''46'''32''''$, so dass zwischen den beiden (Werten für $\sin 89^{\circ}\frac{1}{2}$) eine Differenz von $8''13'''29''''$ liegt. Teilt man dies durch $0^{\circ}0'32''53'''53''''$, so folgt angenähert $15'$, und so ist ersichtlich, dass demjenigen, der diesen Weg beschreitet, hinsichtlich der Teilung der Bögen nach $15'$, an dieser Stelle ein Fehler am Bogen passiert, aber an einer anderen Stelle ist er kleiner, und er wird viel sein je nach der Beengtheit des Sinus, und dies ist ein grosser Mangel.

mir einfacher als bei MINAM CELENT. In Fig. 2 sei im Halbkreis über dem Durchmesser AHC chord AB = chord BC = chord CD = chord 2° . Also ist chord AD = chord 6° , und diese ist nach unserm Autor = $6^{\circ}16'49''7'''59''''8''''56''''29'''40''''$. Dieser Wert ist bekannt, und daraus ist chord $2^{\circ} = \text{šai} = X$ zu ermitteln; (womit dann auch $\sin 1^{\circ} = \frac{1}{2}$ chord 2° gefunden ist.) Nach dem Sehnensatz des PROLEMAIOS besteht im Kreisviereck ABCD die Beziehung

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD,$$

die sich in unserm Fall vereinfacht zu :

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + BC \cdot AD &= \overline{AC}^2, \text{ oder :} \\ X^2 + X \text{ chord } 6^{\circ} &= \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2. \end{aligned} \quad 1$$

Hierbei ist AB = šai; $\overline{AB}^2$ = mal. Macht man jetzt CG = GR und zieht die Verbindungsstrecken BH und BR, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken ABH und ABR die Proportion :

$$\begin{aligned} AR : AB &= AB : r, \text{ d. h.} \\ \frac{\overline{AB}^2}{r} &= AR \end{aligned} \quad 2$$

Es ist also :

$$GR = 2r - AR = 120^{\circ} - \frac{\overline{AB}^2}{60^{\circ}}$$

Im rechtwinkligen Dreieck AGG hat man :

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AG}^2 + \overline{GC}^2 \\ &= 120^{\circ 2} - \left(120^{\circ} - \frac{\overline{AB}^2}{60^{\circ}}\right)^2 \\ &= 4 \cdot \overline{AB}^2 - \frac{\overline{AB}^4}{3600} \end{aligned} \quad 3$$

Hier ist $\overline{AB}^2$ = mal mal (in). Vergleicht man jetzt die in 1) und 3) für $\overline{AC}^2$ gefundenen Ausdrücke, so folgt sofort :

$$X^2 + X \text{ chord } 6^{\circ} = X^2 - \frac{X^4}{3600} \quad 4$$

Setzt man $r = 1$, statt $r = 60^{\circ}$, also auch $r^2 = 1$, statt $r^2 = 3600$, so folgt nach Division mit X aus 4) :

chord $6^{\circ} = 3X - X^3 \dots 5$ als die bekannte Dreiteilungsgleichung ($X^3 = ka^3b$)

Derjenige, der voraussetzt, dass die Bögen von 1° zu 1° zunehmen, ist besser daran; ihm passiert ein Fehler in geringerem Mass als dieser. Es wird klar werden, wenn er darin dem Wege folgt, den ich gegangen bin in der Erörterung dessen, was jemanden passierte, der den Bogen gradweise zerlegte. In diesem zif wählte ich betreffs der Bogenintervalle Zwischenräume von $\frac{1}{6}^\circ$ zu $\frac{1}{6}^\circ$ um mich (vor Fehlern) zu hüten, und ich brachte dies durch sehr genaue Rechnung heraus, ich meine die Zerteilung ($at-taqi'$), und ich stelle in den Sinustafeln eine Genauigkeit bis zu den Terzen fest. Im kurzen (kleinen) zif , einem Auszug aus diesem (1), habe ich die Tafel von $\frac{1}{4}^\circ$ zu $\frac{1}{4}^\circ$ berechnet, ging aber auch bis zu den Terzen, aus Vorsicht wegen weitgehender und minutiöser Berechnungen, die vielleicht irgend ein Gelehrter machen will, und damit es klar sei für denjenigen, der die aus den geometrischen Beweisen hergeleiteten arithmetischen Verfahren nicht kennt, dass die arithmetischen Methode wohl zu ein und demselben Datum (Gekannten) führt, wenn sie (die Methode) auch eine andere ist. Wer also mit Terzen rechnen will, rechnet, und dies (Resultat?) ist für ihn vorhanden, und wer die Rechnung mit Sekunden vorzieht, der runde die Zahl von $30'''$ oder mehr auf eine ganze Sekunde auf, und lasse fort, was weniger als $30'''$ ist, und mache alsdann die Rechnung. Und Allāh macht das Richtige treffen.

Zur numerischen Auflösung geht unser Autor von der Form :

$$X = \frac{\frac{X^3}{3600} + \text{chord } 6^\circ}{3 \dots \dots \dots 6}$$

aus und findet X durch *Näherung*. Das dabei befolgte Verfahren hat H. HANKEL (a. n. O. S. 290 ff) eingehend auseinandergesetzt. Es würde hier zu weit führen näher auf die Rechnungen des Astronomen von Samurqand einzutreten. Dagegen sei noch erwähnt, dass er zum Schluss findet :

$$\begin{aligned} \text{chord } 2^\circ &= 2^\circ 5' 29'' 26''' 22'' 29' 28'' 32''' 52'''' 33''', \text{ und daraus :} \\ \sin 1^\circ &= 1^\circ 2' 49'' 43''' 11'' 14' 44'' 16''' 26'''' 17'''' \end{aligned}$$

Die Umsetzung dieser Zahlen in Dezimalen verdanke ich Herrn Professor A. WEDERMEYER (Berlin). Er findet :

$$\begin{aligned} \text{Nach } \check{\text{GAMŠID}} : \sin 1^\circ &= 0.01745 \quad 24064 \quad 37283 \quad 51037 \quad 12 \\ \text{Wahrer Wert} : \sin 1^\circ &= 0.01745 \quad 24064 \quad 37283 \quad 51281 \quad 2 \end{aligned}$$

also eine Übereinstimmung von 17 Stellen nach dem Komma. Nach WEDERMEYER ist ein Unterschied der beiden Werte erst in den Nonen festzustellen : statt $17''$ müsste es $18'' 30''$ heissen.

Dieser Wert des $\check{\text{GAMŠID}}$ für $\sin 1^\circ$, den man bei MUKAM ČELEKÜT vergeblich sucht, lässt die Genauigkeit aller anderen bekannten Zahlenresultate der Araber weit hinter sich.

(1) Danach hat der Autor selbst 2 Ausgaben seiner Tafeln gefertigt. Das Leidener Mscr. wäre ein Teil der grösseren (ursprünglichen).

Ueber die Ermittlung von $\sin \frac{1^\circ}{4}$ und $\sin \frac{1^\circ}{6}$.

Was $\sin \frac{1^\circ}{4}$ anbelangt, so ist, da man $\sin 1^\circ$ angenähert kennt, emäss der Darlegung, die ich im Vorhergehenden gegeben habe, $\sin \frac{1^\circ}{2}$ bekannt. Aber seine Kenntnis ergibt sich auch noch auf eine andere Art, nämlich im Wege der Zerlegung, mit Bezug auf das, was zwischen 1° und $\frac{3^\circ}{4}$ ist. Wir kennen nämlich $\sin 1^\circ$ näherungsweise, und wir kennen $\sin \frac{3^\circ}{4}$. So ist $\sin \frac{1^\circ}{4}$ auch im Wege der Zerlegung bekannt. $\sin \frac{1^\circ}{6}$ kann man in gleicher Weise ermitteln, wie man $\sin 1^\circ$ kennt; denn, wenn wir $\sin \frac{1^\circ}{4}$ kennen, ist auch $\sin \frac{1^\circ}{8}$ im Wege der Halbierung bekannt. Vermehren wir nun $\sin \frac{1^\circ}{8}$ um sein Drittel, so ist das Resultat angenähert $= \sin \frac{1^\circ}{6}$. Und wenn wir von $\sin \frac{1^\circ}{4}$ sein Drittel abziehen, so ist das ebenfalls $= \sin \frac{1^\circ}{6}$.

Was aber die Frage anbetrifft: Wie führen wir diese Rechnung ganz gründlich durch, soweit wir wollen?, so lautet die Antwort: Wir setzen den angenäherten Wert von $\sin \frac{1^\circ}{6}$ fest, dann ermitteln wir dadurch $\sin \frac{1^\circ}{3}$ durch Verdopplung oder Zerlegung zwischen $\frac{1^\circ}{2}$ und $\frac{1^\circ}{6}$. Wenn nun beide (Resultate für $\sin \frac{1^\circ}{6}$) übereinstimmen, so ist $\sin \frac{1^\circ}{6}$ richtig, wenn sie aber nicht übereinstimmen, nehmen wir den Ueberschuss, halbieren ihn und behalten seine Hälfte im Gedächtnisse. Dann beachten wir: wenn nun das Ueberbleibsel zu Gunsten von $\sin \frac{1^\circ}{3}$ ist, diesen ermittelt im Wege der Verdopplung, so ziehen wir jene im Gedächtnis behaltene Hälfte vom angenäherten $\sin \frac{1^\circ}{6}$ ab, wenn aber der Ueberschuss beim Verfahren der Zerlegung liegt, so vermehren wir den angenäherten Wert von $\sin \frac{1^\circ}{6}$ um die Hälfte, die wir im Gedächtnis haben. Was sich aus der einen von diesen beiden Prozeduren ergibt, das ist $\sin \frac{1^\circ}{6}$ in ganz gründlicher Ermittlung. Und Allah macht das Richtige treffen.

Erwähnung dessen, was mir einfiel bei Bestimmung der Sinus der Bögen nach Ermittlung ihrer Sinus von $\frac{1^\circ}{2}$ zu $\frac{1^\circ}{2}$, und dies ist genau und schön.

Wisse, dass die Sinus der Bögen, die wir mit Hilfe der gleichmässigen Ausgleichung (Proportionalteile) erhalten, stets kleiner sind als die Sinus dieser Bögen in Wahrheit. Durch diese Methode, die ich ermittelt habe, weiss ich, dass ein Unterschied ist zwischen den Sinus der Bögen (berechnet) mittels der einfachen Proportionalteile und ihrem wahren Wert. Füge ich alsdann den Sinus, herausgebracht mit den Proportionalteilen die Unterschiede hinzu, so erhalte ich die wahren Sinuswerte. Und wenn du den Sinus irgend eines Bogens ermitteln willst, der nicht der Sinus der festgesetzten Hälften ist, und

wenn du wissen willst, welches der Unterschied zwischen dem durch Proportionalteile ermittelten Sinus und seinem wahren Wert ist, so ermittle den Sinus des Bogens, der sich dir durch Ausgleichung mit den Proportionalteilen ergibt, wie du es bei den Sinus von 1° zu 1° machtest und setze seinen Wert bis zu den Terzen oder Quarten fest, gemäss dem, was sich dir durch gründliche Rechnung ergibt. Und ermittle auch den Sinus der Hälfte, welche zwischen 2 solchen Graden liegt, von denen der eine kleiner ist als der Bogen, mit dem du es zu tun hast, und der andere grösser, wie du es machtest bei den Sinus, abgeteilt von Grad zu Grad. Und wenn du den Sinus dieser Hälfte mit Hilfe der Proportionalteile ermittelt hast, so behalte ihn im Gedächtnis und merke, wieviel zwischen ihm und dem Sinus dieser festgesetzten Hälfte liegt, der Hälfte, die im *ziğ* durch Zerteilung (*taqī*) festgesetzt ist. Und was sich da an Unterschied ergibt, das multipliziere mit 4. Dies ist das Element des Ausgleichs (der Correction) das du wohl im Gedächtnis behältst. Dann beachte die Minuten, die bei dem ganzen Grad sind. Du ziehst sie stets von 60 Minuten ab; den Rest multiplizierst du mit den Minuten, die du von 60 abgezogen hast. Das Ergebnis multipliziere mit dem Element der Correction. Was herauskommt, ist der Unterschied zwischen dem Sinus dieser Grade und Minuten (erhalten) mittels der Proportionalteile und dem wahren Sinuswert (1). Zähle diesen Unterschied zum Sinus (erhalten aus) der Ausgleichung nach Proportionalteilen, den du zuerst ermittelt hast. Was sich alsdann ergibt, das ist der Sinus des Grades und der Minuten, deren Sinus du ganz genau kennen willst. Und Allāh macht das Richtige treffen. Es folgt jetzt die Tafel der Sinus (fortschreitend von $\frac{1}{6}^\circ$ zu $\frac{1}{6}^\circ$.)."

BOGEN		SINUS			
°	'	°	'	"	'''
0	10	0	10	28	19
0	20	0	20	56	38
0	30	0	31	24	57
0	40	0	41	53	13
0	50	0	52	21	29
1	0	1	2	49	43
1	10	1	13	17	56
1	20	1	23	46	6
1	30	1	34	14	13

(1) " Pour corriger l'erreur, Ebn Jounis la détermine, comme on vient de voir, pour les sinus, qui sont dans sa Table. Il appelle cette erreur *élément de correction* = E; pour en conclure la correction pour un nombre *m* de minutes, il fait la correction = E. *m* (60—*m*) = E. *m*. 60—E*m*², ce qui revient à peu près à ce que donnerait la formule différentielle... $\Delta'' \sin A = (\Delta A)^2 \sin A \dots$ " (DELABRE a. a. O., pag. 100).

II.

Die frühesten arabischen Sinustafeln findet man in dem *ziğ* des MUḤ. IBN Mūsā AL-CHWĀRIZMĪ († ca 850 n. Chr.) und dem *kitāb AL-ḤABAŠ AL-ḤASID*. Der *ziğ* des Chwārizmiers hat eine treffliche Bearbeitung durch H. SUTER erfahren. (1) Indessen kennen wir die Originaltafeln AL-CHWĀRIZMĪS nicht, sondern nur die lateinische Uebersetzung einer späteren arabischen Umarbeitung dieser Tafeln durch den maurischen Astronomen MASLAMA b. AHMED AL-MAĠRĪTĪ ADĪ 'l-QĀSIM, († 1007) welche Uebersetzung von ATHELHARD VON BATH stammt, und die wohl zwischen 1143 und 1150 ausgeführt sein mag. So ist also nicht auszumachen, welche Tabellen sich in dem ursprünglichen *ziğ* befanden und welche erst durch MASLAMA in dessen Bearbeitung aufgenommen wurden, und wir wenden uns deshalb gleich zu den Tafeln des ḤABAŠ AL-ḤASID AL-MERWAZI, d. i. gebürtig aus Merw. Er lebte in Bagdād z. Z. der Chalifen AL-Ma 'MŪN und AL-Mu' TAŠIM und starb hochbetagt zwischen 864 und 874 (2). Seine astronomischen Tafeln sind noch im Escorial und in Berlin vorhanden. Das Berliner Exemplar (Staatsbibliothek, Wetzstein 1, 90) hält 168 Blätter und lag mir im Original vor. Aehnlich wie bei AL-CHWĀRIZMĪ ist über die *Berechnung* der Sinus im Text nichts gesagt; es wird nur die Auffindung des Sinus aus gegebenem Bogen gelehrt und umgekehrt. Die Sinustafel, die sich S. 82 ff. befindet, ist insoferne bemerkenswert angelegt, als sie neben dem Sinus und Sinus versus (al-ğāib al-mustawī = gerader Sin. und : al-ğāib al-ma'kūs = umgewendeter Sin. auch die Sonnendeklination, sowie deren Sinus und Kosinus enthält. Ein Specimen dieser Tafel sieht so aus :

Zahl	Sin. must.			Sin. verz.			Deklinal.			Sin. d. Dekl.			Cos. d. Dekl.		
	p	'	"	p	'	"	o	'	"	p	'	"	p	'	"
1	1	2	50	0	0	33	0	24	0	0	35	8	50	59	47
2	2	5	38	0	2	11	0	46 ⁽⁹⁾	0	0	50	15	50	59	34
3	3	8	25	0	4	56	1	11	59	1	15	22	59	59	8
4	4	11	8	0	8	46	1	35	58 ⁽⁷⁾	1	40	27	58	58	28
5	5	13	46	0	13	42	1	59	54	2	5	30	59	57	8
6	6	16	18	0	19	43	2	23	48 ⁽⁹⁾	2	30	31	59	56	42
7	7	18	44	0	26	50	2	47	41	2	55	30	55	55	35
8	8	21	12	0	35	2	3	11	31	3	20	25	54	54	40
9	9	23	10	0	44	19	3	35	18	3	45	16	53	53	5
10	10	25	8	0	54	42	3	59	1 ⁽²⁾	4	10	3	50	51	14

(1) Die astrom. Tafeln des MUḤAMMED IBN Mūsā AL CHWĀRIZMĪ, Kopenhagen, 1914 (cfr. *Isis* IV. 502).

(2) Er soll über 100 Jahre alt geworden sein.

Hierbei geben die Kolumnen der Deklinationswerte zu einer Bemerkung Anlass: Es bedeutet nämlich die „Zahl“ in diesem Falle die Sonnenlänge λ in der Ekliptik. Sie steht mit der Deklination δ und der Ekliptikschiefe ϵ (1) bekanntlich in dem Zusammenhang:

$$\sin \delta = \sin \lambda \cdot \sin \epsilon,$$

und die 3 letzten Rubriken beweisen, daß der Autor auch eine subtile trigonometrische Rechnung richtig auszuführen im Stande war, wie ich durch Nachprüfung feststellte (2).

Während diese Sinustafel, sowie auch diejenige AL-BATTÂNÎ'S († 929) direkt nach dem Muster der Chordentafel des PROLEMAIOS gearbeitet sind und jener gegenüber keinen Fortschritt an Genauigkeit aufweisen, so begegnen wir bei ANŪ'L-WAFĀ' (940-998) ungleich vollkommeneren trigonometrischen Tafeln. Leider fehlen diese gerade in der einzigen (nicht vollständigen) Handschrift seines *Almagest* (Paris, Bibl.-nat. N° 2494) während wir über die sonstigen trigonometrischen Lehren des Bagdäder Astronomen nicht im Unklaren sind. Wiederum findet man in DELAMBRE'S « *Histoire de l'Astronomie du moyen âge* » verschiedene Details, die DELAMBRE einem Auszug J. J. SÉDILLOTS aus ANŪ'L-WAFĀ'S *Almagest* entnahm, (pag. 156-174) wozu noch die verdienstliche Arbeit über den 1. Teil des seltenen Werkes durch CANNA DE VAUX tritt (3). Man findet hier die Theorie des Sinus und der übrigen trigonometrischen Funktionen, sowie der trigonometrischen Sätze und Formeln des Autors, und man erfährt auch, daß er Sinus- und Schattentafeln von $\frac{1}{4}^\circ$ zu $\frac{1}{4}^\circ$ berechnete, daß es bereits eine Kolumne der 1. Differenzen gab (al-fuḍūl) und daß er $\sin. tot. =$ gesetzt hätte. Da ich im Besitze einiger Photos aus dem 2. Teil des *Almagest* bin, wo ANŪ'L-WAFĀ' numerische Rechnungen ausführt, so möchte ich einige Sinuswerte anführen, die ich dem arabischen Text entnahm. (fol. 61-68). Der Autor setzt:

$$\begin{aligned}\sin 3^\circ &= 3' 8'' 24''' 34^{iv} \\ \sin 11^\circ 37' 21'' 47''' &= 12' 0'' 8''' 54^{iv} \\ \sin 12^\circ 23' &= 12' 51'' 57'''\end{aligned}$$

(1) Ihr Wert wird vom Autor zu $23^\circ 35'$ angegeben.

(2) Die in Klammer stehenden Deklinationswerte finden sich in der Deklinationstafel des IḤN YŪNUS (Berl. Or. Mscr. Landberg N° 1038 von S. 50^a-75^a) wo die Sonnendeklination ($\epsilon=23^\circ 35'$) von Minute zu Minute der Sonnenlänge angegeben ist.

(3) *Journal asiatique* 1892, pag. 408-471.

$$\sin 54^{\circ} 48' 57'' 14''' = 49' 2'' 17''' 31^{iv}$$

$$\sin 60^{\circ} = 51' 57'' 41''' 29^{iv}$$

$$\sin 68^{\circ} = 55' 37'' 51''' 43^{iv}$$

$$\sin 79^{\circ} 46' 14'' 36''' = 59' 2'' 46''' 31^{iv}$$

Hierbei ist die Annahme gemacht, dass $\sin. tot. = 1^{\circ}$ sei. Aus dem mir zugänglichen Text ist Gewissheit hierüber nicht zu erlangen (1).

Von INN-YÜNUS gibt es 2 verschiedene Sinustafeln:

1. Die dem 10. Kapitel der hakimitischen Tafeln angehörige, von der bereits in der Uebersetzung eine Probe gegeben wurde.

2. Die eingangs unserer Studie genannte Sinustafel, die die Preussische Staatsbibliothek in Berlin als Cod. arab. Landberg 1038 bewahrt. Ueber sie seien hier einige Angaben gemacht. Der Titel lautet:

« Das Buch des Sinus von Minute zu Minute und von Sekunde zu Sekunde, nach der subtilen Rechnung des Scheichs

ANŪ'L-ḤASAN AHMED IBN YÜNUS... »

Ich gebe zuerst einen kleinen Ausschnitt aus derselben für $\sin 28^{\circ}$.

Zahl	28°					Zahl	Hisaa der Sekunden			
	I	II	III	IV	V		I	II	III	IV
1'	28	11	1	16	6	1''	0	55	26	6
2		11	56	42	12	2	1	50	52	12
3		12	52	8	18	3	2	46	18	18
4		13	47	34	24	4	3	41	44	24
5		14	43	0	30	5	4	37	10	30
6		15	38	26	36	6	5	32	36	36
7		16	33	52	42	7	6	28	2	42
8		17	29	18	48	8	7	23	28	48
9		18	24	44	54	9	8	18	54	54
10	28	19	20	11	0	10	9	14	21	60

Hier finden wir (wohl zum ersten Mal) die Sinuswerte für jede Bogenminute berechnet, wobei die Quarten abgerundet sind. Sodann

(1) Es lag nahe, in diesem Falle die Tafeln « aš-šāmil » (die allgemeinen, umfassenden) in Florenz (Bibl. Laurenziana Cod. arab. N° 289, jetzt N° 95) für die Entscheidung der Frage, ob ANŪ'L-WAFĀ' in seinen Tafeln $\sin. tot. = 1$ gesetzt habe, oder nicht, zu consultieren, die nach Prof. C. A. NALLINO's (Rom) Ansicht allerdings nicht diejenigen des Autors selbst, sondern eine Umarbeitung oder Neuauflage derselben durch einen Anonymus sind. Herr Prof. Cassuto (Florenz) nahm sich die dankenswerte Mühe, auf Anregung Prof. H. SUTER's († 1922 in Arlesheim) ein Specimen derselben (p. 32^b) abzuschreiben. Dieses Fragment sandte mir SUTER freundlichst zu. Daraus entnimmt man: Die Tafel

läuft daneben für jeden Bogengrad die *Hişsa* (Teil, Anteil, Betrag) der 60 Sekunden. Sie dienen offenbar zur Interpolation, so dass also das Ablesen eines Sinuswertes, dessen Argument auch Bogensekunden aufweist, sofort möglich ist. Es scheint indessen, dass die *Hişsa* stets nur für die erste Sekunde des Bogens berechnet sind, und dass die *Hişsa* der folgenden Sekunden als Vielfache der ersten Sekunde dargestellt wurden, was für die Interpolation nicht genau ist.

Professor Jo. THORPKE (Berlin) hat einige Stichproben auf die Genauigkeit der Tafel, die von mir vollständig dargestellt worden ist, gemacht und durch Umwandlung der sexagesimalen Zahlen in decimale folgende Werte gefunden :

$\sin 1^\circ = 0.0174524[0.01745240]$	Die in Klammern stehenden Zahlen geben den wahren (natürlichen) Wert des Sinus zum Vergleich auf 8 Stellen genau an. Danach ist die Yânusische Tafel auf 7-8 Stellen genau.
$\sin 2^\circ 40' = 0.0465252[0.0465253]$	
$\sin 4^\circ 7' 32'' = 0.07194235[0.0719423]$	
$\sin 5^\circ 20' = 0.0929498[0.0929499]$	
$\sin 17^\circ 10' = 0.2951522[0.2951522]$	
$\sin 45^\circ = 0.7071066[0.7071068]$	
$\sin 77^\circ 10' = 0.9819513[0.9819514]$	
$\sin 85^\circ 20' = 0.9966848[0.9966849]$	

Noch nicht näher untersucht sind die astronomischen Tafeln des ANŪ'L ḤASAN KŪŞJÂN IHN LABŪ'ÂN AL-ĞILĀ (d. i. gebürtig aus Ğilān in Persien) (1) eines bedeutenden Mathematikers und Astronomen, der von etwa 970 — 1030 gelebt hat. Diese Tafeln sind (teilweise) noch in Berlin vorhanden als Mscr. orient. Quart. 101 und lagen mir vor. Danach gibt es in denselben 2 verschiedene Sinustafeln. Die erste

(Seite) enthält die Sinus der ganzen Grade von 0° bis 11° und der Sinus versi von 90° bis 101° ; so geht es in den folgenden Tafeln (Seiten) fort, für die Sinus bis 90° , für die Sinus versi bis 180° . Die Werte der Sinus und Sinus versi sind in 3 Zahlen angegeben, die also, was nicht ausdrücklich gesagt ist, p' " bedeuten werden. Die Zahlen stimmen bis auf einige Fälle mit denen des BATTĀNĪ überein. Weiter unten folgen die Differenzen für je 2 Minuten: diese Werte sind also jeweils den Sinus der ganzen Grade, die oberhalb in derselben Kolumne stehen, beizufügen. Da die Differenzen für je 2 Minuten mit „daq'iq (Minuten) und „tawānī (Secunden) überschrieben sind, so müssen in diesen Tafeln die Sinus in p' " angegeben sein.

(1) Da KŪŞJÂN verschiedene astronomische Tafeln für die geographische Breite = $35^\circ 30'$ rechnet, und in seiner Tabelle geographischer Koordinaten *Intākhjā* (Antiochia) diese Breite hat (sonst kein Ort) so könnte man hieraus den Schluss ziehen, dass er an diesem Ort lebte und beobachtete. Allerdings stimmt die geographische Länge schlecht. Danach läge In Akija zwischen Surra-manra'a und Mausil.

steht auf Seite 42. Sie läuft im Argument in ganzen Graden fort, und der Sinus besteht aus 3 Zahlen: p ' ". Sie ist begleitet von einer Tafel der *ersten Differenzen*. Seite 43/44 steht die Tafel der Sinus versi, die ebenfalls in ganzen Graden fortschreitet und eine gleiche Differenzentafel aufweist. Sie geht von 0° — 180°.

Eine *zweite ausführlichere Sinustafel* enthalten die Seiten 49 — 64. Sie ist ganz ähnlich gebaut wie der *ġedwal aš-šāmil*. In der obersten Querreihe stehen die Sinusse von je 6 ganzen Graden. Die Vertikalreihen unter den Sinus der ganzen Grade enthalten die Differenzen der fortlaufenden Minuten bis zur 15. Minute; von da ab gibt es nur noch Differenzen von 3' zu 3'. Die Beträge der Sinus der ganzen Bogengrade bestehen aus 3 Zahlen (p ' ") die der Differenzen aus 2 (' ").

Von besonderem Interesse ist die Sinustafel des Abū'l-Riḥān al-Bīrūnī (973-1048). Sie steht in des Autors astronomisch-geographischem Werke: *al-qānun al-mas'ūdi*, wovon ich wiederum das Berliner Mscr. (orient. oct. 275) benutzen konnte (S. 72^a-74^b). Wie die Sinustafel des Abū'l-Wafā', läuft auch die Bīrūnische von $\frac{1}{4}^\circ$ zu $\frac{1}{4}^\circ$ im Argument fort. Zu diesen Sinuswerten gibt es für dieselben Intervalle *erste Differenzen* (al-fuḍūl) und dann in einer weiteren Vertikalreihe *Ausgleiche* (at-ta'ādil). Bei näherem Zusehen erkennt man, dass die letzteren den Ḥiṣāṣ der Yūnusischen Tabelle entsprechen, allerdings mit Reduktion auf Intervalle von 15'. Da sin. tot. bei al-Bīrūnī stets = 1 gesetzt ist, so sind die 4 Zahlen der Sinuswerte: ' " " " iv. Ein Specimen dieser Sinustafel sieht so aus:

Zahl		Sinus				at-ta'ādil				al-fuḍūl			
'	"	"	"	"	iv	'	"	"	iv	'	"	"	iv
30	0	30	0	0	0	0	15	10	14	0	13	35	11
	15	30	13	35	11	0	14	12	34	0	13	33	6
	30	30	27	8	17	0	14	4	4	0	13	31	1
	45	30	40	39	18	0	13	55	40	0	13	28	55
31	0	30	54	8	13	0	13	47	12	0	13	26	48
	15	31	7	35	1	0	13	38	40	0	13	24	10
	30	31	20	59	11	0	13	28	8	0	13	22	2
	45	31	34	22	13	0	13	21	34	0	13	20	21
32	0	31	47	42	34	0	13	12	14	0	13	18	11
	15	32	1	0	45	0	13	3	12	0	13	15	53
	30	32	14	16	38	0	12	55	4	0	13	13	51
	45	32	27	30	29	0	12	46	12	0	13	11	33
33	0	32	40	42	2	0	12	37	16	0	13	9	19
	15	32	53	51	21	0	12	28	8	0	13	7	2
	30	33	6	58	23	0	12	19	0	0	13	4	46
	45	33	20	3	9	0	12	10	48	0	13	2	30
34	0	33	33	5	39	0	12	0	32	0	13	0	12

Der Autor benützt die Reihe der 1. Differenzen zur Berechnung von Zwischenwerten der Sinus d. h. zur *Interpolation* und lehrt (S. 75^a) dazu folgendes: «*Das Genaumachen der Ermittlung eines Sinus* : Wenn wir denjenigen Sinus genommen haben, dessen Argument jenem am nächsten liegt, zu dessen Zahl wir den Wert des Sinus wollen, und wenn wir uns diesen genommenen Betrag im Gedächtnis gemerkt haben, so nehmen wir jetzt diejenige Differenz, in dem Gedächtnis (Tafel) der Differenzen, welche dem Gefundenen gegenübersteht, sowie auch jene Differenz, welche oberhalb der genommenen steht, und dies ist die vorhergehende Differenz. Darauf multiplizieren wir den Unterschied dieser zwei genommenen Differenzen mit dem, was für uns an Bogen übrig bleibt, alsdann das Produkt auch noch mit 4 Minuten. Das Ergebnis ziehen wir von der vorhergehenden Differenz ab und multiplizieren das, was übrig bleibt, mit dem Rest des Bogens, alsdann das Produkt auch noch mit 4 Minuten. Das Gesamtergebnis addieren wir zu dem genommenen Sinus, dessen Betrag wir uns gemerkt haben, und es wird das augenblickliche Endergebnis der für den Bogen verlangte genauere Sinus sein. »

Zur Illustration dieser Vorschriften wählen wir als Zahlenbeispiel die Berechnung von $\sin 33^\circ 17'$ nach der Tafel des Autors. Um den Wert von $\sin 33^\circ 17'$ erst annähernd festzustellen, berechnen wir ihn mittels der *Proportionalteile*. Es ist al-fadl (die Differenz) für $15' = 13'' 7''' 2^{iv}$, mithin für $1' = \frac{13'' 7''' 2^{iv}}{15} = 4' (13'' 7''' 12^{iv}) = 52''' 28^{iv} 48^v$, und für $2'$ also $= 1'' 44''' 57^{iv} 36^v$. Zählen wir dies zu $\sin 33^\circ 15' = 32' 53'' 51''' 21^{iv}$, so folgt für $\sin 33^\circ 17' : 32' 55'' 36''' 18^{iv} 36^v$. Der wahre Wert wäre : $32' 55'' 36''' 24^{iv} 54^v 43^v$.

Setzt man $a = \sin 33^\circ 15'$; $a_n = \sin 33^\circ 17'$; $n = 2'$; $\Delta a = 13'' 9''' 19^{iv}$ und $\Delta^2 a = 2''' 17^{iv}$, so lässt sich obiger Text auf folgende Formel bringen :

$$a_n = a + 4'.n(\Delta a - 4'.n\Delta^2 a)$$

Nun ist :

$$\Delta^2 a = 2''' 17^{iv}; 4'.n\Delta^2 a = 18^{iv} 16^v.$$

$$\Delta a - 4'.n\Delta^2 a = 13'' 9''' 0^{iv} 44^v$$

$$4'.n(\Delta a - 4'.n\Delta^2 a) = 1'' 45''' 12^{iv}.$$

Mithin : $\sin 33^\circ 17' = 32' 55'' 36''' 33^{iv}$.

Somit ergibt al-Birûnîs Regel etwas zu viel, was von der Differenz $\Delta a = 13'' 9''' 19^{iv}$ herrührt.

Bemerkenswert ist jedenfalls die Tatsache, dass der ausgezeichnete Gelehrte (nachweisbar) zum ersten Mal die Verwendung der 2. Differenzen lehrt.

Für die Ermittlung des zu einem gegebenen Sinuswerte gehörigen Bogens gibt AL-BIRŪNĪ eine ganz ähnliche Vorschrift wie die obige.

Zum Schluss sei noch die « *baqīja ġedwal al-ġaib* » (Aufbewahrtes der Sinustafel) erwähnt, die sich in den astronomischen Tafeln des ULŪĠ BEĠ (1393-1449) findet. Von diesem ziġ, den die Astronomen der Sternwarte zu Samarqand im Auftrage des trefflichen Tatarenfürsten (1) erstellen, gibt es eine grössere Anzahl arabischer und persischer Handschriften. Das Original war persisch verfasst (2), obwohl ULŪĠ BEĠ (der grosse Fürst) ein Türke war. Mir lag das Berliner Exemplar vor (Mscr. or. 280), das in persischer Sprache geschrieben ist, ebenso Mscr. or. 191, welches die İLĤĀNİschen Tafeln des NAŞİR ED-DİN AṬ-ṬŪSĪ (1201-1274) enthält (3). Die *baqīja ġedwal al-ġaib* reicht in Mscr. 280 von Seite 27-35. Sie schreitet im Argument von Minute zu Minute fort und gibt die Sinuswerte in $p' '' '' '' ''$, und zwar ohne Abrundung der Quarten, nicht wie bei İBN YŪNUS. Jede Vertikalreihe enthält die 60 Sinus der Bogenminuten, jede Tafel (Seite) enthält die Sinus von 5 Bogengraden samt den zugehörigen 1. Differenzen.

Es dürfte von Interess sein, die Genauigkeit der Sinustafel des ULŪĠ BEĠ an einigen Zahlenbeispielen darzutun. Die fehlerlose Umsetzung der sexagesimalen Zahlen in dezimale und den Vergleich der erlangten Resultate mit den Angaben des *Thesaurus mathematicus* von B. PIASCUS (1561-1613) verdanke ich ebenfalls der Freundlichkeit des Herrn Prof. A. WEDEMEYER in Berlin.

Die nun folgende Zahlenreihe enthält 15 aus dem ziġ des ULŪĠ BEĠ herausgegriffene Sinuswerte, daneben das Äquivalent in Dezimal-

(1) « His biographer ABŪ MUḤAMMAD MUSTAPHAN, thus describes him : « Fuit rex justus, doctus, perfectus, praesertim in mathematicis, scientiam et ejusdem cultores dilexit. » (E. B. KNOBEL : *ULUG BEĠ's Catalog of Stars*, Washington 1917, S. 5.)

(2) Vgl. KNOBEL : a. a. O. S. 6.

(3) Danach sind die trigonometrischen Tafeln des NAŞİR ED-DİN denen des ULŪĠ BEĠ ganz ähnlich, nur die Tangenstafel schreitet bei ersterem Autor von 5' zu 5' fort, bei letzterem aber von Minute zu Minute, und erst ab 45° von 5' zu 5'.

zahlen und in Klammern zum Vergleich die richtige Zahlenfolge, nach Ptoiscus, in den 2-4 letzten Stellen.

$\sin 1'$	$= 0^{\circ}1'2''49'''55^{\text{iv}}$	$= 0.00029088863$ (820)
$\sin 1^{\circ}$	$= 1^{\circ}2'49''43'''41^{\text{iv}}$	$= 0.01745240625$ (644)
$\sin 7^{\circ}21'$	$= 7^{\circ}40'32''54'''45^{\text{iv}}$	$= 0.12793015047$ (130)
$\sin 10^{\circ}53'$	$= 11^{\circ}19'42''54'''57^{\text{iv}}$	$= 0.188809795525$ (478)
$\sin 19^{\circ}28'$	$= 19^{\circ}59'43''48'''49^{\text{iv}}$	$= 0.33325839635$ (618)
$\sin 25^{\circ}51'$	$= 26^{\circ}9'39''33'''16^{\text{iv}}$	$= 0.43601661100$ (098)
$\sin 35^{\circ}23'$	$= 34^{\circ}44'33''30'''44^{\text{iv}}$	$= 0.57904403806$ (677)
$\sin 47^{\circ}49'$	$= 44^{\circ}6'24''9'''21^{\text{iv}}$	$= 0.73511183256$ (71)
$\sin 57^{\circ}4'$	$= 50^{\circ}21'29''36'''10^{\text{iv}}$	$= 0.83930371656$ (38)
$\sin 69^{\circ}3'$	$= 56^{\circ}2'0''50'''46^{\text{iv}}$	$= 0.93389280607$ (01)
$\sin 81^{\circ}40'$	$= 59^{\circ}21'59''23'''38^{\text{iv}}$	$= 0.98944163837$ (58)
$\sin 86^{\circ}10'$	$= 59^{\circ}51'56''45'''9^{\text{iv}}$	$= 0.99776274305$ (284)
$\sin 88^{\circ}41'$	$= 59^{\circ}59'2''58'''8^{\text{iv}}21^{\text{v}}$	$= 0.99973596752829$ (4788)
$\sin 89^{\circ}18'$	$= 59^{\circ}59'43''52'''47^{\text{iv}}22^{\text{v}}$	$= 0.9999253695559$ (6605)
$\sin 89^{\circ}59'$	$= 59^{\circ}59'59''59'''27^{\text{iv}}6^{\text{v}}$	$= 0.9999999576903$ (920)

Damit ist gezeigt, welchen Fortschritt die Vervollkommenung der trigonometrischen Tafeln während 6 Jahrhunderten (etwa 850—1450) bei den Arabern erfuhr, und dass diese Tafeln zuletzt eine Präcision erreichten, die die Bedürfnisse und Leistungen der Praxis weit hinter sich liess.

Gerne erfülle ich noch die Pflicht, der Bibliotheksverwaltung der Preuss. Staatsbibliothek (Berlin) meinen verbindlichsten Dank auch an dieser Stelle auszusprechen, dafür, dass sie mir eine Anzahl arab. Codices nach Essen sandte und auf diese Weise meine Studien förderte.

(Essen a. d. R.)

CARL SCHÖY.

Über den Gnomonschatten und die Schattentafeln der arabischen Astronomie

Ein Beitrag zur arabischen Trigonometrie
nach unedierten arabischen Handschriften

von

Karl Schoy

Mit 5 Abbildungen

Hannover 1923
Orient-Buchhandlung Heinz Lafaire

187

Dem Andenken an
Heinrich Suter
gewidmet

Vorwort.

Noch immer ist unser Wissen über die arabische Mathematik gering und lückenhaft. Dies gilt in nicht geringerem Maße von der arabischen Trigonometrie. Wohl hat A. von Braunmühl vor nun nahezu 25 Jahren bei Abfassung seiner Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie alles damals in Übersetzung vorhandene Material aus der arabischen Trigonometrie gewissenhaft verwertet, allein es fehlte seither zu sehr an eigentlichen Quellenstudien nach arabischen Handschriften, als daß inzwischen von einem nennenswerten Fortschritte gesprochen werden könnte. Insbesondere über die Tangensfunktion, ihr Auftreten in der arabischen Trigonometrie und die Tabulierung dieser trigonometrischen Beziehung ist unser Wissen bis heute mehr als dürftig, ja unsicher. So hielt es der Unterzeichnete für wünschenswert, durch Erschließung neuer Quellen und Analyse bedeutender arabischer Schattentafeln, besonders von bis jetzt so gut wie nur dem Namen nach bekannten Autoren, eine Förderung unserer Kenntnisse der arabischen Trigonometrie anzustreben. Der Verfasser ist dem Verlage besonders dankbar für Herausgabe dieses kurzen Beitrags. Er hofft jedoch, noch mehrere ähnliche Studien wie die hier vorliegende folgen lassen zu können.

Essen a. d. R., im Frühjahr 1923.

Karl Schöy.

Inhalt.

	Seite
I. Begriff und Arten des Schattens, Ursprung und Erstellung der Schattentafeln	7
II. Der saṭr 'add al-quṣij (Kolumne der Gradzahl). Genauigkeit der trigonometrischen Funktionswerte. Das Interpolationsverfahren des Abū'l-Riḥān al-Birūnī	16
III. Bedeutung der Schatten (Tangenten oder Kotangenten) in der arabischen Astronomie	20
IV. Besondere Schattenprobleme aus den Ḥâkimitischen Tafeln des Ibn Yûnus	23

I. Begriff und Arten des Schattens. Ursprung und Erstellung der Schattentafeln.

Der Schatten wird von Ibn Yûnus († 1009) also definiert¹⁾: „Der Schatten, den die Männer der Wissenschaft meinen, ist der Teil des Sonnenscheins, den ein Gegenstand verdeckt, der senkrecht auf ebenen, dem Horizont parallelen Flächen steht.“ In unserem besonderen Fall handelt es sich um den Schlagschatten eines Gnomons oder Schattenwerfers auf eine wagerechte oder senkrechte Ebene, auf welcher dieser Gnomon seinerseits rektangular steht. Er hat in der arabischen Astronomie gewöhnlich die Bezeichnung *miqjäs* (Messer), weil er vom Fuß bis zur Spitze in eine Anzahl Teile geteilt war, in denen man die Länge seines Schlagschattens maß. Auch die Bezeichnungen *šaḥṣ* (Gegenstand) und *šai'* (Sache, Gegenstand) für den Schattenmesser kommen vor. Der Schatten heißt nach Ibn Yûnus in der guten arabischen Sprache vor dem *zawāl* (Mittag): *zill*, nach dem *zawāl* aber *fai'*. Bemerkenswert sind die klaren Begriffsbestimmungen, die der ostarabische Astronom al-Bīrūnī (973—1048) über den Schatten und was damit zusammenhängt, gibt. Er sagt wörtlich²⁾: „Der *miqjäs* und der Schatten. Der *miqjäs* ist von Holz oder einer anderen Substanz und gleichmäßig von Gestalt; er ist am Ende spitz auslaufend wie ein Kegel. Er steht senkrecht wie ein Pflock auf der Fläche, auf der er errichtet ist. Was den Schatten anbetrifft, so verstehen wir darunter den Schatten dieses *miqjäs*. Die Schattenlänge wird nach den Teilen des *miqjäs* abgeschätzt (gemessen), bis daß man weiß, wieviel es ihrer sind. Die Verbindungslinie des Schattenendes mit der Spitze des *miqjäs* heißt Durchmesser des Schattens (*quṭr az-zill*). Und wieviel Teile hat der *miqjäs*? Falls er 12 gleiche Teile hält, heißen sie Finger³⁾; ist ihre Zahl 60, so führen sie den Namen Teile, sind es aber $6\frac{1}{2}$, so werden sie Füße genannt. Doch besteht hierin ein Unterschied insoferne, als es unter den Gelehrten auch solche gibt, die den *miqjäs* in 7 Teile teilen. — Der Art nach gibt es zwei *lei* Schatten: Der eine heißt *baṣiṭ* (ausgebreitet) oder *mustawī* (eben). Man erhält ihn, falls man den *miqjäs* senkrecht auf den Horizont stellt, nachdem dieser vorher geebnet und fehlerfrei ge-

¹⁾ Arab. Mscr. 143, Leiden, Kap. XI, S. 238.

²⁾ Kitāb at-taḥīm w'at-taḡīm. (Berlin, 5665) S. 41 a.

³⁾ Dies war die indische und früheste Teilung des Gnomons.

macht ist; er breitet sich auf dem Boden aus. Der andere heißt *ma'kûs* (umgekehrt), auch *muntasib* (vertikal). In diesem Falle ist der *miqjäs* auf einer Fläche, die der Sonne gegenüberliegt, (senkrecht) aufgerichtet, oder auf einer Wand oder etwas anderem. Auch hier steht der *miqjäs* wie ein Pflock auf ihr. Wenn sein Schatten auf den Boden fällt, so ist dessen Spitze zu unterst; deshalb nennt man ihn *ma'kûs* (gewendet).⁴

Der Horizontalschatten heißt auch noch *zill tani* (2. Schatten); der Vertikalschatten *zill awwal* (1. Schatten).

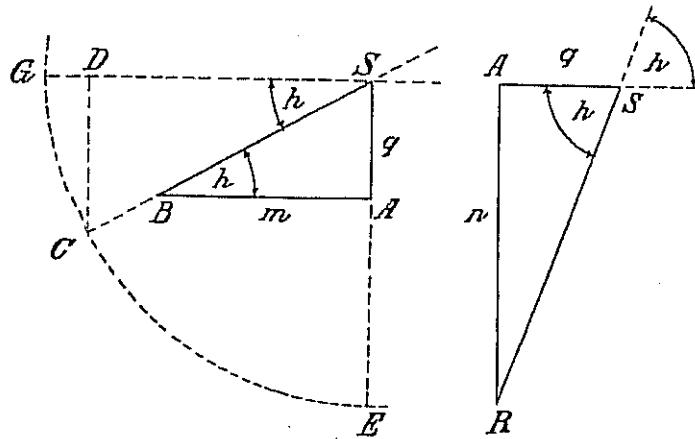


Abb. 1a.

Abb. 1b.

Aber der Schatten, der durch die Beobachtung gewonnen wird, gibt die Höhe des oberen Sonnenrandes, nicht des Sonnenmittelpunktes. Dies hat zuerst Ibn Yûnus deutlich gemacht¹⁾. Vom Schatten, der durch die Beobachtung gewonnen wird, ist der durch die Rechnung ermittelte zu unterscheiden, der der Höhe des Sonnenmittelpunktes entspricht. Ibn Yûnus sagt über die Bestimmung des letzteren folgendes: „Stelle den Sinus und den Kosinus der Höhe fest und multipliziere den Kosinus derselben mit der Länge des Gnomons; das Produkt teile durch den Sinus der Sonnenhöhe: das Ergebnis ist der Schatten. Oder du teilst den Kosinus der Höhe durch deren Sinus und multiplizierst den Quotienten mit der Länge des Gnomons: Das Ergebnis ist wiederum der Schatten; oder endlich, du teilst die Gnomonlänge durch den Sinus der Höhe und multiplizierst den Quotienten mit dem Kosinus der Höhe, und abermals ist das Resultat der Schatten. Doch wenn der Gnomon quer gerichtet ist, so ist es gerade umgekehrt: Dann mußt du den Sinus der Höhe mit der Länge des Gnomons multiplizieren und das Produkt durch den Kosinus der Höhe dividieren. Das Ergebnis ist alsdann der verlangte Schatten.“

¹⁾ Leidener Mscr. 148, S. 238, Kap. XI. (Den deutschen Text s. Anm. d. Hydrogr. u. maritim. Meteorologie, 1921, S. 131.)

Diese Vorschrift zur Berechnung des Schattens findet sich wohl übereinstimmend bei allen arabischen Astronomen. Wir lassen anschließend gleich eine kurze geometrische Ableitung — im Sinne der arabischen Autoren — folgen: Es sei in Abb. 1a $AS = q$ der vertikale miqjās und $AB = m$ sein Horizontalschatten bei der Sonnenhöhe h . In Abb. 1b ist $AS = q$ der horizontal oder quer gerichtete miqjās und $AB = n$ sein Vertikalschatten. Um S ist in Abb. 1a der Viertelkreis EG mit dem Radius $SE = 60^{\text{partes}} = \text{sinus totus}$ beschrieben. CD ist eine halbe Sehne und nach den Lehren der arabischen Trigonometrie der Sinus (ḡaib) des Winkels h . Und der Kosinus desselben Winkels h (ḡaib at-tamām) ist der Sinus seiner Ergänzung zu 90° , d. h. $DS = \sin(90^\circ - h)$. Aus den beiden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken ABS und CDS (Abb. 1a) folgt die Proportion:

$$AB : q = DS : DC,$$

d. i. $AB = m = q \cdot \frac{\cos h}{\sin h} \dots\dots\dots \text{I)}$

Ganz ebenso findet man für den Vertikalschatten $AB = n$ (Abb. 1b):

$$AB = n = q \cdot \frac{\sin h}{\cos h} \dots\dots\dots \text{II)}$$

q. e. d.

Für die Verwandlung des 1. Schattens in den 2. und umgekehrt, geben die arabischen Astronomen¹⁾ Vorschriften, die, in die Formelsprache umgesetzt, also lauten: Es ist

$$m = q \cdot \cotg h,$$

$$n = q \cdot \tang h = \frac{q}{\cotg h} = \frac{q}{\frac{m}{q}} = \frac{q^2}{m}, \text{ d. h.}$$

$$\text{Vertikalschatten } n = \frac{(\text{miqjās})^2}{\text{Horizontalschatten}} \dots\dots\dots \text{III)}$$

und ebenso ist

$$\text{Horizontalschatten } m = \frac{(\text{miqjās})^2}{\text{Vertikalschatten}} \dots\dots\dots \text{IV)}$$

Es mögen hier noch der Begriff des „Schattens der Treppe“ (zill as-sullam) Erwähnung finden. Man begegnet diesem Ausdruck bei al-Bīrūnī, der darüber das folgende sagt²⁾: „Kenntnis von az-zill al-mustawī aus dem zill as-sullam. Wir beschreiben in der Ebene des Horizontes einen Kreis, dessen Mittelpunkt im Fußpunkt des miqjās liegt, und dessen Radius gleich der Höhe des Schattenmessers ist. Im Durchschnittspunkt des Schattens dieses miqjās mit dem Kreisumfang stellen wir einen zweiten miqjās auf. Von diesem wird ein Teil im Sonnenschein, der andere Teil im Schatten (des ersten miqjās) sein. Und dies ist der Fall, wenn der Gnomonschatten über den Betrag der Länge des miqjās hinausgeht. Was nun an Teilen des zweiten miqjās im Schatten

¹⁾ Traité des instruments astronomiques des Arabes par Aboul Hussen Ali de Maroc, publié par L. Am. Sédillot, Paris 1834, S. 155.

²⁾ al-Qānūn al-Mas'ūdi (Berl. Mscr. Orient. 276). S. 72b.

liegt, das nennen wir den Schatten der Treppe, weil er während des Vormittags (meist) bis zum Fuß (der Wand, des Gnomons) herunter (und ganz verloren) geht, wobei sich sein Ende von der untersten Kante der Wand weghebt; nach der Tagesmitte sich jedoch wieder erhebt und steil emporsteigt, indem sich seine Spitze wieder erhöht. Und wenn der ebene Schatten wieder so weit hinaufgegangen ist, bis wieder zill as-sullam eingetreten ist, dann kennen wir vom zweiten miqjās auch den Teil, der in der Sonne liegt: es ist der Teil in der Nähe seiner Spitze, der dem dunkleren entgegenseht (steht). Wir nehmen von den 12 Teilen des zweiten miqjās

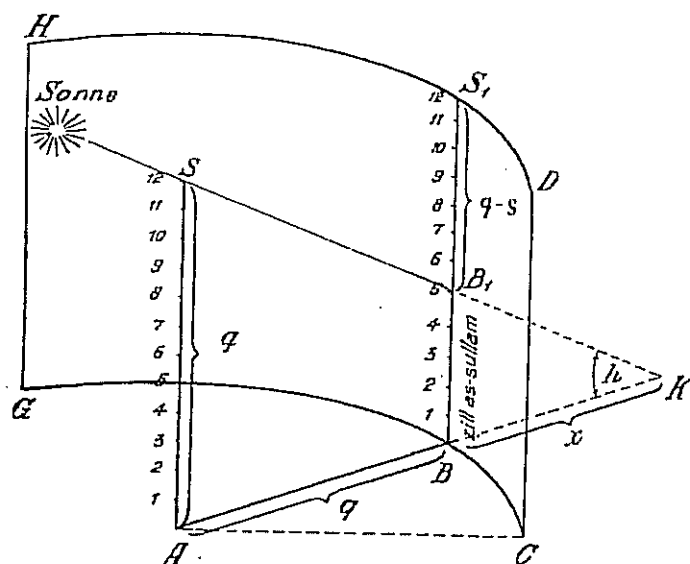


Abb. 2.

den dunkleren Abschnitt. Darauf teilen wir mit dem, was übrig bleibt (heller Teil), in das Produkt des miqjās und des zill as-sullam. Das Ergebnis der Division vermehren wir um 12, und die resultierende Summe ist der Betrag des ebenen Schattens. Oder aber: wir teilen mit dem hellen Teil in 144, dann kommt ebenfalls der horizontale Schatten heraus.“

Abb. 2 soll den Sachverhalt näher erläutern: $AS = q$ ist der erste miqjās, um dessen Fuß A der Kreis(bogen) GBC beschrieben ist. Bei der Sonnenhöhe h wirft AS den ebenen Schatten AK, der den Kreisumfang in B durchsetzt. Hier ist der zweite miqjās $BS_1 = q$ (12 Teile) errichtet, und sein unterer Abschnitt BB_1 wird vom Schatten des ersten miqjās verdunkelt. Dieser Teil heißt zill as-sullam. Sein Betrag sei $= s$ Teile. Der obere Abschnitt B_1S_1 , der in der Sonne ist, hat dann die Länge $q - s$. Nun liest man aus den beiden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken SAK

und B₁BK, falls man zur Abkürzung die Strecke BK noch mit x bezeichnet, sofort die Proportion ab:

$$s : x = q : (q + x),$$

woraus folgt:

$$x = \frac{q \cdot s}{q - s} = \frac{q \cdot \text{dunkler Teil}}{\text{heller Teil}} \dots \dots \dots \text{V)}$$

Damit wird:

$$AK = x + q = x + 12 \text{ Teile, } q. \text{ e. d.}$$

Zu Abb. 2 sei noch bemerkt, daß ich den zweiten miqjās durch eine zylindrische Wand als (konkave) Auffangfläche für den Treppenschatten ersetzt habe, wodurch dieser auch in jedem anderen Augenblick abgemessen werden kann, wo der Schatten des ersten miqjās nicht gerade auf den zweiten miqjās fällt. Sonst muß man annehmen, daß al-Birūnī den letzteren in der Kreisperipherie sich als beweglich dachte. Der weiteren Vorschrift des Textes liegt die Formel IV zu Grunde:

$$m = \frac{q^2}{n},$$

denn n ist in diesem Falle $= s$.

Gnomonschatten, nach deren Länge man die Tageszeit bestimmte, treten in Tabellenform schon bei den alten Ägyptern auf¹⁾; sie erfüllten denselben Zweck im alten Griechenland²⁾; die Verwendung der Gnomonschatten zur Bestimmung der geographischen Breite und der Ekliptikschiefe kommt bei den Chinesen, Griechen und Indern vor³⁾, hingegen scheinen die eigentlichen Schattentafeln, wo jeder beliebigen Sonnenhöhe in der Tabelle der zugehörige Schatten gegenübersteht (bā'zā'), eine Schöpfung der Araber zu sein. Vermutlich wurden sie bei der liebevollen Pflege der Sonnenuhrkunde durch die Berechnung der Schattenlänge, die dem Sonnenzeiger bei dem wechselnden Stand der Sonne entsprach, ganz von selbst darauf geführt, die Schattenlängen den Sonnenhöhen zuzuordnen, d. h. eine Schattentafel (ḡedwal az-ẓill) zu erstellen. Wer die erste Schattentafel bei den Arabern berechnet hat, wissen wir nicht. Als der älteste Astronom, dessen ẓiḡ (astronomisches Tafelwerk) eine kleine Kotangententabelle (Horizontalschatten) enthält, wird gewöhnlich Muḥammad b. Mūsā al-Ḥwārizmī angesehen, dessen Lebenszeit wir zwar nicht genau kennen, der aber zu den Astronomen des Chalifen al-Ma'mūn gehörte (Chalife von 813—833). Indessen basiert unsere Kenntnis dieses ẓiḡ nicht auf den Originaltafeln, sondern nur auf einer lateinischen Übersetzung einer späteren arabischen Umarbeitung dieser Tafeln durch den spanisch-arabischen

¹⁾ Vgl. E. von Bassermann-Jordan, Die Geschichte der Zeitmessung und der Uhren, Bd. I, Lieferung B; Altägyptische Zeitmessung von L. Borchardt, Berlin 1920, S. 27.

²⁾ Vgl. G. Bilfinger, Die Zeitmesser der antiken Völker, Stuttgart 1886, S. 16.

³⁾ Vgl. C. Schoy, Die geschichtliche Entwicklung der Pohlhöhebestimmungen bei älteren Völkern, Hamburg 1911, S. 5, 7, 13.

Astronomen Maslama b. Ahmed al-Mağriti († 1007/08), welche Übersetzung von Athelhard von Bath stammt, und die wohl zwischen 1143 und 1150 ausgeführt worden sein mag . . . „Es ist keineswegs unmöglich, ja sogar nicht unwahrscheinlich, daß diese Kotangententafel sich nicht in dem ursprünglichen Werke Khwārizmī's befunden habe, sondern erst von Maslama in seine Bearbeitung aufgenommen worden sei . . .“, sagt der Herausgeber H. Suter selbst¹⁾. Somit dürften — entgegen den etwas weitgehenden Folgerungen, die A. Björnbo zugunsten der Priorität Hwārizmī's zieht²⁾ — die uns erhaltenen Tafeln dieses Astronomen in diesem Punkte nur mit großer Reserve zur Diskussion zugelassen werden. Auf sicherem Boden stehen wir erst mit Ḥabaš al-Ḥāsib al-Merwazī, der ebenfalls zur Zeit al-Ma'mūns und al-Mo'tasims Astronom in Bagdād war und hochbetagt zwischen 864 und 874 starb³⁾. Von seinen astronomischen Tafeln finden sich 168 Blätter in der Staatsbibliothek zu Berlin (Wetzstein I, 90) als „Kitāb al-Ḥabaš al-Ḥāsib“. Dies schöne Buch, das eine deutsche Bearbeitung verdiente, habe ich näher eingesehen⁴⁾. Die Seiten 80b—83a handeln von der Berechnung der Sinus und enthalten Sinustabellen, in welche auch mehrere Schattentafeln eingestreut sind. Die Ermittlung des Schattens aus der Sonnenhöhe wird S. 97b und die inverse Aufgabe S. 97b—98a gelehrt.

Um die den einzelnen Höhengraden der Sonne zugehörigen Schattenlängen berechnen zu können, bedarf man, wie die Formeln I und II zeigen, einer Sinustafel. Diese fehlt natürlich in keinem zīg. Vorgerechnete Beispiele für die Bestimmung des Schattens aus der Sonnenhöhe h bei gegebener Einteilung des $miqjās$ q , findet man in den Ḥākimitischen Tafeln des Ibn Yūnus⁵⁾, und ich führe 2 numerische Beispiele daraus an, allerdings unter Umgehung des weitschweifigen Textes.

Beispiel für den Horizontalschatten. ($h = 40^\circ$; $q = 60''$)

$$\sin h = 38^\circ 34' 2''; \cos h = 45^\circ 57' 46''$$

$$1) q \cdot \cos h = 45^\circ 57' 46''; \quad q \cdot \frac{\cos h}{\sin h} = 71^\circ 30' 20'' = m$$

$$2) \frac{\cos h}{\sin h} = 1^\circ 11' 30'' 20''; \quad q \cdot \frac{\cos h}{\sin h} = 71^\circ 30' 20'' = m$$

$$3) \frac{q}{\sin h} = 1^\circ 33' 20'' 37''; \quad q \cdot \frac{\cos h}{\sin h} = 71^\circ 30' 20'' = m.$$

¹⁾ Die astronomischen Tafeln des Muḥ ibn Mūsā al-Khwārizmī v. H. Suter, Kopenhagen 1914, S. 77.

²⁾ Al-Ḥwārizmī's Trigonometriske Tavler v. A. Björnbo. Festschrift til H. G. Zeuthen, Kopenhagen 1909, S. 16 ff.

³⁾ H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. Leipzig 1900, S. 12 ff. (Ḥabaš al-Ḥāsib soll über 100 Jahre alt geworden sein.)

⁴⁾ Das arab. Mscr. 922 im Escorial enthält ebenfalls die astron. Tafeln des Ḥabaš al-Ḥāsib. Leider habe ich diese Schrift noch nie gesehen.

⁵⁾ a. a. O. S. 243.

Beispiel für den Vertikalschatten

[az-zill al-ma'tarid = Querschatten]

$$h = 30^\circ; q = 60^p; \sin h = 30^p; \cos h = 51^p 57' 41'' 29'''$$

$$1) q \cdot \sin h = 1800; q \cdot \frac{\sin h}{\cos h} = 34^p 38' 28'' = n$$

$$2) \frac{\sin h}{\cos h} = 34' 38'' 28'''; q \cdot \frac{\sin h}{\cos h} = 34^p 38' 28'' = n$$

$$3) \frac{q}{\cos h} = 1^p 9' 16'' 55'''; q \cdot \frac{\sin h}{\cos h} = 34^p 38' 28'' = n.$$

Falls $q = 12$ Finger (12^f) ist, so hat man vorstehende Schattenlängen durch 5 zu dividieren. Der Autor lehrt für diese Zahl:

$$m = 14^f 18' 4'' \text{ und } n = 6^f 55' 42'',$$

wo die ' und '' die 60. Teile ihrer vorhergehenden Stellenwerte sind.

Man sollte erwarten, daß die arabischen Astronomen bei der umgekehrten Aufgabe, der Ermittlung der Sonnenhöhe aus dem Schatten, von den aus I und II hervorgehenden Formeln $m : q = \cotg h$ und $n : q = \tanh h$ Gebrauch gemacht hätten. Aber dazu hätten sie einer wirklichen Kotangens- oder Tangententafel bedurft, die sich von ihrer Schattentafel insofern unterscheiden haben würde, als die Schatten m und n hätten 60 oder 12 mal kleiner sein müssen; oder kürzer gesagt: Es hätte $q = 1$ sein müssen. Diese Vereinfachung hat al-Birûnî tatsächlich erreicht¹⁾. Damit lautet die diesbezügliche Birûnî'sche Vorschrift: „Wenn wir den (Höhen-)Winkel wissen wollen, der zu einem gegebenen Schatten gehört, so multiplizieren wir den Schatten mit 5', oder (was dasselbe ist) teilen ihn durch 12, indem wir, falls das möglich ist, jeweils 60' zu ganzen Schattenteilen machen. Dann gehen wir mit dem erhaltenen Betrag des Schattens in die Tafel ein und nehmen das, was an Bogen diesem Betrag gegenübersteht; den Bogen ziehen wir von 90° ab; der Rest ist die gesuchte Höhe. Und falls vom Schatten ein Rest übrig blieb, so teilen wir damit in die (in der Tafel) gegenüberstehende Differenz, und was wir finden, zählen wir zu dem erlangten Bogen. Dann ziehen wir das Ganze von 90° ab; es bleibt die Höhe, und sie ist der Bogen jenes Schattens.“ Man erkennt aus dieser Vorschrift, daß al-Birûnî einen 12er Schatten auf den eines miqjäs mit der Einheit als Länge transformiert, mit dem seine Tafel der Vertikalschatten gerechnet ist (a. a. O. S. 78a und 78b). Andere Astronomen aber erwähnen die Kenntnis der Höhe aus dem Schatten, mittels der Schattentafel, nur nebenbei; sie lehren statt

¹⁾ al-Qânûn usw. S. 78a. Ob Abû'l-Wafâ' († 998) auch trigonometrische Tafeln mit $q = 1$ hatte, läßt sich nicht sicher ausmachen; da die trigonometrischen Tafeln im Almagest des trefflichen Mathematikers fehlen.

dessen für die praktische Berechnung der Höhe aus dem Schatten eine Formel, in welcher die Sinusfunktion auftritt, nämlich:

$$\sin h = \frac{q}{\sqrt{q^2 + m^2}} \dots\dots\dots \text{VI)}$$

Dies hatte seinen Grund wohl in dem Bestreben, jeden zu berechnenden Ausdruck tunlichst der Sinustafel zu adaptieren. In VI tritt ein der arabischen Mathematik eigentümlicher Begriff auf: Der Schattendurchmesser, (quṭr az-ẓill) der mit der Hypotenuse des Schattendreiecks ASB (Abb. 1a) identisch ist. Dieser Durchmesser war also bei Anwendung von VI erst zu berechnen. Bei Ibn Yûnus findet sich dafür folgendes Zahlenbeispiel¹⁾

$$m = 50^\circ 40' 30'' = 182400''; q = 60^\circ = 216000''$$

$$d = \sqrt{q^2 + m^2} = \sqrt{33280704900 + 46656000000} = 282731'' = 73^\circ 32' 51''$$

Nun steht in der arabischen Sinustafel nicht der reine Sinuswert,²⁾ sondern das Produkt aus dem Sinus und dem Radius (q), der gleich dem sinus totus ist. Also statt sin h findet man in der Tafel den Wert für q · sin h. Daher ist statt VI zu schreiben:

$$q \cdot \sin h = \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + m^2}} \dots\dots\dots \text{VII)},$$

und wir erhalten mit obigen Zahlen:

$$q \cdot \sin h = \frac{3600}{73^\circ 32' 51''} = 45^\circ 50' 19'',$$

was einem Winkel $h = 49^\circ 48' 58''$ entspricht³⁾.

Für solche Höhenberechnungen wäre zweifellos eine Tafel der Schattendurchmesser von Nutzen gewesen; denn es ist nach VI:

$$d = \frac{q}{\sin h} = \frac{1}{\sin h} = \operatorname{cosec} h \dots\dots\dots \text{VIII)},$$

falls man $q = 1$ setzt. Es entspricht also nach VIII jeder Sonnenhöhe h ein gewisser Wert d. Es ist auffallend, daß sich Tafeln für den Schattendurchmesser bis jetzt in keinem arabischen zîğ nachweisen lassen außer in dem von al-Ḥabaš al-Ḥāsib⁴⁾. Aber auch da ist die Tabelle

¹⁾ a. a. O. S. 244.

²⁾ Dieser findet sich jedoch bei al-Birûni (al-Qânûn usw. S. 72a—74b).

³⁾ Von Ibn Yûnus gibt es eine Sinustafel (Mscr. Landberg 1038, Berlin), die alle Sinuswerte von 0° — 90° enthält und dabei von Minute zu Minute fortschreitet. Sie liegt bei mir in deutscher Reinschrift vor und umfaßt 90 Blätter.

⁴⁾ Berliner Exemplar S. 86v und 88v.

lückenhaft: sie enthält die Werte der d nur für h von 0° — 30° und von 60° — 90° . Ich lasse dies Unikum unverkürzt nachstehend folgen.

h	Schattendurchmesser			h	Schattendurchmesser		
o	p	'	''	o	p	'	''
1	57	40	40	61	1	8	37
2	28	39	20	62	1	7	57
3	19	6	30	63	1	7	21
4	14	23	24	64	1	6	45
5	11	28	25	65	1	6	12
6	9	34	11	66	1	6	41
7	8	53	22	67	1	5	11
8	7	51	7	68	1	4	43
9	6	23	13	69	1	4	18
10	5	45	32	70	1	3	52
11	5	14	27	71	1	3	29
12	4	48	35	72	1	3	5
13	4	26	43	73	1	2	45
14	4	8	1	74	1	2	25
15	3	51	7	75	1	2	7
16	3	37	41	76	1	1	50
17	3	25	13	77	1	1	34
18	3	14	10	78	1	1	21
19	3	4	18	79	1	1	8
20	2	55	27	80	1	0	55
21	2	47	26	81	1	0	45
22	2	40	10	82	1	0	35
23	2	33	34	83	1	0	27
24	2	27	18	84	1	0	20
25	2	21	57	85	1	0	13
26	2	16	52	86	1	0	9
27	2	12	10	87	1	0	4
28	2	7	48	88	1	0	2
29	2	3	48	89	1	0	1
30	2	0	0	90	1	0	0

Aus dieser Tafel erkennt man, daß al-Ḥabaš al-Ḥāsib die Länge des $miqjās=1$ setzt, während er in den Schattentafeln $q=60^\circ$ annimmt. Statt der Bezeichnung $aḡzā'$ =partes findet man bei al-Ḥabaš (und auch bei an-Nairizi) den Ausdruck $darāḡ$ =Treppe, Leiter, Grad. Doch habe ich für die Längen der Schattendurchmesser partes gewählt.

II. Der saṭr 'add al-qusij (Kolumne der Gradzahl). Genauigkeit der trigonometrischen Funktionswerte. Das Interpolationsverfahren des Abū'l-Riḥān al-Bīrūnī.

Eine Schattentafel setzt sich aus den 2 integrierenden Bestandteilen: Gradzahl der Sonnenhöhe (saṭr 'add al-qusij) und Betrag der Schattenlängen (al-aẓlāl) zusammen, was 2 Kolumnen ausfüllt. Mitunter tritt noch eine dritte Kolumne auf: Die Differenzen (al-fuḍūl) der Schatten, so bei Abū'l-Wafā', al-Bīrūnī, Ulūğ Beg u. a., ja bei al-Bīrūnī kommt noch eine vierte Kolumne vor: nämlich die zweiten Schattendifferenzen (Differenzen der fuḍūl = at-ta'ādil = die Ausgleichen). Die frühesten arabischen Schattentafeln wiesen in dem saṭr 'add al-qusij die Zahlen der fortlaufenden ganzen Grade auf. Aber mit den Fortschritten, welche die arabische Trigonometrie bald zu verzeichnen hatte, verfeinerte sich auch die Staffelung der Intervalle bezüglich der Sonnenhöhe. So schritt der ǧedwal az-ẓill des Abū'l-Wafā' von $\frac{1}{4}^\circ$ zu $\frac{1}{4}^\circ$ im Höhenwinkel fort, und in den Hākimitischen Tafeln findet sich das Intervall zwischen 2 ganzen Graden bereits in 6 gleiche Teile geteilt¹⁾. Nach der Überschrift des arabischen Manuskripts 924, Escorial: „Kitāb as-samt w'az-ẓill l'Ibn Yūnus maḥlūl daḡiqatan daḡiqatan“ (Azimut- und Schattenbuch des Ibn Yūnus, gelöst [ausgeführt] von Minute zu Minute) muß man auf die ehemalige Existenz einer Schattentafel des Ibn Yūnus schließen, die von Bogenminute zu Bogenminute fortschritt. Leider enthält die Handschrift 924 diese Tafel nicht mehr. Minutenweises Fortschreiten bis zum 45° der Sonnenhöhe und von da ab in Intervallen von $\frac{1}{12}^\circ$ zu $\frac{1}{12}^\circ$ weist die (Vertikal-)Schattentafel des Ulūğ Beg auf²⁾, während wir in der ganz ähnlichen Tafel des Naṣīr ad-dīn aṭ-Ṭūsī († 1274) durchweg das Intervall des $\frac{1}{12}^\circ$ antreffen³⁾.

Die Genauigkeit der Schattenlängen hängt naturgemäß von der Güte der Sinustafel ab, die dem Rechner zu Gebote stand. Auch hierbei tritt der allmähliche Fortschritt in der erreichten Genauigkeit klar zutage. Da die Ptolemäische Sehnentafel die Sehnen der Kreisbögen, die sie überspannen, in partes (p) minutae (') und sekundae ("), d. h. bis zur 6. Dezimale nach dem Komma richtig gibt⁴⁾, so ist auch bei den ersten arabischen Astronomen keine geringere Genauigkeit zu erwarten. Dies bestätigen die Sinustafeln des al-Ḥwārizmī⁵⁾ und des

¹⁾ a. a. O. S. 248 ff.

²⁾ Diese ungemein genaue Tafel, von der ich später noch näher handeln werde, habe ich bis zu 45° aus dem pers. Mscr. 280, Berlin, ausgeschrieben (S. 36 a—40^a).

³⁾ Pers. Mscr. 131, Berlin (ẓiğ il-ḡānī, S. 105).

⁴⁾ Natürlich ist dabei ein Wert von mehr als 30 Tertien auf eine Sekunde erhöht, und ebenso ein Betrag von weniger als 30 Tertien unterdrückt.

⁵⁾ H. Suter: Die astronom. Tafeln usw., S. 169 ff.

al-Battānī¹⁾, während die Schattentafeln beider Astronomen sich auf ganze Finger und deren Sechzigstel beschränken. Diese Abkürzung ergibt sich nach den Sinustafeln der Autoren mit Notwendigkeit. Folgerichtig treffen wir in den Hākimitischen Tafeln des Ibn Yūnus zu der Sinustafel, welche noch die Tertien umfaßt²⁾, eine entsprechende Schattentafel, die mit den Sekunden der Schattenlängen abschließt³⁾. Eingehender habe ich die Schattentafel des Ulūğ Beg untersucht, und ich gebe nachstehend eine Anzahl Werte des Autors. Dieselben sind in der zweiten Kolumne in das Dezimalsystem umgerechnet. Daneben stehen zum Vergleich die Abweichungen von den wahren Werten. Gerne und dankbar erwähne ich hierbei der freundlichen Unterstützung durch Herrn Professor A. Wedemeyer (Berlin), der mir hier, wie auch in der Behandlung der Aufgaben am Schluß dieser Abhandlung, zu sicheren numerischen Resultaten verhalf.

Höhe		Vertikalschatten im Sexagesimalsystem						Vertikalschatten im Dezimalsystem	Wahrer Wert
D	'	ε	P	'	"	'''	IV		
1	0	—	1	2	60	17	88	0.017455085	0.017455084
4	7	—	4	40	9	55	6	0.077823697	896
11	53	—	12	37	32	43	16	0.210429265	264
14	5	—	15	3	8	39	31	0.250878420	419
17	30	—	18	55	4	32	18	0.315298789	789
20	40	—	22	37	53	1	25	0.377203813	813
24	19	—	27	6	43	23	27	0.451857550	550
30	54	—	35	54	33	20	0	0.598487654	654
35	7	—	42	11	41	13	45	0.703246431	431
39	19	—	49	8	18	54	4	0.818976394	394
42	25	—	54	49	10	21	19	0.913659052	052
75	0	3	43	55	22	28	28	3.732050808	808
81	30	6	41	28	9	44	51	6.691156239	239
87	20	21	28	13	26	37	28	21.470401046	039
88	0	28	38	10	30	42	33	28.633253281	283
89	0	57	17	23	51	42	44	57.289961633	633
89	35	187	30	26	48	29	58	187.504446757	754

ε = marfū' = erhöht = 60 partes.

Leider ist der Schatten von 89° 55', der letzte Wert in der Tafel des

¹⁾ C. A. Nallino: Al-Battānī sive Albatēnī Opus astronomicum, II. Teil, Mailand 1907, S. 55.

²⁾ a. a. O. Kap. X, S. 216 ff. Die Photographien dieses interessanten Kapitels, das vom Sinus handelt, und das ich bald zu veröffentlichen gedenke, verdanke ich einer gütigen materiellen Unterstützung des Herrn Prof. G. Eneström in Stockholm.

³⁾ Bei al-Habāš enthält sowohl die Sinus- als auch die Schattentafel die Sekunden. Ich habe seine Schattentafel mit der des Ulūğ Beg verglichen und durchweg richtige Werte auch in den Sekunden gefunden.

Ulûğ Beg, ziemlich unleserlich. Er müßte nach Wedemeyer den Wert haben:

11 27° 32' 55" 59" 22''' 42IV 40V,

statt dessen steht etwa da:

11 27° 32' 55' 47" 1''' 14IV.

Wir sehen somit die arabische Trigonometrie zur Zeit des Ulûğ Beg († 1449) im Besitze von trigonometrischen Tafeln, deren Genauigkeit weit über jene hinausging, die damals durch die sorgfältigste Beobachtung erreicht werden konnte.

Besonderes Interesse bietet die Schattentafel von al-Birûnî, die, wie schon erwähnt, auch die zweiten Differenzen (Ausgleiche) der Schatten enthält. Die Tafel schreitet nach ganzen Graden der Sonnenhöhe fort, steht also in dieser Hinsicht für jene Zeit nicht auf der Höhe. Dafür lehrt aber Birûnî ein eigenes Verfahren, wie man mit Hilfe der 1. und 2. Differenzen den Schatten eines Zwischenintervalls berechnen kann. Ich gebe erst ein Specimen der Birûnischen Schattentafel, lasse alsdann den Text seiner Rechenvorschrift folgen und schließe daran die Berechnung der Schattenlänge für die Sonnenhöhe $h = 11^{\circ} 24'$ als (von mir gewähltes) numerisches Beispiel an.

saṭr 'add al-quaij	al-aḡlāl					al-fuḡūl					at-ta'ādīl				
	p	'	''	'''	IV	p	'	''	'''	IV	p	'	''	'''	IV
1	0	1	2	50	17	0	1	2	52	36	0	0	0	5	21
2	0	2	5	43	53	0	1	2	57	57	0	0	0	5	26
3	0	3	8	40	50	0	1	3	3	22	0	0	0	9	59
4	0	4	11	44	12	0	1	3	13	21	0	0	0	11	37
5	0	5	14	57	33	0	1	3	24	58	0	0	0	13	59
6	0	6	18	22	31	0	1	3	38	57	0	0	0	16	24
7	0	7	22	1	28	0	1	3	55	21	0	0	0	18	53
8	0	8	25	56	49	0	1	4	14	14	0	0	0	21	23
9	0	9	30	11	3	0	1	4	35	37	0	0	0	23	52
10	0	10	34	46	40	0	1	4	59	29	0	0	0	26	36
11	0	11	39	46	9	0	1	5	26	5	0	0	0	29	13
12	0	12	45	13	14	0	1	5	55	18	0	0	0	32	1

Der Autor lehrt nun das Folgende¹⁾: „Wenn wir den zu einem gegebenen Bogen gehörigen ebenen Schatten wissen wollen, so ziehen wir den Bogen von 90° ab und gehen mit dem Rest in die Linie der Zahl (saṭr al-'add) ein und nehmen das, was an Schatten der Zahl gegenübersteht. Dies multiplizieren wir mit 12, und es ergeben sich die Finger des Schattens. Und wenn für uns ein Rest an Bogen bleibt, so multiplizieren wir ihn mit der ihm gegenüberstehenden Differenz, hierauf mit 12 und zählen das Ergebnis zu dem, was sich für uns als Schatten bereits ergab, die Summe wird der ebene Schatten jenes Bogens sein.

¹⁾ al-Qânûn usw., S. 77 b.

Das Genauemachen des Schattens. Wir merken uns den Schatten, genommen für die ganzen Teile des von 90° subtrahierten Bogens. Darauf nehmen wir den gegenüberstehenden Ausgleich, und er ist der Unterschied der vorhergehenden und der gegenüberliegenden Differenz. Was uns an Rest des Bogens bleibt, multiplizieren wir mit diesem Ausgleich und zählen das Ergebnis zu der vorhergehenden Differenz. Dann multiplizieren wir das, was sich hieraus ergab, wiederum mit dem Rest des Bogens und vermehren das Ergebnis um den genommenen Schatten. Und wenn wir das Ganze mit 12 multiplizieren, so erhalten wir den Schatten in Fingern ausgedrückt.“

Wir wollen hiernach den Vertikalschatten von $11^\circ 24'$ (= Horizontal-schatten von $78^\circ 36'$) berechnen. Seine Länge sei $= f(x)$. Die Schattenlänge von 11° sei $= f(x_0) = 0^\circ 11' 39'' 46''' 9^{IV}$. Die dem Schatten $f(x_0)$ vorhergehende Differenz heiße Δ_1 ; sie ist $= 0^\circ 1' 4'' 59''' 29^{IV}$; die gegenüberliegende Differenz ist $= 0^\circ 1' 5'' 26''' 5^{IV}$. Der Unterschied dieser beiden Differenzen ist der gegenüberstehende Ausgleich $\Delta_2 = 0^\circ 0' 0'' 26''' 36^{IV}$. Der Bogenrest $24'$ sei $= \Delta x$. Dann ist nach al-Birûnî:

$$f(x) = f(x_0) + \Delta x \cdot (\Delta x \cdot \Delta_2 + \Delta_1) \dots \dots \dots I)$$

oder nach Potenzen von Δx geordnet:

$$f(x) = f(x_0) + \Delta_1 \cdot \Delta x + \Delta_2 \cdot (\Delta x)^2 \dots \dots \dots Ia)$$

Ausdruck I oder Ia ist also eine Interpolationsformel, welche die zweite Differenz berücksichtigt. Ich habe dergleichen in der arabischen Mathematik kaum je gefunden²⁾. Ähnliche Vorschriften gibt Birûnî, um aus der Schattenlänge die genaue Sonnenhöhe zu finden. Für unser Zahlenbeispiel ist jetzt:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0^\circ 11' 39'' 46''' 9^{IV} \dots \dots \dots II) \\ \Delta x &= 24' = 0,4^\circ \\ \Delta_1 &= 0^\circ 1' 4'' 59''' 29^{IV} \\ \Delta_2 &= 0^\circ 0' 0'' 26''' 36^{IV} \\ \Delta x \cdot \Delta_2 &= 10''' 38 \cdot 4^{IV} \\ \Delta x \cdot \Delta_2 + \Delta_1 &= 0^\circ 1' 5'' 10''' 7 \cdot 4^{IV} \\ (\Delta x \cdot \Delta_2 + \Delta_1) \Delta x &= 0^\circ 0' 26'' 4''' 3^{IV} \dots \dots \dots III) \\ f(x) &= 0^\circ 12' 5'' 50''' 12^{IV} \dots \dots \dots IV) \end{aligned}$$

Der richtige Wert von $f(x)$ ist nach der Schattentafel des Ulûğ Beg: ($q=1$ gesetzt) $0^\circ 12' 5'' 53''' 14^{IV} 24^V$, so daß der nach al-Birûnîs Verfahren ermittelte Betrag von $f(x)$ um rund $3'''$ zu klein ausfiel. Dies ist keineswegs verwunderlich: Das Verfahren verlangt die Berücksichtigung von Differenzen höherer Ordnung.

¹⁾ Die moderne (richtige) Interpolationsformel heißt:

$$f(x) = f(x_0) + \Delta x \left(\Delta_1 + \frac{\Delta x - 1}{2} \cdot \Delta_2 \right) + \dots$$

²⁾ Eine Vorschrift des Ibn Yûnus, die Werte der Sinus nahe beieinanderliegender Argumente zu berechnen, beruht ebenfalls auf Verwendung der 2. Differenzen (X. Cap. d. Ĥûkim. Tafeln S. 216).

III. Bedeutung der Schatten (Tangenten oder Kotangenten) in der arabischen Astronomie.

Wie wir bereits bemerkten, adaptierten die arabischen Astronomen ihre Rechenverfahren tunlichst der Sinustafel. Nur vereinzelt trifft man die Formulierung der trigonometrischen Regel dergestalt, daß die Errechnung der gesuchten Größe das Eingehen in die Schattentafel erfordert. Solche Fälle wollen wir jetzt zur Sprache bringen.

Indem die Araber in die Beziehungen, welche Menelaos in seiner Sphärik für die Sehnen, welche die Kreisbogen in den Kugeldreiecken unterspannen, aufstellte, die Begriffe des Sinus und Schattens einführten,

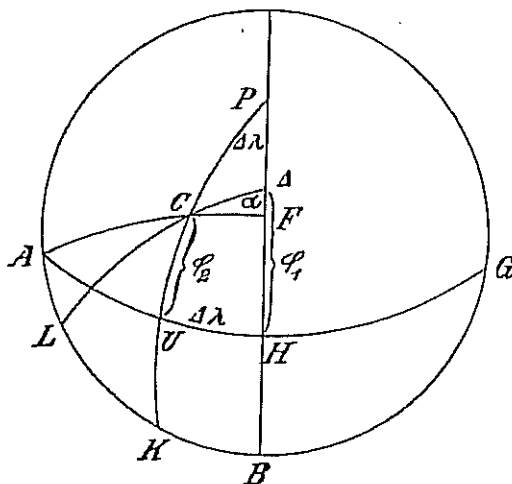


Abb. 8.

gelangten sie wohl frühzeitig zu ihrer „Tangenten- oder Schattenregel“¹⁾. A. von Braunnmühl bezeichnet diese Regel als eine Erfindung von Abū'l-Wafā'²⁾, indessen läßt sich nachweisen, daß sie schon dem 921/22-verstorbenen arabischen Astronomen al-Faḡl ibn Ḥatīm an-Nairizī (Anaritius) bekannt war. Der Inhalt der Regel ist folgender: Wenn die Seite AH des sphärischen Dreiecks AHB von den 2 Großkreisbögen (Meridianen) PH und PU in den Punkten H und U senkrecht durchgeschnitten wird, so besteht (modern umgeschrieben) die Beziehung:

$$\text{tang UK} : \text{tang HB} = \sin AU : \sin AH \dots\dots\dots 1)$$

¹⁾ Man vergleiche für nähere Details die treffliche Abhandlung von Axel A. Björnbo: „Studien über die Sphärik des Menelaos“ (Abhandlungen z. Geschichte d. math. Wissensch., Leipzig 1900, S. 94.)

²⁾ Vorlesungen über Geschichte d. Trigonometrie I, Leipzig 1900, S. 58.

Soweit unsere immer noch sehr lückenhafte Kenntnis der arabischen Mathematik und Astronomie reicht, können wir die Anwendung von I) auf astronomische Fragen bei an-Nairizî und Abû'l-Wafâ' feststellen, während der Beweis der Regel sich bei Abû'l-Wafâ'¹⁾, al-Bîrûnî²⁾ und Naşîr ad-dîn³⁾ findet.

Der Wichtigkeit halber sei hier die Stelle von an-Nairizî wieder gegeben, wo er mit der Schattenregel operiert⁴⁾. An-Nairizî stellt sich die Aufgabe, den Azimutwinkel α zu berechnen, den die Blickrichtung von Bagdâd (A) nach Mekka (C) mit dem Meridian von Bagdâd bildet, wenn die geographische Breite beider Orte, sowie deren Längenunterschied $UH = \angle \lambda$ gegeben ist. AUHG ist der Äquator der Erde und AH ein Quadrant. Arc $\angle H = \varphi_1$ ist die Breite von Bagdâd. Der Autor sucht jetzt zuerst den Bogen UK mittels der Schattenregel I zu ermitteln, die sich in diesem Falle so schreiben läßt:

$$\cotg UK = \frac{\tan \varphi_1 \cdot \sin 90^\circ}{\cos \angle \lambda} \dots\dots\dots \text{II)}$$

Nunmehr wäre der Bogen UK in der Schattentafel nachzuschlagen. Aber an-Nairizî war entweder nicht im Besitze einer solchen — $\tan \varphi_1$ drückt er als $\sin \varphi_1 : \cos \varphi_1$ aus — oder sie war ihm zu ungenau. Denn er transformiert II) in

$$\sin UK = 1 : \sqrt{1 + \left(\frac{\tan \varphi_1}{\cos \angle \lambda}\right)^2} \dots\dots\dots \text{III)}$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } \sin \varphi_1 &= 33^\circ 2' 33'' \quad (\varphi_1 = 33^\circ 25') \\ \cos \varphi_1 &= 50^\circ 4' 54'' \\ \cos \angle \lambda &= 59^\circ 55' 4'' \quad (\angle \lambda = 3^\circ) \end{aligned}$$

erhält der Autor aus III):

$$UK = 56^\circ 24' 8'' \text{ (richtig ist } UK = 56^\circ 32' 49'').$$

Der weitere Verlauf seiner Rechnungen ist hier nicht von Belang.

Anders bei Abû'l-Wafâ'! Ihm stand eine ausreichend genaue Schattentafel zu Gebote, und so gestaltet sich bei ihm die Berechnung des Azimuts der Qibla ($= \angle \alpha$) — um bei diesem Beispiel zu bleiben — also⁵⁾: Man falle von A auf den (Mittel)-Meridian von Bagdâd das sphärische Lot AF und setze $UC = \varphi_2$ (Breite Mekkas). Der Autor lehrt:

$$\frac{\tan \varphi_2}{\tan HF} = \frac{\sin (90^\circ - \lambda)}{\sin 90^\circ}, \text{ woraus er folgert:}$$

¹⁾ Von seinem Almagest hat Carra de Vaux im Journ. asiatique 1892, S. 408—71 unter anderem auch die trigonometrischen Partien veröffentlicht, wo sich im 4. Kap. des I. Buches dieser Beweis findet.

²⁾ al-Qûnûn usw., S. 81 b.

³⁾ Traité du Quadrilatère attribué à Nassiruddin-el-Toussy, traduit par Alexandra Pacha Carathéodory, Constantinople 1891, S. 169 ff.

⁴⁾ In der arab. „Abhandlung von al-Faql b. Hâtîm an-Nairizî über die Richtung der Qibla“. (Mscr. Paris 2457, 17^o.) Ich habe den interessanten Traktat in der math.-physikal. Classe der Akademie der Wissensch. zu München, 1922, veröffentlicht. (Übersetzung und Kommentar.) S. 56—89.

⁵⁾ Arab. Mscr. Paris 2494, (Almagest), S. 67 v und 67 r.

$$\operatorname{tang} HF = \frac{\operatorname{tang} \varphi_2}{\cos \angle \lambda} \dots \dots \dots \text{IV)}$$

Mit $\angle \lambda = 3^\circ$; $\varphi_2 = 22^\circ$ erhält A b ũ ' l W a f ā ':

$$\operatorname{tang} HF = 24^\circ 16' 29'' 26'''; HF = 22^\circ 1' 38'' 9''',$$

wobei er ausdrücklich betont, diesen Wert von HF mittels der Schattentafel gefunden zu haben. Der Autor lehrt ferner:

$$\frac{\operatorname{tang} CF}{\operatorname{tang} \angle \lambda} = \frac{\cos HF}{\sin 90^\circ}, \text{ (im Dreieck PHU)}$$

und er erhält damit:

$$\operatorname{tang} CF = \operatorname{tang} \angle \lambda \cdot \cos HF \dots \dots \dots \text{V)}$$

Wiederum ermittelt er aus V Bogen CF mit der Schattentafel und findet:

$$\operatorname{tang} CF = 2^\circ 54' 13'' 46'''; CF = 2^\circ 46' 14'' 54'''$$

Mit Kenntnis von CF vermag der treffliche Mathematiker durch nochmalige Anwendung der Schattenregel den gesuchten Bogen $BL = a$ zu berechnen. Er lehrt:

$$\frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} CF} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \angle F} \text{ (im Dreieck L } \angle F)$$

und zieht hiernaus:

$$\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} CF}{\sin \angle F} \dots \dots \dots \text{VI)}$$

Da $\angle F = \varphi_1 - HF = 33^\circ 25' - 22^\circ 1' 38'' 9''' = 11^\circ 23' 21'' 51'''$, mithin $\sin \angle F = 11^\circ 50' 55''$ ist, so liefert VI:

$$\operatorname{tang} a = 14^\circ 45' 39'' 13'''$$

Dazu schlägt der Autor in der Schattentafel auf:

$$a = 13^\circ 49' 15'' 55''';$$

gewiß ein recht instruktives Beispiel der Verwendung der Tangensfunktion und Schattentafel bei A b ũ ' l W a f ā ', dem sich noch verschiedene andere an die Seite stellen ließen.

Auch Ibn Y ũ n u s lag der Gebrauch der Kotangente nicht ganz ferne, wenschon er die Schattenregel nicht erwähnt. Bei trigonometrischen Beziehungen von der Form:

$$\sin a = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin h}{\cos h}$$

bemerkt der Kairinische Astronom, daß man die beiden Quotienten der rechten Seite auch als zwei Schatten deuten könne. Zur Berechnung von a schlägt er alsdann $\cotg(90^\circ - \varphi)$ und $\cotg(90^\circ - h)$ in der Schattentafel auf, und ähnliches lehrt er in anderen Fällen¹⁾; doch sind dabei die Schatten stets gegebene Größen; die Unbekannte ist der Sinus.

Dies die wenigen Quellennachweise zum Gebrauch der Tangenten und Kotangenten in der arabischen Astronomie.

¹⁾ Vgl. den deutschen Text und Kommentar in „Annalen d. Hydrographie usw.“, 1920, S. 98 und 109, 1921, S. 126 und 132, 1922, S. 14 und 20.

IV. Besondere Schattenprobleme aus den Hâkimitischen Tafeln des Ibn Yûnus.

Hier soll von einigen Anwendungen des Schattens des miqjās auf die Bestimmung der Höhe senkrecht stehender Gegenstände die Rede sein, wie man sie in den Hâkimitischen Tafeln findet¹⁾. Ibn Yûnus behandelt 2 verschiedene Fälle:

1. „Im Falle, daß du zum Fuße (Untersten) des Gegenstandes gelangen kannst, während er genau aufrecht steht, stellst du zur Ermittlung seiner Länge eine Marmorplatte auf. Die eine Seite derselben sei vollkommen glatt und von milchweißer Farbe. Nachdem du durch sorgfältiges Nivellieren dich davon überzeugt hast, daß sie ganz eben ist, machst du sie mit Gips oder einer anderen Substanz fest. Und wenn dir keine tadellose Marmorfläche zur Verfügung steht, so genüge dir statt dessen eine Platte aus weichem Stein (kaḡḡān) oder Holz, nachdem sie ganz oder nahezu fehlerfrei ist. Dann nimmst du einen für das Schattenwerfen hergerichteten miqjās aus Erz oder auch aus Holz, falls dir Erz mangelt. Du greifst seine Länge mit dem Zirkel ab und schlägst mit der unveränderten Zirkelöffnung auf der nivellierten Fläche einen Kreis. Hierauf stellst du diesen miqjās im Kreismittelpunkt senkrecht auf, wobei du darauf achtest, alles recht genau auszuführen. Du beobachtest die Spitze seines Schattens, bis daß sie auf den Umfang fällt. Und wenn dies eintritt, machst du im Schattenende des Gegenstandes eine Marke. Dann missest du die Entfernung zwischen dem Fußpunkt des Gegenstandes, dessen Länge du wissen willst, und der Marke in irgendeinem Maß: in Spannen, Ellen oder dergleichen.

Und wenn der Gegenstand in seinem Emporragen sich in die Erde (im Boden) ausdehnt, wie ein Gebäude mit Höhe und Länge, indem es einen langen Bau bildet, so fassest du am höchsten Teil desselben eine Stelle ins Auge, die sich durch Hervor- oder Zurücktreten oder durch Farbe unterscheidet. Diese Stelle nimmst du zu einer Marke, und du richtest dein rechtes Auge auf den Rand des Schattens dieses Gebäudes zu jenem Zeitpunkt, und mit geschlossenem linken Auge suchst du zu erreichen, daß diese Marke in genaues Vis à Vis mit der Sonne kommt. Nachdem du so lange vor- und zurückgetreten bist, bis sich dies ergeben hat, missest du die Entfernung von dieser Schattenspitze bis zu jenem Punkt, der Fußpunkt zu der Marke ist. Und was sich ergibt, ist die Länge (Höhe) des Gegenstandes. Es ist notwendig, daß du dies an einer der geeignetsten Stellen, die sich vorfinden, genau ausführst.

Und wenn der augenblickliche Schatten sich nicht soweit verkürzen kann, um gleich der Länge des senkrecht stehenden miqjās zu werden, dann nimmst du seine doppelte Länge in den Zirkel und beschreibst damit einen Kreis. Du beobachtest jetzt den Gnomonschatten, bis daß seine Spitze auf den Umfang fällt, machst durch eine Marke die Schattenspitze

¹⁾ Leidener Macr. 143, S. 253 ff.

des Gegenstandes, dessen Höhe du suchst, (für denselben Augenblick) kenntlich und missest die Entfernung zwischen dieser Marke und dem Fuß des Gegenstandes. Was sich ergibt, das ist die doppelte Höhe jenes Gegenstandes. Nimmst du davon die Hälfte, so ist sie die gesuchte Höhe. Und wenn du den Radius des Kreises gleich dem $1\frac{1}{2}$ -fachen der Gnomonhöhe machst, so ist das, was sich für dich an Ellen ergibt, das $1\frac{1}{2}$ -fache der Höhe des Gegenstandes. Nimm $\frac{2}{3}$ davon! Was alsdann herauskommt, das ist die verlangte Höhe. Nimm $\frac{3}{4}$, falls der Radius des Kreises das $1\frac{1}{2}$ -fache der Gnomonhöhe ist usw.

2. In diesem Falle handelt es sich um die Ermittlung der Höhe eines senkrecht stehenden Gegenstandes aus seinem Schatten, falls letzterer nicht bis zum Fußpunkt des Gegenstandes gezogen werden kann. Dazu nivellierst du die eine Seite der Schattenfläche, bis du sie einwandfrei findest und befestigst alsdann die Platte mit Gips oder etwas anderem, so daß sie dauernd fest hält und sich nicht neigt. Du wählst auf ihr eine Marke für den Mittelpunkt des *śaḥṣ*; errichtest diesen genau über der Marke und ziehst durch den Mittelpunkt die Mittagslinie. Gleichviel, ob sie mittels des indischen Kreises gezogen ist oder durch Berechnung der Richtung: du richtest deinen Blick auf die sehr ausgeglichene (ebene) Stelle der Platte, auf die der Schatten des aufrecht stehenden *śaḥṣ* fällt. Mache in dem augenblicklichen Schattenende des *śaḥṣ* eine Marke und ebenfalls eine solche in der Schattenspitze des aufrecht stehenden Gegenstandes, dessen Höhe du wissen willst. Und es mögen deine Verrichtungen schnell ausgeführt werden. Alsdann hebst du den *śaḥṣ* weg und ziehst von seiner Schattenspitze nach seinem Mittelpunkte eine gerade Linie: sie werde Linie des Azimuts der Sonne genannt. Wisse den (Winkel) Abstand der Linie des Azimuts von der Mittagslinie. Und nun machst du oftmals eine solche Messung, bis daß du erkennst, daß der Schatten sich deutlich wahrnehmbar verändert hat, diese Veränderung auf den ersten Schatten bezogen. Nivelliere jetzt wiederum die Schattenfläche, befestige sie, wähle eine Marke auf ihr, mache sie zum Mittelpunkt des *śaḥṣ* und stelle ihn ganz präzise auf dieser Marke auf. Lege durch sie die Mittagslinie und ziehe vom Mittelpunkt des *śaḥṣ* eine zweite Linie unter einem Winkel zur Nordsüdlinie, der dem Azimut der früheren Linie genau gleichkommt. Nachdem nun der *śaḥṣ* über seinem Mittelpunkt aufgestellt ist, beobachtest du seinen Schatten so lange, bis daß er genau auf die Linie des Azimuts fällt. Und wenn dies eintritt, machst du die Schattenspitze des *śaḥṣ* und ebenso jene des stehenden Gegenstandes durch ein Merkmal kenntlich. Jetzt ermittelst du den Unterschied der zwei Schatten des *śaḥṣ*, die sich bei der ersten und zweiten (letzten) Messung ergaben. Diesen Unterschied setzest du ins Verhältnis zur Länge des *śaḥṣ*, wobei der Unterschied als Divisor genommen wird. Dann missest du auch den Unterschied der zwei Schatten des Gegenstandes, dessen Höhe du wissen willst. Das was sich hierbei ergibt, multiplizierst du mit der Länge des *śaḥṣ* und teilst das Produkt durch den Divisor. Was aus der Teilung

hervorgeht, ist die gesuchte Höhe des Gegenstandes, und Allāh leitet zum Richtigen.“

Während zum 1. Falle kaum etwas anderes zu bemerken ist, als daß bei dem Vorschlag, den Radius des Kreises $= 2q, 1\frac{1}{2}q, 1\frac{1}{3}q$ usw. zu nehmen, an verschiedene Sonnenhöhen — also hier wohl an solche zur Zeit des Wintersolstitiums, wo die Sonnenhöhe in dem größten Teil des islāmischen Bereiches kleiner als 45° ist — gedacht werden muß, soll zu dem 2. Falle folgende Erläuterung gegeben werden.

Es sei $F\Sigma = q$ ein Gnomon; (Abb. 4) C_1 und C_2 seien 2 Schattenkurven, welche die Schattenspitze dieses šahṣ an 2 verschiedenen Tagen durchläuft. Bei einer gewissen Sonnenhöhe h_1 wird der Schatten zur Ost-westlinie den Winkel (Azimut) α bilden¹⁾. Dann hat er die Länge

$$F\Sigma_1 = m_1 = q \cdot \cotg h_1 \dots\dots\dots \text{I)}$$

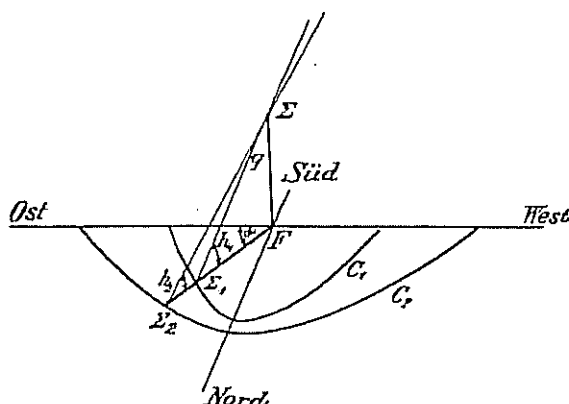


Abb. 4.

Nach einer Reihe von Tagen beschreibe die Schattenspitze die Kurve C_2 . Fällt alsdann der Schatten des miqjās wieder in die Richtung α , so wird die Sonnenhöhe natürlich eine andere, h_2 , sein. Dann ist, ähnlich wie in I,

$$F\Sigma_2 = m_2 = q \cdot \cotg h_2 \dots\dots\dots \text{II)}$$

Die Differenz der 2 Schatten ist mithin:

$$\Delta_1 = F\Sigma_2 - F\Sigma_1 = m_2 - m_1 = q \cdot (\cotg h_2 - \cotg h_1) \dots\dots\dots \text{III)}$$

Ganz analog hat man für einen Gegenstand der Höhe q_1 :

$$\Delta_2 = \mu_2 - \mu_1 = q_1 \cdot (\cotg h_2 - \cotg h_1) \dots\dots\dots \text{IV)}$$

Dividiert man jetzt IV durch III, so folgt

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{q_1}{q},$$

und hieraus

$$q_1 = q \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \text{ q. e. d.}$$

¹⁾ Bei den Arabern war die Zählung des Azimuts von der Ostwestlinie aus üblich.

Wie schon eingangs dieser Studie erwähnt wurde, hat Ibn Yûnus zuerst dargetan, daß die Schattenlänge eines Stabes die Höhe des oberen Sonnenrandes und nicht die des Sonnenmittelpunktes gibt. Soll daher die durch Schattenmessung gewonnene Sonnenhöhe mit der durch ein Instrument beobachteten übereinstimmen, so ist nach des Autors Vorschrift von der ersten Sonnenhöhe der halbe Durchmesser der Sonnenscheibe abzuziehen.

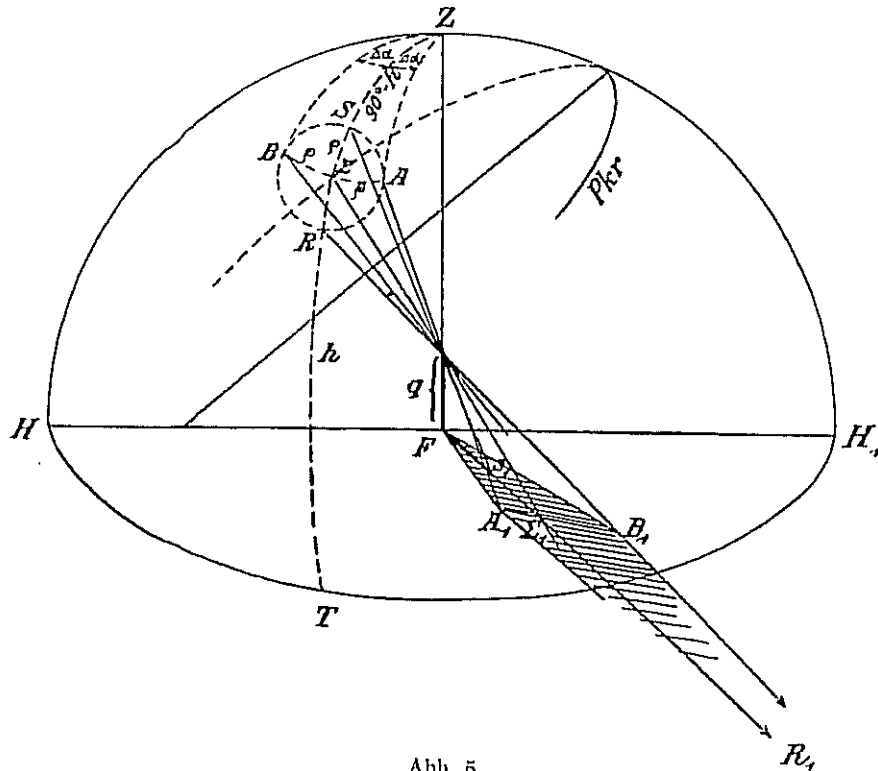


Abb. 5.

In Abb. 5 sei Σ der Mittelpunkt und S der obere Rand der Sonnenscheibe. Beide Punkte sind um den Radius ρ voneinander entfernt, der bei der Sonne durchschnittlich $15' \cdot 5$ beträgt. In F stehe ein Gnomon der Höhe q senkrecht auf dem Horizont HTH₁. Punkt Z ist das Zenit. Dann ist, wie man leicht sieht, die Strecke FS₁ der volle Schlagschatten des Gnomons, während längs des Abschnitts S₁Σ₁ allmähliche Aufhellung des Schattens eintritt; denn die einzelnen Punkte der Strecke S₁Σ₁ entsprechen Sonnenpunkten, die zwischen dem oberen Sonnenrande S und dem Mittelpunkt Σ liegen; das Stück Σ₁R₁ ist dem unteren Sonnenradius ΣR zugeordnet. Somit ist die Ausdehnung des „Halbschattens der Höhe“

$H = S_1 R_1 = q \cdot [\cotg(h - \rho) - \cotg(h + \rho)] = q \cdot \frac{\sin 2\rho}{\sin^2 h - \sin^2 \rho} \dots \text{I)}$
falls man unter h die Höhe des Sonnenmittelpunktes Σ versteht.

Im 26. Kapitel der Hākimitischen Tafeln¹⁾, wo Ibn Yūnus von der Berechnung des Schattens handelt, den ein quer gerichteter Gnomon auf das Zifferblatt einer vertikalen Sonnenuhr wirft, bemerkt er, daß bei der Sonnenhöhe $h=0^\circ$ die Morgenweite um den Radius der Sonnenscheibe zu vermehren sei. Hierdurch ist der Halbschatten in der Breite (im Azimut) angedeutet, den wir „lateralen Halbschatten“ nennen und mit M bezeichnen.

1. Es ist von Interesse, den Betrag von H für den Augenblick der größten Mittagshöhe der Sonne in Kairo zu ermitteln. Diese ist zu Beginn des Krebses $=83^\circ 35'$, falls man mit Ibn Yūnus die Ekliptikschiefe zu $23^\circ 35'$ annimmt. Die Formel I liefert alsdann mit einem Gnomon $q=10$ cm den verschwindend kleinen Wert:

$$H=0.913165 \text{ mm.}$$

2. In Abb. 5 sind vom Zenit Z zwei Vertikalkreise gezogen, welche die Sonnenscheibe in den Punkten A und B berühren. Sie schließen beim Zenit einen Winkel 2α ein, der gleich dem Azimutunterschied der zwei äußersten Sonnenpunkte A und B ist. Zur Berechnung dieser Differenz sei vom Sonnenmittelpunkt S das sphärische Lot SA oder SB $=\varrho$ auf den Großkreisbogen ZA oder ZB gefällt. Die zwei rechtwinkligen sphärischen Dreiecke: ZAS und ZBS haben natürlich dieselben Seiten und Winkel. Die Lichtstrahlen von den zwei äußersten Sonnenpunkten A und B liefern auf dem Horizonte die zwei Punkte der lateralen Schattengrenze: A₁ und B₁, und es stellt das ebene Dreieck A₁FB₁ den gesamten lateralen Halbschatten (M) dar. In der Abb. 5 liegen die Punkte A₁ S₁ B₁ in einer geraden Linie, was, streng genommen, nicht ganz korrekt ist, da AS und SB zwei Einzelbogen sind und $\angle ASB$ nicht genau 180° ist. Doch ist der dabei begangene Fehler bei so kleinem ϱ verschwindend klein. Man liest aus der Zeichnung sofort ab:

$$\sin \Delta\alpha = \frac{\sin \varrho}{\cos h} \dots\dots\dots \text{II)}$$

$$M=q \cdot \tan \Delta\alpha \dots\dots\dots \text{III)}$$

Für $\varrho=15' \cdot 5$ und $h=83^\circ 35'$ folgt aus II:

$$\Delta\alpha=2^\circ 18' 44''$$

und damit aus III:

$$M=0.040377 \cdot q=4.0377 \text{ mm, falls } q=10 \text{ cm ist.}$$

Der Halbschatten M verbreitert sich also bei dieser Sonnenhöhe um mehr als das Vierfache des Halbschattens H²⁾. Formel II verliert ihre Gültigkeit, wenn $h=90^\circ-\varrho=89^\circ 45'$ ist.

¹⁾ Macr. der Bodleyana (Oxford): Huntington 331, S. 60v.

²⁾ Trotzdem sind, wie mir Herr Dr. M. Meyerhof, Kairo, brieflich mitteilt, die Schatten in Asuān, selbst zur Zeit des Wintersolstitiums, bei Sonnenkulmination messerscharf und ohne Spur eines Halbschattens. Dieser letztere wird auch auf der photographischen Platte, wohl infolge der großen Stärke des Tageslichtes, nicht sichtbar.

3. Es läßt sich jetzt die Frage stellen: Welche Zeit vergeht, bis der laterale Halbschatten über die Mittagslinie hinweggestrichen ist? Das astronomische Dreieck: Zenit-Pol-Sonne gestattet sofort folgende Gleichung abzulesen:

$\sin \varphi \cdot \cos \Delta a = \cos \varphi \cdot \tan h - \sin \Delta a \cdot \cotg s$ IV)
worin φ die Ortsbreite und s der Stundenwinkel ist, der der Hälfte der gesuchten Zeit entspricht. Mit $\varphi = 30^\circ$; $h = 83^\circ 35'$; $\Delta a = 2^\circ 18' 44''$ liefert IV:

$$s = 0^\circ 19' 15''.$$

Verdoppelt man s , so entspricht dem Stundenwinkel $2s$ die verlangte Zeit:

$$t = 2^m 34^s.$$

4. Man kann weiterhin fragen: Bei welcher Sonnenhöhe h ist $H = M$? — Die Bedingungsgleichung hierfür lautet:

$$\frac{2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sin^2 h - \sin^2 \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 h - \sin^2 \varphi}} \quad \text{. V)}$$

$$\text{indem aus II } \tan \Delta a = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 h - \sin^2 \varphi}} \text{ folgt.}$$

Aus V hat man weiter:

$$\frac{4 \cdot \cos^2 \varphi}{(\cos^2 \varphi - \cos^2 h)^2} = \frac{1}{\cos^2 h - \sin^2 \varphi}$$

und hieraus:

$$\cos^2 h = 3 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{3 \cos^2 \varphi - 1} \quad \text{. VI)}$$

Daraus errechnet sich h zu $65^\circ 31' 30''$. Die Gleichheit von Vertikal- und Lateralhalbschatten ist demnach im südlichen Deutschland zur Zeit der Sommersonnenwende im Mittag noch möglich.

5. Endlich sei gefragt: Bei welcher Sonnenhöhe h ist die Summe der beiden Halbschatten $H + M$ ein Minimum? — Wie man aus I und III erkennt, muß

$$\frac{d}{dh} \left[\cotg (h - \varphi) - \cotg (h + \varphi) + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 h - \sin^2 \varphi}} \right] = 0 \text{ sein,}$$

oder:

$$\frac{d}{dh} \left[\frac{\sin 2 \varphi}{\sin^2 h - \sin^2 \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 h - \sin^2 \varphi}} \right] = 0$$

oder:

$$\frac{d}{dh} \left[\frac{2 \cdot \cos \varphi}{\sin^2 h - \sin^2 \varphi} + \frac{1}{\sqrt{\cos^2 h - \sin^2 \varphi}} \right] = 0$$

Nach Ausführung der Differentiation hat man:

$$\frac{4 \cdot \sin h \cdot \cos h \cdot \cos \varphi}{(\sin^2 h - \sin^2 \varphi)^2} + \frac{\sin h \cdot \cos h}{(\cos^2 h - \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

oder:

$$\frac{4 \cdot \cos \varphi}{(\sin^2 h - \sin^2 \varphi)^2} + \frac{1}{(\cos^2 h - \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

oder:

$$\frac{16 \cdot \cos^2 \varrho}{(\sin^2 h - \sin^2 \varrho)^4} = \frac{1}{(\cos^2 h - \sin^2 \varrho)^3} \dots\dots\dots \text{VII)}$$

Gleichung VII ist in $\sin h$ oder $\cos h$ vom 4. Grade. Sie hat die brauchbare Wurzel

$$h = 59^\circ 5' 40''.$$

Folgende kleine Tabelle gibt eine Übersicht über die Beziehungen zwischen Schattengrößen und Sonnenhöhe:

h	H	M	H+M	H-M
56 ^a	1312	806	2118	506
57	1282	828	2110	454
58	1254	851	2105	403
59	1227	875	2102	352
60	1202	902	2104	300
61	1179	930	2109	249
62	1156	960	2116	196
63	1135	993	2128	142
64	1117	1029	2146	88
65	1098	1067	2165	31
66	1081	1109	2190	-28

Der Verwaltung der Preuß. Staatsbibliothek zu Berlin schulde ich wärmsten Dank für die freundliche Übersendung verschiedener arabischer Handschriften nach Essen, wo sie längere Zeit zu meiner Verfügung standen.

DIE GESCHICHTE DER ZEITMESSUNG UND DER UHREN

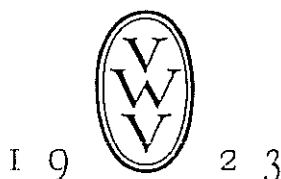
unter Mitwirkung von

LUDWIG BORCHARDT, JOSEPH DRECKER, MAX ENGELMANN,
JOSEPH FRANK, FRIEDRICH KARL GINZEL, FRITZ HAUSER,
ALBERT REHM, KARL SCHOY, EDUARD SELER,
EILHARD WIEDEMANN UND ANDEREN

herausgegeben von

ERNST VON BASSERMANN-JORDAN

BAND I



BERLIN UND LEIPZIG • VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER
WALTER DE GRUYTER & Co.

VORMALIG G. J. GÖSCHE'SCHE VERLAGSHANDLUNG / J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG / GEORG REIMER / KARL J. TRÜBNER / VEIT & COMP.

BAND I, LIEFERUNG F

DIE GNOMONIK DER ARABER

VON

KARL SCHOY

MIT 30 ABBILDUNGEN

INHALT

	Seite
Vorwort	3
Bibliographische Einleitung	3
I. Kapitel: Der Gnomon, Schattenmesser, Schattenwerfer	5
II. Kapitel: Die Schattenfläche der ebenen Uhren	8
III. Kapitel: Über den Schatten und die Schattentafeln	9
Tafel der Horizontalschatten	12
IV. Kapitel: Berechnung des Azimuts aus der Sonnenhöhe	17
V. Kapitel: Elementare Theorie der ebenen Sonnenuhren	22
VI. Kapitel: Die arabische Horizontalsonnenuhr oder Basīṭa	27
1. Konstruktion der Parallelkreise und Stundenlinien	27
Teile der Stunden in den nördlichen Sternbildern	31
Teile der Stunden in den südlichen Sternbildern	32
2. Die Qibla	33
Tafel der Sonnenhöhe des Azimuts der Qibla	42
3. Das 'Aṣr	43
Tafel der Bogengrade von der Tagesmitte bis zur Zeit des ersten 'Aṣr	53
VII. Kapitel: Sonnenuhren, welche die Zeit durch eine Schattenlänge allein angeben	54
VIII. Kapitel: Vertikale und geneigte ebene Uhren	59
1. Der Vertikal über der Mittagslinie	59
Tafel des Azimuts auf dem Nordsüdvertikal, wenn der Schatten dem Gnomon gleich ist	62
2. Der Ostwestvertikal	63
3. Deklinierende (abweichende) Vertikaluhren	66
4. Die inklinierende und deklinierende Uhrebene	67
5. Kombinierte Sonnenuhren	70
1. Die Muḡannaha oder die Graūgele	70
2. Der Mutakāfi	71
3. Die Miknasa	71
4. Die Miknasa, bei der der Rücken des Winkels in der Ostwestlinie ist	71
5. Die deklinierenden Makānis	71
6. Die Makānis, deren Rücken mit der Mittagslinie in der Ebene des Meridians liegt	71
7. Die Makānis, deren Rücken mit der Ostwestlinie in der Ebene des ersten Vertikals liegt	71
8. Die Makānis, deren Rücken zur Mittags- und Ostwestlinie dekliniert	71
IX. Kapitel: Konstruktion der Zylinder-Kegel- und Kugeluhren	72
X. Kapitel: Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes aus der Lineatur der Sonnenuhr, die ursprünglich für diesen Ort konstruiert war	75
1. Breitebestimmung mittels der Basīṭa	75
2. Das Aufsuchen der Breite am Nordsüdvertikal	76
3. Wie man die Breite an der Vertikaluhr über der Ostwestlinie finden kann	77
4. Breitebestimmung an der abweichenden Vertikaluhr	77

	Seite
Anmerkungen und Zusätze	78
Zu Kapitel III:	
a) Abhandlung über den Schatten	78
b) Die Länge des miqās sei = 1	79
Zu Kapitel IV:	
a) Zahlenbeispiel zur Azimutbestimmung	79
b) Tabelle des Ihtilāf al-uḥq für die Breite von Bagdād	81
Tabelle des Sinus der Morgenweite für die Breite von Bagdād	81
Zu Kapitel VI ₁ :	
a) Geschichtliche Notiz zur größten Sonnendeklination	82
b) Zusammenhang zwischen den zeitlichen und gleichen Stunden	82
Zu Kapitel VI ₂ :	
1. Berechnung der Qiblarichtung nach Ibn al-Haiṭam	83
2. Berechnung der Qiblarichtung nach Abū 'l Wafā'	84
Zu Kapitel VIII ₁ :	
a) Die Wiederauffindung des verlorenen Gnomons	86
b) Zahlenbeispiel zur Berechnung der Linie des Horizontes	88
Zu Kapitel VIII ₂ :	
a) Zahlenbeispiel zur Berechnung einer Azimutstunde	90
Zu Kapitel VIII ₄ :	
a) Frage nach dem Urheber der abendländischen Sonnenuhr	90
Namen- und Sachnachweis	92
Ergänzungen und Berichtigungen	95

VORWORT

Nach der Absicht des Herausgebers der »Geschichte der Zeitmessung und der Uhren« sollte diese innerhalb des Gebietes der Sonnenuhren auch einen gesonderten Beitrag über die arabische Gnomonik enthalten, und der Unterzeichnete wurde mit deren Abfassung betraut. Über die Grundsätze, nach denen dabei verfahren wurde, soll kurz berichtet werden:

Bei der immer noch lückenhaften und spärlichen Kenntnis, die wir von der reichen arabisch-astronomischen Literatur besitzen, kann natürlich von einer Darstellung der geschichtlichen Entwicklung des wichtigen Zeitmesswerkes, wie es die Sonnenuhr Jahrhunderte hindurch für den islamischen Kulturbereich war, keine Rede sein. Wir kennen den Stand der arabischen Sonnenuhrkunde eigentlich nur in der ersten Blüteperiode arabischer Astronomie genauer, nämlich bei al-Battānī († 929), und dann wieder zu Ende der westarabischen Periode aus dem großen Werk über astronomische Instrumente, das uns der Marokkaner Abū'l-Ḥasan († ca. 1260) hinterließ. Da hielt es der Unterzeichnete für wünschenswert, einen namhaften Astronomen der Zwischenzeit zu Rate zu ziehen. Er wählte dazu die auf die Sonnenuhren bezüglichen Kapitel der Ḥākimitischen Tafeln des ägyptischen Astronomen Ibn Yūnus († 1009). Dieses berühmte Werk arabischer Astronomie, das seinerzeit das größte Ansehen genoss, findet sich — wenn auch unvollständig — in Leiden und Oxford, und der Unterzeichnete schuldet den dortigen Bibliotheksvorständen wärmsten Dank für die gütige Vermittlung von Photographien. Indem er nun das auf die Gnomonik Bezügliche der Ḥākimitischen Tafeln aushob, glaubte er wenigstens erreicht zu haben, dass der Ausschnitt, der in den folgenden Blättern gegeben werden konnte, nicht mehr gar zu lückenhaft ist.

Des ferneren ist der Verfasser der Ansicht, dass Sonnenuhrkunde von jeher eine vorwiegend mathematisch-astronomische Disziplin war, und so schien es ihm richtig, die Darstellung dann mathematisch zu gestalten, wenn dadurch tiefere wissenschaftliche Einblicke gewonnen werden konnten. Gerne und dankbar erwähnt er hierbei der Unterstützung des Herrn Prof. A. Wedemeyer in Berlin, der ihm zu sicheren Resultaten bei der Aufstellung der zweiten Differentialquotienten verhalf. Da der Verfasser die Qibla und das Aqr für zwei ganz besonders typische Bestandteile der arabischen Sonnenuhrkunde hält, so glaubte er sie entsprechend ausführlich darstellen zu müssen. Auch die Beigabe der verschiedenen Tabellen dürfte manchem Leser, besonders dem historisch-mathematisch orientierten, nicht unwillkommen sein.

Doch damit schwoll die Arbeit zu einem Umfang an, der die ursprünglich ihr zugedachten Grenzen erheblich überschritt, dank des großen Entgegenkommens, das ihr Herr Professor Ernst von Bassermann-Jordan von Anfang an bewies, der dem Unterzeichneten auch wiederholt und opferwillig die Beschaffung kostspieliger Photos aus dem Auslande ermöglichte. — Leider trifft mein Dank an einen dritten Gelehrten diesen nicht mehr unter den Lebenden: es ist mein hochverehrter Lehrer des Arabischen und Persischen, Professor C. F. Seybold (Tübingen). Ihm verdanke ich die richtige Lesung schwieriger handschriftlicher Textstellen, was mir bei meinen bescheidenen Kenntnissen in den morgenländischen Sprachen von großem Nutzen war.

ESSEN an der Ruhr, im Herbst 1922.

KARL SCHOY

BIBLIOGRAPHISCHE EINLEITUNG

Als der älteste arabische Astronom, bei dem man einiges über die Gnomonik der Araber findet, wird gewöhnlich al-Battānī genannt, der im Abendland unter dem Namen Albategnius († 929) bekannt ist. Im *Opus astronomicum al-Battānī sive Albatēnī ad fidem cod. Escorial. arabice editum lat. vers. adnotation. instructum a C. Alfonso Nallino* (Pubblicazioni del reale Osservatorio di Brera in Milano, 1899—1907) besitzen wir eine in jeder Hinsicht vorbildliche Neuausgabe dieses berühmten Astronomen. Im 56. Kapitel, I, S. 135 ff. ist von der Konstruktion der Horizontalsonnenuhr (ruḥāma) ausführlich die Rede. Auf andere Arten von Sonnenuhren geht al-Battānī nicht ein. Aber schon vor ihm haben nach H. Suter (*Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, Leipzig 1900, S. 10, 12, 13, 17, 19, 34) verschiedene arabische Astronomen über Gnomone und Sonnenuhren Schriften verfaßt, die indessen alle verloren gegangen zu sein scheinen. Deshalb möge die Aufzählung der Autoren unterbleiben. Aus der Zeit des 9. Jahrhunderts käme vor allem die Schrift des Tābit b. Qorra, »Über die Figuren der Endlinien, über welche der Schatten des Gnomons hingeht«, in Frage, die sich angeblich im Escorial befindet und noch unübersetzt ist. Da die gnomonischen Schriften des Enkels des Tābit b. Qorra, nämlich Ibrāhīm's b. Sinān b. Tābit b. Qorra, sowie diejenige über die Horizontalsonnenuhr Ibn al-Haitāms verloren gegangen sind, der bekannte Abū'l Wafā' nichts über unseren Gegenstand geschrieben hat, so können wir gleich zu den Hākimitischen Tafeln des Ibn Yūnus († 1009), meiner Hauptquelle, übergehen. Davon bewahrt das Legatum Warnerianum zu Leiden als Handschrift No. 143 die ersten 22 der 81 Kapitel, die 391 Seiten umfassen. Weitere Teile des Werkes befinden sich in Oxford als Handschrift Huntington No. 331. Beide enthalten reiches gnomonisches Material.

Die ferner von mir zu Rate gezogenen Schriften des al-Birūnī (973—1048) sind: al-qānūn al-ma'sūdī und das kitāb al-taḥḥim. Beide Handschriften befinden sich in der staatlichen Bibliothek in Berlin als No. 5667 und 5665 und wurden mir von derselben in dankenswerter Weise, wie auch eine Anzahl kleinerer Handschriften, im Original hier in Essen zur Verfügung gestellt. Leider enthält der Kanon Masudicus kaum etwas für die Gnomonik Erwähnenswertes. Er ist in dem persischen ta'liq geschrieben. No. 5665 gibt viele Definitionen und wurde von mir mehrfach benützt.

Endlich verdanke ich der Freundlichkeit der Herren Professoren M. van Berchem († 1921) in Genf und Dr. Griffini, Direktor der Ambrosiana zu Mailand, eine Photographie des Schriftchens 286*, das ebenfalls Ibn Yūnus zum Verfasser hat, und das ich für die Qibla benützte.

Trotzdem bleibt ḡami' al-mabādi w'al-ḡajāṭ (= das Ganze der Anfänge und der Resultate) des Abū'l Ḥasan 'Alī ben 'Omar al-Marrākuṣī*) immer noch die Hauptquelle arabischer Gnomonik, und dies um so mehr, als es von J. J. Sédillot ins Französische übertragen und von dessen Sohn L. A. Sédillot 1834/35 in Paris veröffentlicht wurde. Ein Kommentar fehlt allerdings ganz.

Eine anscheinend namhafte gnomonische Schrift des Sibṭ al-Māridīnī findet sich in Oxford, die von den geneigten Sonnenuhren handelt und zahlreiche Tafeln aufweist. Leider verbot die derzeitige deutsche Geldentwertung Photos der ziemlich umfangreichen Abhandlung anfertigen zu lassen. Über andere gnomonische Handschriften der Araber findet man noch mehrere Angaben in Suters schon genanntem Buch, und auch über die Qibla gibt es verschiedene selbständige Monographien, von denen ich einigen Gebrauch machte (siehe Anhang).

*) Kūnīy al-Marrākuṣī genannt.

I. KAPITEL

DER GNOMON / Schattenmesser, Schattenwerfer

Er heißt *miqjās* (eigentlich: Maß, Betrag), wenn er eine Einteilung besitzt, die gleichzeitig auch das Schattenmaß ist ¹⁾. Der Name *ṣaḥṣ* scheint sich mehr auf einen Schattenwerfer als Licht verdunkelnden Körper zu beziehen, wenn er nicht ohne Unterschied mit *miqjās* gebraucht wird. Auch die Bezeichnung *ṣai'* = Gegenstand kommt vor (so bei Ibn Yūnus, *Hākimī*. Tafeln, Kapitel XI). Die älteste Einteilung ist die in 12 Finger (*aṣābi'*). Sie stammt von den Indern her. Die Finger sind nebeneinander liegend gedacht. 24 Finger bilden eine schwarze Elle (= rund 0,50 m). Diese Einteilung ist neben der in 60 Teile (*aḡzā'*) die meist gebrauchte (Zwölfer- und Sechziger-Gnomon). Daneben kommt noch die Einteilung in 7, $6\frac{2}{3}$ und $6\frac{1}{2}$ Füße (*aqdām*) vor ²⁾. Al-Birūnī sagt in seiner Schrift über die Anwendung des Astrolabs über diese letzte Einteilung: "... Dies ist von der Gestalt des Menschen hergenommen, die $6\frac{1}{2}$ Fuß beträgt. Diese Einteilung ist nicht notwendig, sondern praktisch ³⁾." Da $9 \times 6\frac{2}{3} = 60$ ist, so ist $6\frac{2}{3}$ auch eine geeignete Zahl zur Verwandlung in den Sechziger-Schatten. Die Form des *miqjās* war konisch ⁴⁾ und spitz auslaufend ⁵⁾ oder »zylindrisch und am Ende spitz wie ein Kegel« ⁶⁾.

Schon die Chinesen erhielten mittels einer Durchlöcherung des 8 Fuß hohen Bambusstabes (Gnomons) ein viel schärferes (Licht) Bildchen, als es durch den verwachsenen Endschaten desselben möglich ist ⁷⁾. Bei L. A. Sédillot liest man jedoch: »Ce furent les Arabes qui se servirent les premiers du gnomon à trou, comme nous le démontrerons plus loin ⁸⁾.« Den Nachweis für diese Behauptung sucht man jedoch bei Sédillot vergeblich, es müsste denn sein, dass er sich auf folgende Stelle bezieht ⁹⁾: »... Le plus illustre de ces savants, Nassir-Eddin-Thousi, auteur des Tables ilkaniennes, encouragé par les bienfaits de son nouveau souverain, fit élever l'observatoire de Méragah ¹⁰⁾, rassembla soigneusement les mss. épars dans le Khorassan, en Syrie, à Bagdad et à Mossul, et s'attacha à perfectionner les instruments dont il devait se servir pour ses observations. Un trou, pratiqué sur la coupole même de l'édifice, permettait de connaître par la projection des rayons du soleil, les degrés et les minutes de son mouvement diurne, sa hauteur dans les diverses saisons de l'année et la succession des heures. C'était une nouvelle application du gnomon à trou employé par les Arabes dès le X^e siècle.«

¹⁾ Bei den Griechen wurde der Schatten durch Abschreiten (*σκιζω*) mit den eigenen Füßen gemessen, weshalb er *σκιζόμετρον* hieß.

²⁾ al-Battānī, sive Albattēnī *Opus astronomicum*, v. C. A. Nallino I, Milano 1903, S. 182.

³⁾ Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften XVIII, von E. Wiedemann, Erlangen 1909, S. 49.

⁴⁾ In centro circuli stilum cupreum vel ferreum, rotundum tornatum et acuminatum fige. (*Opus astr.* I, S. 136).

⁵⁾ *miqjās muḥaddid* = spitz auslaufender Gnomon, heißt es in der Handschr. 286*, Bl. 105^b der Ambrosiana zu Mailand.

⁶⁾ In dem Werk: *Kitāb al-taḥfih wa'l tanqīm* (Buch der Erklärung und der Sterndeuterei) des al-Birūnī (vergl. E. Wiedemann a. a. O., S. 30).

⁷⁾ Tschou-pei (Gnomon im Kreise). *Journal asiatique* 1841, S. 605.

⁸⁾ *Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes*, Paris 1841, S. 8, 12 u. 17.

⁹⁾ *Histoire des Arabes II*, Paris 1877 (2. Aufl. v. Gust. Dugan), S. 15 u. 36.

¹⁰⁾ Über die treffliche Ausstattung des Observatoriums zu Marāğa (d. i. Ort, wo sich Pferde wälzen) vgl. die interessante Schrift von A. Jourdain: *Mémoire sur l'observatoire de Méragah*, Paris 1810 (64 Seiten; vergl. besonders S. 15).

Allein vom eigentlichen Lochgnomon kann man danach bei den Arabern kaum sprechen, und auch dieser »sphärische Lochgnomon« ist nicht ihre Erfindung, sondern hat antike Vorbilder im *Hercules horarius*¹⁾, der in Ravenna stand, in dem etwa 1840 in Rom erworbenen, heute dem Berliner Museum angehörigen Lochgnomon des Aristarch und einem ähnlichen Exemplar aus Aquileia²⁾, wenn schon die Auffangfläche bei allen dreien sphärisch ist.

Besonderen Wert legten die arabischen Astronomen darauf, dass die Schattenfläche genau wagerecht oder senkrecht war und der Gnomon möglichst rechtwinklig zu ihr stand. Einzelheiten in dieser Hinsicht findet man bei Ibn Yûnus (Mskr. Leiden 143, S. 239). Der Autor führt folgendes aus: »Ich aber sage — doch es ist Gott, der zum Rechten verhilft — dass, wer den Schatten messen will, größte Sorgfalt auf den Gnomon, die Auffangfläche und die Vorrichtung, mit der er letztere nivelliert, verwenden muss. Dasselbe ist beim Nivellieren der Fläche selbst nötig, und er darf die Geduld nicht verlieren, ehe er nicht sicher ist, dass er sein Ziel erreicht hat. Die beste Auffangfläche für den Schatten ist aber eine weiße, fleckenlose Marmortafel. Du musst auch wissen, dass, wenn du auf die Genauigkeit dieser Vorrichtungen wenig Gewicht legst, die dadurch bedingten Fehler groß werden, dass sie aber klein sind, wenn du nichts vernachlässigst. Hat man die Marmortafel nivelliert, so muss man sie mit Gips befestigen, denn dieser ist am besten geeignet, sie fest an ihrer Stelle zu halten. Du musst sie auf dem Boden auf einer harten Stelle nivellieren aber nicht an einer erhabenen (?) Stelle und nicht, wenn sie sich oberhalb einer Fläche befindet (auf der sie nicht fest aufliegt), denn darin läge eine Nachlässigkeit. Eine solche (weniger zweckmäßige) Anordnung trifft man nur, wenn es die Umstände unbedingt erfordern, oder doch nur für eine kurze Zeit, da in diesem Fall die Fläche nur eine kurze Zeit ihre horizontale Lage beibehält.«

»Man kann sich aber auf den nicht verlassen, der keine Übung im Nivellieren usw. hat, und auf das, was einer zum erstenmal macht, denn die stetige Beschäftigung mit einer Sache ist die Grundlage für eine Schulung.«

»Dass der aufgestellte Gnomon auf einer horizontalen Fläche senkrecht steht, erkennt man daran, dass beim ‚Vorwärts- und Rückwärtsgehen‘ (muqbil wa mudbir³⁾) der Gnomon seinen Schatten auf zwei benachbarte Punkte der Auffangfläche wirft, die gerade nur soweit voneinander absteigen, als der Fortbewegung der Sonne in der Zeit entspricht, während deren man den Gnomon gedreht hat⁴⁾. Unter dem Ausdruck ‚Vorwärts- und Rückwärtsgehen‘ verstehe ich (Ibn Yûnus) das Folgende: Der Gnomon wird gerade aufgestellt, dabei wendet er der Sonnenkugel seine Rückfläche zu. Den Mittelpunkt des Gnomons bringt man auf eine Marke auf der Auffangfläche. Dann macht man am Ende seines Schattens ein Zeichen. Dann dreht man den Gnomon im Kreis, dabei bleibt sein Mittelpunkt eben die erste Marke, bis seine Vorderfläche nach der Sonne zu gerichtet ist. Dann sieht man zu, wohin die Spitze des Schattens fällt.«

»Ob der Gnomon senkrecht steht, prüft man auch in der Weise, dass man auf einer ebenen, vollkommen gleichmäßigen Fläche einen Kreis beschreibt, in dessen Mittelpunkt man genau die Mitte des Gnomons stellt. Dann setzt man den einen Fuß eines Zirkels genau auf den Umfang jenes Kreises und öffnet den Zirkel soweit, bis der andere Fuß genau

¹⁾ Vergl. den trefflichen Artikel: »Horologium« von A. Rehm in der Real-Encyclop. v. Pauly-Wissowa VIII, S. 2426.

²⁾ Mitt. d. K. K. Zentralkommission in Wien 1880, S. 4 ff.

³⁾ Unter muqbilân wa mudbirân sind sowohl drehende wie verschiebende Bewegungen verstanden. Auch bei der Drehung nähert sich ein Teil des gedrehten Körpers, während sich ein anderer entfernt.

⁴⁾ Der Gnomon muss einen Fuß haben oder mit einem Zapfen drehbar in ein Loch in der Auffangfläche eingesetzt sein. Die hier beschriebenen Gnomone können nicht sehr groß sein, da man den Abstand ihres oberen Endes von einem Kreis auf der Auffangfläche mit einem Zirkel abgreifen kann (s. w. u.).

bis zur höchsten Stelle des Gnomons reicht. Dies wird möglichst genau ausgeführt. Bei unveränderter Öffnung wird dann der Zirkel an verschiedene Stellen dieses Kreises gebracht und genau betrachtet. Fällt stets sein zweiter Fuß in genau gleicher Weise auf die höchste Stelle des Gnomons, so wissen wir, dass dieser genau senkrecht steht. Ist ersteres aber nicht der Fall, so wissen wir, dass die Aufstellung des Gnomons eine fehlerhafte ist. Das erste (Verfahren) ist aber feiner als dieses (zweite).«

»Man kann auch in dem Gnomon selbst einen Spalt und einen ‚Faden‘ anbringen und erkennt mittels dieser beiden, dass der Gnomon senkrecht steht¹⁾.«

»Die Genauigkeit des Nivellierinstrumentes lernt man durch ‚Vor- und Rückwärtsgehen‘ kennen. Am sichersten verfährt man so, dass man die Lagen der beiden Füße ungeändert lässt, so dass (beim Verschieben) der eine an die Stelle des anderen gelangt (sie also ihre Lage vertauschen²⁾).«

»Die Genauigkeit eines Lineals³⁾ prüft man mittels eines Haares. Dazu richtet man zunächst das Lineal mit Feile und Hobel sorgfältig her und prüft möglichst genau, ob es richtig ist. Dann nimmt man ein möglichst gleichmäßiges Haar⁴⁾. Man legt es auf die abgehobelte Seite und fasst es mit beiden Händen, während es an der Seite des Lineals anliegt. Dann hebt man es ganz allmählich von einer der beiden Seiten (einem der beiden Enden) des Lineals her ab und sieht zu, ob es sich (gleichmäßig) vom Anfang bis zum Ende des Lineals löst. Dann ist das Lineal richtig; haftet aber eine Stelle (an einem Buckel oder einer Scharte) an und löst sich eine andere los, so sind Fehler vorhanden, und man muss erneut an seine Bearbeitung gehen.«

»Man kann auch untersuchen, ob drei Lineale richtig sind. Dazu legt man je eines von zweien auf das andere (und sieht zu, ob sie genau aufeinander passen), dann kippt man den oberen Teil des einen von ihnen um und legt das Lineal mit dem unteren Teil des anderen zusammen. Und falls alle drei in dieser Weise richtig gemacht sind, so sind die drei richtig, wenn Gott will.«

»Nachdem dieser Abschnitt vollendet ist, will ich das behandeln, was einem von den Gelehrten zustieß, als er seine Messungen auf einer fehlerhaften Platte ausführte, auf der er den Schatten maß, ohne ihre Fehlerhaftigkeit zu erkennen⁵⁾. Ob eine Platte richtig ist, wird mit Hilfe von Linealen untersucht, deren Richtigkeit selbst genau geprüft ist. Nachdem dies geschehen ist, stellt der Messende seine Messungen an, nachdem er sich immer und immer wieder geübt hat. Hiernach kann er auf das, was er gefunden hat, stolz sein, sonst täuscht er sich mit leeren Hoffnungen.«

¹⁾ Unter diesem Faden ist wohl ein Senkel zu verstehen. Etwas w. u. wird auch in der Handschrift bei Beschreibung eines anderen Instruments von einem Faden geschrieben, an den unten ein kleines Gewicht gehängt ist und der als Senkel (ṣāqil) dient. Es geht also die hier geschilderte Prüfung wohl so vorstatten, dass man in dem Gnomon einen Längsspalt anbringt, in dem man den Senkel aufhängt. Es wäre also ein ähnliches Verfahren, wie es heute noch vielfach bei Wagen usw. üblich ist.

²⁾ Das Nivellierinstrument hat offenbar zwei Füße. Während in einer Lage ein Fehler des Nivellierinstrumentes durch entgegengesetzte gleichgroße Neigung der Platte kompensiert sein kann, addieren sich bei entgegengesetzter Lage die Fehler. Erst, wenn in beiden Lagen das Instrument einspielt, ist das Instrument richtig und die Linie, in der es aufgestellt ist, horizontal. Dass die Fläche selbst horizontal ist, ergibt sich erst, wenn das Instrument über zwei Linien (gewöhnlich wird man zwei zueinander senkrechte wählen) einspielt.

³⁾ Die folgenden Erläuterungen haben unmittelbar nichts mit dem Gnomon zu tun.

⁴⁾ Hierzu wurden wohl die bekanntlich sehr langen Schweifhaare der arabischen Pferde verwendet.

⁵⁾ Es war Abū 'l-Farāğ, der in al-Qarāfa (Süd-Kairo) eine Vertikalsonnenuhr fehlerhaft aufstellte und dadurch für die geographische Breite Kairo einen falschen Wert erhielt. (Vergl. hierzu K. Schøy: Über eine arabische Methode, die geographische Breite aus der Höhe der Sonne im r. Vertikal [=Höhe ohne Azimut] zu bestimmen. Ann. d. Hydrographie u. maritim. Meteorologie, 1921, S. 128).

II. KAPITEL

DIE SCHATTENFLÄCHE DER EBENEN UHREN

Sie hieß *ru hāma*, wenn die Platte aus Marmor war¹⁾; sonst *sāḥ* (Fläche); auch die Bezeichnung *lauḥ* (Tafel von Holz, Stein) kommt vor, wie man aus dieser Abhandlung ersehen wird. Die horizontale Fläche hieß *al-basīṭa* (die ausgebreitete), die senkrechte *al-qā'ima* (die aufrechte). Und man unterschied ferner *al-qā'ima 'alā ḥaṭṭ niṣf an-nahār* und *al-qā'ima 'alā ḥaṭṭ al-mašriq w'al-mağrib*, d. i. die senkrecht über der Nordsüd- und der Ostwestlinie aufgerichtete Fläche, während der deklinierende Vertikal *al-munḥarif* (der abweichende) hieß. Ein geneigter Plan hieß *as-sāḥ al-mail*.

Die Gestalt der ebenen Schattenfläche war ein Rechteck von beliebigen Abmessungen, jedoch so, dass man gerne die Breite etwa $\frac{2}{3}$ der Länge wählte²⁾.

Besonderen Wert legte man, wie wir bereits im vorigen Kapitel erfuhren, auf eine glatte (sehr ausgeglichene) Fläche und vor allem darauf, dass sie genau parallel oder senkrecht zum Horizont war. Zur Erfüllung dieser Forderung gab es mehrere Verfahren.

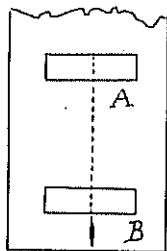


Abb. 1

Öfters wurde — besonders bei der Konstruktion des indischen Kreises³⁾ (*dā'ira hindija*) — die Fläche mit Wasser begossen und zuge- sehen, ob es sich nach allen Seiten gleichmäßig verteilte, oder man nahm ein gleichseitiges Dreieck, bestimmte die Mitte seiner Basis, ließ von der Spitze ein Bleilot herabhängen, das genau auf die Basismitte ging, und setzte das Dreieck auf der Fläche allerorts auf: sie war wagerecht, wenn das Lot immer nach der Mitte der Basis wies. So lehrt es u. a. auch *Ulāğ Beg*⁴⁾.

Einige andere ähnliche Methoden über das Nivellieren beschreibt

E. Wiedemann⁵⁾. Es sei hiernach noch die folgende angeführt:

»Zur Bestimmung der Horizontalität von ebenen Flächen dient al-Chāzini (*Journ. of the American Orient. Soc.* Bd. 6, S. 105) eine Pyramide mit einer gleichseitigen dreieckigen Basis. Die Pyramide ist hohl und durchsichtig. Von ihrer Spitze hängt ein Faden herab, an dessen Ende ein schwerer Punkt sich befindet. Die Basis wird auf die zu nivellierende Fläche gesetzt und über sie hinbewegt; da wo sie geneigt ist, weicht der Punkt von dem Mittelpunkt der Basis ab.«

Eine noch kompliziertere Wage für diesen Zweck wird von al-Marrākuṣi erläutert. Sie hat zwei gleichseitige Dreiecke als Füße⁶⁾.

Um ferner zu erkennen, ob eine Ebene senkrecht steht oder nicht, befestigt man nach al-Marrākuṣi zwei kleine Latten, A und B (Abb. 1) oder rechteckige Prismen, deren entsprechende Seiten gleich sind, am oberen Ende dieser Ebene und ein wenig tiefer, so dass sie einander entsprechen. Von der oberen lässt man ein Lot herabhängen, das an der unteren vorbeigeht. Berührt der Faden die Latte B, ohne sich aber an sie anzulegen, so ist die Ebene vertikal, sonst nicht (Prinzip des Senkbleis).

¹⁾ *Opus astronomicum* I, S. 135.

²⁾ *Opus astronomicum* I, S. 135.

³⁾ Vergl. hierzu: E. Wiedemann: Über den indischen Kreis (nach al-Bīrūnī: *Kitāb al-taḥfīf*, *Mit. z. Gesch. d. Medizin u. d. Naturwiss.* X, 1912, S. 252—35).

⁴⁾ *Prolegomènes des Tables astronomiques d'Ouloug Beg* (herausgeg. v. L. A. Sédillot) Paris 1853, S. 111.

⁵⁾ *Beiträge usw.* X (1906), S. 316 ff. und *Beiträge XVII* (1909), S. 29 ff.

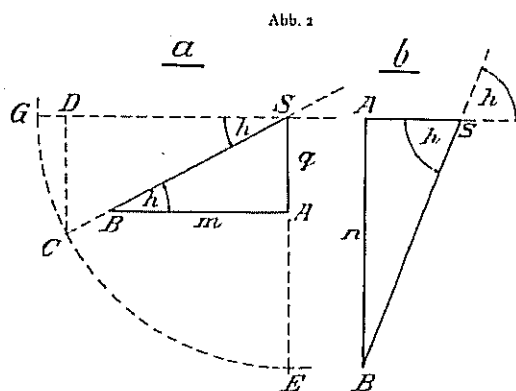
⁶⁾ *Traité des instruments astronomiques des Arabes, composé au XIII^e siècle par Aboul Hhassan Ali, de Maroc.* (par J. J. Sédillot), Paris 1834, S. 376 und Abb. 17 (gleich unserer Abb. 1).

III. KAPITEL ÜBER DEN SCHATTEN UND DIE SCHATTENTAFELN

Der Schatten wird von Ibn Yûnus¹⁾ also definiert: »Der Schatten, den die Männer der Wissenschaft meinen, ist der Teil des Sonnenscheins, den ein Gegenstand (šahs), der senkrecht auf einer geradlinigen, dem Horizont parallelen Fläche steht, verdeckt. . . . Der Schatten heißt vor dem zawâl (zawâl = Mittag) zill, nach dem zawâl aber fai', so wird in der guten arabischen Sprache gesagt.« Der Horizontalschatten heißt zill basîṭ oder zill mabsûṭ (von basat = ausbreiten), auch zill ṭâni (zweiter Schatten), und zill mustawî (ebener Schatten), lateinisch umbra recta. Der auf senkrechte Flächen geworfene Schatten wird zill mankûs oder zill ma'kûs genannt (von nakas und 'akas = umwenden, das oberste zu unterst kehren), auch zill qâ'im (von qâm = aufgerichtet sein, stehen bleiben), ebenso zill awwal (erster Schatten) findet sich als Bezeichnung dafür; lateinisch umbra erecta²⁾.

Aber der Schatten, der durch Beobachtung gewonnen wird, gibt die Höhe des oberen Sonnenrandes, nicht des Sonnenmittelpunktes. Dies hat zuerst Ibn Yûnus deutlich gemacht³⁾. Refraktion und Halbschatten finden keine Erwähnung, statt dessen die Beeinflussung der Sonnenhöhe durch die Parallaxe (ihṭilâf al-manẓar), die in Wahrheit natürlich völlig verschwindend ist. Vom Schatten, der durch Beobachtung gefunden wird, ist der durch die Rechnung ermittelte zu unterscheiden. Ibn Yûnus sagt über letzteren wörtlich folgendes¹⁾: »Stelle den Sinus und den Kosinus der Höhe fest und multipliziere den Kosinus derselben mit der Länge des Gnomons; das Produkt teile durch den Sinus der Sonnenhöhe: das Ergebnis ist der Schatten; oder du teilst den Kosinus der Höhe durch deren Sinus und multiplizierst den Quotienten mit der Länge des Gnomons: das Ergebnis ist wiederum der verlangte Schatten; oder endlich du teilst die Gnomonlänge durch den Sinus der Höhe und multiplizierst den Quotienten mit dem Kosinus der Höhe, und abermals ist das Resultat der Schatten. Doch wenn der Gnomon quer gerichtet ist, so ist das umgekehrt: dann mußt du den Sinus der Höhe mit der Länge des Gnomons multiplizieren und das Produkt durch den Kosinus der Höhe dividieren; das Ergebnis ist alsdann der gewünschte Schatten usw.«

Zum Verständnis des Vorstehenden sei auf die Abb. 2a und b verwiesen. In Abb. 2a sei $AS = q$ der vertikale Gnomon und $AB = m$ sein Horizontalschatten bei der Sonnenhöhe h . In Abbildung 2b ist $AS = q$ der horizontal oder quer gerichtete Gnomon und $AB = n$ sein Vertikalschatten. Um S ist in Abbildung 2a der Viertelkreis EG mit dem Radius $SE = 60^\circ = \sinus\ totus$ geschlagen. DC ist eine halbe Sehne und nach den Lehren der arabischen Trigonometrie der $\sinus$ (gaib) des Winkels h . Und der Kosinus



¹⁾ Mskr. 143 Leiden, S. 238.

²⁾ Opus astronomicum I, S. 182.

³⁾ Mskr. 143 Leiden, S. 242.

desselben Winkels h (ḡaib tamām) ist der Sinus seiner Ergänzung zu 90° , d. h. $DS = \sin(90^\circ - h)$. Aus den zwei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken ABS und CDS folgt die Proportion:

$$AB:q = DS:DC, \text{ d. i.}$$

$$AB = q \cdot \frac{\cos h}{\sin h} = m \dots \dots \dots \text{I)}$$

Ganz ebenso folgt für den Vertikalschatten $AB = n$ aus Abbildung 2b:

$$n = q \cdot \frac{\sin h}{\cos h} \dots \dots \dots \text{II)}$$

Mittels der Sinustafeln ($\cos h = \sin h(90^\circ - h)$) erstellten die arabischen Astronomen ihre Schattentabellen (Werte für m und n), die also mit unseren heutigen Kotangens- und Tangens-tafeln zu vergleichen sind. Die arabische Bezeichnung dafür ist stets ḡedwal az-zill = Schattentafel, denn die Araber haben die Werte für m und n fast immer als Schatten in der Rechnung verwendet, nur vereinzelte Autoren erhoben sich zu ihrer Auffassung als reine trigonometrische Funktionen¹⁾.

Dies erkennt man auch schon daraus, dass die Araber die umgekehrte Aufgabe: Die Sonnenhöhe aus dem Schatten zu ermitteln, nicht einfach durch Umkehrung von I)

oder II) zu lösen verstanden; d. h. dass sie nicht $\frac{m}{q} = \cotg h$ oder $\frac{n}{q} = \tang h$

zu berechnen vermochten²⁾. Vielmehr lehrt z. B. Ibn Yūnus³⁾ in diesem Falle folgendes: »Quadrierte die Schattenlänge und ebenso die Länge des Gnomons und addiere die Quadrate. Aus der Summe ziehe die Wurzel; das ist der qutr az-zill, d. h. Durchmesser des Schattens. Darauf multipliziere die Gnomonlänge mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Durchmesser des Schattens: das Ergebnis ist der Sinus der Sonnenhöhe, und es ist klar, dass der Schatten nicht die Höhe des Sonnenmittelpunktes gibt usw.« Diese geben vielmehr die mit Instrumenten (Quadrant, Astrolab) herausgebrachten Höhen. Deshalb hat man der auf diese Weise gefundenen Sonnenhöhe noch den $\frac{1}{2}$ Durchmesser der Sonnenscheibe hinzuzufügen, um den zur augenblicklichen Beobachtung gehörigen Schatten zu finden. Ähnliches lehren al-Ḥwārizmī⁴⁾ und al-Battānī⁵⁾. Die Umsetzung des Textes in eine Formel führt zu

$$\sin h = \frac{60^p \cdot q}{\sqrt{m^2 + q^2}}; \text{ nach dem letzten Autor hat man noch:}$$

$$\sin(90 - h) = \frac{60^p \cdot q}{\sqrt{n^2 + q^2}}.$$

Hingegen findet man zur Bestimmung der Länge des miqjās aus Schatten und Sonnenhöhe, wie zu erwarten, eine Vorschrift, die auf die Formel

$$q = m \cdot \frac{\sin h}{\cos h} \text{ führt } 6).$$

¹⁾ Anders, wenn $q = 1$ gesetzt wurde. Da bei al-Bīrūnī q stets = 1 ist, so lehrt er auch tatsächlich die Berechnung von h aus der Schattenlänge, ja er verfeinert das Ergebnis noch durch eine Interpolationsrechnung, bei der das 2. Differenzglied zweier benachbarten Schatten auftritt. (al-qānūn al-maṣ'ūdī, Berlin, S. 77^b.) Sonst wird die Kenntnis der Sonnenhöhe aus dem Schatten mittels der Tafel von den arabischen Astronomen nur ganz flüchtig erwähnt.

²⁾ Mskr. 143 Leiden, S. 244.

³⁾ Die astronomischen Tafeln des Muḥammad ibn Mūsā al-Khwarizmi, herausgegeben v. H. Suter, Kopenhagen 1914, S. 77.

⁴⁾ Opus astron. I, S. 22.

⁵⁾ Mskr. 143 Leiden, S. 253.

Die Verwandlung des ersten Schattens in den zweiten und umgekehrt lehrt al-Marrākušī¹⁾. Es ist der Horizontalschatten (nach moderner Schreibweise)

$$m = q \cdot \cotg h,$$

und der Vertikalschatten $n = q \cdot \tang h = \frac{q}{\cotg h} = \frac{q}{\frac{m}{q}} = \frac{q^2}{m}$, d. h.

$$\text{Vertikalschatten } n = \frac{(\text{Länge des Gnomons})^2}{\text{Horizontalschatten}},$$

und ebenso ist

$$\text{Horizontalschatten } m = \frac{(\text{Länge des Gnomons})^2}{\text{Vertikalschatten}}.$$

Die früheste Schattentafel ist anscheinend die des al-Ĥwārizmī²⁾ († 830). Sie läuft nach ganzen Graden der Sonnenhöhe fort, ebenso wie diejenige al-Battānīs³⁾. Beide Tafeln sind mit dem Wert $q = 12$ Finger berechnet. Die Schattentafel des Abū'l-Wafā' (940 bis 998)⁴⁾ existiert nicht mehr. Sie, wie auch seine Sinustafel, gingen von 15° zu $15'$ bis $89^\circ 45'$ fort⁵⁾ ($q = 60$ partes, arabisch: aḡzā'). So ist auch diejenige al-Marrākušī's aufgebaut⁶⁾ ($q = 12$ Finger). Die genaueste Schattentafel scheint wohl von Ibn Yūnus zu stammen; denn sie schreitet bezüglich der Sonnenhöhe h von Minute zu Minute fort⁷⁾. Auch die Astronomischen Tafeln des Ulūğ Beg geben bis zu einer Sonnenhöhe von 45° die Vertikalschatten von Minute zu Minute, und von 45° bis 90° von $5'$ zu $5'$. Diese Tangenswerte sind dabei bis zur Quarte genau⁸⁾.

Ich lasse die Schattentafel des Ibn Yūnus folgen, die sich im Leidener Manuskript Nr. 143 findet (S. 247—254). Sie ist mit $q = 60$ Teilen (aḡzā') berechnet und gibt die Schatten in partes, minutae (') und secundae (") von $10'$ zu $10'$ der Sonnenhöhe. Sie ist von mir zum erstenmal veröffentlicht. Ich hoffe die richtige Lesung sämtlicher Zahlen (auch in den Sekunden) verbürgen zu können, obwohl der Kopist recht häufig die diakritischen Punkte nicht setzte. Eine zweite darauf folgende Tafel der Horizontalschatten schreitet von Grad zu Grad der Sonnenhöhe fort. Ihr liegt die Gnomonlänge $q = 12$ Finger zugrunde; ich übergehe sie. Doch umfasst auch sie die Sekunden der Schattenlängen, entgegen der Tafel al-Ĥwārizmīs, al-Battānīs, al-Marrākušīs u. a.

¹⁾ a. a. O., S. 155.

²⁾ Die astronomischen Tafeln usw., S. 174, Taf. 60.

³⁾ Opus astronomicum II, S. 60.

⁴⁾ Carra de Vaux gibt 959 als Geburtsjahr des bekannten Mathematikers an. (Journal asiatique 1892, S. 411.)

⁵⁾ Delambre a. a. O., S. 158.

⁶⁾ a. a. O., S. 159—165.

⁷⁾ Gesehen habe ich diese Schattentafel nicht. Sie befindet sich im Escorial als Mskr. Nr. CMXIX (= 924 modern). Die Kenntnis des Titels verdanke ich der freundlichen Vermittlung des Herrn Dr. C. van Arensdonk in Leiden, der seinerseits bei Herrn Professor Asin-Palacios in Madrid anfragte. Herr Asin-Palacios hatte die Güte, genannte Schrift eingehend zu sehen. Nach seiner Mitteilung besteht die Schrift nur aus Tabellen und hat den Titel: 'Azimut- und Schattenbuch(tafel) von Ibn Yūnus gelöst (ausgeführt) von Minute zu Minute.' (Herr Nemésio Morata, Escorial, teilt mir freundlichst mit, dass genannte Handschrift nur ein Bruchstück ist und leider die Schattentafel nicht enthält.)

⁸⁾ Die Schattentafel des Ulūğ Beg habe ich (bis 45°) aus dem persischen Manuskript 280 (Berlin) ausgeschrieben. Sie liegt bei mir als Reinschrift.

TAFEL DER HORIZONTALSCHATTEN

Höhe	Schatten			Höhe	Schatten			Höhe	Schatten		
o ' "	Teile	'	"	o ' "	Teile	'	"	o ' "	Teile	'	"
10	20636	50	50	6 10	555	18	58	12 10	278	17	46
20	10310	4	18	20	540	36	7	20	274	25	11
30	6875	4	18	30	526	36	44	30	270	38	33
40	5156	49	28	40	513	19	59	40	266	17	58
50	4125	38	7	50	500	41	56	50	263	22	52
I 0	3437	8	26	7 0	488	39	24	13 0	259	53	27
10	2946	10	48	10	477	41	8	10	256	29	6
20	2577	53	56	20	466	12	50	20	253	9	38
30	2291	23	50	30	455	44	22	30	249	55	9
40	2062	10	5	40	445	43	46	40	246	45	11
50	1874	34	44	50	436	7	24	50	243	39	55
2 0	1718	14	18	8 0	426	55	40	14 0	240	38	51
10	1585	56	13	10	418	6	4	10	237	41	50
20	1472	30	39	20	409	37	10	20	234	48	58
30	1374	6	10	30	401	27	59	30	232	0	12
40	1288	17	0	40	393	38	7	40	229	15	2
50	1212	20	26	50	386	5	31	50	226	33	23
3 0	1144	49	28	9 0	378	49	26	15 0	223	55	22
10	1084	29	44	10	371	49	26	10	221	20	36
20	1030	11	8	20	365	4	12	20	218	49	18
30	980	57	9	30	358	32	57	30	216	21	17
40	936	15	32	40	352	14	47	40	213	55	59
50	895	26	17	50	346	9	48	50	211	34	2
4 0	858	3	48	10 0	340	16	34	16 0	209	14	39
10	823	36	37	10	334	34	43	10	206	58	18
20	791	48	3	20	329	4	12	20	204	44	26
30	762	22	45	30	323	43	48	30	202	33	27
40	735	3	1	40	318	33	41	40	200	24	57
50	709	33	22	50	313	32	15	50	198	18	48
5 0	685	47	24	11 0	308	40	14	17 0	196	15	8
10	663	34	53	10	303	57	11	10	194	13	43
20	642	43	14	20	299	21	49	20	192	14	37
30	623	6	56	30	294	54	47	30	190	17	50
40	604	40	52	40	290	34	51	40	188	23	4
50	587	17	26	50	286	22	22	50	186	30	19
6 0	570	51	59	12 0	282	16	39	18 0	184	39	35

Höhe				Schatten				Höhe				Schatten				Höhe				Schatten			
o		Teile		'		"		o		Teile		'		"		o		Teile		'		"	
18	10	182	50	57				24	10	133	42	48				30	10	103	13	42			
	20	181	4	7					20	132	40	43					20	102	32	28			
	30	179	19	14					30	131	39	28					30	101	51	36			
	40	177	36	13					40	130	38	58					40	101	11	8			
	50	175	54	52					50	129	39	12					50	100	31	5			
19	0	174	15	7				25	0	128	40	10				31	0	99	51	25			
	10	172	37	8					10	127	41	55					10	99	12	8			
	20	171	0	47					20	126	44	27					20	98	33	11			
	30	169	26	9					30	125	47	34					30	97	54	38			
	40	167	52	55					40	124	51	24					40	97	16	29			
	50	166	21	8					50	123	55	55					50	96	38	42			
20	0	164	50	59				26	0	123	1	8				32	0	96	1	10			
	10	163	22	11					10	122	6	57					10	95	24	6			
	20	161	54	40					20	121	13	23					20	94	47	16			
	30	160	28	36					30	120	20	28					30	94	10	52			
	40	159	3	54					40	119	28	10					40	93	34	46			
	50	157	40	27					50	118	36	29					50	92	58	56			
21	0	156	18	22				27	0	117	45	?				33	0	92	23	31			
	10	154	57	21					10	116	54	53					10	91	48	24			
	20	153	37	44					20	116	4	56					20	91	13	31			
	30	152	19	9					30	115	15	30					30	90	39	1			
	40	151	1	41					40	114	26	39					40	90	4	47			
	50	149	45	28					50	113	38	22					50	89	30	52			
22	0	148	30	20				28	0	112	50	37				34	0	88	57	12			
	10	147	16	16					10	112	3	23					10	88	23	53			
	20	146	3	10					20	111	16	37					20	87	50	49			
	30	144	51	8					30	110	30	25					30	87	18	1			
	40	143	40	9					40	109	44	38					40	86	45	33			
	50	142	30	10					50	108	59	22					50	86	13	18			
23	0	141	21	4				29	0	108	14	33				35	0	85	41	19			
	10	140	12	57					10	107	30	14					10	85	9	38			
	20	139	5	46					20	106	46	23					20	84	38	11			
	30	137	59	22					30	106	3	1					30	84	7	1			
	40	136	53	59					40	105	20	1					40	83	36	4			
	50	135	49	27					50	104	37	30					50	83	5	24			
24	0	134	45	45				30	0	103	55	23				36	0	82	34	18			

Höhe	Schatten			Höhe	Schatten			Höhe	Schatten		
o ' "	Teile	'	"	o ' "	Teile	'	"	o ' "	Teile	'	"
36 10	82	4	49	42 10	66	14	53	48 10	53	42	33
20	81	34	50	20	65	51	44	20	53	23	44
30	81	5	6	30	65	28	44	30	53	5	1
40	80	35	40	40	65	5	51	40	52	46	24
50	80	6	23	50	64	43	7	50	52	27	52
37 0	79	37	21	43 0	64	20	30	49 0	52	9	27
10	79	8	33	10	63	58	4	10	51	51	5
20	78	39	59	20	63	35	47	20	51	32	51
30	78	11	37	30	63	13	36	30	51	14	40
40	77	43	28	40	62	51	35	40	50	56	34
50	77	15	31	50	62	29	40	50	50	38	39
38 0	76	47	47	44 0	62	7	54	50 0	50	20	45
10	76	20	17	10	61	46	15	10	50	2	57
20	75	52	56	20	61	24	46	20	49	45	14
30	75	25	49	30	61	3	24	30	49	27	37
40	74	58	57	40	60	42	8	40	49	10	6
50	74	32	10	50	60	21	1	50	48	52	34
39 0	74	5	39	45 0	60	0	0	51 0	48	35	13
10	73	39	16	10	59	39	7	10	48	17	55
20	73	13	7	20	59	18	21	20	48	0	41
30	72	47	9	30	58	57	42	30	47	43	34
40	72	21	22	40	58	37	10	40	47	26	31
50	71	55	46	50	58	16	47	50	47	9	31
40 0	71	30	20	46 0	57	56	29	52 0	46	52	38
10	71	5	3	10	57	36	19	10	46	35	48
20	70	39	59	20	57	16	14	20	46	19	3
30	70	15	4	30	56	56	17	30	46	2	22
40	69	50	19	40	56	36	25	40	45	45	46
50	69	25	45	50	56	16	42	50	45	29	15
41 0	69	1	19	47 0	55	57	4	53 0	45	12	48
10	68	37	5	10	55	37	31	10	44	56	25
20	68	12	59	20	55	18	6	20	44	40	5
30	67	49	3	30	54	58	47	30	44	23	52
40	67	25	16	40	54	39	35	40	44	7	41
50	67	1	46	50	54	20	26	50	43	51	34
42 0	66	38	12	48 0	54	1	26	54 0	43	35	33

Höhe	Schatten			Höhe	Schatten			Höhe	Schatten		
o ' "	Teile	'	"	o ' "	Teile	'	"	o ' "	Teile	'	"
54 10	43	19	36	60 10	34	24	31	66 10	26	30	18
20	43	3	42	20	34	10	38	20	26	17	48
30	42	47	51	30	33	56	46	30	26	5	20
40	42	32	6	40	33	42	59	40	25	52	53
50	42	16	23	50	33	29	14	50	25	40	29
55 0	42	0	45	61 0	33	15	31	67 0	25	28	7
10	41	45	10	10	33	1	51	10	25	15	46
20	41	29	39	20	32	48	13	20	25	3	27
30	41	14	13	30	32	34	38	30	24	51	11
40	40	58	49	40	32	21	6	40	24	38	55
50	40	43	30	50	32	7	36	50	24	26	41
56 0	40	28	14	62 0	31	54	9	68 0	24	14	30
10	40	13	1	10	31	40	45	10	24	2	20
20	39	57	53	20	31	27	23	20	23	50	11
30	39	42	47	30	31	14	3	30	23	38	4
40	39	27	46	40	31	0	45	40	23	25	59
50	39	12	46	50	30	47	30	50	23	13	56
57 0	38	57	52	63 0	30	34	18	69 0	23	1	54
10	38	43	2	10	30	21	7	10	22	49	55
20	38	28	12	20	30	8	0	20	22	37	56
30	38	13	27	30	29	54	54	30	22	25	59
40	37	58	45	40	29	41	50	40	22	14	4
50	37	44	7	50	29	28	49	50	22	2	9
58 0	37	29	33	64 0	29	15	50	70 0	21	50	17
10	37	14	59	10	29	2	54	10	21	38	27
20	37	0	31	20	28	49	59	20	21	26	37
30	36	46	6	30	28	37	6	30	21	14	50
40	36	31	43	40	28	24	16	40	21	3	4
50	36	17	22	50	28	11	29	50	20	51	19
59 0	36	3	6	65 0	27	58	43	71 0	20	39	35
10	35	48	52	10	27	45	59	10	20	27	52
20	35	34	41	20	27	33	17	20	20	16	11
30	35	20	33	30	27	20	37	30	20	4	33
40	35	6	28	40	27	8	0	40	19	52	55
50	34	52	27	50	26	55	24	50	19	41	18
60 0	34	38	25	66 0	26	42	49	72 0	19	29	43

Höhe	Schatten			Höhe	Schatten			Höhe	Schatten		
o °	Teile	'	''	o °	Teile	'	''	o °	Teile	'	''
72 10	19	18	9	78 10	12	34	16	84 10	6	7	47
20	19	6	36	20	12	23	21	20	5	57	13
30	18	55	4	30	12	12	26	30	5	46	39
40	18	43	34	40	12	1	32	40	5	36	4
50	18	32	6	50	11	50	38	50	5	25	30
73 0	18	20	36	79 0	11	39	46	85 0	5	14	58
10	18	9	9	10	11	28	54	10	5	4	26
20	17	57	46	20	11	18	3	20	4	53	51
30	17	46	22	30	11	7	13	30	4	43	19
40	17	35	0	40	10	56	24	40	4	32	48
50	17	23	37	50	10	45	35	50	4	22	16
74 0	17	12	17	80 0	10	34	47	86 0	4	11	44
10	17	0	57	10	10	23	59	10	4	1	13
20	16	49	40	20	10	13	12	20	3	50	42
30	16	38	22	30	10	2	25	30	3	40	11
40	16	27	6	40	9	51	40	40	3	29	40
50	16	15	32	50	9	40	55	50	3	19	10
75 0	16	4	37	81 0	9	30	11	87 0	3	8	40
10	15	53	24	10	9	19	27	10	2	58	10
20	15	42	12	20	9	8	44	20	2	47	40
30	15	31	2	30	8	58	2	30	2	37	11
40	15	19	52	40	8	47	19	40	2	26	41
50	15	8	44	50	8	36	37	50	2	16	12
76 0	14	57	35	82 0	8	25	56	88 0	2	5	43
10	14	46	28	10	8	15	16	10	1	55	14
20	14	35	22	20	8	4	36	20	1	44	45
30	14	24	17	30	7	53	57	30	1	34	16
40	14	13	13	40	7	43	19	40	1	23	47
50	14	2	9	50	7	32	39	50	1	13	19
77 0	13	51	7	83 0	7	22	2	89 0	1	2	51
10	13	40	6	10	7	11	24	10	0	52	22
20	13	29	6	20	7	0	47	20	0	41	53
30	13	18	6	30	6	50	10	30	0	31	25
40	13	7	7	40	6	39	33	40	0	20	57
50	12	56	9	50	6	28	58	50	0	10	28
78 0	12	45	12	84 0	6	18	22	90 0	0	0	0

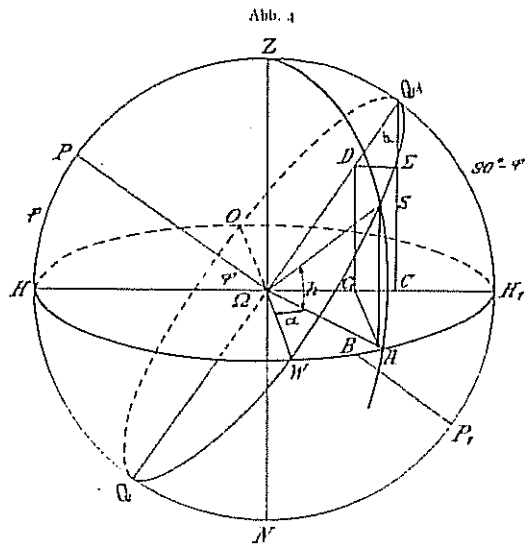
IV. KAPITEL

BERECHNUNG

DES AZIMUTS AUS DER SONNENHÖHE

Wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, ist der Schatten des Gnomons auf dem Zifferblatt einer Sonnenuhr durch Länge und Richtung vollkommen bestimmt. Während erstere von der Sonnenhöhe abhängt, liegt die Schattenrichtung stets in der Vertikalebene, die durch den augenblicklichen Sonnenort, das Zenit und den Nadir geht. In der arabischen Astronomie wird die Größe der Neigung dieser Ebene zur Ebene des Ostwestvertikals (erster Vertikal) *as-semt*, zu deutsch die Richtung genannt. Der Plural von *sem* heißt *simūt*, mit dem Artikel *as-simūt* (die Richtungen), oder mit Zusammenziehung nach spanischer und französischer Schreibweise Azimut. Ein solcher innerer Plural hat nach den Regeln der arabischen Grammatik das Adjektiv im Singular des Femininums bei sich. So war es möglich, dass der Astronomie unkundige Übersetzer arabischer Handschriften das Ganze für eine Singularform hielten, und das Wort Azimut wurde im Abendlande für Richtung genommen¹⁾.

Ist die geographische Breite φ eines Ortes, sowie die Deklination δ und die Höhe h der Sonne gegeben, so lässt sich daraus deren Azimut α ermitteln und damit zu der durch die Höhe bestimmten Schattenlänge auch die Schattenrichtung. Mit der Lösung dieser für die Gnomonik wichtigen Aufgabe haben sich die arabischen Astronomen mehr oder weniger eingehend beschäftigt. Die größte Ausführlichkeit treffen wir entschieden wiederum bei Ibn Yūnus an, und ich habe deshalb das betreffende Kapitel²⁾, das interessante Details enthält, in deutscher Sprache und mit Erläuterungen versehen, in den Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie (1920, S. 97—112) veröffentlicht³⁾. Hier möchte ich mich bezüglich der Bestimmung des Azimuts auf das Notwendigste beschränken. Unser Autor unterscheidet zwischen dessen Berechnung bei Beginn des Widders und der Wage ($\delta = 0^\circ$) und derjenigen für eine beliebige Sonnendeklination δ . Ich gebe erst einige Yūnusische Methoden für den Fall $\delta = 0^\circ$.



¹⁾ Vergl. den trefflichen Aufsatz v. G. W. S. Beigel: Bemerkungen üb. d. Gnomik d. Araber in den Fundgruben d. Orients (1809, S. 421), sowie auch C. A. Nallino: Etimologia araba e significato di «asub» e di «azimut» con una postilla su «almucantarati» (Estratto dalla «Rivista degli studi orientali» VIII, 1919, S. 389).

²⁾ Leidener Ms. Nr. 143, XX Kap., S. 359—372. «Über die Berechnung des Azimuts aus d. Höhe u. d. Höhe aus dem Azimut.»

³⁾ Auf die klaren Darlegungen, die man in dieser Beziehung bei al-Bīrūnī (al-qānūn al-mas'ūdī, Berlin, Fol. 97****) findet, werde ich in anderem Zusammenhange näher eingehen.

Der Autor sagt: »Wenn die Sonne im Anfang des Widders oder der Wage steht, und du willst jenes (d. h. das Azimut), so ziehe den Sinus der Höhe zur Beobachtungszeit vom Sinus der Meridianhöhe der Sonne ab, und was bleibt, das multipliziere mit dem Sinus der Ortsbreite und teile das Produkt durch den Kosinus der Breite des Ortes. Was herauskommt, das ziehe vom Kosinus der Meridianhöhe ab, multipliziere das Ergebnis mit dem Sinus totus und teile es durch den Kosinus der Höhe, und was sich alsdann ergibt, das bestimmt einen Bogen, nämlich das Azimut der Sonne für jene Höhe...«

Der Beweis für die Richtigkeit vorstehender Regel kann in folgender Weise erbracht werden: Es sei in beistehender Projektion der Himmelskugel (Abb. 4) HOH , W der Horizont, Z das Zenit, N der Nadir und QOQ , W der Himmelsäquator, der den Horizont bekanntlich in der Ostwestlinie (OW) schneidet. PP_1 ist die Weltachse, die zum Horizont unter dem Winkel φ = Ortsbreite oder Polhöhe geneigt ist. Zuzufolge der Annahme des Autors steht die Sonne im Äquator in S , und ihre augenblickliche Höhe ist $= \angle SOA = h$. Wir fällen jetzt zuerst das Lot SB vom Orte S der Sonne auf den Horizont und ziehen OB , das im Strahl OA liegen muss. Von B fällen wir auf die Nordsüdlinie HH_1 das Lot BC_1 , das parallel OW ist, weil dies als Ostwestrichtung, auf der Nordsüdlinie senkrecht steht. In C_1 errichten wir auf HH_1 das Lot C_1D , welches ganz in der Meridianebene (Ebene des Papiers) liegt. Da es vom Horizont bis zur Äquatorebene reicht, so ist $C_1D = BS$, und aus diesem Grunde ist BC_1DS ein Rechteck, folglich $DS = C_1A$. Zieht man noch $D\Sigma \perp Q_1C_1$, so ist auch $D\Sigma = CC_1$. Sei der Radius der Himmelskugel $OS = r$, so hat man jetzt nacheinander:

$$CQ_1 = r \cdot \cos \varphi; CD = C\Sigma = SB = r \cdot \sin h$$

$$Q_1\Sigma = CQ_1 - C\Sigma = r \cdot (\cos \varphi - \sin h).$$

Ferner

$$Q_1\Sigma = DQ_1 \cdot \cos \varphi; \text{ d. h. } DQ_1 = \frac{Q_1\Sigma}{\cos \varphi}$$

$$\Omega D = \Omega Q_1 - DQ_1$$

$$= r - r \cdot \frac{\cos \varphi - \sin h}{\cos \varphi} = r \cdot \left(1 - \frac{\cos \varphi - \sin h}{\cos \varphi}\right) \quad (I)$$

Es ist aber

$$\frac{\Omega C_1}{\Omega D} = \sin \varphi, \text{ folglich } \Omega C_1 = \Omega D \cdot \sin \varphi,$$

oder mit Hilfe von (I):

$$\Omega C_1 = \left(\sin \varphi - \frac{\cos \varphi - \sin h}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi\right) \cdot r. \quad (II)$$

Endlich liest man aus dem rechtwinkligen Dreieck ΩBC_1 für das Azimut α ab:

$$\sin \alpha = \frac{\Omega C_1}{\Omega B} = \frac{r \cdot \left(\sin \varphi - \frac{\cos \varphi - \sin h}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi\right)}{r \cdot \cos h}, \quad (III)$$

wenn man (II) berücksichtigt und beachtet, dass $\Omega B = \Omega S \cdot \cos h = r \cdot \cos h$ ist. (III) ist, wie man erkennt, der Ausdruck obigen Textes in einer trigonometrischen Formel.

Zu (III) ist noch eine Bemerkung zu machen: Da die Araber fast nur mit der Sinustabelle operierten, so mussten sie tunlichst jede Formel auf einen Sinus bringen. Außerdem ist in diesen Sinustafeln jeder Sinus mit dem Wert $r = 60^\circ = \text{sinus totus}$ multipliziert. In (III) wäre also mit r auf die linke Seite zu multiplizieren, da in der Tafel sich $r \cdot \sin \alpha$ findet.

Die folgende Lösung zeigt, wie weit der Autor in der Benutzung der Tangente und Kotangente zu gehen imstande war. Die Überschrift lautet: »Berechnung des Azimuts

aus der Tafel des Sechzigerschattens«. Es heißt dann ferner: »Und falls du die Kenntnis des Azimuts zu Beginn des Widders oder der Wage aus der Schattentafel willst, so nimm das, was gegenübersteht (bā'zā') dem Anfang des Widders in jener Breite, von der du das Azimut aus der Schattentafel berechnen willst, und wenn eine Interpolationsrechnung nötig ist, so führe sie aus. Was sich alsdann ergibt, das multipliziere mit dem Sinus totus. Das Produkt aber teile durch das, was der Schattenhöhe gegenübersteht. Das Ergebnis bestimmt den Bogen des Azimuts.«

Der Sinn dieser Methode ist leicht aufzuhellen: Wie man sieht, lässt sich die Formel (III) auch umschreiben in

$$r \cdot \sin \alpha = r \cdot \frac{\sin \varphi \cdot \sin h}{\cos \varphi \cos h} = r \cdot \cotg (90^\circ - \varphi) \cdot \tan h = r \cdot \frac{r \cdot \cotg (90^\circ - \varphi)}{r \cdot \cotg h}.$$

Die zwei Größen $r \cdot \cotg (90^\circ - \varphi)$ und $r \cdot \cotg h$ sind aber aus der Schattentafel herauszulesen. Zu Beginn des Widders ist die Mittagshöhe der Sonne $= 90^\circ - \varphi$, folglich die Schattenlänge eines Gnomons im Augenblick der Sonnenkulmination $= r \cdot \cotg (90^\circ - \varphi)$, wenn r die Länge (q) des Sechzigernomons vorstellt. $r \cdot \cotg h$ ist die Schattenlänge für die (beliebige) Sonnenhöhe h . Den Gradzahlen (Sonnenhöhen) steht aber in der Schattentafel die Schattenlänge gegenüber.

Bekanntlich rechneten die arabischen Astronomen die Zeit des Tages nach sog. temporalen oder Jahreszeiten-Stunden (as-sā'āt az-zamānija), d. h. sie teilten den Tagesbogen der Sonne stets in zwölf gleiche Teile ein und nannten einen solchen Teil Stunde. Deren Dauer war also mit der Jahreszeit veränderlich. Wir werden im nächsten Kapitel ausführlicher auf diesen Gegenstand eingehen. Hier sei aber erwähnt, dass die arabische Astronomie noch ein anderes Maß für die Tageszeit kennt, nämlich den dā'ir und darunter den seit Sonnenaufgang bereits verflossenen Teil des Tagesbogens der Sonne versteht. Mit Berücksichtigung des dā'ir lehrt Ibn Yūnus folgende Azimutbestimmung:

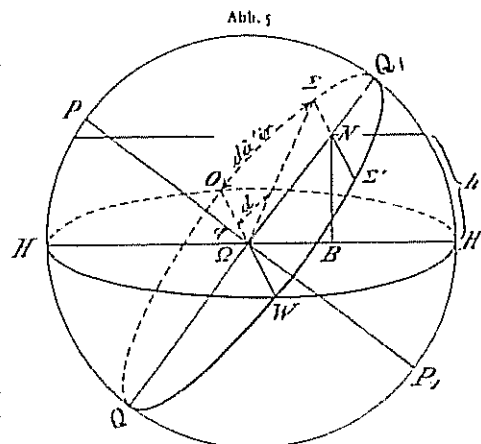
»Du multiplizierst den Sinus des dā'ir mit dem Sinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Sonnenhöhe; das Ergebnis bestimmt den Bogen des östlichen Azimuts, und falls die Zeit nachmittags ist, so multiplizierst du den Sinus des Restes vom Tagesbogen mit dem Sinus der Breite und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe. Was herauskommt, gibt den Bogen des westlichen Azimuts, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen!«

Die nebenstehende Abbildung 5 bringt den Meridian, Äquator und Horizont der Himmelskugel zur Darstellung. Der dā'ir ist $= \text{arc } O\Sigma = \angle O\Sigma\Omega = \angle d$ (für die Morgenhälfte) $= \text{arc } W\Sigma'$ (für die Abendhälfte); die Sonne, die für $\delta=0^\circ$ genau im Osten aufgeht, stehe also in dem beliebigen Punkt Σ , dann ist:

$$\frac{\Omega N}{\Omega \Sigma} = \sin d; \quad \Omega N = \Omega \Sigma \cdot \sin d.$$

Andrerseits ist das Lot $BN = \Omega \Sigma \cdot \sin h$, bzw. auch $= \Omega N \cdot \cos \varphi$. Mithin

$$\sin d = \frac{\sin h}{\cos \varphi}.$$



Nach Früherem gilt aber: $\sin a = \frac{\sin h \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi \cdot \cos h}$;

daher ist auch: $\sin a = \frac{\sin d \cdot \sin \varphi}{\cos h}$, q. e. d.

Hätten die arabischen Astronomen den fertigen Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie anzuwenden verstanden¹⁾, so wäre damit im allgemeinen Fall, wo $\delta = \alpha$ ist, die Berechnung von a aus δ , φ und h ein leichtes gewesen, da das Zenit-Pol-Sonnendreieck sofort gibt:

$$\sin \delta = \sin h \cdot \sin \varphi \pm \cos h \cdot \cos \varphi \cdot \sin a,$$

wo das Plus- oder Minuszeichen gilt, je nachdem das Azimut südlich oder nördlich der Ostwestlinie liegt. Statt dessen verfahren die Araberganz anders. So lehrt z. B. al-Marrākūšī²⁾: »Um das Azimut der Sonne zu bestimmen, multipliziere man den Sinus der Sonnenhöhe h mit dem Sinus der Breite φ und dividiere durch den Kosinus der Breite. Der Quotient ist die Gleichung des Azimuts, falls die Sonne keine Deklination hat, und wenn sie eine Deklination hat, wird er die *hiṣṣa* des Azimuts sein. Wenn Sonnendeklination und Ortsbreite von ungleichem Vorzeichen sind, so zähle zur *hiṣṣa* des Azimuts den Sinus der Morgenweite hinzu; wenn aber beide von gleichem Vorzeichen sind, so nimm die Differenz zwischen dem Sinus der Morgenweite und der *hiṣṣa* des Azimuts, und das Resultat der Addition

oder Subtraktion wird die Gleichung des Azimuts sein. Endlich teilst du die Gleichung des Azimuts durch den Kosinus der beobachteten Sonnenhöhe, so wird der Quotient der Sinus des Azimuts sein.«

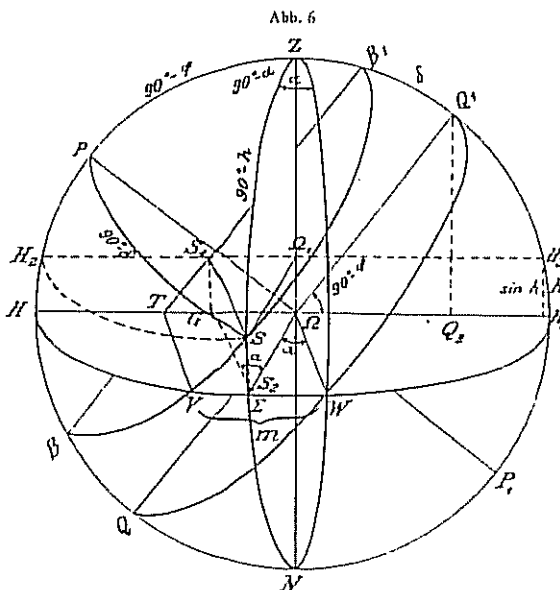
In diesem Text tritt ein uns zunächst ganz fremder Ausdruck der arabischen Astronomie auf: Die *hiṣṣa*, oder ausführlicher: *hiṣṣat as-semt*, wörtlich Teil (Anteil) des Azimuts. Die genaue geometrische Definition geben Abū'l Wafā' ³⁾ und Miram Celebi ⁴⁾. Danach ist sie dargestellt durch eine gerade Linie auf dem Nordsüddurchmesser des Horizontes HH_1 , genommen vom Fußpunkt des Sinus der Höhe im augenblicklichen Orte des Gestirns bis zum Durchschnitt des Horizont- und Parallelkreisdurchmessers. Also *hiṣṣa* = GT der Abb. 6. In dieser ist W' der Westpunkt, $\angle W'QS$ das augenblickliche Azimut der in S stehenden Sonne, $\text{arc } VW'$ = der Abend(= oder Morgen)weite m der Sonne. Alle anderen Linien der Abbildung sind ohne Erklärung verständlich.

¹⁾ Er tritt erst bei Regiomontanus auf. (Vergl. A. v. Braunnühl: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, Leipzig 1, 1900, S. 130).

²⁾ z. a. O. Kap. LXII, S. 307.

³⁾ Carra de Vaux, L'almageste d'Abou'l-Wefa al-Buzdžani im Journ. asiat. 1892, S. 429.

⁴⁾ Mskr. 171 D, Paris, Fol. 189; ein Kommentar der astron. Tafeln d. Ulūğ-Beg von Miram Celebi (Sédillat, Prolegomenes etc., S. 106).



Macht man noch $Q_1 Q_2 \perp HH_1$, so besteht in den ähnlichen Dreiecken $\Omega Q_1 Q_2$ und $TS_1 G$ die Proportion $\Omega Q_2 : Q_1 Q_2 = GT : GS_1$.

Es ist aber nach der Abbildung:

$$\Omega Q_2 = \sin \varphi; Q_1 Q_2 = \cos \varphi; S_1 G = \sin h \text{ (für Radius der Himmelskugel} = 1)$$

damit findet man $GT = \text{hişsa} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \sin h$.

Ferner ist

$$\begin{aligned} \Omega G &= \Omega T - GT \\ &= \Omega S_2 \cdot \sin a = \Omega_1 S \sin a = \cos h \cdot \sin a \\ \Omega T &= \sin m. \end{aligned} \quad (I)$$

Somit wird aus (I):

$$\cos h \cdot \sin a = \sin m - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \sin h,$$

und mit Berücksichtigung unserer Abbildung:

$$\sin(-a) = -\sin a = \frac{\sin m}{\cos h} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin h}{\cos h} \quad (II), \text{ q. e. d.}$$

Der Beweis für den anderen Fall, wo δ und φ von entgegengesetztem Vorzeichen sind, ist ganz analog dem hier entwickelten. Ganz ähnliches findet man bezüglich dieser letzten Bestimmung des Azimuts auch bei al-Battānī¹⁾, Ibn Yūnus²⁾ und Ulūğ Beg³⁾. Bei Ibn Yūnus findet sich statt *hişsa* der Ausdruck *ihtilāf al-ufq* (Differenz auf den Horizont) und für $\sin a$ der folgende Ausdruck:

$$\sin a = \frac{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \sin h - \sin m}{\cos h} = \frac{(\text{ihtilāf al-ufq}) - \sin(\text{Morgenw.})}{\cos h}.$$

Für beide Ausdrücke des Zählers hat Ibn Yūnus Tafeln berechnet. Die erste schreitet nach ganzen Graden der Sonnenhöhe h , die zweite mit der Sonnenlänge λ (in ganzen Graden) fort.⁴⁾ Damit ist die Berechnung des Zählers vorstehenden Bruches sehr erleichtert.

¹⁾ Opus astronom. I., S. 23 und Comment., S. 183.

²⁾ Mskr. 143 Leiden, S. 164.

³⁾ Prolegomenes etc., S. 106.

⁴⁾ Es ist bekanntlich $\sin m = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi} = \frac{\sin \epsilon \cdot \sin \lambda}{\cos \varphi}$. Der Autor bestimmte die Ekliptikschiefe zu $\epsilon = 23^\circ 51'$.

DER EBENEN SONNENUHREN

Es scheint mir nicht unzweckmäßig, diesen vorbereitenden Kapiteln zunächst noch eine einheitliche Theorie der ebenen Sonnenuhren hinzuzufügen. Sie dürfte nicht nur das Verständnis der folgenden Details erleichtern, sondern ermöglicht es mir, mich gelegentlich kürzer fassen und auf die hier gegebenen Entwicklungen, wie mir ähnliche nicht bekannt sind, zurückgreifen zu können. Dabei wollen wir uns noch von der beschränkenden Annahme freimachen,



dass der Zeiger oder Stylus (*στυλος*) der Uhr in der Richtung der Weltachse liege, der Kadran mithin ein sogenannter Polos (abendländische, europäische Sonnenuhr) sei. Bekanntlich haben die Araber den Zeiger der Uhr stets senkrecht auf deren Zifferblattgestellt, bei schiefen Uhrflächen jedoch parallel der Horizontalebene, niemals aber war er zum Welpol gerichtet. Diesen letzten allgemeinen Fall veranschaulicht beistehende Abbildung 7. *HH*, ist der Durchmesser des Horizontalkreises, gleichzeitig die Nordsüdrichtung.

Über dem Horizont erhebt sich schräg die Uhrfläche E , die in ihrem höchsten Punkt Z' den Abstand $ZOZ' = \angle \varphi$ vom Zenit Z erreicht. Die Uhrfläche E schneidet den Horizont in der Geraden DD' , die von der Ostwestrichtung O, W um den Winkel α abweicht (dekliniert). Die Mittellachse oder der auf DD , $\perp$ stehende Durchmesser von E ist $Z'Y$. Auf ihm steht wiederum $\perp OG''$. Das horizontale Lot über DD' ist $GO(G')$. Punkt G'' ist der Pol zu E . In OG liegt der Gnomon $OJ = g$. Angenommen, die Sonne S bewege sich im Parallelkreis BB , der Deklination δ ($OQ = \text{Himmelsäquator}$) einher, so gilt es, die Abbildung dieses Parallelkreises auf die Auflagfläche E zu ermitteln, wobei J der Augpunkt dieser Abtötung ist. Um z. B. das Bild U von Punkt S zu erhalten, verbinde man S

mit O und ziehe zu dieser Verbindungslinie durch J die Parallele. Das ganze Kreisbild U_0UU_1 ist die Schattenkurve der Gnomonspitze für den Tag, an welchem die Sonne die Deklination δ hat. Gleichzeitig erkennt man, dass, da der Gnomon OJ nicht in der Weltachse liegt, sein Schatten zu ein und derselben Stunde jeden Tag eine andere Richtung hat. Dieser Umstand ist für die arabischen Sonnenuhren charakteristisch. Es lässt sich deshalb die Zeit nicht aus der Koinzidenz des Stylusschattens mit einer unveränderlichen Stundenlinie wie beim Polos entnehmen, sondern nur aus der augenblicklichen Lage der Schattenspitze des Stäbchens. Wir müssen daher dessen Länge und Richtung bestimmen. Die Schattenlänge für den Punkt U sei $OU=l$; die Schattenrichtung, die wir von der Schrägachse $Z'OY$ aus zählen wollen, sei $\angle YOU = +\tau$. Die Länge des Schlagschattens l des Stäbchens der Länge q hängt aber von dem Erhebungswinkel $\xi = \text{Bogen } ST$ der Sonne über der Ebene E ab. Das nach Süden gewandte Zifferblatt unserer Uhr wird zuerst vormittags beschienen, wenn die Sonne in L , dem Durchschnitt von E mit dem Sonnenparallel BB , ankommt. Sie möge dort den Stundenwinkel s haben. Dann fällt der Schatten von q über U_0 hin ins Unendliche. Er bilde in diesem Augenblick mit OY den Winkel $= \tau_0$. Von jetzt an verkürzt sich der Schlagschatten des Stäbchens und rückt gleichzeitig gegen OY hin. Er koinzidiert mit OY , wenn die Sonne das Azimut a erreicht hat, d. h. im Vertikalkreis $GG''ZG'$ steht. Kommt die Sonne in den Bereich von Azimuten, die größer sind als a , so rückt der Gnomonschatten in den östlichen Teil der Uhrfläche, um endlich beim Austritt der Sonne aus E in R , über U_1 wiederum ins Unendliche hinzustreichen. Die Verbindung aller Schattenspitzen gibt das Abbild des Sonnenparallels, das in diesem Fall (weil zwei unendlich ferne Punkte) eine Hyperbel ist. Einfacher wird die Ablotung des Himmelsäquators. Sie ist stets eine gerade Linie (Durchschnitt zweier Großkreise), die jedoch in diesem Fall nicht durch den Anfangspunkt O geht,

sondern im Abstand $y_0 = q \cdot \frac{\cos a \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \varphi \cdot \cos \psi}$ parallel zu FF_1 zieht. Es soll nämlich

OY die positive Y -Achse, OD' die positive X -Achse sein, und $\angle HOP = \varphi$ sei die Polhöhe des Ortes, für den die Uhr entworfen werden soll. (y_0 ist in unserer Figur absichtlich weggelassen, um sie nicht zu sehr zu überladen.)

Um jetzt zuerst die Größe ξ zu ermitteln, wenden wir auf das sphärische Dreieck $SG''Z$ den Kosinussatz an. In diesem Dreieck ist Seite $SZ = 90^\circ - h$, wo h der augenblickliche Höhenwinkel¹⁾ der Sonne ist; die Seiten $G''S$ und $G''Z$ sind bzw. $90^\circ - \xi$ und $90^\circ - \psi$. Der Winkel $G''ZS = \Delta a$ ist beliebig. Es folgt:

$$\cos \Delta a = \frac{\sin \xi - \sin h \cdot \sin \psi}{\cos h \cdot \cos \psi}. \quad (I)$$

Ferner gibt der Sinussatz auf das Zenit – Pol – Sonne – Dreieck angewandt:

$$\sin(a + \Delta a) = \frac{\cos \delta \cdot \sin s}{\cos h} = \sin a \cdot \cos \Delta a + \cos a \cdot \sin \Delta a. \quad (II)$$

Bildet man aus (I)

$$\sin \Delta a = \sqrt{1 - \cos^2 \Delta a} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \xi - \sin h \cdot \sin \psi}{\cos h \cdot \cos \psi} \right)^2}$$

und eliminiert damit $\sin \Delta a$ und $\cos \Delta a$ aus (II), so folgt:

$$\frac{\cos \delta \cdot \sin s}{\cos h} = \sin a \cdot \frac{\sin \xi - \sin h \cdot \sin \psi}{\cos h \cdot \cos \psi} + \cos a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \xi - \sin h \cdot \sin \psi}{\cos h \cdot \cos \psi} \right)^2},$$

¹⁾ Der Höhenkreis oder Parallelkreis zum Horizont heißt im Arabischen *Almuqanar*, was auch Sonnenuhr bedeuten kann.

woraus man zieht:

$$\frac{\sin \xi - \sin h \cdot \sin \varphi}{\cos h \cdot \cos \varphi} = \sin \alpha \cdot \frac{\cos \delta \cdot \sin s}{\cos h} + \cos \alpha \cdot \left[\frac{\cos^2 h - \cos^2 \delta \cdot \sin^2 s}{\cos^2 h} \right]$$

Und da nach dem Sinussatz:

$$\sin s \cdot \cos \delta = \sin (\alpha + d\alpha) \cdot \cos h$$

ist, so ergibt sich leicht

$$\sin \xi = \sin h \cdot \sin \varphi + \sin \alpha \cdot \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \sin s + \cos \alpha \cdot \cos (\alpha + d\alpha) \cdot \cos h \cdot \cos \varphi \quad (\text{III})$$

Es ist aber nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos (\alpha + d\alpha) \cdot \cos h = -\cos \varphi \cdot \sin \delta + \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos s,$$

so dass damit aus (III) wird:

$$\sin \xi = \sin h \cdot \sin \varphi + \sin \alpha \cdot \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \sin s + \cos \alpha \cdot \cos \varphi (-\sin \delta \cdot \cos \varphi + \cos \delta \cdot \sin \varphi \cdot \cos s), \quad (\text{IV})$$

welche Gleichung uns in den Stand setzt, aus den gegebenen Größen α , δ , φ , ψ , und s den Erhebungswinkel ξ zu finden.

Mit der Kenntnis von ξ folgt, wie leicht ersichtlich, aus dem ebenen Dreieck OJU sofort:

$$OU = l = q \cdot \frac{\sin h}{\sin \xi} = q \cdot \frac{\sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s}{\sin \xi} \quad (\text{V})$$

und aus dem sphärischen Dreieck $G''SZ$:

$$\cos \tau = \frac{\sin h - \sin \xi \cdot \sin \varphi}{\cos \xi \cdot \cos \varphi}, \quad (\text{VI})$$

da ja $\sphericalangle YOU = \sphericalangle SG''Z = \sphericalangle \tau$ ist. Für die rechtwinkligen Koordinaten x und y des Punktes U ist alsdann:

$$\begin{aligned} x &= l \cdot \sin \tau \\ y &= l \cdot \cos \tau. \end{aligned}$$

Mittels der Formeln (IV), (V) und (VI) kann man für jeden Tag und zu jeder gegebenen Zeit Länge und Lage des Schattens finden, den ein so orientierter Zeiger auf ein beliebig im Raume gegebenes Zifferblatt wirft. Setzt man jetzt (vom wahren Mittag an gerechnet) $s = 0^\circ$; $s_1 = \pm 15^\circ$; $s_2 = \pm 30^\circ$ usw., so erhält man auf dem Zifferblatt die entsprechenden Schattenenden des Zeigers für ein bestimmtes δ . Verfährt man für ein anderes δ ebenso (die Araber wählten gewöhnlich die drei Parallelkreise Widder, Steinbock und Krebs), so hat man wiederum die entsprechenden Stundenmarken auf der Uhr. Bekanntlich ist die Verbindung dieser äquihorären Punkte eine Gerade, die Stundenlinie.

Zur Ermittlung der Gleichung der Schattenkurve geht man am besten von den drei Gleichungen:

$$\cos h = \frac{\cos \xi \cdot \sin \tau}{\sin d\alpha} \quad (\text{VII})$$

$$\sin h = \sin \xi \cdot \sin \varphi + \cos \xi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \tau \quad (\text{VIII})$$

$$\sin \delta = \sin h \cdot \sin \varphi - \cos h \cdot \cos \varphi \cdot \cos (\alpha + d\alpha) \quad (\text{IX})$$

aus. Daraus ist die Größe h , die ja den Stundenwinkel s enthält, zu eliminieren, damit (IX) für jedes s gilt, d. h. von s unabhängig ist. Beachtet man, dass für die Projektion des Punktes S auf die Ebene E :

$$\sin \tau = \frac{x}{l}; \quad \cos \tau = \frac{y}{l}; \quad \sin \xi = \frac{q}{\sqrt{l^2 + q^2}};$$

$$\tan \angle \alpha = \frac{x}{q}, \text{ mithin } \sin \angle \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + q^2}}; \quad \cos \angle \alpha = \frac{q}{\sqrt{x^2 + q^2}},$$

zu setzen ist, so folgt aus (IX) sofort:

$$\sqrt{l^2 + q^2} \cdot \sin \delta = \sin \varphi (q \cdot \sin \psi + y \cdot \cos \psi) - \cos \varphi (q \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha) \quad (\text{X})$$

oder (X) entwickelt und geordnet:

$$\begin{aligned} & y^2 (\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi - \sin^2 \delta) + x^2 (\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) + x \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \psi \cdot \sin 2 \varphi \\ & + x \cdot q (\sin \alpha \cdot \sin 2 \varphi \cdot \sin \psi - \sin 2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi) + y \cdot q (\sin^2 \varphi \cdot \sin 2 \psi - \cos \alpha \cdot \sin 2 \varphi \cdot \cos \psi) \\ & + q^2 \cdot (\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi - \sin^2 \delta - \cos \alpha \cdot \sin 2 \varphi \cdot \sin \psi) = 0. \end{aligned} \quad (\text{XI})$$

Bevor wir Gleichung (XI) näher betrachten, möge aus (X) erst die Abbildung des Äquators errechnet werden, für die man also $\delta = 0$ zu setzen hat. Dann geht (X) in die Gleichung einer geraden Linie über, nämlich in

$$y \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi + x \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi + (q \sin \varphi \cdot \sin \psi - \cos \alpha \cdot \cos \varphi) = 0, \quad (\text{XII})$$

und hieraus findet man für $x = 0$ tatsächlich den eingangs erwähnten Wert für y_0 . Wie man sieht, ist (XI) ein Kegelschnitt. Die Lage seiner Achsen lässt sich mühelos finden, wenn man bedenkt, dass die eine derselben dem Abbild des Himmelsäquators parallel ist. Die Linie FF' , die durch den Koordinatenanfangspunkt O geht, hat die Gleichung:

$$-y = x \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \varphi}{\cos \psi \cdot \sin \varphi} = x \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \psi} \cdot \cotg \varphi$$

(da y negativ für ein positives x). Mithin ist der Richtungsunterschied von DD' (X -Achse) und FF' gegeben durch

$$\tan \mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \psi} \cdot \cotg \varphi. \quad (\text{XIII})$$

Dieser Ausdruck für $\tan \mu$ ist nichts anderes als die einfache Formel für

$$\tan 2\mu = \frac{a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin 2\varphi \cdot \cos \psi}{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi},$$

die man für die Bestimmung der Lage der Achsen aus (XI) erhält. Man kommt wieder auf dasselbe Resultat, wenn man

$$\tan 2\mu = \frac{2 \tan \mu}{1 - \tan^2 \mu}$$

bildet und für $\tan \mu$ den Wert aus (XIII) einsetzt.

Gleichung (XI) stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem die Diskriminante

$$\Delta = \sin^2 \delta [\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi (\cos^2 \psi + \sin^2 \alpha \cdot \cotg^2 \varphi)] \gtrless 0 \quad (\text{XIV}) \text{ ist.}$$

Spezialfälle. Aus vorstehenden Formeln ergeben sich sämtliche Spezialfälle von ebenen Sonnenuhren. Es sei:

1. α beliebig, aber $\psi = 0$, so gibt (IV)

$$\sin \xi = \sin \alpha \cdot \cos \delta \cdot \sin s + \cos \alpha (-\sin \delta \cdot \cos \varphi + \cos \delta \cdot \sin \varphi \cdot \cos s)$$

und (XI) wird zu

$$y^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta) + x^2 (\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) + xy \sin \alpha \cdot \sin 2\varphi - x \cdot q \sin 2\alpha \cdot \cos^2 \varphi - y \cdot q \cos \alpha \cdot \sin 2\varphi + q^2 (\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) = 0. \quad (\text{XV})$$

Abbild des Himmelsäquators:

$$y \cdot \sin \varphi + x \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi - q \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi = 0; \quad \tan \mu = \sin \alpha \cdot \cotg \varphi \\ \Delta = \sin^2 \delta (\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi (1 + \sin^2 \alpha \cdot \cotg^2 \varphi)).$$

Daraus folgt: Ist die Sonnenuhr ein deklinierender Vertikal, so kann die Schattenkurve bei sehr geringer Abweichung der Uhrfläche von der Ostwestlinie, falls $\delta > \varphi$ ist, d. h. in der heißen Zone, eine Ellipse sein; im allgemeinen ist sie stets eine Hyperbel. Die Achsen fallen mit den Koordinaten zusammen, falls $\alpha = 0^\circ$ (Ostwestvertikal) oder $\varphi = 90^\circ$ ist (Pol).

2. Es sei $\psi = 0$ und $\alpha = 0$ (Vertikal über der Ostwestlinie). Dann gibt (IV): $\sin \xi = -\sin \delta \cdot \cos \varphi + \cos \delta \cdot \sin \varphi \cdot \cos s$, und (XI) wird zu

$$y^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta) - x^2 \sin^2 \delta - y \cdot q \sin 2\varphi + q^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) = 0. \quad (\text{XVI})$$

Abbildung des Äquators $y = q \cdot \cotg \varphi$.

Ferner ist $\mu = 0$ und $\Delta = \sin^2 \delta (\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi)$.

Der Kegelschnitt ist also in der heißen Zone eine Ellipse. Er ist eine Parabel für $\varphi = \delta$ und eine Hyperbel für $\varphi > \delta$.

3. Es sei $\psi = 0, \alpha = 90^\circ$ (Nordsüdvertikal) dann gibt (IV):

$$\sin \xi = \cos \delta \cdot \sin s,$$

(XI) wird zu

$$y^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta) + x^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) + x \cdot y \cdot \sin 2\varphi - q^2 \sin^2 \delta = 0. \quad (\text{XVII})$$

Abbildung des Äquators $y \cdot \sin \varphi = -x \cdot \cos \varphi$

$$\frac{y}{-x} = \tan (90^\circ - \varphi) = \tan \mu \\ \mu = 90^\circ - \varphi,$$

was auch aus (XIII) folgt. Sodann hat man in diesem Falle

$$\Delta = \sin^2 \delta \cdot (\sin^2 \delta - 1) = -\sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta.$$

Hiernach ist der Kegelschnitt in allen Breiten stets eine Hyperbel.

4. Setzt man endlich $\psi = 90^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$, so kommt man auf die Horizontalsonnenuhr. Aus (IV) wird dann $\sin \xi = \sin h$, aus (XI):

$$x^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) - y^2 \sin^2 \delta + x \cdot q \sin^2 \varphi + q^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta) = 0, \quad (\text{XVIII}) \\ \Delta = \sin^2 \delta (\sin^2 \delta - \cos^2 \varphi).$$

Daraus folgert man: Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem:

$$\varphi > 90^\circ - \delta, \\ = 90^\circ - \delta \quad \text{oder} \\ < 90^\circ - \delta \quad \text{ist.}$$

VI. KAPITEL

DIE ARABISCHE HORIZONTALSONNENUHR ODER BASÎTA

1. KONSTRUKTION DER PARALLELKREISE UND STUNDENLINIEN

Das Wort *basîta* leitet sich von *basat*, ausbreiten, her¹⁾. (Vgl. auch den Ausdruck *zill-basî*, *zill mabsût*.) Diese Art von Sonnenuhren war bei den Alten schon bekannt, jedoch von den Arabern wegen der wichtigen Rolle, die sie im Dienste der islâmischen Religionsübung spielte, besonders bevorzugt. Eine antike Horizontalsonnenuhr kennen wir im *Discus in planitia*, der von Vitruv als eine Erfindung des Aristarch bezeichnet wird²⁾. Das Exemplar, welches zu Anfang des vorigen Jahrhunderts an der Via Appia ausgegraben wurde, ist von Francesco Peter ausführlich beschrieben worden³⁾. Die Uhr dürfte etwa für die Breite von Rom richtig sein. Nach J. R. Schaubach war auch die Arachne des Eudoxus, d. i. die Spinne, kaum etwas anderes als eine solche Horizontal- oder Azimutaluhr⁴⁾. Der Name: die *basîta* kommt bei Ibn Yûnus und al-Marrâkuši vor, während sie bei al-Battâni *ar-ruhâma* (der Marmor) heißt.

Sehr anschaulich beschreibt uns dieser Schriftsteller die Konstruktion der Horizontalsonnenuhr, die auf keinem öffentlichen Platze fehlte. Der »arabische Ptolemaeus« sagt etwa folgendes⁵⁾: »Man nehme eine Marmor- oder Kupferplatte von rechteckiger Gestalt, so dass die Breite $\frac{2}{3}$ der Länge ist; in der halben Länge und $\frac{2}{3}$ der Breite markiere man den Mittelpunkt eines Kreises, den man um diesen Punkt mit beliebigem Radius beschreibt. Darauf teile man durch zwei senkrecht aufeinander stehende Durchmesser den Umfang in Quadranten von 90° und dann weiter von 2° zu 2° oder 3° zu 3° , verzeichne hierauf die Schatten des Stabes, wenn die Sonne im Krebs oder Steinbock läuft, für jede der 6 ungleichen Stunden, desgleichen die Schatten des Widders (Ostwestlinie). Darauf nehme man ein Lineal, dessen Länge zum wenigsten dem längsten Schatten des Steinbocks gleichkommt, und markiere damit auf dem Zifferblatt das Ende des Schattens in der mittels des Kreises bestimmten Richtung (Azimut, daher auch Azimutaluhr). Besorgt man dies für jede Stunde, so wird man den Tagesbogen des ganzen Steinbocks haben. Ist dieselbe Operation auch für den Wendekreis des Krebses durchgeführt, so gibt die Verbindungslinie je zweier entsprechender Punkte dieser Kurven durch gerade Linien die Stundenlinien. Im Mittelpunkt des Kreises errichte man senkrecht den Stylus von Eisen oder Kupfer, der rund gedreht ist und spitz zulaufend über die Uhrfläche hervorragt. Er hält 12 Teile von den Teilen des Schattenmaßes... Alsdann werde in sehr sorgfältiger Weise die Mittagslinie eingezeichnet. Auf diese Weise kannst du aus dem Ort der Schattenspitze jede beliebige Stunde erkennen, für jeden Ort, dessen Breite der gleich ist, für die du die *ruhâma* konstruiert hast usw.«

In der Erläuterung hiezu sei folgendes bemerkt: da von den zwei äußersten Parallelkreisen der nördlichsten und südlichsten Sternbilder der Ekliptik, Krebs und Steinbock, die gnomonischen Abbildungen zu konstruieren sind, so musste für eine gegebene geographische

¹⁾ Daher auch Albacete, die auf weit ausgedehnter Hochfläche der Provinz Murcia gelegene Stadt Südost-Spaniens.

²⁾ Die Abbildung des *Discus in planitia* findet man bei J. Drecker: *Gnomone und Sonnenuhren*, Aachen 1909, als Abb. 3.

³⁾ *Di uno antico orologio solare*, Roma 1815.

⁴⁾ Geschichte der griechischen Astronomie bis auf Eratosthenes, Göttingen 1802, S. 33.

⁵⁾ *Opus astronomicum* I. Kap. LVI, S. 133 ff.

Breite zuerst die Dauer des längsten und kürzesten Tages festgesetzt werden, welche Aufgabe die arabischen Astronomen ganz nach Ptolemaeus lösten. Wir finden, falls wir unter s_0 den Stundenwinkel des halben Tagesbogens, unter ε die Ekliptikschiefe, und unter φ die geographische Breite verstehen, bei den Arabern eine Vorschrift, die sich als Formel geschrieben so darstellt:

$$\sin(s_0 - 90^\circ) = r \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\sin(90^\circ - s_0) = r \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Wie man erkennt, gilt die erste Formel für positive, die zweite für negative Sonnen-deklinationen¹⁾. Der so gefundene Tagesbogen wurde in beiden Fällen in 12 gleiche Teile geteilt. Die Zeitdauer, welche die Sonne braucht, um das Bogenintervall zwischen zwei solchen äquidistanten Teilen zu durchlaufen, nannte man eine zeitliche oder temporale Stunde²⁾. Doch kannte man auch den Begriff der gleichen Stunden von alters her, da eine gleiche Stunde der 24. Teil einer Erdrotation ist. Die Verwandlung der einen in die andere lehrt schon Ptolemaeus³⁾, dem sich die Araber auch in dieser Hinsicht ganz anschließen⁴⁾. Ist der Stundenwinkel s (beliebig) bekannt, so ergibt sich die weitere Aufgabe, die zu ihm gehörige Sonnenhöhe h zu ermitteln. Al-Battānis Lösung führt auf den Ausdruck:

$$\sin h = \frac{(\sin \text{vers } s_0 - \sin \text{vers } s) \cdot \sin(90^\circ - (\varphi - \delta))}{\cos \text{vers } s_0} \quad 6),$$

über dessen Herleitung man das anschauliche Beweisverfahren (mittels der Projektionsmethode Nallinos nachsehen mag⁷⁾). Wie mit dem sog. Azimutinstrument der sinus versus $s = 1 - \cos s$ graphisch ermittelt wurde, erhellt aus der Beschreibung desselben durch L. Am. Sédillot⁸⁾.

Mit Kenntnis von h hat man ja die Schattenlänge sofort, da für den Horizontal-schatten bekanntlich $m = q \cdot \cotg h$ ist, und damit tritt die Schattentafel in Kraft. Und wie das Azimut α des Schattens mit der Sonnenhöhe zusammenhängt, das zeigt Kapitel IV mit genügender Ausführlichkeit.

Nachstehende Abbildung 8 stellt die vollständige Lineatur einer von mir für die Breite $\varphi = 30^\circ$, den Hauptparallel des islamischen Bereichs, entworfenen basita dar⁹⁾, zu der ich fürs erste folgendes bemerken möchte: Der schattenwerfende Gnomon ist in natürlicher Größe beigelegt. Der Fußpunkt dieses miqjās ist F . Die Schattenkurven sind nach Formel XVIII der allgemeinen Entwicklungen, S. 26, für die Breite $\varphi = 30^\circ$ Hyperbeln. Nur die kräftig ausgezogenen Hyperbeln innerhalb der Grenzen $\delta = \pm \varepsilon$ kommen praktisch in Frage. Ich habe aber, um den Verlauf der Temporalstunden in gnomonischer Projektion etwas deutlicher zur Darstellung zu bringen, noch einige Schattenkurven gestrichelt eingetragen, die

¹⁾ Eine einfache Herleitung obiger zwei Ausdrücke, im Sinne der arabischen Astronomie, die ja stets den Radius r der Himmelskugel mitführte, gibt C. A. Nallino im *Opus astronomicum* I, S. 180.

²⁾ Im Altertum nannte man die Jahreszeitenstunden 'ḥorai kairai, horae temporales, bei den Arabern hießen sie as-sā'it az-zanānija, im Gegensatz zu den gleichen Stunden, mit einem Stundenwinkel von 15° zu 15° , den 'ḥorai temporelles, horae æquinoctiales, as-sā'it al-muta'dila.

³⁾ Handbuch der Astronomie, deutsch von K. Manitius, Leipzig I 1912, S. 98.

⁴⁾ al-Marrākuṣi z. a. O., S. 249.

⁵⁾ Er heißt in der arabischen Astronomie faṣl ad-dā'ir = 'distance au méridien'.

⁶⁾ *Opus astron.* Kap. XVII, S. 31.

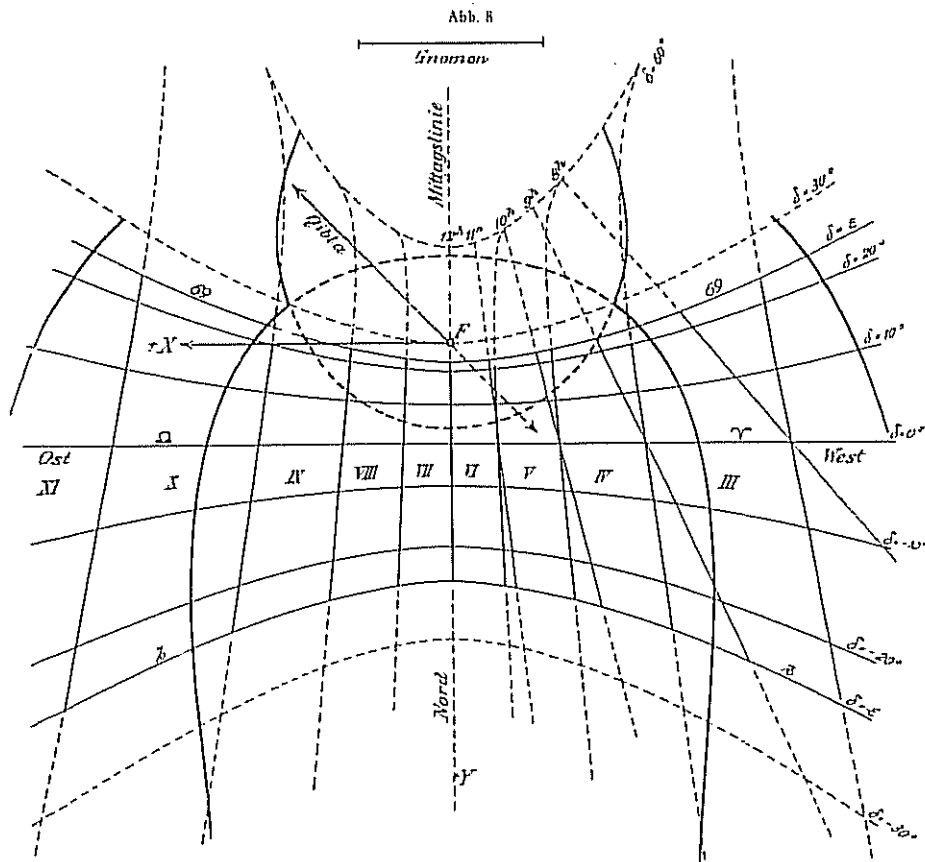
⁷⁾ *Opus astron.* I, S. 190/91. Vergl. auch al-Marrākuṣi z. a. O., S. 266.

⁸⁾ Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes, Paris 1841, S. 27 und 64.

⁹⁾ Die Zeichnungen in arabischen Handschriften sind meist sehr ungenau. Auch die Abbildung der ruhāma im *Opus astronomicum* I, S. 137, ist von Prof. Schiaparelli gezeichnet für $\varphi = 36^\circ$, die Breite von ar-Rāḥqa (Wohnort al-Battānis).

außerhalb der Wendekreise liegen. Bei $\delta = +60^\circ$ ginge die Sonne nicht mehr unter; dort ist jede temporale Stunde 2 äquinoktialen gleich. Deshalb ziehen die Linien der gleichen Stunden (12^h , 11^h , 10^h usw.) von dort in doppelter Zahl von der Parabel ($\delta = +60^\circ$) nach den Durchschnittspunkten der temporalen Stundenlinien mit dem Äquator ($\delta = 0^\circ$), wo sich beide Arten von Stundenlinien durchsetzen müssen; denn für $\delta = 0^\circ$ fallen dieselben in eine zusammen ($s = 15^\circ$). Wie die Zeichnung lehrt, ist die Abweichung der temporalen Stundenlinien von einer Geraden für die Breite von 30° innerhalb $\delta = \pm \epsilon$ kaum zu erkennen. Erst für größere Werte von δ werden sie merklich krumm¹⁾.

Die temporalen Stundenlinien sind in der älteren Gnomonik stets als gerade Linien behandelt worden. Aber dergestalt haben sie keinen gemeinsamen Schnittpunkt; während sich die Linien der gleichen Stunden in der Projektion des Himmelspols begegnen. Erst in neuerer Zeit hat man sich mit dem Studium der wahren Natur dieser «courbes assez bizarres» näher befasst, worüber die Abhandlung von Herrn J. Drecker eingehend handeln wird. Dafür möchte ich mich auf einige Andeutungen im Anhang beschränken.



¹⁾ In meinen «Vermischten Aufgaben der sphärischen Astronomie und mathematischen Geographie», Hamburg 1915, S. 78, habe ich gezeigt, dass selbst für $\varphi = 45^\circ$ die Abweichung einer derartigen Stundenlinie von einer Geraden innerhalb des Intervalls $\delta = \pm \epsilon$ nur wenige Grade beträgt. (Vergl. auch die Untersuchungen von Delambre in seiner Histoire de l'astron. anc. Bd. II, S. 476 ff. für $\varphi = 30^\circ$.)

Dagegen möchte ich als instruktive Zugabe zur Frage der Größe einer solchen ungleichen Stunde im Verlauf eines ganzen Jahres die Tafel des Ibn Yûnus hersetzen¹⁾. Sie enthält die Größe einer solchen Temporalstunde ausgedrückt in Graden, Minuten, Sekunden und Terzen für die Breite $\varphi = 30^{\circ 2)$, im Argument um ganze Grade in der Sonnenlänge fortschreitend. Die erste Hälfte dieser wertvollen Tafel bezieht sich auf die 6 nördlichen Tierkreiszeichen, d. h. positive Sonnendeklinationen, die zweite Hälfte aber auf die 6 südlichen Tierkreiszeichen, d. h. negative Sonnendeklinationen.

¹⁾ Leidener Mskr. 143, Kap. XV, S. 348.

²⁾ In dem Kitāb des Ḥabīb al-Ḥāsib (Berlin, Weitzstein I 90) findet sich (S. 109^b—113^b) eine ähnliche Stundentafel für die Breite $\varphi = 33^{\circ} 25'$ (Bağdad) und in al-qānūn al-maṣ'ūdī des Bīrūnī (Berliner Hdschr., S. 93^a—94^b) eine solche für $\varphi = 33^{\circ} 35'$. (Gazna.)

TEILE DER STUNDEN IN DEN NÖRDLICHEN STERNBILDERN
FÜR DIE BREITE 30°

Sonnen- länge λ	Stundenteile				Sonnen- länge λ	Stundenteile				Sonnen- länge λ	Stundenteile			
	0	I	II	III		0	I	II	III		0	I	II	III
10	15	2	18	40	310	16	9	49	40	610	17	4	33	10
2	15	4	37	0	32	16	11	57	20	62	17	5	55	40
3	15	6	55	40	33	16	14	3	50	63	17	7	15	40
4	15	9	14	10	34	16	16	9	20	64	17	8	33	30
5	15	11	32	30	35	16	18	14	10	65	17	9	48	50
6	15	13	50	50	36	16	20	17	50	66	17	11	2	0
7	15	16	9	10	37	16	22	20	40	67	17	12	12	40
8	15	18	27	10	38	16	24	22	40	68	17	13	20	40
9	15	20	45	0	39	16	26	23	30	69	17	14	25	50
10	15	23	2	40	40	16	28	23	0	70	17	15	28	30
11	15	25	20	10	41	16	30	21	30	71	17	16	28	30
12	15	27	37	20	42	16	32	19	0	72	17	17	25	40
13	15	29	54	20	43	16	34	14	50	73	17	18	20	0
14	15	32	11	0	44	16	36	9	30	74	17	19	11	20
15	15	34	27	30	45	16	38	3	0	75	17	19	59	40
16	15	36	43	40	46	16	39	54	50	76	17	20	45	20
17	15	38	59	20	47	16	41	45	20	77	17	21	28	0
18	15	41	14	50	48	16	43	34	50	78	17	22	7	30
19	15	43	30	0	49	16	45	22	20	79	17	22	44	20
20	15	45	44	30	50	16	47	8	0	80	17	23	18	0
21	15	47	58	50	51	16	48	52	10	81	17	23	48	40
22	15	50	12	30	52	16	50	35	0	82	17	24	16	0
23	15	52	25	40	53	16	52	15	50	83	17	24	40	10
24	15	54	38	30	54	16	53	54	40	84	17	25	1	10
25	15	56	50	40	55	16	55	32	0	85	17	25	18	50
26	15	59	2	10	56	16	57	7	20	86	17	25	33	20
27	16	1	13	10	57	16	58	40	30	87	17	25	44	40
28	16	3	23	30	58	17	0	11	30	88	17	25	52	50
29	16	5	32	0	59	17	1	40	50	89	17	25	57	40
30	16	7	42	0	60	17	3	8	10	90	17	25	59	20

TEILE DER STUNDEN IN DEN SÜDLICHEN STERNBILDERN
FÜR DIE BREITE 30°

Sonnen- länge <i>z</i>	Stundenteile				Sonnen- länge <i>z</i>	Stundenteile				Sonnen- länge <i>z</i>	Stundenteile			
	0	I	II	III		0	I	II	III		0	I	II	III
1 ^o	14	57	41	20	31 ^o	13	50	10	20	61 ^o	12	55	26	50
2	14	55	23	0	32	13	48	2	40	62	12	54	4	20
3	14	53	4	20	33	13	45	56	10	63	12	52	44	20
4	14	50	45	50	34	13	43	50	40	64	12	51	26	30
5	14	48	27	30	35	13	41	45	50	65	12	50	17	10
6	14	46	9	10	36	13	39	42	10	66	12	48	58	0
7	14	43	50	50	37	13	37	39	20	67	12	47	47	20
8	14	41	32	50	38	13	35	37	20	68	12	46	39	20
9	14	39	15	0	39	13	33	36	30	69	12	45	34	10
10	14	36	57	20	40	13	31	37	0	70	12	44	31	30
11	14	34	39	50	41	13	29	38	30	71	12	43	31	30
12	14	32	22	40	42	13	27	41	0	72	12	42	34	20
13	14	30	5	40	43	13	25	45	10	73	12	41	40	0
14	14	27	49	0	44	13	23	50	30	74	12	40	48	40
15	14	25	32	30	45	13	21	57	0	75	12	40	0	20
16	14	23	16	20	46	13	20	5	10	76	12	39	14	40
17	14	21	0	40	47	13	18	14	40	77	12	38	32	0
18	14	18	45	10	48	13	16	25	10	78	12	37	52	30
19	14	16	30	0	49	13	14	37	40	79	12	37	15	40
20	14	14	15	50	50	13	12	52	0	80	12	36	42	0
21	14	12	1	10	51	13	11	7	50	81	12	36	11	20
22	14	9	47	30	52	13	9	25	0	82	12	35	44	0
23	14	7	34	20	53	13	7	44	10	83	12	35	19	50
24	14	5	21	30	54	13	6	5	20	84	12	34	58	50
25	14	3	9	20	55	13	4	28	0	85	12	34	41	10
26	14	0	57	50	56	13	2	52	40	86	12	34	26	40
27	13	58	46	50	57	13	1	19	30	87	12	34	15	29
28	13	56	36	30	58	12	59	48	30	88	12	34	4	10
29	13	54	27	0	59	12	58	19	10	89	12	34	2	20
30	13	52	18	0	60	12	56	51	50	90	12	34	0	40

2. DIE QIBLA

Sie ist auf dem Zifferblatt der Horizontaluhr als eine gerade Linie eingezeichnet, die durch den Fußpunkt des Gnomons geht und mit ihrer Richtung zur heiligen Stätte islamischen Religionskultes, nach Mekka, weist.

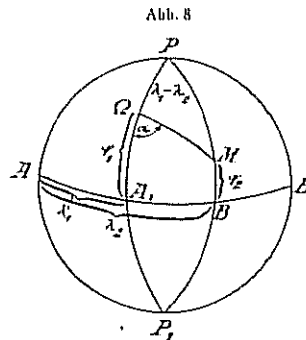
In der zweiten Sure spricht Muhammed von der Gesichtswendung beim Gebet¹⁾ und gibt dabei die Vorschrift: »Richte dein Gesicht nach dem Tempel Harâm²⁾); wo du dich auch befindest, dorthin wende dein Gesicht«, ... »Ce qui a donné lieu à un Poète Arabe d'y faire cette belle allusion dans une de ses Poésies Sacrées³⁾):

Oui, Ta Face, Seigneur, dans toutes mes Prières,
Est le vrai Kibla de ma foi;
Et dès que le matin, j'entr' ouvre les paupières,
Mon Cœur m'oriente vers Toi.⁴⁾

Diese Orientierung nach dem Heiligtum beim Gebet ist übrigens nicht arabischen Ursprungs, sondern wurzelt im Judentum. J. Hamburger führt an, dass ein betender Israelite außerhalb Palästinas sein Antlitz diesem Lande zuzuwenden hätte, innerhalb Palästinas der heiligen Stadt Jerusalem, in Jerusalem selbst dem Tempel, im Tempel aber dem Heiligtum⁵⁾. Anfänglich wandte auch Muhammed sein Antlitz zeitweilig im Gebete nach Jerusalem, und die älteste Moschee zu Medina ist nach Jerusalem orientiert, aber am 16. Januar 624 n. Chr. brach er endgültig mit dem Judentum und befahl die Gesichtswendung gegen die Ka'ba zu Mekka beim Gebet. Sie heißt in dem islamischen Kultus die Qibla. Dies Wort leitet sich von qibal (Vorderseite) ab.

Im Sinne der mathematischen Geographie ist diese Blickrichtung in dem beliebigen Orte Ω gen Mekka (M) identisch mit der Tangente, die sich an den Großkreis ΩM ziehen lässt (Abb. 8). Diese möge mit der Mittagslinie in Ω (Meridian ΩP) den Winkel α bilden. Dieser Winkel, inhiṛāf, wie er in der arabischen Astronomie genannt wird, stellt mithin die Abweichung der Gesichtsrichtung von der Nordsüdrichtung dar. Ist P ein Erdpol, AQ der Äquator, und sind φ_1 , λ_1 , φ_2 , λ_2 bzw. die Breiten und Längen der zwei Orte Ω und M , so erkennt man, dass die Berechnung von α eine Aufgabe der sphärischen Trigonometrie ist. Dies α hat natürlich für jeden Ort der Erde einen besonderen Wert, der im Interesse der Islāmgläubigen zu ermitteln ist. Von der Innehaltung der Qibla weicht der betende Muslim nicht leicht ab und wendet sich im Notfalle, wenn er in der Wüste ohne Orientierung ist, auch an einen kundigen Ungläubigen, wie Montuclat⁶⁾ und Carsten Niebuhr⁶⁾ berichten.

»Ein mohammedanischer Astronom ist, und war von jeher, zugleich als Diener der Religion zu betrachten; von ihm wird die genaue Bestimmung der Zeit zum Gebete, in gewissen Stunden des Tages, die nach Maßgabe der Ab- und Zunahme des Tages mehreren Veränderungen unterworfen sind, erwartet ... Besonders wird von ihm die Festsetzung der Richtung verlangt, welche man bei den gesetzlichen Gebeten, sowohl in der Moschee als



¹⁾ S. 15 der Ausg. des Qur'an von Dr. L. Ullmann, 7. Aufl., Vellhagen & Klasing.

²⁾ Das Bethaus zu Mekka al-bait al-harām = Ka'ba zu Mekka.

³⁾ La Religion des Mahométans, tiré du Latin de Mr. Reland (Pierre) [Hadriani Relandi: De Religione Mohammedica libri duo, Editio altera auctior, Traj. ad Rhenum 1717, A la Haye 1721] »M. Reland n'en rapporte que ces deux mots: 'Tu es Kibla mea in precibus meis' ... Mais j'ai pris la liberté d'en faire une Stance entière, pour varier mon sujet et principalement pour inspirer aux Chrétiens l'amour et le véritable esprit de la prière, qui doit être le langage du Cœur.«

⁴⁾ Real-Encyclopädie für Bibel und Talmud, Strelitz 1883, II, S. 1134.

⁵⁾ Récréations mathématiques et physiques, Paris 1790, Bd. III, S. 61.

⁶⁾ Reisebeschreibung nach Arabien, Kopenhagen 1772, I.

zu Hause, oder unter freiem Himmel nehmen muss, damit der Betende sich jederzeit mit dem Gesichte gegen die Ca'ba, d. i. gen den Tempel zu Mekka, den Ort der Anbetung, kehre. Daher muss der Astronom in der Moschee den Ort angeben, wo das mihrāb¹⁾ angebracht werden soll, d. i. eine Nische in der Richtung gegen Mekka, wohin die betende Gemeinde sich zu wenden hat.«

»Zur Angabe des mihrāb in der Moschee ist, der Natur der Sache nach, keine sehr große Genauigkeit nötig, da sich keine mathematisch richtige Linie gegen Mekka denken lässt, die jedem Mitgliede der Versammlung in der Moschee vollkommen zusagen könnte.«

»Anders verhält es sich mit der Bestimmung der Gesichtswendung unter freiem Himmel. Hier kann und muß für jeden Hausbesitzer, jede einzelne Person, Reisende usw. gesorgt werden. Dies geschieht durch horizontale Sonnenuhren mit senkrechtem Zeiger, die an öffentlichen Plätzen von freier Aussicht, besonders auf dem mināre²⁾, aufgestellt werden³⁾.«

Trägt man in die fertige Lineatur einer basiṭa die Qibla als gerade Linie unter dem für den in Frage kommenden Ort errechneten Winkel α zur Nordsüdlinie ein, so ist folgendes zu beachten: An Orten, deren Breite nördlich und größer als die Mekkas ist, zieht die Qibla südlich⁴⁾, südöstlich oder südwestlich. Dies trifft für den größten Teil des muhammedanischen Bereichs zu. In diesen Richtungen steht die Sonne in, vor oder nach ihrer oberen Kulmination, wobei der Schatten des miqjās nach N, NW oder NO fällt. Nach SSO oder SW selbst kann der Schatten im allgemeinen nicht fallen; da auch die maximale Morgen- und Abendweite in den gedachten Breiten nicht beträchtlich ist. Nur an Orten mit geringerer Breite als der Mekkas (z. B. in Aden) kann der Schatten selbst Qibla werden, wenn die Sonne daselbst südlich des Zenits kulminiert. Im anderen Falle ist der Schatten von Gegenständen, den die Sonne im Azimut von Mekka erzeugt, nach rückwärts über deren Fußpunkt hinaus zu verlängern, welcher Teil der geraden Linie alsdann nach Mekka weist. Bei Sonnenschein gibt der bei der nächsten Moschee angestellte Muwaqqit⁵⁾ oder Zeitverkündiger, durch öffentlichen Ausruf den Moment bekannt, in welchem die Sonne im Azimut von Mekka steht⁶⁾, d. h. der Schatten des miqjās in die Qibla fällt. Dann ist aber auch der Schatten einer jeden Person, eines jeden šahs, in besagtem Azimut, und ein Blick zur Sonne bringt den Muslim von selbst in die Mekkarichtung, die er sich für seinen Standort dauernd fixieren kann. Bei bewölktem Himmel wird er zur Ortsuhr eilen, resp. auf dem öffentlichen Gebetsplatz (muṣallan, von ṣalla, beten) im Anschauen der ewigen Lampe sich mit der religiösen Vorschrift in Einklang bringen⁷⁾.

Dazu wurden Tafeln berechnet, welche für gewisse Tage des Jahres die Höhe der Sonne angaben⁸⁾, wenn sie gerade durch das Azimut von Mekka ging (es wurde Rechnung angestellt für die Höhe der Sonne im Azimut der Qibla⁹⁾). Reiche Leute haben ihr eigenes Gebetszimmer mit Qibla.

¹⁾ Die Stelle, wo beim Gebet ursprünglich der Chalife (Fürst) stand.

²⁾ mināre (von nār = Licht), Stelle, wo Licht zu sehen ist. »Mināre bedeutete ursprünglich 'Leuchtturm' und wurde dann auf den Moscheenturm übertragen, da dieser in der Form den Leuchttürmen glich.« E. Littmann: Morgenländ. Wörter im Deutschen, Berlin, 1920, S. 21.

³⁾ Bemerkungen über die Gnomik der Araber, v. G. W. S. Beigel in »Fundgrube des Orients« I, 1809, Wien, S. 412 ff.

⁴⁾ So heißt qibla auch »südlich« (Vgl. J. Reinaud: Introduction dans la géographie; d'Aboulfida, CXCV).

⁵⁾ Von waqqat = die Zeit bestimmen

⁶⁾ Dieser Ausruf brauchte nicht regelmäßig stattzufinden und hatte mit dem Ruf bei den täglichen Gebetszeiten nichts zu tun (frdl. briefliche Mitteilung des Herrn Prof. C. A. Nallino in Rom).

⁷⁾ Das reich ausgestattete Werk von Murad gea d'Ohsen: Tableau général de l'empire ottoman, Paris 1788, gibt in Tafel XIV die Abbildung eines solchen öffentlichen Gebetsplatzes. Ein pyramidenförmig zugespitzter Stein, dessen Vorderseite mit der ewigen Lampe geschmückt ist, markiert die Qibla. Der Betende, der auf dem Gebetssteppich, saḡāda, kniet, wendet damit von selbst sein Antlitz gen Mekka.

⁸⁾ Solche Tafeln scheinen selten zu sein; ein Specimen für Kairo s. bei L. Am. Sédillot: Mém. sur les instrum. etc., S. 76. Die vollständige Tafel des Ibn Yūnus s. S. 42.

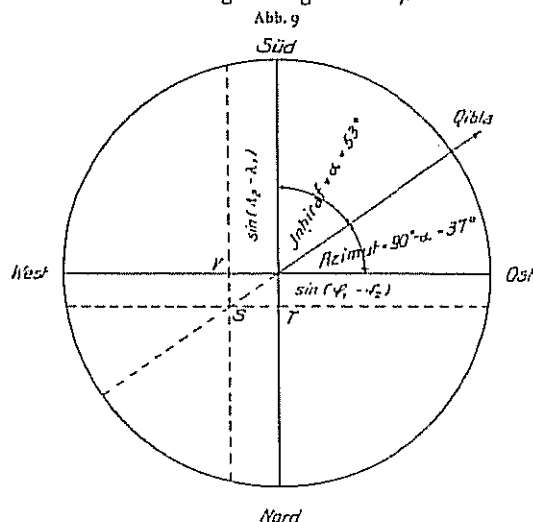
⁹⁾ Aus Abū'lfiḍā's Beschreibung von Ägypten, Artikel Fostāt (Beigel a. a. O., S. 409).

Um die genaue Festsetzung der Qibla haben sich natürlich verschiedene arabische Astronomen bemüht, doch ist die diesbezügliche Literatur nicht eben reichlich. Der spanisch-maurische Astronom Muslim b. Aḥmed al-Leiṭi Abū 'Obeida soll so leidenschaftlich um ihre Innehaltung besorgt gewesen sein, dass er den Beinamen ṣāhib al-qibla, d. i. Meister oder Bewahrer der Qibla, erhielt¹⁾. Aus der früheren Zeit existieren wenig diesbezügliche Handschriften (z. B. die von an-Nairizi Paris, No. 2457, fol. 78^v–80^v, sodann eine von Ibn al-Haiṭam [diese ist von mir in d. Ztschr. d. deutsch. Morgenl. Gesellsch. 1921, S. 242–254, veröffentlicht worden. Im Anhang lasse ich eine kurze Darlegung des Ibn al-Haiṭam'schen Gedankengangs folgen]; diejenigen des al-Birūni sind wohl alle verloren gegangen außer der in al-qānūn al-Mas'ūdi, S. 123^b enthaltenen Lösung, die rein geometrisch und der Haiṭam'schen ähnlich ist), aus der späteren mehr, doch ist davon leider gar nichts in europäische Sprachen übertragen. Ich habe deshalb auch aus den Hākimitischen Tafeln das auf die Qibla Bezügliche übersetzt, weil es wesentlich Neues bringt und gebe weiter unten die wörtliche Verdeutschung.

Zunächst seien hier einige Definitionen der Qibla in astronomischem Sinne angeführt. Das 28. Kapitel der Hākimitischen Tafeln hat die Überschrift: »Über die Kenntnis des Azimuts der Qibla, und das ist der Gesichtswendung zur Ka'ba.« Al-Birūni definiert²⁾: »Die Richtung der Qibla ist der Schnittpunkt des Horizontes des Ortes mit dem Kreise, der durch das Zenit der Bewohner dieses Ortes und Mekka geht, und sein Abstand von der Linie der Mitte oder derjenigen des zawāls (Mittags) ist der (Winkel)betrag, der abgeschnitten wird, wenn wir an ihm (dem Ort) den Gebetsteppich(-schemel) nach ihr (Qibla, Mekka) hinwenden«, und ähnliches habe ich in Handschriften der Berliner Bibliothek, (Nr. 193 S. 7, Nr. 1151 S. 16^a, Kap. 34) sowie auch bei al-Ġāḡminī gefunden³⁾.

Bei den arabischen Astronomen, deren Schriften in europäische Sprachen übersetzt sind, findet man gewöhnlich ein Näherungsverfahren für die Konstruktion oder Berechnung der Qibla angeführt⁴⁾, das um so genauere Resultate liefert, je geringer der Längen- und Breitenunterschied des fraglichen Ortes mit Mekka ist. Am deutlichsten ist dies Verfahren in der kleinen Schrift 281² der Ambrosiana (Mailand) dargelegt, die ebenfalls Ibn Yūnus zum Verfasser hat. Sie ist ein kurzer Abriss praktischer Astronomie, keinesfalls ein Auszug aus den Hākimitischen Tafeln. Man liest Fol. 106^b dieses Schriftchens folgendes (Abb. 9):

»Frage nach der Kenntnis des Azimuts der Qibla, und das ist, dass du vom Mittelpunkt aus die Größe des Sinus der Breitendifferenz — der Breite deines Ortes und der Mekkas — in Teilen, wovon 60 auf die Mittagslinie gehen, abträgst, und mache ein Zeichen (T), darauf trage ebenso vom Mittelpunkt aus auf der Ostwestlinie die Länge



¹⁾ H. Suter: Die Mathematiker und Astronomen der Araber usw., S. 39.

²⁾ Kitāb al-taḥīm w'al taqīm, d. i. Buch der Erklärung und Sternbedeutung (Exemplar der Berliner Bibliothek, S. 41^b).

³⁾ Die Astronomie des Maḥmūd ibn Muḥammad ibn 'Omar al-Ġāḡminī, deutsch von Rudloff und Hochheim, Leipzig 1891, S. 37.

⁴⁾ So bei al-Battānī, Opus astr. I, Kap. 56, S. 137; Delambre: Hist. de l'astr. d. moy. âge, S. 37 ff, bei Ibn Yūnus, (Mskr. 281 = d. Ambrosiana) und bei al-Ġāḡminī, S. 37.

des Sinus der Längendifferenz in Sechziger-Teilen ab, mache eine Marke (*V*) und ziehe durch die Marken der Sinus Gerade, und da, wo der beiden Durchschnitt (*S*) ist, lege den Faden auf den Schnittpunkt, und was der Faden vom Steigungsbogen auf der Seite der Ostwestlinie abschneidet, das ist die Richtung, und deren Ergänzung zu 90° ist der *inhirāf* (die Abweichung). Es heißt dann ferner (Fol. 106^b):

»Kenntnis des *Inhirāfs* der Qibla an den einzelnen Orten, und das ist, dass du den Sinus der Längendifferenz quadrierst, darauf quadriere den Sinus der Breitendifferenz, und ziehe aus der Summe der Quadrate die Wurzel, merke sie wohl und mache ihren Betrag zu Minuten. Die Längendifferenz (geteilt durch) die Hypotenuse ist der Sinus des *inhirāfs* der Qibla an jenem Orte, doch Gott, du weist es am besten.« Ein nachfolgendes Zahlenbeispiel sieht so aus:

$$\varphi_1 = 30^\circ; \varphi_2 = 21^\circ; \varphi_1 - \varphi_2 = 9^\circ; \sin 9^\circ = 9^p$$

$$\lambda_1 = 55^\circ; \lambda_2 = 67^\circ; \lambda_2 - \lambda_1 = 12^\circ; \sin 12^\circ = 12^p$$

$$\sqrt{\sin^2 9^\circ + \sin^2 12^\circ} = 15^p; 12^p = 720'; 60 \cdot \frac{720'}{15^p} = 48^p = \sin a; a = 53^\circ = \text{Inhirāf}; 90^\circ - a = 37^\circ = \text{Azimut.}$$

Es ist dies die Qibla für Kairo; wie wir weiter unten sehen werden, und $a = 53^\circ$ ist ein sehr guter Näherungswert. L. Am. Sédillot gibt das Beispiel des persischen Astronomen 'Alī Schāh Olai al-Munagġim nach dem Mskr. Nr. 173 der Bibliothek zu Paris¹⁾, dessen Behandlung ebenfalls vorstehende Näherungskonstruktion zugrunde liegt. Es handelt sich um die Qibla für den persischen Ort Hamadān. Es ist für

Hamadān — Mekka

$\lambda_1 = 83^\circ$, $\varphi_1 = 35^\circ 10'$, $\lambda_2 = 77^\circ 10'$, $\varphi_2 = 21^\circ 40'$ (von den glückseligen Inseln gerechnet). Aus diesen Daten folgt: $\lambda_1 - \lambda_2 = 5^\circ 50'$, $\varphi_1 - \varphi_2 = 13^\circ 30'$. Die genaue Berechnung mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie liefert $a = 22^\circ 15'$. Die Näherungskonstruktion ergibt rund $a = 23^\circ 2)$ und die Berechnung nach dieser Konstruktion $a = 23^\circ 3'$, so dass auch in diesem Falle dies Verfahren für die Praxis vollständig genau ist. Frühestens finden wir es bei al-Battānī. »Es ist kaum anzunehmen,« fügt Nallino im Kommentar diesen Battānischen Lehren hinzu, »dass der berühmte Astronom Falsches gelehrt habe, da er in ganz ähnlichen früheren Problemen richtige Formeln anwandte. Die Kenntnis des Azimuts der Qibla war aber für die Architekten, die die islamischen Tempel zu bauen hatten, unerlässlich. Da indessen ein Fehler von wenigen Graden kaum von Bedeutung ist, und die meisten der damaligen Architekten den trigonometrischen Kalkül nicht beherrschten, so wollte ihnen al-Battānī eine bequeme, der Wahrheit nahe kommende Regel für die Konstruktion der Qibla geben»³⁾.

Entgegen dieser allgemein geübten Näherungsmethode, gibt jedoch Ibn Yūnus im 28. Kapitel der Hākimitischen Tafeln⁴⁾ eine völlig exakte Darstellung der Auffindung der Qibla, Fol. 66^r ff. Hier die wörtliche Übersetzung des arabischen Textes: »Über die Kenntnis der Qibla, das heißt der Gesichtswendung zur Ka'ba. Um die Richtung der Qibla, d. i. ihre Abweichung (*inhirāt*) von der Mittagslinie, an einem Orte zu ermitteln, dessen Längenunterschied mit Mekka dir bekannt ist, bestimmst du den Sinus dieser Differenz: er ist der erste Sinus, und der Kosinus derselben sei der zweite Sinus. Multipliziere nunmehr

¹⁾ Mémoire sur les instruments etc., S. 99 (Abb. 13) und Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux, Paris 1845—1849, Bd. I, S. 297.

²⁾ Sédillots (ungenaue) Konstruktion gibt freilich den sehr von der Wahrheit abweichenden Wert $a = 30^\circ$. Ich habe die Konstruktion genau durchgeführt an Abb. 28 meiner Abhandlung: »Mittagslinie und Qibla« (Zschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde, Berlin 1913).

³⁾ Vergl. Opus astr. I, Kap. LVI, S. 137. Azimut qiblae supputare.

⁴⁾ Mskr. Oxford Hunt. 331.

den Kosinus der Breite jenes Ortes (φ_1) mit dem zweiten Sinus und teile das Produkt durch den Sinus totus. Das Ergebnis multipliziere weiterhin mit dem Kosinus der Breite Mekkas (φ_2), und was daraus hervorgeht, das behalte im Gedächtnis. Alsdann multipliziere den Sinus der Breite Mekkas mit dem Sinus der Breite des Ortes. Das Resultat zählst du zu dem im Gedächtnis Behaltenen, falls die Addenden (d. h. die zwei Ortsbreiten) nördlich sind, und wenn sie verschieden sind, ziehst du es davon ab. Was aus dieser Vermehrung oder Verminderung hervorgeht, teilst du durch den Sinus totus; das Resultat bestimmt einen Bogen: er ist die Höhe des Zenits der Bewohner Mekkas an diesem Orte. Du ziehst sie von 90° ab und nimmst den Sinus des Restes; du nennst ihn Kosinus der Höhe. Dann multiplizierst du den ersten Sinus, und das ist der Sinus der Längendifferenz, mit dem Kosinus der Breite Mekkas, und das Produkt teilst du durch den Kosinus der Höhe des Zenits der Bewohner Mekkas an diesem Ort. Was herauskommt, bestimmt den Sinus eines Bogens; der Bogen selbst ist der Abstand der Mekkarichtung von der Mittagslinie auf dem Horizont dieses Ortes, doch bei Gott ist die Leitung zum Richtigen.

Beispiel: Die Länge unseres Ortes ist 55° , die Länge Mekkas 67° ; die Breite unseres Ortes 30° , diejenige Mekkas 21° , gemäß dem, was einige Gelehrte gesagt haben. Die Längendifferenz ist daher $= 12^\circ$, der Sinus dazu $= 12^\circ 28' 29''$ und dies ist der erste Sinus; sein Kosinus ist $58^\circ 41' 20''$, und dies ist der zweite Sinus. Du multiplizierst ihn mit dem Kosinus der Breite des Ortes, und der ist $51^\circ 57' 51''$, und teilst das Produkt durch den Sinus totus; es ergibt sich $50^\circ 49' 38''$. Dies multiplizierst du mit dem Kosinus der Breite Mekkas, ich meine mit dem Sinus von 69° , und der ist $56^\circ 0' 53''$, und du teilst das Ergebnis durch den Sinus totus: dann kommt $47^\circ 26' 59'' 42'''$ heraus. Dies behältst du im Gedächtnis, darauf multiplizierst du den Sinus der Breite Mekkas, nämlich $21^\circ 30' 8''$, mit dem Sinus der Breite des Ortes, 30° , und teilst das Produkt durch den Sinus totus, dann kommt annähernd $10^\circ 45' 10'' 45'''$ heraus, und weil beide Breiten nördlich sind, so zählst du das Erhaltene zu dem im Gedächtnis Bewahrten, und das gibt $58^\circ 12' 10'' 27'''$. Der zugehörige Bogen ist $75^\circ 56' 3''$, und das ist die Höhe des Zenits der Bewohner Mekkas für Kairo. Du ziehst sie von 90° ab, und es bleibt $14^\circ 3' 57''$. Der Sinus hiervon ist $14^\circ 34' 56''$; ich aber multipliziere den ersten Sinus, $12^\circ 28' 29''$, mit dem Kosinus der Breite Mekkas, $56^\circ 0' 53''$, und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe, $14^\circ 34' 56''$, und es kommt $47^\circ 55' 9''$ heraus; der zugehörige Bogen ist $53^\circ 0' 6''$. Die Abweichung der Mekkarichtung von Süden ist also $53^\circ 0' 6''$, und Allāh führt zum Richtigen.

Setzt man die Vorschriften des Textes in trigonometrische Formeln um, und macht außerdem den Sinus totus $= 1 =$ dem Radius der Erdkugel, so hat man:

$$\cos(\Omega M) = \cos x = \cos \varphi_1 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \cos \varphi_2 \pm \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \quad (I)$$

und auch

$$\sin a = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \cos \varphi_2}{\sin x} \quad (II)$$

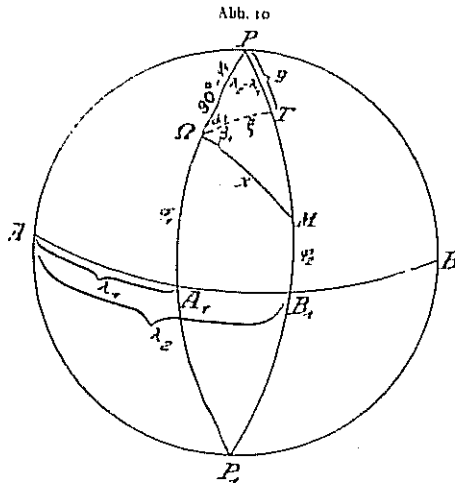
Es stellt sich somit (I) als Kosinussatz und (II) als Sinussatz der sphärischen Trigonometrie dar, und man könnte versucht sein daraus zu schließen, dass die Araber um das Jahr 1000 beide Sätze tatsächlich gekannt hätten. Für den Sinussatz trifft dies ja freilich zu. Er lässt sich frühestens bei Abū Naṣr b. 'Irāq († ca. 1000—1020), dem Lehrer al-Birūnis, nachweisen¹⁾. Trotzdem H. Hankel²⁾, M. Cantor³⁾ u. a. aus den Regeln, die schon al-Battāni und spätere arabische Astronomen zur Lösung gewisser Aufgaben der sphärischen Astro-

¹⁾ Vergl. H. Suter: Zur Trigonometrie der Araber (Bibl. math. [3] 1910, S. 156—160).

²⁾ Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 231 ff.

³⁾ Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, 2. Aufl., Leipzig 1894, S. 694.

nomie gaben, schließen wollen, die Araber hätten den Kosinussatz gekannt, möchte ich, sogar angesichts dieses, bis jetzt unbekannten, ganz zugunsten der eben genannten historischen Forscher sprechenden Falles, doch mit A. von Braunmühl¹⁾ dafür halten, dass die Araber in allen diesen Fällen die Lösung mittels der Projektionsmethode bewerkstelligten²⁾. So lange sie nicht den Sinus totus der Einheit gleich setzten, war ihnen die Erkenntnis einer abstrakten trigonometrischen Regel jedenfalls sehr erschwert.



»Zweite Methode über die Berechnung des Azimuts der Qibla. Du stellst den Sinus der Längendifferenz der 2 (Orts) Längen fest und nennst ihn ersten Sinus, und den Kosinus der Längendifferenz nennst du zweiten Sinus. Dann multiplizierst du den ersten Sinus mit dem Kosinus der Ortsbreite und teilst das Produkt durch den Sinus totus. Das Ergebnis ist der Sinus eines Bogens. Den Bogen ziehst du von 90° ab, nimmst den Sinus des Restes und behältst ihn im Gedächtnis. Dann multiplizierst du den zweiten Sinus mit dem Kosinus der Breite des Ortes und teilst das Produkt durch den Sinus des im Gedächtnis behaltenen Bogens, und was sich ergibt...« (Abb. 10).

Hier sind die Blätter des Oxforder Manuskriptes durcheinander geraten. Die Seite 67r ist nicht die Fortsetzung von 67v. Anscheinend ist die Lösung so zu denken: Wenn man ein sphärisches Lot QT auf den Bogen MP fällt, so ist im rechtwinkligen sphärischen Dreieck QTP tatsächlich:

$$\sin \xi = \cos \varphi_1 \cdot \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \quad (I)$$

Hieraus ist ξ zu berechnen. Bogen ξ teilt den Winkel $180^\circ - \alpha$ in zwei Teile: α_1 und β_1 . Nun soll $\cos \xi$ genommen werden. Es ist aber weiterhin

$$\cos (\lambda_2 - \lambda_1) = \cos \xi \cdot \sin \alpha_1,$$

woraus folgt:

$$\sin \alpha_1 = \frac{\cos (\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos \xi}. \quad (II)$$

Hiermit lässt sich der erste Teil des Winkels $180^\circ - \alpha$ berechnen. Es wäre darnach im Text die Multiplikation mit $\cos \varphi_1$ zu streichen. Nun läge es nahe, den Bogen $PT = y$ zu bestimmen, womit dann auch Bogen $TM = 90^\circ - \varphi_2 - y = m$ bekannt wäre. Man findet

$$\cos y = \cos \xi \cdot \sin \varphi_1 \quad (III)$$

Aus (III) ergeben sich y und m , und es sind jetzt im Dreieck QTM genügend Stücke bekannt, um auch β_1 zu ermitteln, allein der Autor dürfte wohl eine Verwendung der Kotangenten umgehen, und somit keinerlei Gebrauch von der Formel:

$$\sin \xi = \tan m \cdot \cot g \beta_1$$

¹⁾ Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, Leipzig 1900, S. 53 und 85.

²⁾ Wohl in der Art, wie sie bei den Azimutbestimmungen von mir angewandt wurden. Man vergleiche auch die treffliche Studie von A. Pein: Aufgaben aus der sphärischen Astronomie, gelöst durch planimetrische Konstruktionen und mit Hilfe der ebenen Trigonometrie, Bochum 1883, S. 12 und Tafel I.

machen. Deshalb musste er wohl auch noch Bogen $\Omega M = x$ berechnen aus

$$\cos x = \cos m \cdot \cos \xi, \quad (\text{IV})$$

und dann hatte er

$$\sin m = \sin \beta_1 \cdot \sin x$$

und damit

$$\sin \beta_1 = \frac{\sin m}{\sin x} \quad (\text{V})$$

Nach der Figur ist aber:

$$\alpha = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_1).$$

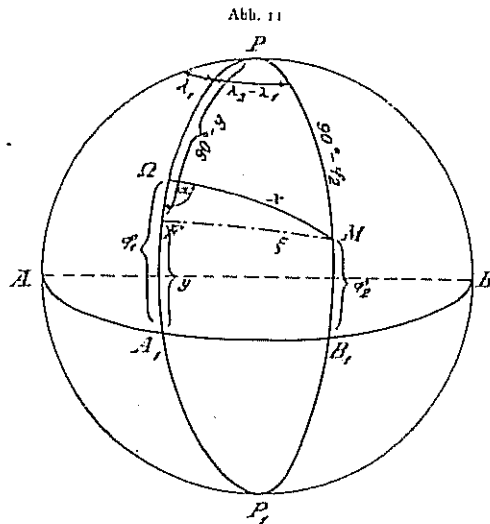
„Dritte Methode zur Berechnung des Azimuts der Qibla und Beispiel dazu. Multipliziere den Sinus der Differenz der Längen mit dem Kosinus der Breite Mekkas und dividiere das Produkt durch den Sinus totus. Dies entspricht dem ersten Sinus, den du im Gedächtnis behältst. Den ihm entsprechenden Bogen ziehst du von 90° ab, nimmst den Sinus des Restes und nennst ihn zweiten Sinus. Multipliziere alsdann den Sinus der Breite Mekkas mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den zweiten Sinus. Das Ergebnis ist der Sinus eines Bogens: Es ist der Bogen der Gleichung und ein Stück der Ergänzung der Breite des Ortes, für den du (die Qibla) ausrechnest, falls die Breite nördlich ist, und wenn sie südlich ist, so ziehst du den Bogen der Gleichung von der Äquatorhöhe des Ortes ab, für den du die Berechnung anstellst, und was nach der Vermehrung oder Verminderung heraus kommt, das ist der Bogen des *inhiṣāf*. Du nimmst seinen Sinus und multiplizierst ihn mit dem zweiten Sinus. Das Produkt teilst du durch den Sinus totus, der entsprechende Bogen ist die Höhe des Zenits der Bewohner Mekkas in diesem Ort. Diese Höhe ziehst du von 90° ab, nimmst den Sinus des Restes und nennst ihn Divisor. Nunmehr multiplizierst du den ersten Sinus mit dem Sinus totus; was herauskommt, bestimmt einen Bogen. Er ist der Abstand der Mekkarichtung von der Mittagslinie, doch bei Gott ist die Leitung zum Richtigen.“

Die Lösung des Autors macht mit Hilfe obenstehender Abbildung (11) dem Verständnis keine Schwierigkeiten. Wir fallen von M (Mekka) ein sphärisches Lot auf den Meridian des Ortes Ω , welches denselben in F trifft. Es schneidet auf diesem Meridian das Stück $A_1F = y$ ab. Man hat nun der Reihe nach:

$$\cos(90^\circ - MF) = \sin MF = \cos \varphi_2 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \quad (\text{I})$$

$$\sin MF = \sin \xi \quad = \text{erster Sinus}$$

$$\cos MF = \cos \xi \quad = \text{zweiter Sinus.}$$



$$\cos(90^\circ - \varphi_2) = \cos MF \cdot \cos PF$$

$$\sin \varphi_2 = \cos \xi \cdot \sin y$$

$$\frac{\sin \varphi_2}{\cos \xi} = \sin y \quad (II)$$

$$F\Omega = 90^\circ - [y + 90^\circ - \varphi_1] = \varphi_1 - y$$

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x = \cos \xi \cdot \cos F\Omega \quad (III)$$

$$\frac{\sin \xi}{\sin x} = \frac{\sin a}{\sin 90^\circ}$$

$$\sin a = \frac{\sin \xi}{\sin x} \quad \text{q. e. d.} \quad (IV)$$

»Beispiel: Die Verhältnisse sind dieselben wie im vorhergehenden Beispiel: Der Längensunterschied ist 12° ; sein Sinus $12^\circ 28' 29''$; der Kosinus der Breite Mekkas ist $56^\circ 0' 53''$. Du multiplizierst den einen von ihnen mit dem andern und teilst das Ergebnis durch den Sinus totus, es kommt (annähernd) $11^\circ 38' 46''$ heraus, und das ist der erste Sinus. Der zugehörige Bogen ist $11^\circ 11' 32''$. Den ziehst du von 90° ab, und es bleibt $78^\circ 48' 28''$. Der Sinus hiervon ist $58^\circ 51' 32''$, und das ist der zweite Sinus. Dann multipliziere ich den Sinus der Breite Mekkas, und der ist $21^\circ 30' 7''$, mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den zweiten Sinus, und der ist $58^\circ 51' 32''$, und es kommt $21^\circ 55' 8''$ heraus; der dazu gehörige Bogen ist $21^\circ 25' 37''$, und dies ist der Bogen der Gleichung, und weil die Breite des Ortes, für welche du die Rechnung machst, nördlich ist, zählst du den Bogen der Gleichung zur Ergänzung der Breite des Ortes, für den du die Rechnung machst, hinzu; — und sie ist sehr nahe 60° — die Addition gibt $81^\circ 25' 37''$, und das ist der Bogen des inhirāf; sein Sinus ist $59^\circ 19' 46''$. Du multiplizierst ihn mit dem zweiten Sinus, und der ist $58^\circ 51' 32''$, und teilst das Produkt durch den Sinus totus, das gibt $58^\circ 12' 4''$. Der zugehörige Bogen ist $75^\circ 56' 5''$, und das ist die Höhe des Zenits der Bewohner Mekkas in Miṣr. Du ziehst sie von 90° ab; es bleibt $14^\circ 3' 55''$. Der hierzu gehörige Sinus ist $14^\circ 34' 54''$, und dies ist der Kosinus der Höhe. Du multiplizierst den ersten Sinus, und er ist $11^\circ 38' 46''$, mit dem Sinus totus, und teilst das Produkt durch den Kosinus der Höhe; es kommt $47^\circ 55' 16''$ heraus. Der hierzu gehörige Bogen ist $53^\circ 0' 17''$, und das ist die Abweichung der Qiblarichtung von der Mittagslinie, und es ist Gott, der zum Richtigen verhilft).

Kurze Abhandlung (Risāla), welcher Muḥammed b. Ġābir b. Sinān al-Battānī Erwähnung tut. Folgende Risāla findet sich bei Muḥ b. Ġābir b. Sinān al-Battānī: Über die Kenntnis des Azimuts der Qibla; doch lehrt er hierbei Irriges, und es erwähnt diese Risāla schon ein anderer; denn sie ist bekannt; und das Falsche, was diese Männer lehren, ist evident und besteht in diesem: du quadrierst den Sinus der Längendifferenz, und ebenso den Sinus der Breitendifferenz, addierst die beiden Quadrate und ziehst alsdann aus der Summe die Wurzel. Dann multiplizierst du den Sinus der Längendifferenz mit dem Sinus totus und dividierst dies Produkt durch den Wert der Wurzel. Der dem Resultat entsprechende Sinus ist der Sinus des Azimuts der Qibla, von der Mittagslinie an gerechnet. Beispiel. Die Längendifferenz zwischen Miṣr (Kairo) und Mekka ist 12° ; der Sinus hiervon ist $12^\circ 28' 29''$. Der Breitenunterschied ist 9° , der Sinus dazu ist $9^\circ 23' 10''$. Du quadrierst den Sinus der Längendifferenz, und das gibt $155\,377\,181$; ebenso quadrierst du den Sinus

¹⁾ In Wahrheit ist jedoch a für Kairo oder Miṣr. nur $44^\circ 27'$; denn es ist $\varphi_1 = 30^\circ 4'$; $\varphi_2 = 21^\circ 30'$; $\lambda_2 - \lambda_1 = 8^\circ 43'$.

der Breitendifferenz, und das gibt $88^{\circ} 56' 41''$; die Summe beider Quadrate ist 2434335941 ; die Wurzel hieraus ist annähernd $15^{\circ} 36' 41''$. Nunmehr multiplizierst du den Sinus der Längendifferenz, und der ist $12^{\circ} 28' 29''$, mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch die Quadratwurzel; es kommt $47^{\circ} 56' 41''$ heraus. Der zu diesem Sinus gehörige Bogen ist $53^{\circ} 2' 32''$; er ist der Abstand der Mekkarichtung vom Süden. Es lehrt die Risāla eigentlich falsches, wie ich schon erwähnt habe; doch weicht das Resultat von der Wahrheit nicht viel ab, und bei Gott ist der Erfolg.

Die Berechnung mittels der Sekunden. Der Sinus der Längendifferenz ist $12^{\circ} 28' 29''$, das sind 44909 Sekunden; das Quadrat hiervon ist $= 2016818281$; ebenso hat man für den Sinus der Breitendifferenz $9^{\circ} 25' 10''$ oder 33790 Sekunden. Das Quadrat hiervon ist $= 1141764100$; die Summe der Quadrate beträgt 3158582381 . Die Wurzel hieraus ist angenähert $= 56201$. Das gibt $15^{\circ} 36' 41''$ wie es zuerst herauskam. Dann multiplizierst du 44909 mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch die Wurzel; es kommt $47^{\circ} 56' 41''$ heraus; der zugehörige Bogen, und er ist der Abstand der Mekkarichtung von Süden, ist $53^{\circ} 2' 32''$. Diese Art der Berechnung liefert nur ein angenähertes Resultat. Und wenn die Länge Mekkas und des Ortes, von dem aus man sich gegen Mekka wendet, gleich sind, so beachte: Wenn die Breite Mekkas kleiner ist als diejenige des Ortes, so geht die Linie der Gesichtswendung gerade genau nach Süden, und wenn die Breite Mekkas größer ist, so liegt die Gesichtswendung gerade genau gen Norden. Und wenn die Breite der beiden Orte gleich, ihre Längen aber verschieden sind, so beachte: Wenn die Länge Mekkas die größere ist, so ist die Gesichtswendung der Osten selbst, und wenn die Länge Mekkas die kleinere ist, so geht die Gesichtswendung nach dem Westen, doch bei Gott ist der Erfolg.

Und ich habe eine Höhentafel des Azimuts der Qibla für unsere Stadt berechnet unter der althergebrachten Annahme, dass die Abweichung des Azimuts der Qibla von Süden 52° ist. Die Länge kommt nicht in Betracht. Die Abweichung der Qibla von Osten gegen Süden beträgt alsdann 38° . Und mit dieser Tafel bringt man auch die Richtung der Qibla aus dem Stand der Sonne heraus, falls sie die in der Tafel angegebene Höhe erreicht hat. Und wenn die Menschen sich nach dieser Richtung hinwenden, so ist die Gesichtswendung im Azimut der Sonne, wenn sie die Höhe erreicht hat, in der sie für denselben Tag nach der Tafel steht. Die Menschen sind dann in der Qibla gerichtet. Und falls du mittels dieser (Qibla-)Höhe die Mittagslinie erhalten willst, so ziehe sie unter der Annahme, dass das Azimut der Sonne 38° ist, oder ihre Abweichung von Süden 52° . Und wenn man die Lage des mihrābs (Gebetsnische) festsetzen will, so ziehe man die Linie des Azimuts der Sonne mittels der aus der Tafel genommenen Höhe, errichte auf ihr eine Senkrechte und platziere das mihrāb in der Linie, die auf dem Azimut senkrecht steht¹⁾, womit wir (unsere Darlegungen) beenden, wenn Gott will.

Es folgt jetzt die Tafel des Azimuts der Qibla, berechnet unter der Annahme, dass der inhirāf von der Mittagslinie gegen den Osten 52° ist; er ist 38° von Osten gen Süden zu, doch Allāh führt zum Richtigen, und die Tafel nimmt ihren Anfang auf der nächstfolgenden Seite.

¹⁾ Das mihrāb ist als Fläche quer (senkrecht) zum Azimut gerichtet.

TAFEL DER (SONNEN-) HÖHE DES AZIMUTS DER QIBLA, UNTER DER VORAUSSETZUNG, DASS DIE ABWEICHUNG VON SÜDEN = 52° IST. ($\varphi = 30^{\circ}$)

Zahl	Widder		Zahl	Stier		Zahl	Zwillinge		Zahl	Krebs		Zahl	Löwe		Zahl	Jungfrau		Zahl	Waage		Zahl	Skorpion		Zahl	Schütze		Zahl	Steinbock		Zahl	Wasser- mann		Zahl	Fische	
	o	'		o	'		o	'		o	'		o	'		o	'		o	'		o	'		o	'		o	'		o	'		o	'
1	47	23	1	63	13	1	75	27	1	80	1	1	74	49	1	62	14	1	46	18	1	30	28	1	18	14	1	13	40	1	18	52	1	31	27
2	47	56	2	63	42	2	75	44	2	80	0	2	74	30	2	61	44	2	45	45	2	29	59	2	17	56	2	13	41	2	19	11	2	31	57
3	48	29	3	64	11	3	76	2	3	79	58	3	74	10	3	61	14	3	45	12	3	29	30	3	17	39	3	13	42	3	19	31	3	32	27
4	49	2	4	64	40	4	76	19	4	79	56	4	73	50	4	60	43	4	44	39	4	29	1	4	17	22	4	13	45	4	19	51	4	32	57
5	49	34	5	65	8	5	76	35	5	79	53	5	73	29	5	60	13	5	44	6	5	28	33	5	17	6	5	13	48	5	20	12	5	33	28
6	50	7	6	65	36	6	76	50	6	79	49	6	73	7	6	59	42	6	43	34	6	28	4	6	16	50	6	13	52	6	20	33	6	33	59
7	50	40	7	66	4	7	77	6	7	79	45	7	72	46	7	59	11	7	43	1	7	27	36	7	16	35	7	13	56	7	20	55	7	34	30
8	51	13	8	66	32	8	77	20	8	79	40	8	72	24	8	58	40	8	42	28	8	27	9	8	16	21	8	14	1	8	21	17	8	35	1
9	51	45	9	66	59	9	77	34	9	79	34	9	72	1	9	58	9	9	41	56	9	26	41	9	16	7	9	14	7	9	21	40	9	35	32
10	52	18	10	67	26	10	77	48	10	79	28	10	71	38	10	57	38	10	41	23	10	26	14	10	15	53	10	14	13	10	22	3	10	36	3
11	52	50	11	67	53	11	78	0	11	79	20	11	71	14	11	57	6	11	40	51	11	25	48	11	15	40	11	14	20	11	22	26	11	36	35
12	53	23	12	68	20	12	78	13	12	79	13	12	70	50	12	56	35	12	40	18	12	25	21	12	15	28	12	14	28	12	22	50	12	37	6
13	53	55	13	68	46	13	78	24	13	79	4	13	70	26	13	56	3	13	39	46	13	24	55	13	15	17	13	14	37	13	23	15	13	37	38
14	54	27	14	69	11	14	78	35	14	78	55	14	70	2	14	55	31	14	39	14	14	24	30	14	15	6	14	14	46	14	23	39	14	38	10
15	54	59	15	69	37	15	78	45	15	78	45	15	69	37	15	54	59	15	38	42	15	24	4	15	14	55	15	14	55	15	24	4	15	38	42
16	55	31	16	70	2	16	78	55	16	78	35	16	69	11	16	54	27	16	38	10	16	23	39	16	14	46	16	15	6	16	24	30	16	39	14
17	56	3	17	70	26	17	79	4	17	78	24	17	68	46	17	53	55	17	37	38	17	23	15	17	14	37	17	15	17	17	24	55	17	39	46
18	56	35	18	70	50	18	79	13	18	78	13	18	68	20	18	53	23	18	37	6	18	22	50	18	14	28	18	15	28	18	25	21	18	40	18
19	57	6	19	71	14	19	79	20	19	78	0	19	67	53	19	52	50	19	36	35	19	22	26	19	14	20	19	15	40	19	25	48	19	40	51
20	57	38	20	71	38	20	79	28	20	77	48	20	67	26	20	52	18	20	36	3	20	22	3	20	14	13	20	15	53	20	26	14	20	41	23
21	58	9	21	72	1	21	79	34	21	77	34	21	66	59	21	51	45	21	35	32	21	21	40	21	14	7	21	16	7	21	26	41	21	41	56
22	58	40	22	72	24	22	79	40	22	77	20	22	66	32	22	51	13	22	35	1	22	21	17	22	14	1	22	16	21	22	27	9	22	42	28
23	59	11	23	72	46	23	79	45	23	77	6	23	66	4	23	50	40	23	34	30	23	20	55	23	13	56	23	16	35	23	27	36	23	43	1
24	59	42	24	73	7	24	79	49	24	76	50	24	65	36	24	50	7	24	33	59	24	20	23	24	13	52	24	16	50	24	28	4	24	43	34
25	60	13	25	73	29	25	79	53	25	76	35	25	65	8	25	49	34	25	33	28	25	20	12	25	13	48	25	17	6	25	28	33	25	44	6
26	60	43	26	73	50	26	79	56	26	76	19	26	64	40	26	49	2	26	32	57	26	19	51	26	13	45	26	17	22	26	29	1	26	44	39
27	61	14	27	74	10	27	79	58	27	76	2	27	64	11	27	48	29	27	32	27	19	30	27	13	42	27	17	39	27	29	30	27	45	12	
28	61	44	28	74	30	28	80	0	28	75	44	28	63	42	28	47	56	28	31	57	28	19	11	28	13	41	28	17	56	28	29	59	28	45	45
29	62	14	29	74	49	29	80	1	29	75	27	29	63	13	29	47	23	29	31	27	29	18	52	29	13	40	29	18	14	29	30	23	29	46	18
30	62	43	30	75	8	30	80	2	30	75	8	30	62	43	30	46	50	30	30	57	30	18	33	30	13	39	30	18	33	30	57	30	46	50	

Montucla (1725—1799) lehrt eine rein zeichnerische Bestimmung der Qibla¹⁾, die er gelegentlich eines Schiffsbruchs, der ihn längere Zeit auf der Insel Sokotra zu verweilen nötigte, ersann, auf inständiges Bitten eines dortigen frommen Musulmans. Diese Konstruktion habe ich mit einem Beweis versehen und vor einigen Jahren veröffentlicht²⁾.

In neuester Zeit ist die Qiblafrage auch bereits Gegenstand kartographischer Studien geworden. So erwähnt I. Craig³⁾ wiederholt eine »Mecca retroazimuthal projection«, die den Zweck hat, eine Karte herzustellen, in der für jeden Punkt die wahre Richtung der Qibla sofort abgelesen werden kann. Dabei sind die Meridiane als parallele äquidistante Geraden angenommen. E. von Hammer schlug vor, zur Gegenazimutalität noch die Mittabstandstreue hinzuzunehmen, so dass ein solches Kartogramm auch außerdem noch die kürzeste Entfernung eines Ortes von Mekka abzugreifen gestattet. In diesem Falle geht natürlich die Geradlinigkeit der Meridiane verloren. Ich habe dasselbe einer mathematischen Behandlung unterzogen⁴⁾ und auch jüngst einen fertigen Netzentwurf gegeben⁵⁾, den ich als Abbildung 12 hier beifüge. Das Kartennetz wurde so gewonnen, dass ich mit Kenntnis von $\lambda_2 - \lambda_1$, ferner φ_1 und φ_2 zuerst den längentreu abzubildenden Bogen $QM = x$ ermittelte nach der Formel:

$$\cos x = \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos (\lambda_2 - \lambda_1),$$

hierauf nach dem Sinussatz:

$$\sin a = \frac{\cos \varphi_2}{\sin x} \cdot \sin (\lambda_2 - \lambda_1)$$

das zugehörige a bestimmte. Nachdem ich für die Breiten und Längen von 10° zu 10° auf diese Weise x und a ermittelt hatte, beschrieb ich um Mekka als Kartenmittelpunkt, konzentrische Kreise mit den bez. Werten von $\arcsin x$ (in Linearmaß) als Radien und trug dann im Kartenmittelpunkt an den geradlinigen Mittelmeridian die bez. Werte des Gegenazimuts a an, da ja in unserem Fall das Azimut nach der Kartenmitte in dieser selbst abgelesen werden kann. So erhielt ich eine Reihe von Punkten der Parallelkreisbilder, die auch gleichzeitig Punkte der Meridiankurven sind. Die Verbindung aller Netzschnittpunkte ergab untenstehendes Kartenbild (Abb. 12). Eine Tabelle von 180 Orten mit dem entsprechenden Inhäuf der Qibla findet man in dem Gothaer arab. Mskr. 1483, das ein Bruchstück der astronomischen Tafeln des Ibn as-Sâṭir darstellt (S. 73²—75²).

3. DAS 'AŞR

Wenn schon die Qibla der arabischen Sonnenuhrkunde einen gewissen fremdartigen Reiz verleiht, so tritt ihr exotischer Charakter noch heller ins Licht, wenn wir jetzt von jener merkwürdigen »religiösen Geometrie« handeln, zu deren Ausbau die islamitische Religion den Astronomen, der, wie wir bereits wissen, gleichzeitig Diener derselben war, veranlasste. Die Verehrung Allāhs geschieht durch das Gebet (ṣalāt), zu dessen Verrichtung der gläubige Musulman fünfmal während des Tages verpflichtet ist: 1. bei Tagesanbruch vor

¹⁾ *Récréations mathématiques et physiques*, Bd. III, S. 63.

²⁾ Azimutale und gegenazimutale Karten mit gleichabständigen parallelen Meridianen. (Ann. d. Hydrographie u. maritimen Meteorologie, 1913, S. 36 ff.)

³⁾ The Theory of Map-Projections with special reference to the projection used in the Egyptian Survey Department, Kairo 1911.

⁴⁾ Die gegenazimutale mittabstandstreue Karte in konstruktiver u. theoret. Behandlung (Ann. hydr. 1913, S. 466).

⁵⁾ Die Mekka- oder Qiblakarte (Kartographische u. Schulgeogr. Ztschr. 1917, S. 184).

Sonnenaufgang (fağr¹⁾, ṣubḥ), 2. um die Mittagszeit (zuhr = die Zeit gleich nach Mittag²⁾, 3. am Nachmittag ('aṣr), 4. bei Sonnenuntergang (mağrib), 5. am Spätabend (ṣā' = Abend, erster Teil der Nacht). Dazu kommt das obligatorische Wochengebet am Freitag, das 1/4 Stunden früher als der zuhr stattfindet (ṣalāt al-ğum'a³⁾). Es ist einleuchtend, dass die Islāmgläubigen zu der genauen Erfüllung dieser Vorschriften zuverlässiger Zeitangaben bedürfen. Hierzu dienten jahrhundertlang Wasser-⁴⁾, Sand- und Sonnenuhren. Besonders um die zweckmäßige Festsetzung des 'aṣr war es den Religionsgelehrten und Astronomen zu tun; denn dieser Tageszeit wird eine ganz besondere Bedeutung im Islām beigelegt, worüber uns I. Goldziher (Budapest) folgende Details gibt⁵⁾: „Der Prophet selbst pflegte dem 'aṣr große Wichtigkeit beizulegen und es sehr frühe, bald nach dem zuhr, also nahe der oberen Zeitgrenze, zu vollziehen. Er ging nach Beendigung des 'aṣr oft noch nach El-ʿAwālī (1—2 deutsche Meilen von Medina) und kam dort an, als die Sonne noch hoch am Himmel stand.“ Der Mystiker Abū-Tālib al-Mekki berichtet von folgendem Ausspruch des Propheten: „Wenn jemand zu jener Zeit (gemeint ist das 'aṣr) 4 Rakahs verrichtet und dabei die Koranrezitation, die Kniebeugung und Prostration korrekt vollführt, so beten 70 000 Engel mit ihm und flehen bei Gott um Sündenvergebung für ihn, denn die Tore des Himmels werden zu dieser Stunde geöffnet, und ich liebe es, dass man gerade damals von mir eine fromme Handlung vorlegen könne.“

An einer Reihe von Beispielen tut Goldziher dar, dass man sehr gerne gerichtliche Eide im Zusammenhang mit dem 'aṣr ablegen lässt. Man scheint dabei vorauszusetzen, dass der Schwörende aus Scheu vor der heiligen Weihe zu dieser Tageszeit nicht den Mut haben würde, einen Meineid zu schwören. Auch auf die Frage nach dem Grund der besonderen Bedeutung des 'aṣr gibt Goldziher eine Antwort: „Nach der mohammedanischen Überlieferung lösen zur 'aṣr-Zeit die zur Überwachung der Welt hinabgesandten Engel einander ab; die Tagesengel kehren in den Himmel zurück, während die für die andere Hälfte des Tages bestimmten Engel auf der Erde erscheinen. Man möge nun bestrebt sein, dass die zurückkehrenden Engel auf die Frage Allāhs: „Wie habt ihr meine Diener zurückgelassen?“ den Bericht erstatten können, dass sie die Muslims im Gottesdienst verlassen haben.“

Uns interessiert hier vor allem die Frage nach der zeitlichen Festsetzung des 'aṣr. Wir können auf Grund unserer Nachforschungen folgendes berichten:

1. Bei Muradghea d'Ohsson⁶⁾ heißt es, dass nach dem Imām Šāfi'i (764—819) die Gebetsstunde für das 'aṣr in dem Augenblick beginnen müsse, wenn die Sonnenuhr einen Schatten gleich der Länge des Zeigers wirft; dieser Zeitpunkt des Tages heißt 'aṣr-awwal, erste Zeit, und der Moment der doppelten Schattenlänge 'aṣr-tānī⁷⁾, zweite Zeit.

2. Bei demselben Gewährsmann findet man (ohne Nennung eines Autors) die Stelle⁸⁾: „Das ṣalāt-aṣr beginnt im Augenblick, wenn die Sonnenuhr einen Schatten gleich der doppelten Länge ihres Zeigers zeigt, und endet mit Sonnenuntergang.“

¹⁾ al-fağr und al-ṣafaq sind die Zeiten der Morgen- und Abenddämmerung. Ihre Bestimmung mittels der Regeln der Trigonometrie kann ich frühestens bei Ḥabāṣ al-Ḥāsib (Berlin, Mskr. Wetzstein, I, 90, S. 153^b), sodann bei Ibn Yūnus († 1009) und al-Bīrūnī (973—1048) nachweisen. Das 16. Kap. d. Ḥākim-Tafeln ist übersetzt v. J. J. Sédillot in der Ausg. des Marrākuṣī (S. 298; Leidener Mskr. 143, S. 349); das entsprechende Kapitel bei Bīrūnī steht im Maṣ'ūdī'schen Qānūn (Berlin 5667, Kap. XIII, S. 177) und hat die Überschrift: „Über die Zeiten des Aufgangs des Morgenrots und des Verlöschs des Abendrots.“ Über die falsche Dämmerung, die mit dem Zodiaklicht identisch ist, vergl. man die treffliche Studie (nach al-Bīrūnī) von E. Wiedemann: „Über ṣubḥ al-kāḍib“ (Der Islām, 1912, S. 195).

²⁾ Für das Mittagsgebet kommt die Zeit bis zum 'aṣr in Betracht, mit Ausnahme der 40 Minuten vor und nach dem Durchgang der Sonne durch den Meridian. Sédillot nennt den zuhr: „l'instant le plus chaud de la journée.“

³⁾ Vergl. die klaren Ausführungen bei C. Becker: im Baedeker v. Ägypten, 1913, S. 81f.

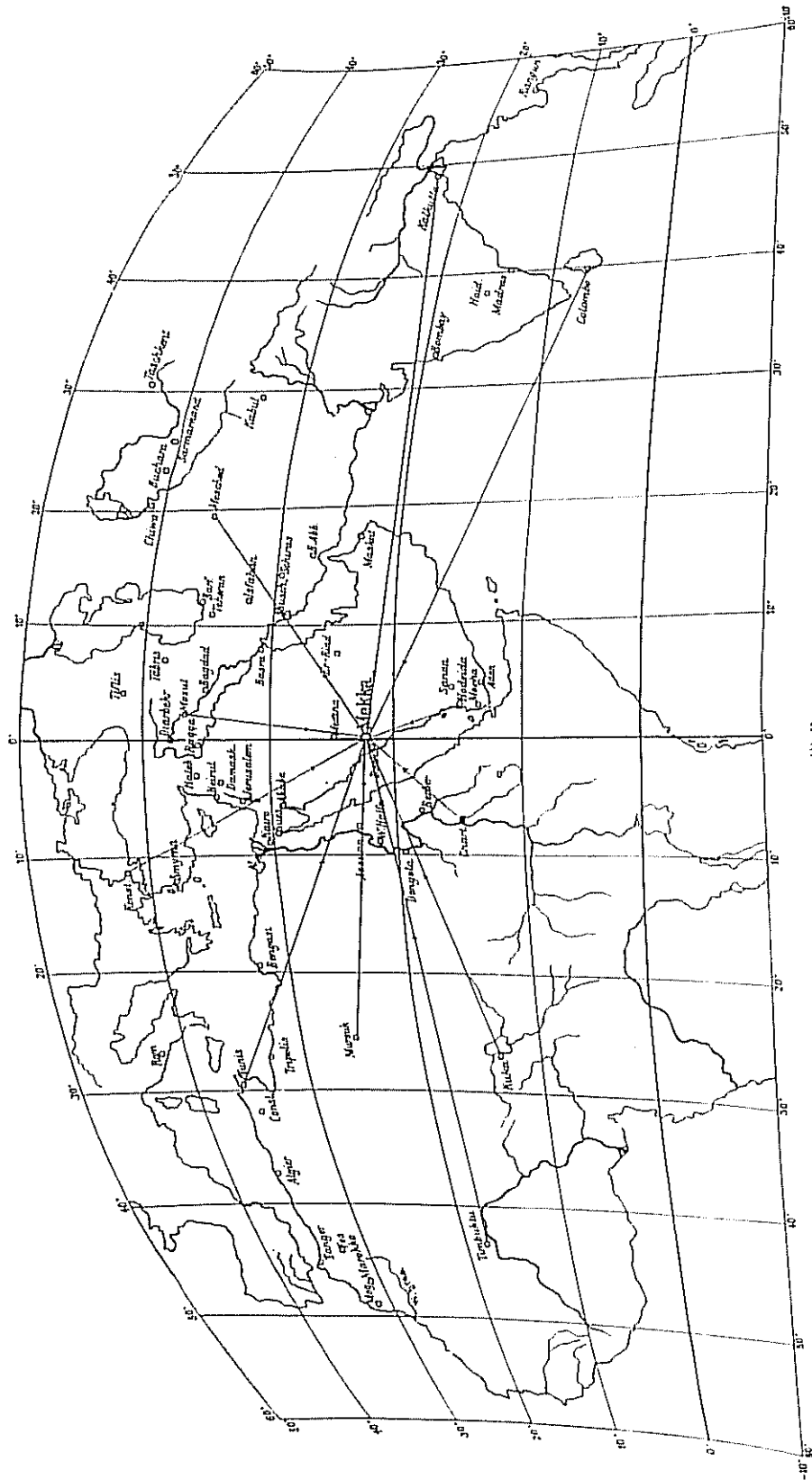
⁴⁾ Vergl. E. Wiedemann u. F. Hauser: Über die Uhren im Bereiche der islamischen Kultur, Halle 1915.

⁵⁾ Die Bedeutung des Nachmittags im Islām (Archiv für Religionswissenschaft IX, S. 293ff.).

⁶⁾ Tableau général de l'empire ottoman, Paris 1788, S. 173.

⁷⁾ Im Türkischen asr-sani, da dort die arabische Aussprache im allgemeinen nicht beachtet wird.

⁸⁾ Ebenda.

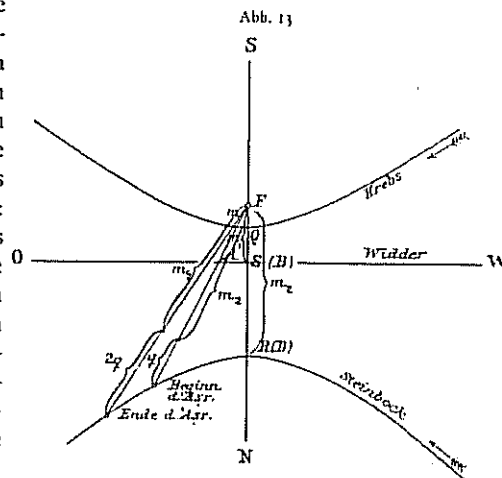


Abt. 12

3. Nach den Imäms Mālik und Hambal ist das 'aṣr jene Zeit des Nachmittags, die mit dem Augenblick eintritt, in welchem der Horizontalschatten gleich ist dem Mittagsschatten, vermehrt um die Länge q des Gnomons. Es endigt, wenn der Gnomonschatten um die doppelte Höhe ($2q$) des Gnomons länger ist als der Mittagsschatten. Diese Festlegung hat vor allem Eingang in die arabische Astronomie gefunden.

4. Nach dem bekannten Stifter einer der vier mohammedanischen Rechtsschulen Abû Hanîfa ist es kein Verdienst, das 'ašr möglichst frühe zu vollziehen; er setzt deshalb seinen Beginn auf jenen Zeitpunkt fest, der mit dem Ende des 'ašr nach 3. identisch ist).

Bereits bei al-Marâkûsî ist die Festsetzung des 'aşr, wie sie unter 3. angeführt ist, auf dem Zifferblatt der basîta durch eine Kurve veranschaulicht, die man leicht erhält, wenn man alle Tageshyperbeln mit den Kreisen zum Schnitt bringt, die man um den Fußpunkt des Gnomons als Mittelpunkt mit einem jeweiligen Radius: Mittagsschatten + Länge des Gnomons ($m+g$) oder ($m+2g$), beschreibt. Auf diese Weise habe ich auch die 'aşr-Linien im Bilde der basîta gewonnen. Auch habe ich die Kurve in Abbildung 14 in orthographischer und gnomonischer Projektion gezeichnet. Nachstehend gebe ich einige mathematische Entwicklungen über das erste und zweite 'aşr.



Sei die Höhe des schattenwerfenden Gegenstandes (Gnomons) = q , so ist der Mittagsschatten bei gegebener Polhöhe p und Sonnendeklination δ , falls die Sonne südlich vom Zenit kulminiert,

$$m = q \cdot \operatorname{ctg} [90^\circ - (\varphi - \delta)] = q \cdot \operatorname{tang} (\varphi - \delta).$$

Damit hat man

$$m + q = q \cdot [1 + \tan(\varphi - \delta)]. \quad (1)$$

In diesem Augenblick möge die Sonnenhöhe $=h$ sein, dann ist

$$\cotg h = 1 + \tan (p - \delta). \quad (11)$$

Kulminiert aber die Sonne bei sehr großen positiven Deklinationen, die sie in Wirklichkeit freilich nie erreicht, oder aber, falls φ klein genug ist, nördlich des Zenits, so ist die Mittagshöhe der Sonne $= 90^\circ - \delta + \varphi = 90^\circ - (\delta - \varphi)$, und somit

$$\cotg h = 1 + \tan(\delta - \varphi) \quad (III)$$

(II) und (III) sind die Gleichungen unserer Kurve auf der Kugel, die wir der weiteren Behandlung zunächst zugrunde legen wollen.

Unter Berücksichtigung, dass

$$\sin h = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s$$

¹⁾ E. W. Lane: *An account of the manners and customs of the modern Egyptians*, London 1871, Bd. 1, S. 91.

ist, findet man aus (II) und (III) leicht

$$\cos s = -\tan \varphi \cdot \tan \delta + \frac{1}{\cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot [1 + [1 \pm \tan(\varphi - \delta)]^2]} \quad (\text{IV})$$

Setzt man in (IV) $s = 180^\circ$, so erhält man mit Berücksichtigung des Minuszeichens unter der Wurzel

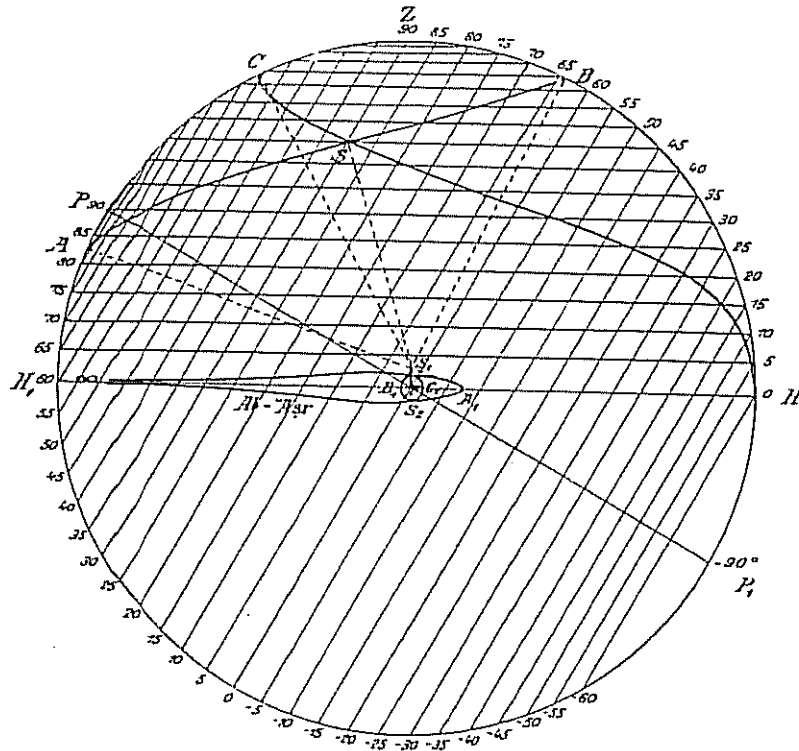
$$-\cos(\varphi + \delta) = \frac{1}{[1 + [1 + \tan(\delta - \varphi)]^2]}$$

oder

$$1 + \tan^2(\varphi + \delta) = 1 + [1 + \tan(\delta - \varphi)]^2$$

$$\tan(\varphi + \delta) = \pm [1 + \tan(\delta - \varphi)].$$

Abb. 14



Unter Beachtung des Minuszeichens auf der rechten Seite zieht man hieraus

$$\tan(\varphi - \delta) - \tan(\varphi + \delta) = 1,$$

$$\tan \delta = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \pm \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} \quad (\text{V})$$

Mit $\varphi = 30^\circ$ gibt (V):

$$\delta_1 = +8^\circ 10'; \delta_2 = -19^\circ 20'.$$

Während δ_2 ohne geometrische Bedeutung ist, definiert δ_1 den Punkt A , in welchem die Möglichkeit des 'ašr endigt, da bei $\delta > 83^\circ 10'$ der Unterschied der unteren und oberen Kulminationshöhe nicht mehr groß genug ist, um noch Schattenlängen zu erzeugen, die sich um die Höhe des Gnomons unterscheiden.

Ebenso erhält man die Punkte B und C , wenn man in (IV) $s=0^\circ$ setzt und das Minuszeichen unter der Wurzel beachtet, oder $s=180^\circ$ setzt bei Berücksichtigung des Pluszeichens. Man findet das erstmal

$$\begin{aligned}\tan(\delta - \varphi) &= -1 - \tan(\delta - \varphi) \\ \delta - \varphi &= -26^\circ 32' \\ \delta &= +3^\circ 28' \text{ (Punkt } B),\end{aligned}$$

und das zweitemal

$$\begin{aligned}\tan(\varphi - \delta) &= -1 - \tan(\varphi - \delta) \\ \delta &= +56^\circ 32' \text{ (Punkt } C).\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Berechnungen und nach den Formeln (II) und (III) wurde das orthographische Bild unserer Kurve gewonnen und dies wiederum gnomonisch auf die Horizontalebene projiziert. Wie man aus Abbildung 14 erkennt, durchsetzen sich zwei getrennte Kurvenzweige im Punkte S . Zu dem auf der Kugel dargestellten Teil der Nachmittagsseite gehört natürlich der kongruente und symmetrisch liegende Teil der Morgenhalbkugel. In der gnomonischen Projektion ist die ganze Kurve gezeichnet. Sie besteht aus zwei ungleichen Hälften, deren eine sich bis ins Unendliche hin erstreckt. Je geringer die Polhöhe φ ist, desto größer wird der Durchmesser B_1A_1 . Ist $\varphi=0^\circ$, so sind beide Zweige der Kurve kongruent; die Spitzen liegen dann in unendlicher Ferne, die sich durchschneidenden Kurvenbögen S_1S_2 haben keine praktische Bedeutung. Man gewinnt sie dadurch, dass man in der Formel $\cotg h = 1 + \tan(\varphi - \delta)$, die eigentlich nur gilt, bis $\delta = \varphi$, d. h. $h=45^\circ$ geworden ist, (also obere Kulmination südlich vom Zenit) nun doch δ weiter wachsen lässt, womit die rechte Seite < 1 , also $h > 45^\circ$ wird. Oder gnomonisch gesprochen: man fasse die Mittagschatten, die von Sonnenständen nördlich des Zenits stammen, als negative Längen auf und subtrahiere sie von q . Dies ist so lange möglich, bis $q - q \cdot \tan(\delta - \varphi) = q \cdot \tan(\delta - \varphi)$ wird; dann erreicht das 'ašr den Meridian. Hieraus findet man wieder

$$\tan(\delta - \varphi) = \frac{1}{2}; \delta = 56^\circ 32', \text{ wie oben usw.}$$

Bei $h = 45^\circ$ durchsetzen sich beide Kurvenzweige im Punkte S ; die Sonne kulminiert im Zenit. B und C geben für die gnomonische Projektion die Stellen senkrechter Tangenten (B_1 und C_1). Ist F der Fußpunkt des Gnomons, so ist

$$FC_1 = FB_1 = \pm q \cdot \cotg[90^\circ - (56^\circ 32' - 30^\circ)] = \pm q \cdot \tan 26^\circ 32' = \pm \frac{q}{2}.$$

Wir fragen jetzt nach dem Winkel α , den die sphärische Kurve in irgendeinem Punkte mit dem Meridian bildet. Zu dem Zweck betrachten wir das infinitesimale rechtwinklige Dreieck ABC , dessen Hypotenuse AB das Linienelement der 'Ašr-Kurve $= d\sigma$ ist, dessen Katheten $BC = d\delta$ und $AC = ds \cdot \cos \delta$ sind. Dann liest man aus Abbildung 15 ab:

$$\tan \alpha = \frac{ds \cdot \cos \delta}{d\delta}$$

Abb. 15



Wir differenzieren (IV) nach s und δ und finden

(VI)

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\cos \delta \cdot ds}{d\delta} = \frac{1}{-\sin s \cdot \cos \varphi} \left\{ \frac{\sin \varphi}{\cos \delta} + \frac{\operatorname{tang} \delta}{\sqrt{1 + [1 \pm \operatorname{tang}(\varphi - \delta)]^2}} - \frac{\operatorname{tang} \delta}{\cos^2(\varphi - \delta) \cdot \sqrt{1 + [1 \pm \operatorname{tang}(\varphi - \delta)]^2}} \right\}$$

Hieraus erkennt man:

1) $\alpha = 90^\circ$, falls $s = 0^\circ$ oder 180° . Die Kurve steht mithin beim Durchgang durch den ersten Meridian senkrecht auf diesem (Punkte B und C). Andere Rektangularitäten sind ausgeschlossen, da z. B. zu $\cos \delta = 0$, d. h. $\delta = 90^\circ$ kein Punkt der Kurve gehört.

2) $\alpha = 0^\circ$ kann nur entstehen bei Annullierung der geschwungenen Klammer. Ersetzen wir für einen Augenblick $1 \pm \operatorname{tang}(\varphi - \delta)$ durch $\cotg h$, so schreibt sich (VI):

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \delta} + \operatorname{tang} \delta \cdot \sin h = \frac{\sin^2 h \cdot \cos h}{\cos^2(\varphi - \delta)}, \quad (\text{VII})$$

(VII) kann unter Zuhilfenahme von (II) oder (III) leicht durch Näherung aufgelöst werden. Mit (II) gelangt man zu $\delta = +17^\circ$ als der gesuchten Wurzel von (VII). An dieser Stelle berührt also (für $\varphi = 30^\circ$) der Meridian die 'Asr-Kurve. Da dann auch gleichzeitig $\frac{ds}{d\delta} = 0$ ist, so wird s für diesen Wert von δ ein Maximum. Aus (IV) errechnet man alsdann: $s = 54^\circ 12'$.

Falls $\varphi = 0^\circ$ ist, leitet man aus (VI) leicht für $\alpha = 0^\circ$ die einfache Gleichung ab:

$$\operatorname{tang} 2\delta = 2$$

$$\delta = 31^\circ 45'$$

$$s = 51^\circ 49', 62,$$

(VII) wird aber auch für $h = 0^\circ$ erfüllt. Dann ist $\delta = \varphi - 90^\circ$, mithin $\cos \delta = \sin \varphi$ und folglich die linke Seite = 1. Und da $\cos(\varphi - \delta) = \cos 90^\circ = 0$, so hebt sich rechts $\sin^2 h$ gegen $\cos^2(\varphi - \delta)$, und es bleibt $1 = \cos 0^\circ$. Mithin ist der erste Meridian auch Tangente in H , nicht aber in A .

Wir betrachten jetzt noch das 'asr für $\varphi = 0^\circ$ etwas näher. Für dies wird aus (IV)

$$\cos s = \frac{1}{\sqrt{1 + [1 \pm \operatorname{tang} \delta]^2}} \quad (\text{VIII})$$

Setzt man hierin $s = 0^\circ$ oder 180° , so erhält man $\delta = \pm 45^\circ$. Diese 2 Deklinationswerte entsprechen den Punkten B und C des 'asr für $\varphi = 30^\circ$. Aus (VIII) leitet man ab

$$\operatorname{tang} s = \pm \sqrt{\cos^2 \delta + \sin^2 \delta}. \quad (\text{IX})$$

Man erhält aus (IX) folgende zusammengehörigen Wertepaare:

δ	s
0°	$45^\circ \cdot 0$
10°	$48^\circ \cdot 8$
20°	$51^\circ \cdot 0$
30°	$51^\circ \cdot 8$
$31^\circ 45'$	$51^\circ \cdot 8$
40°	$51^\circ \cdot 4$
50°	$49^\circ \cdot 7$
60°	$46^\circ \cdot 5$
70°	$41^\circ \cdot 0$
80°	$31^\circ \cdot 4$
90°	$0^\circ \cdot 0$

Auch aus (IX) ergibt sich sofort für das Maximum von s :

$$\frac{ds}{d\delta} = \frac{\cos s}{2 \sin s} (2 \cos 2\delta - \sin 2\delta) = 0. \quad (\text{IX a})$$

Hieraus folgt entweder $s = 90^\circ$ (unbrauchbar) oder

$$\begin{aligned} 2 \cos 2\delta &= \sin 2\delta \\ 2 &= \tan 2\delta \\ 63^\circ 30' &= 2\delta \\ 31^\circ 45' &= \delta \end{aligned}$$

wie schon S. 48 gefunden wurde.

Wir gehen jetzt dazu über die 'Ašr-Kurven in der gnomonischen Projektion noch etwas näher zu betrachten: Zu dem Zwecke halten wir uns an Abbildung 8 und legen das Koordinatensystem wie dort angegeben ist. Außerdem machen wir die Länge des Gnomons der Einheit gleich ($q = 1$). Die Hyperbelgleichung für den 4. Fall lautet dann:

$$y^2 \cdot (\sin^2 \delta - \cos^2 \varphi) + x^2 \cdot \sin^2 \delta + y \cdot \sin 2\varphi + \sin^2 \delta - \sin^2 \varphi = 0.$$

Zufolge der Definition des ersten 'ašr (Beginn des 'ašr) ist die Schattenlänge für den Eintritt

$$q = 1 + \tan(\varphi - \delta).$$

Aus den zwei vorstehenden Gleichungen eliminieren wir δ und setzen außerdem $\varphi = 0^\circ$, d. h. wir beschränken uns auf die Diskussion des 'ašr wie es sich einem am Äquator lebenden Mohammedaner zeigt. Dann schreiben sich unsere Gleichungen also:

$$x^2 \cdot \sin^2 \delta - y^2 \cdot \cos^2 \delta + \sin^2 \delta = 0.$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \tan \delta$$

Durch Division mit $\cos^2 \delta$ folgt aus der ersten:

$$(x^2 + 1) \cdot \tan^2 \delta = y^2$$

oder

$$\tan \delta = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}},$$

so dass unsere 'Ašr-Gleichung nach Elimination von $\tan \delta$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}},$$

lautet. Durch Auflösen nach y finden wir leicht

$$y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2} (1 \mp \sqrt{1 + x^2} \cdot (1 - x^2)) \quad (1)$$

als Gleichung unserer 'Ašr-Kurve.

Zu jedem x gehören somit nach (1) zwei Werte von y . Sie fallen zusammen, falls

$$1 + x^2 \cdot (1 - x^2) = 0$$

wird. Dann ist

$$x = \pm \frac{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}{2}; \quad y = 1; \quad \tan \delta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \delta = 31^\circ 45'$$

(Bedingung für die senkrechten Tangenten).

$$\text{Aus } x^2 y = \sqrt{1+x^2} \mp \sqrt{1+2x^2-x^6}$$

folgt durch Differentiation

$$2xy + x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \mp \frac{2x-3x^5}{\sqrt{1+2x^2-x^6}}$$

$$\frac{x^2 dy}{dx} = -\frac{2\sqrt{1+x^2}}{x} \pm \frac{2\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot (1-x^2)}{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \mp \frac{2x-3x^5}{\sqrt{1+2x^2-x^6}}$$

und nach weiterer Vereinfachung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm (2x^2 - 3x^6) \pm (2 + 4x^2 - 2x^6) - (2+x^2) \cdot \sqrt{1+x^2-x^4}}{x^3 \cdot \sqrt{1+2x^2-x^6}}$$

$$= \frac{\pm (2 + 6x^2 - x^6) - (2+x^2) \cdot \sqrt{1+x^2-x^4}}{x^3 \cdot \sqrt{1+x^2-x^4} \cdot \sqrt{1+x^2}}$$
 (II)

Daraus folgert man:

$$1) \frac{dx}{dy} = 0 \text{ für}$$

$$x = 0 \text{ oder}$$

$$(1+x^2)(1+x^2-x^4) = 0.$$

$x=0$ gibt die Nordsüdlinie, die Asymptote wird, während die zweite Bedingung schon S. 49 gefunden ist. Wagerechte Tangenten genügen der Bedingung:

$$2) \frac{dy}{dx} = 0, \text{ oder}$$

$$(2+2x^2+x^6)^2 = (2+x^2)^2 \cdot (1+x^2-x^4), \text{ oder}$$

$$x^4 \cdot (3+7x^2+5x^4+4x^8) = 0.$$

Mithin ist entweder

$$x=0 \text{ und } y=\frac{1}{2},$$

oder

$$3+7x^2+5x^4+4x^8=0,$$

welch letztere Gleichung jedoch nur imaginäre Wurzeln hat.

Für Wendetangenten bilden wir aus (II) $\frac{d^2y}{dx^2}$ und setzen das erlangte Resultat $=0$. Wir erhalten:

$$\frac{-d^2y}{dx^2} = \frac{x^3 \cdot \sqrt{1+x^2} \sqrt{1+x^2-x^4} [4x+6x^5+2x \cdot \sqrt{1+x^2-x^4} + \frac{(2+x^2)(1-2x^2) \cdot x}{\sqrt{1+x^2-x^4}}] - [2+2x^2+x^6 + (2+x^2) \sqrt{1+x^2-x^4}] \frac{3x^2+8x^4-6x^8}{\sqrt{1+x^2-x^4} \sqrt{1+x^2}}}{x^6(1+2x^2-x^6)}$$

Durch Annullierung dieses Ausdruckes folgt als Bedingungsgleichung für die Wendepunkte:

$$x^2(1+x^2)(4+6x^4)(1+x^2-x^4) - (2+2x^2+x^6)(3+8x^2-6x^6) \\ + [x^2(1+x^2)(4-x^2-4x^4) - (2+x^2)(3+8x^2-6x^6)] \sqrt{1+x^2-x^4} = 0,$$

oder nach Rationalmachung und Ordnen nach Potenzen von x :

$$4x^6 + 24x^4 + 141x^2 + 173x^{10} - 75x^8 - 267x^6 - 192x^4 - 63x^2 - 9 = 0. \quad (\text{III})$$

Dieser Gleichung 8. Grades genügt die reelle Wurzel

$$x_0^2 = 1,212 \quad \text{oder} \\ x_0 = \pm 1,101.$$

Dazu findet sich

$$y_0 = 2,29 \\ \delta = 57^\circ 9'; \quad h = 21^\circ 25'; \quad s = 47^\circ 44'.$$

Das 'Ašr tāni (zweites 'ašr, oder Ende des 'ašr).

Zufolge seiner Definition ist die Schattenlänge in dem Augenblick, wo das 'ašr endigt,

$$\varrho = 2 + \tan(\varphi - \delta)$$

und für $\varphi = 0^\circ$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - \tan \delta.$$

Diese Gleichung mit

$$\tan \delta = \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$$

zusammengehalten, findet sich nach Elimination von $\tan \delta$ leicht

$$y = \frac{2\sqrt{1+x^2}}{x^2} (2 \mp \sqrt{4+4x^2-x^4}) \quad (\text{IV})$$

als Gleichung des 'ašr tāni in Kartesischen Koordinaten. Wiederum gehören zu jedem x zwei Werte von y . Sie fallen jedoch in einen zusammen, wenn

$$4+4x^2-x^4=0 \quad \text{wird.}$$

Hieraus errechnet man:

$$x = 2(1+\sqrt{2}) \\ y = 1$$

(Bedingung für senkrechte Tangenten).

Durch Differentiation von (IV) erhält man

$$2xy + x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \pm \frac{8x+6x^3-3x^5}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{4+4x^2-x^4}}, \quad \text{oder} \\ x \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \pm \frac{8+6x^2-3x^4}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{4+4x^2-x^4}} - \frac{4\sqrt{1+x^2}}{x^2} \mp \frac{2\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{4+4x^2-x^4}}{x^2} \\ - \frac{dy}{dx} = \frac{2(2+x^2)\sqrt{4+4x^2-x^4} \mp (8+8x^2+x^6)}{x^3 \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{4+4x^2-x^4}}. \quad (\text{V})$$

Hieraus zieht man:

1. Für senkrechte Tangenten ist der Nenner = 0, d. h.

entweder $x = 0$ (Nordsüdlinie)

oder $x = \pm i$

oder $4+4x^2-x^4=0$,

was auf dieselbe Bedingung führt, die wir bereits oben kennen lernten.

2. Für wagerechte Tangenten ist der Zähler von (V) = 0.
Dann besteht die Gleichung

$$x^6(16 + 20x^2 + x^6) = 0.$$

Also ist entweder

$$x_0 = 0, \text{ und damit}$$

$$y_0 = 1$$

oder

$$16 + 20x^2 + x^6 = 0,$$

welcher Gleichung annähernd der Wert $x^2 = -0,8$, also $x = \pm i\sqrt{0,8}$ entspricht. Die zwei anderen Wurzeln für x^2 sind komplex; folglich existiert nur eine wagerechte Tangente. $x_0 = 0$; $y_0 = 1$

Zur Berechnung der Koordinaten der Wendepunkte bilden wir aus (V):

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2y}{dx^2}(x^3 \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{4+4x^2-x^4})^2 \\ &= x^2 \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{4+4x^2-x^4} [4\sqrt{4+4x^2-x^4} + \frac{4(2+x^2)(2-x^2)}{\sqrt{4+4x^2-x^4}} + 16 + 6x^4] \\ & - [2(2+x^2) \cdot \sqrt{4+4x^2-x^4} + 8 + 8x^2 + x^6] \cdot \frac{12 + 32x^2 + 15x^4 - 6x^6}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{4+4x^2-x^4}}. \end{aligned}$$

Setzt man die rechte Seite = 0, so folgt nach weiteren Vereinfachungen als Bedingungs-
gleichung für die Wendepunkte unserer Kurve

$$\begin{aligned} & [x^2(1+x^2)(32+16x^2-8x^4) - 2(2+x^2)(12+32x^2+15x^4-6x^6)] \cdot \sqrt{4+4x^2-x^4} \\ & + x^2(1+x^2)(16+6x^4)(4+4x^2-x^4) - (8+8x^2+x^6)(12+32x^2+15x^4-6x^6) = 0 \end{aligned}$$

oder weiterhin vereinfacht:

$$(-48 - 120x^2 - 76x^4 + 2x^6 + 4x^8) \cdot \sqrt{4+4x^2-x^4} = 96 + 288x^2 + 248x^4 + 12x^6 + 48x^8 + 3x^{10}$$

Eine nochmalige Quadrierung führt zu der voluminösen Gleichung

$$\begin{aligned} & 9216 + 55296x^2 + 130560x^4 + 147456x^6 + 70144x^8 \\ & - 3456x^{10} - 12384x^{12} - 1088x^{14} + 732x^{16} + 48x^{18} - 16x^{20} \\ & = 9216 + 55296x^2 + 130560x^4 + 145152x^6 + 59200x^8 \\ & - 22272x^{10} - 25392x^{12} - 2604x^{14} + 2232x^{16} + 288x^{18} + 9x^{20}, \end{aligned}$$

die sich jedoch sofort auf die viel einfachere

$$25x^{14} + 240x^{12} + 1500x^{10} - 1552x^8 - 13008x^6 - 18816x^4 - 10944x^2 - 2304 = 0 \quad (VI)$$

reduziert. Die reelle brauchbare Wurzel ist

$$x_0 = \pm 1,8, \text{ wozu man aus (IV) findet}$$

$$y_0 = 2,88; \phi = 48^\circ 50'; h = 16^\circ 34'; s = 64^\circ 20'.$$

Da wir der 'Asr-Kurve sehr viel Raum gewidmet haben, so möge hier eine bildliche Darstellung derselben, die sich der Leser übrigens nach vorstehender Diskussion leicht selbst verschaffen kann, unterbleiben. Die beiden kongruenten Hälften der Kurve sind dem größeren Ast der Abbildung 8 schon ziemlich ähnlich ($\varphi = 30^\circ$ statt $\varphi = 0^\circ$).

Es möge anschließend noch eine kleine Tafel des Stundenwinkels zu Beginn des 'asr folgen, wie sie sich bei Ibn Yünus (Hdschr. Landberg, 568, Berlin) findet:

TAFEL DER BOGENGRADE VON DER TAGESMITTE BIS ZUR ZEIT
DES ERSTEN 'AŞR ($\varphi = 30^\circ$)

Grad des Zeichens	Widder		Stier		Zwillinge		Wage		Skorpion		Schütze		Grad des Zeichens
1 ^o	51 ^o	59'	53 ^o	55'	54 ^o	5'	51 ^o	42'	47 ^o	45'	43 ^o	41'	29 ^o
2		59		57		5		35		36		35	28
3	52	5		59		4		28		27		29	27
4		11	54	1		3		22		18		22	26
5		17		3		2		15		10		16	25
6		23		4		2		8		1		9	24
7		28		5		1	51	2	46	52	43	3	23
8		33		6		1	50	55		45	42	56	22
9		39		7	54	0		48		35		50	21
10		45		8	53	59		42		26		43	20
11		50		9		58		34		18		39	19
12		54		10		57		26		10		35	18
13	52	58		11		55		18	46	1		31	17
14	53	2		12		54		10	45	53		27	16
15		6	54	12		52	50	2		46		23	15
16		11	54	12	53	52	49	54		36		19	14
17		15		12		52		46		28		16	13
18		19		11		52		38		20		13	12
19		24		11		52		30		11		10	11
20		28		10		52		21	45	3		7	10
21		31		10		51		13	44	55		5	9
22		34		10		50	49	5		47		3	8
23		37		9		50	48	57		39	42	1	7
24		39		9		49		49		31	41	59	6
25		41		8		48		41		24		58	5
26		44		8		48		32		16		57	4
27		47		8		48		23		8		56	3
28		50		7		48		14	44	0		55	2
29		53		7		48	48	5	43	52		54	1
30	53 ^o	55	54 ^o	7	53 ^o	48	47 ^o	57	43 ^o	45	41 ^o	55	0
	Jungfrau		Löwe		Krebs		Fische		Wassermann		Steinbock		

VII. KAPITEL

SONNENUHREN, WELCHE DIE ZEIT DURCH EINE SCHATTENLÄNGE ALLEIN ANGEBEN

Sie sind im Prinzip eigentlich nichts anderes als Graphika, bei denen die Schattenlängen eines Gnomons für den wahren Mittag und alle anderen Stunden auf einer Geraden oder den Radien eines Kreises abgesetzt werden, wobei der Einteilung der Geraden und des Kreises in äquidistante Teile die fortschreitende Sonnenlänge λ zugrunde liegt. Die auf diese Weise gewonnenen Schattenenden werden durch einen stetigen Linienzug verbunden, und diese Kurven stellen alsdann die Stundenlinien der Sonnenuhr dar.

Am einfachsten ist es wohl, die Schattenlängen auf einer Geraden als gleichabständige Ordinaten senkrecht aufzutragen und die Schattenspitzen durch einen stetigen Kurvenzug zur Stundenlinie auszuziehen. Dann muss der Gnomon senkrecht auf dieser Bildebene stehen und sich am Rande derselben in einer Rinne durch die ganze Abszisse λ hin verschieben lassen. Für nicht allzu große Ansprüche auf Genauigkeit wird man die Schattenlänge ϱ nur für $\lambda = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ \dots$ oder $\lambda = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ \dots$ berechnen, und ϱ schneidet sich alsdann für das Zwischenintervall auf der Kurve interpolatorisch aus. Zur konstruktiven Ausführung gibt al-Marrākuṣī (a. a. O. S. 428—456) eigens Tabellen, die die Horizontal- und Vertikal-schatten für $\lambda = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ \dots$ für jede der ungleichen Stunden des Tages enthalten ($\varphi = 30^\circ$). Die Benützung des Instrumentes ist nun die, dass man den Gnomon, gemäß dem Tag im Jahre auf das zugehörige λ einstellt, und dann das Instrument so gegen die Sonne wendet, dass der Schlagschatten des Gnomons stets senkrecht zur Abszissenachse steht, bzw. in den Radius der Kreisperipherie fällt, der das augenblicklich gültige λ darstellt. Die Schattenspitze zeigt in ihrer Lage auf oder neben einer Stundenlinie die Zeit an.

Da aber die Horizontalschatten bei tiefem Sonnenstand sehr lang werden, so bedient man sich für die Morgen- und Abendstunden besser der Vertikalschatten. Ein Instrument, bei dem beide Schatten, je nach der Tageszeit, zur Verwendung kommen, ist al-mizān al-qarārī¹⁾ (al-Marrākuṣī, S. 458 ff.) oder die feste, stabile Wage (Wage des dauernd richtigen Maßes). Der Autor sagt: Nimm einen Körper aus hartem Holz oder Metall, dessen Länge etwa das Siebenfache seiner Dicke ist. Und die Seiten dieses Parallelepipeds seien glatt und senkrecht zueinander.

Auf die erste Seitenfläche zeichne ein Rechteck und lasse an den zwei Enden den nötigen Platz zur Eintragung der Zeichen der Ekliptik frei. Dann ziehst du in diesem Rechteck Parallelen zu den großen Seiten für die Anfänge aller Zeichen, du teilst diese Linien in Finger, d. h. in Zwölftel des Gnomons. Auf diesen Linien trägst du die Länge der Schatten zu den verschiedenen Stunden ab, gemäß der Deklination des Zeichens; markiere die Enden der Horizontalschatten und verbinde all diese Endpunkte durch eine Linie. Errichte den Gnomon in einer der Ecken des Rechtecks, und wenn du die Stunde wissen willst, so bringe das Instrument in das Azimut der Sonne, so dass der Schatten den Seiten des Instruments parallel ist. Das Ende dieses Schattens, der auf der Linie des Zeichens genommen ist, wird dir die Stunde geben, genau so wie bei den früheren Uhren. Für diese Beobachtung hängt man das Instrument mittels eines Fadens auf, der durch seinen

¹⁾ L. Am. Sédillot (Mém. sur les instr., S. 46) liest auch tazārī, was mir aber nicht das Richtige zu treffen scheint. Er fügt auch bei: «M. Quatremère pense qu'il faut lire 'Khararie'».

Schwerpunkt geht; es ist aber besser, dasselbe auf eine horizontale Ebene zu stellen; denn der geringste Windhauch würde das Instrument ins Schwanken bringen und die Beobachtung unsicher machen. Diese Art der Aufhängung hat dem Instrument den Namen »Wage« gegeben, um so mehr, als man sich der Horizontalität desselben auf die gleiche Weise versichert wie beim Wagebalken. Aber wenn der Horizontalschatten durch seine Länge unbequem wird, zieht man eine andere Rinne in einer Vertikalebene, die den Vertikalschatten des Gnomons auffängt, der in demselben Verhältnis kurz wird als der Horizontalschatten lang wird.

Die Konstruktion der anderen Seitenflächen des qarârî, wie sie der Autor (S. 463 bis 473) gibt, ist nicht recht verständlich. Über den Gebrauch des Instrumentes heißt es (S. 473): »Les usages de la balance Khorarie sont trop nombreux pour que nous les rapportions ici comme nous avons fait pour les instruments précédents: nous dirons seulement qu'ils sont exposés en cinquante articles dans le second livre de la III^e partie« (Sédillot).

Will man sich nur an Vertikalschatten halten, so eignet sich der Mantel eines Zylinders (ustuwâna) am besten als Auffangfläche. Es mögen hier zur Konstruktion eines solchen Zylinders einige Worte gesagt sein: Man betrachte die beiden Deckflächen des Zylinders als die Ekliptik, teile ihren Umfang demnach nach Sonnenlängen ein, und verbinde die korrespondierenden Punkte beider Deckflächen durch vertikale Gerade (Mantellinien). In einer Rinne am Rande der oberen Deckfläche gleitet ein horizontaler beweglicher Gnomon durch alle Werte von λ hin, für den man die Vertikalschatten zu jeder Stunde und für die Teile jedes Zeichens von dieser Deckfläche aus nach unten abträgt. Die Verbindung aller Schattenspitzen ein und derselben Stunde während des ganzen Jahres ergibt eine Stundenlinie. Für den Gebrauch stellt man den beweglichen Zeiger in das in Betracht kommende Tierkreiszeichen und verfährt dann wie vorhin.

Rollt man den Zylindermantel in die Ebene aus, — wobei der Gnomon längs des Umfangs der Deckfläche hingeleiten muss — so nimmt die Stundenlinie die Form eines »Heuschreckenbeins« an, und so nennt al-Marrâkuši diesen Quadranten *sâq al-ğarâda*, d. i. Schenkel der Heuschrecke (a. a. O. S. 446) (franz.: La Patte de la Sauterelle), ein Vergleich, der mir ziemlich zutreffend zu sein scheint. (Abb. 16.)

Ich habe in nebenstehender Zeichnung — es ist ja im Grunde dasselbe, ob man die Tangens- oder Kotangenslinie zeichnet — die fortlaufenden horizontalen Mittagsschatten auf der zur Geraden ausgestreckten Ekliptik abgesetzt; und zwar — für diesmal von der Regel, dass $\varphi = 30^\circ$ ist (Hauptparallel der mohammedanischen Lande) abweichend — für die Breite meines Wohnortes Essen ($\varphi = 51^\circ 27'$). Die Zeichnung ist in so großem Maßstab ausgeführt und die Ordinaten von 4 zu 4 Tagen, freilich mit Außerachtlassung des zweiten Keplerschen Gesetzes, berechnet, dass dies Graphikon hinreichend genaue Resultate gibt.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich eine Bemerkung rein geschichtlicher Art einfügen: Bekanntlich ändert sich die Sonnendeklination um die Tage der Solstitien herum fast gar nicht, so dass die Meridianschatten sich etwa zehn Tage lang nahezu gleich sind. Wohl wurde in älteren Zeiten, als der Gnomon noch zur Bestimmung der Wenden diente, versucht, diese Ungewissheit über das wahre Datum der Sonnenwende dadurch zu beseitigen, dass man die Mitte der unveränderlichen »Schattentage« als Solstitiumtag ansprach¹⁾.

Nun bringt die »Connaissance des Temps« vom Jahre 1809 (S. 382 ff.) einen Auszug aus einem Manuskript, das Pater R. Gaubil 1734 aus China an Delisle gesandt hatte. Er führt darin zehn Schattenmessungen auf, die in China im Laufe der Zeit mit einem acht-

¹⁾ Man sucht im *Traité des instr.* etc. vergeblich nach diesbezüglichen Details; dafür führt L. Am. Sédillot im *Mém. sur les instr.* etc. (S. 46–54) tatsächlich 30 Verwendungsmöglichkeiten des qarârî auf.

²⁾ Vergl. des Verfassers mehr ins Detail gehende Studie: »Der Gnomon« (Aus der Natur, 1918, S. 280 und 312).

füßigen Gnomon, zumeist zur Zeit der Sonnenwenden, gemacht wurden. Dieselben lieferten außer der geographischen Breite des Beobachtungsortes auch gleichzeitig die jedesmalige Ekliptikschiefe¹⁾. Und nun finden sich nach Gauß bei den Observationen des Jahres 173/174 n. Chr. als korrespondierende Daten der Beobachtung des Mittagsschattens der 9. November 173 und der 7. Februar 174. Der erste Mittagsschatten war zu 10 Fuß, der andere zu 9,6 Fuß gefunden. Tatsächlich ändern um diese Tage sich im mittleren China die Mittagsschatten von einem Tage zum anderen am raschesten, sind also ihres großen Unterschiedes wegen den Sostitalschatten vorzuziehen, indem sie über den Tag der Beobachtung keinen Zweifel lassen. Die zeitliche Mitte zwischen diesen zwei Daten etwa gleicher Mittagsschattenlänge würde dann dem Wintersolstitium sehr nahe kommen.

Zweifellos ist die Ermittlung dieser günstigsten Monatstage zur Beobachtung der Meridianschatten durch einen klugen Chinesen empirisch erfolgt. Es lässt sich aber auch ohne große Schwierigkeiten rein theoretisch die Frage beantworten: An welchem Tage ist die Änderung des Mittagsschattens bis zum nächstfolgenden am größten an einem Beobachtungsorte, dessen geographische Breite φ gegeben ist?

Es entspreche der gesuchten Sonnendeklination δ die Sonnenlänge λ . Wenn ρ den Mittagsschatten eines senkrechten Stäbchens der Höhe q bezeichnet, so ist

$$\rho = q \cdot \tan(\varphi - \delta). \quad (I)$$

Daraus folgt für die Zu- oder Abnahme der Schattenlänge:

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = q \cdot \frac{1}{\cos^2(\varphi - \delta)} \cdot \frac{d\delta}{d\lambda}$$

Diese Zu- oder Abnahme soll ein Maximum werden, folglich muss

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{d^2\rho}{d\lambda^2} = \frac{d^2\delta}{d\lambda^2} [1 + \tan^2(\varphi - \delta)] - 2 \tan(\varphi - \delta) \left(\frac{d\delta}{d\lambda} \right)^2 = 0$$

sein. Daraus folgt:

$$\frac{d^2\delta}{d\lambda^2} = 2 \tan(\varphi - \delta) \cdot \left(\frac{d\delta}{d\lambda} \right)^2.$$

Aus der bekannten Formel:

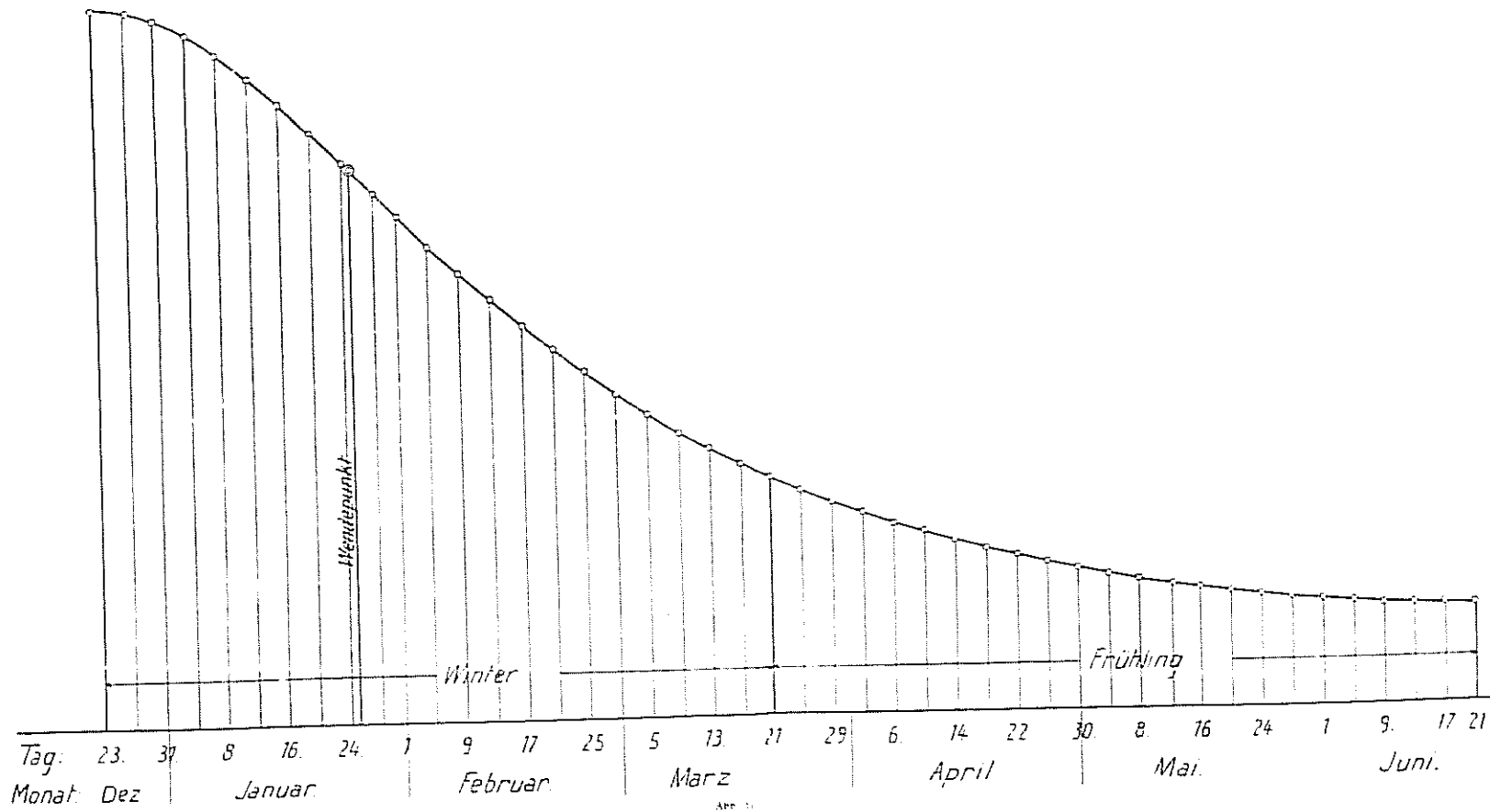
$$\sin \delta = \sin \varepsilon \cdot \sin \lambda$$

findet sich durch Differentiation:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\lambda} &= \frac{\sin \varepsilon \cdot \cos \lambda}{\cos \delta} \\ &= \frac{-\sin \varepsilon \cdot \sin \lambda}{\cos \delta} + \sin \varepsilon \cdot \cos \lambda \cdot \sin \delta (1 + \tan^2 \delta) \cdot \frac{d\delta}{d\lambda} \\ &= -\tan \delta + \sin^2 \varepsilon \cdot \cos^2 \lambda \cdot \tan \delta (1 + \tan^2 \delta) \\ &= \tan \delta [-1 + \sin^2 \varepsilon \cdot \cos^2 \lambda (1 + \tan^2 \delta)] \\ &= -\tan \delta (1 + \tan^2 \delta) \cdot \cos^2 \varepsilon \end{aligned} \quad (IV)$$

¹⁾ Ist φ die geographische Breite, q die Höhe des Gnomons, m_1 die Länge des Mittagsschattens z. Zt. der Sommer-, m_2 z. Zt. der Wintersonnenwende, ε die Ekliptikschiefe, so errechnen sich φ und ε aus den Gleichungen

$$\tan(\varphi - \varepsilon) = \frac{m_1}{q}; \quad \tan(\varphi + \varepsilon) = \frac{m_2}{q}$$



Bildet man jetzt noch aus (IV) mit Benützung von $\sin \delta = \sin \epsilon \cdot \sin \lambda$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right)^2 &= \sin^2 \epsilon \cdot \cos^2 \lambda (1 + \tan^2 \delta) \\ &= (\sin^2 \epsilon - \sin^2 \delta) (1 + \tan^2 \delta), \end{aligned}$$

so ergibt sich aus (III) die gesuchte Endgleichung

$$\tan \delta \cdot \cos^2 \epsilon = 2 \cdot (\sin^2 \delta - \sin^2 \epsilon) \cdot \tan (\varphi - \delta). \quad (V)$$

Sie eignet sich in dieser logarithmischen Form am besten für eine Auflösung durch Näherung, zumal, wenn man noch

$$\sin^2 \delta - \sin^2 \epsilon = \sin (\delta + \epsilon) \cdot \sin (\delta - \epsilon)$$

setzt. Ersetzt man jedoch in (V) $\sin^2 \delta$ durch $\tan^2 \delta : (1 + \tan^2 \delta)$, so resultiert für $\tan \delta$ die folgende Gleichung 4. Grades:

$$\begin{aligned} \cos^2 \epsilon \cdot \tan^4 \varphi \cdot \tan^4 \delta + 3 \cos^2 \epsilon \cdot \tan^3 \delta - \cos^2 \epsilon \cdot \tan \varphi \cdot \tan^2 \delta \\ + (\cos^2 \epsilon - 2 \sin^2 \epsilon) \tan \delta + 2 \sin^2 \epsilon \cdot \tan \varphi = 0. \end{aligned}$$

Für Essen ($\varphi = 51^\circ 27'$) erhält man mit $\epsilon = 23^\circ 27'$ die Gleichung mit den Zahlenkoeffizienten:

$$1,0562 \cdot \tan^4 \delta + 2,5248 \cdot \tan^3 \delta - 1,0562 \cdot \tan^2 \delta + 0,5248 \cdot \tan \delta + 0,3974 = 0. \quad (VI)$$

Mit $\delta_1 = -15^\circ$ und $\delta_2 = -20^\circ$ wird die linke Seite von (VI) bzw. $+0,1378$ und $-0,03627$, so dass der Wert von δ , der (VI) befriedigt, nahe bei -20° liegen muss. Mit $\delta = -19^\circ 5'$ wird die rechte von (VI) $+0,00003$, und wir erachten ihn als genügend genau. Diese Sonnen-deklination entspricht dem 18. November und 25. Januar. Eine Schattentabelle (Cotangententabelle) für die um den 18. November herum liegenden Tage sieht so aus:

November	ρ	Differenz
16	2,74539 · q	0,03796 · q
17	2,78335 · q	0,03804 · q
18	2,82139 · q	0,03807 · q
19	2,85946 · q	0,03804 · q
20	2,89750 · q	0,03796 · q
21	2,93546 · q	

Bemerkt sei noch, dass die Bedingung $\frac{d^2 \rho}{d\lambda^2} = 0$ gleichzeitig auch den Wendepunkt unserer Kurve definiert, dessen Stelle in der Zeichnung markiert ist.

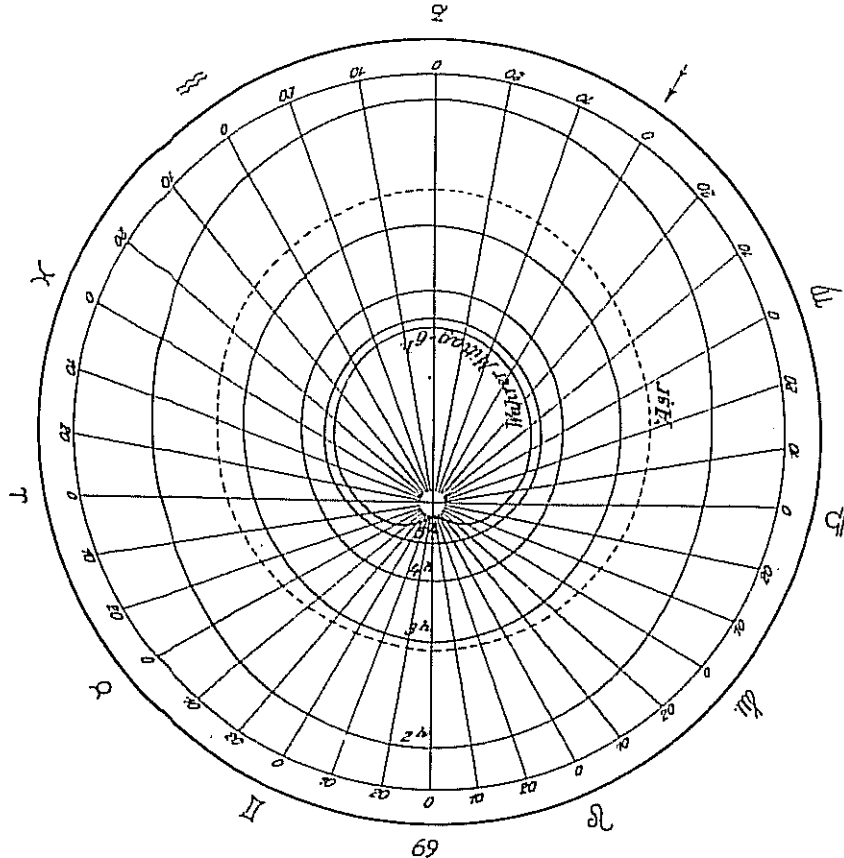
Trägt man ferner die Schattenlängen auf den Radien eines Kreises von dessen Mittelpunkt aus ab, so erhält man den sog. hâfir¹⁾. Der Umfang des Kreises trägt die Einteilung in Längengrade (Ekliptik). Für den wahren Mittag, die 5., 4., 3. Stunde entnimmt man die den einzelnen Sonnenlängen zugehörigen Horizontalschatten einer Tabelle und verbindet wieder alle Schattenspitzen durch stetige Kurven. Sie werden für die temporalen Stunden zu ovalartigen Gebilden, die einem grabenden, ausfurchenden Huf, einer Klaue, einem Fuß, nicht unähnlich sind. Ich habe nach der Tabelle des Marrâkuši diese Kurven für den wahren Mittag bis zur 2. temporalen Stunde aufgezeichnet, auch den hâfir des 'asr eingetragen, dessen Abstand vom Mittagshâfir der Länge des Gnomons gleich ist (Abb. 17).

¹⁾ Vom Verbum hâfir = graben, aushöhlen; hâfir (Partizip) = einer der gräbt, aushöhlt (Huf, Fuß, Klaue).

Al-Marrākuši gibt in seiner Abbildung 68 ebenfalls eine bildliche Darstellung der Hāfirlinie, doch ist die Mittagsstundenlinie nicht exakt.

Trägt man endlich auf den Radien eines Kreises die Schattenlängen derart ab, dass die Schatten eines halben Jahres schon den ganzen Kreis ausfüllen, also der Polarwinkel λ doppelt so groß ist, wie beim hāfir, so erhält man eine Art Schneckenlinie als Stundenlinie.

Abb. 17

Hāfir für $\varphi = 30^\circ$

Dies Gebilde wird von al-Marrākuši halazūn, d.i. Schnecke, genannt. Seine Abbildung 69 ist ein Mittagshalazūn, Abbildung 70 gibt den halazūn auch für die 1. temporale Stunde. Der Grund, die Kurve diesmal so in die Breite zu ziehen, liegt wohl in der Erkenntnis, dass damit ein viel deutlicheres Bild als beim hāfir erzielt wird, das für die Interpolation günstiger ist. Es genügt ja auch die Serie der Schatten eines halben Jahres, weil Schatten, die gleich weit von den Solstitien liegenden Tagen angehören, an Länge gleich sind.

Eine mathematische Darstellung der hāfir- und halazūnkurven für den wahren Mittag verdankt man A. Wedemeyer¹⁾.

¹⁾ Der Mittagshāfir und -halazūn von Abū'l Hasan, die älteste Messkarte zur Bestimmung von Sonnenhöhen (Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, 1916, S. 20—29).

VIII. KAPITEL

VERTIKALE UND GENEIGTE EBENE UHREN

Die Araber hatten auch für diese Art von Sonnenuhren antike Vorbilder. Die zwei berühmtesten ebenen Sonnenuhren aus griechischer Zeit sind die Meisterwerke des Andronikos Kyrrhestes, nämlich der Turm der Winde zu Athen und der Marmorblock zu Tenos. Doch wird von den muslimischen Astronomen die *basita* aus begreiflichen Gründen bevorzugt, und al-Battānī, der letzterer ein eigenes Kapitel widmet, erwähnt nur anhangsweise auch die Vertikaluhr über der Ostwestlinie¹⁾, ohne auf ihre Konstruktion näher einzugehen, und begnügt sich mit den Schlussworten: *«Plurimis modis variisque instrumentis horae deprehenduntur; sed haec duo instrumenta, si Deus vult, omnium quibus usus sum certissima et commodissima sunt.»* Eine eingehende Behandlung der Vertikaluhren vermag ich frühestens bei Ibn Yūnus²⁾ nachzuweisen, dem al-Marrākuṣī zweifellos verschiedentlich folgte. Geneigte Uhren kommen jedoch erst bei letzterem Autor zur Sprache³⁾. Ich glaube daher die Yūnusischen Darlegungen unverkürzt und in wörtlicher Übersetzung geben zu sollen; möchte mich dagegen für das, was al-Marrākuṣī zu den Vertikaluhren bietet, mit einem Hinweis auf den *Traité des instruments etc.* von Sédillot begnügen⁴⁾, der ja leicht zugänglich ist. Einer zusammenhängenden Darstellung nach al-Marrākuṣī steht auch seine Zerfällung der Materie in vorbereitende Berechnung und reine Konstruktion hindernd im Wege. Es folgt jetzt die Verdeutschung des 26. Kapitels der Hākimitischen Tafeln, in welchem

1. DER VERTIKAL ÜBER DER MITTAGSLINIE⁵⁾

behandelt wird.

Der Autor sagt: »Dies ist die Art der Ableitung, und es ist mir keine Erwähnung des Vertikals über der Mittagslinie bekannt, wie Höhe und Azimut auf ihm zu ermitteln sind. Und wenn du dies willst, dann multipliziere den Sinus des Restes vom halben Tagesbogen, falls er vor dem Mittag liegt, und wenn er nach der Mitte des Tages liegt, so multiplizierst du den Sinus des dā'ir nach der Hälfte des Tages mit dem Kosinus der Sonnendeklination und teilst das Produkt durch den Sinus totus. Das Ergebnis bestimmt einen Bogen, und dieser ist die Höhe der Sonne über dem Nordsüdvertikal. Was aber die Kenntnis des Azimuts auf diesem Vertikal anbetrifft, so multipliziere, falls du sie willst, den Sinus der Sonnendeklination mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Kosinus der Höhe der Sonne über der Fläche des Nordsüdvertikals; das Ergebnis bestimmt einen Bogen, den du im Gedächtnis behältst. Darauf beachte folgendes: Wenn der Grad der Sonne nördlich ist, so ziehst du von dem im Gedächtnis bewahrten Bogen die Ortsbreite ab; den Rest aber ziehst du von 90° ab. Was noch bleibt, das ist die augenblickliche Richtung der Sonne(nstrahlen) zur Linie des südlichen Horizonts. Und wenn du den Bogen des im Gedächtnis Bewahrten kleiner findest als die Ortsbreite, so ziehe ihn von der Ortsbreite ab, den Rest vermehrst du um 90°; was alsdann herauskommt, das ist der Abstand der Richtung von der Linie des südlichen Horizontes. Ziehst du ihn von 180° ab, so ist der Rest das Azimut auf dem Nordsüdvertikal, gerechnet von der Linie des

¹⁾ Opus astron. I. Kap. LVI, S. 138.

²⁾ Oxferder Mskr., Hunt. 331, Kap. XXVI, Fol. 60^r.

³⁾ a. a. O. S. 520 ff.

⁴⁾ a. a. O. S. 528 ff. und S. 538 ff.

⁵⁾ »Über die Kenntnis der Höhe und des Azimuts des Vertikals über der Mittagslinie.«

nördlichen Horizontes, doch bei Gott ist der Erfolg. — Und die Linie des nördlichen Horizontes ist jene, welche im Norden des Mittelpunktes des schattenwerfenden Körpers ist, und die Linie des südlichen Horizontes ist jene, welche im Süden seines Mittelpunktes liegt. Und falls der Grad der Sonne ein südlicher ist, so vermehre den im Gedächtnis behaltenen Bogen um die Ortsbreite, und was du erhältst, das ziehst du von 90° ab, und was übrig bleibt, das ist das Azimut der Sonne auf dem Nordsüdvertikal, gerechnet von der Linie des nördlichen Horizonts. Oder auch, du ziehst den im Gedächtnis behaltenen Bogen von der Äquatorhöhe in jener Breite ab, ich meine von der Ergänzung der Ortsbreite; der Rest ist das Azimut von der Linie des nördlichen Horizontes gezählt, und bei Gott ist der Erfolg. — Und wisse, dass das Ende des Gnomonschattens bei Beginn des Widders oder der Wage eine gerade Linie beschreibt, deren Richtung mit dem Komplement der Ortsbreite zusammenfällt, diese gerechnet von der Linie des nördlichen Horizonts an, der im Mittelpunkt des Jahrs beginnt. — Und falls du die Kenntnis des Schattens willst, und dies vor der Tageshälfte, nun so kenne den *dä'ir* vom Tagesbogen und nimm seinen Sinus und Kosinus. Dann multipliziere den Sinus des *dä'ir* mit der Zahl der Teile des *miqjäs* und teile dies Produkt durch den Kosinus des *dä'ir*, und was sich ergibt, ist der Schatten, und wenn die Zeit nach der Tagesmitte liegt, so multipliziere den Sinus des Restes vom Tagesbogen mit der Zahl der Teile des *miqjäs* und dividiere das Produkt durch den Sinus des *dä'ir* vom halben Tag; das Ergebnis ist der Schatten unter der Bedingung, dass die Höhe über dem Nordsüdvertikal ist, und sie ist die Höhe des Sonnenmittelpunktes, dessen ich beim diesbezüglichen Schatten Erwähnung tat, und wenn du völlige Korrektheit willst, so vermehre die Höhe noch um den Halbmesser der Sonnenscheibe. Alsdann berechne den augenblicklichen Schatten, und wisse, dass der *dä'ir* in diesem Fall die Ergänzung der Höhe des Sonnenmittelpunktes über dem Nordsüdvertikal ist; seine Ergänzung zu 90° ist die Höhe selbst. Und wisse ferner, dass der Schatten der dritten Stunde auf dem Nordsüdvertikal im Anfang des Widders und der Wage stets der Länge des Gnomons gleich ist, falls du den Schatten des Sonnenmittelpunktes wissen wolltest; wenn aber der Gnomon der Stunde verloren gegangen ist, so ist dies sein Betrag¹⁾. a.

Kenntnis der Linie des Horizontes auf dem Nordsüdvertikal, wenn der schattengebende Gnomon (senkrecht) auf ihm steht. Es teilt sein Mittelpunkt die Linie des Horizonts in zwei Hälften: es ist die eine von ihnen in seinem Norden, die andere in seinem Süden, und die südliche Hälfte ist der Schatten des Gnomons, wenn der Sonnenmittelpunkt im Horizontkreise steht, und dies zu Beginn des Krebses; die nördliche Hälfte ist der Schatten des Gnomons, wenn der Sonnenmittelpunkt zu Beginn des Steinbocks im Horizontkreise steht, und wenn du jede einzelne der zwei Hälften kennen willst, so multipliziere den Sinus der Morgenweite zu Beginn des Krebses mit der Länge des *miqjäs* und teile das Produkt durch den Kosinus der Morgenweite; das Resultat ist der Schatten zu Beginn des Krebses, genommen von der Linie des südlichen Horizontes; und für die Linie des nördlichen Horizontes ist es ähnlich. Und wenn du die Berechnung unter der Bedingung gemacht hast, dass der *miqjäs* 60 Teile hat, so ist der Schatten, der sich ergibt, ein Sechzigerschatten, falls du aber die Rechnung unter der Bedingung, dass der *miqjäs* 12 Teile hat, ausgeführt hättest, so ist der gewonnene Schatten ein Zwölferschatten. Dies unter der Bedingung, dass der Schatten der des Sonnenmittelpunktes ist, und beachte genau das, was ich über den ebenen Schatten (*az-zill al-basit*) gesagt habe, und das ist, dass du den Kosinus der Morgenweite um den halben Durchmesser der Sonnenscheibe vermehrst²⁾, und was sich ergibt,

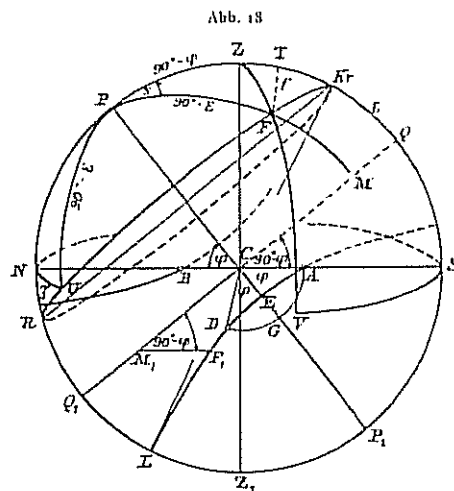
¹⁾ D. h. der Schatten der 3. Stunde.

²⁾ Hierzu bedarf es einer Vervollständigung und Richtigsstellung des Textes: es sollte heißen: dass du den Sinus und Kosinus der um den halben Durchmesser der Sonnenscheibe vermehrten Morgenweite nimmst. Siehe die richtige Ausdrucksweise in dem im Anhang gegebenen Zahlenbeispiel b.

das ist die Höhe, und du gewinnst mit ihrem Sinus und Kosinus den Schatten, und wahrlich er ist die Linie des Horizontes, doch bei Gott ist der Erfolg.“ *b.*

Zunächst möchte ich den Text des Autors, der jeglichen Beweises und jeder Illustration durch eine Zeichnung entbehrt, mit einigen Erläuterungen versehen und nachher mit der Übertragung desselben ins Deutsche fortfahren.

Der wagerechte und von West nach Ost gerichtete Zeiger wirft die längsten Schatten nach dem unteren Teil der Vertikalebene, wenn die Sonne mittags am höchsten steht; dagegen wird zur Zeit der Auf- und Untergänge der Schatten in die durch den Fußpunkt des Zeigers gehende wagerechte gerade Linie fallen. Das zu behandelnde Zifferblatt, die Mittagsebene, schneidet die Ebene des Himmelsäquators in seinem Durchmesser, welcher die Äquatorhöhe $90^\circ - \varphi$ angibt. Die Bilder der beiden Wendekreise sind Schnitte eines Kegels mit der Vertikalebene, und da beide Kreise gleichweit vom Äquator abstehen, so müssen ihre perspektivischen Bilder symmetrisch zur Ablotung des Äquators liegen, woraus weiter folgt, dass sie die Horizontale in zwei Punkten A und B treffen, die gleichweit nach rechts und links vom Durchschnitt C des Äquators mit der Nord-Südlinie abstehen; endlich zieht diese symmetrische Lage der zwei Kegelschnitte zum Äquator nach sich, dass eine Senkrechte zum Äquator, d. h. eine Parallele zur Weltachse, auch symmetrische Punkte der Kurven trifft, und dass insbesondere ein durch C gehendes Lot, d. i. die Weltachse selbst, die Scheitel derselben enthalten muss. Abbildung 18 soll die zeichnerische Herstellung des Zifferblattes, das mit der Meridianebene zusammenfallend zu denken ist, näher erläutern:



Wenn am 21. März oder 23. September der Sonnenmittelpunkt im Kulminationspunkt Q des Äquators angelangt ist, senden die vor der Bildfläche befindlichen Sonnenstrahlen den Schatten des in C senkrecht auf der Uhrebene stehenden (daher zu einem Punkt verkürzten) Zeigers auf CQ hin bis ins Unendliche. Ist aber in t Nachmittagsstunden der Sonnenmittelpunkt auf dem Himmelsäquator um den Bogen $15^\circ t = s$ Grade weiter bis nach M gekommen, so stoßen die Sonnenstrahlen gegen QQ , unter dem Winkel s auf, und die Schattenlänge hat sich auf $CM_1 = q \cdot \cotg s$ verkürzt. Abends 6 Uhr, bei $s = 90^\circ$, wird bei Sonnenuntergang die Schattenlänge $= q \cdot \cotg 90^\circ = 0$ (Punkt C). Oberhalb C kann nie ein Schatten fallen; deshalb ist jener Teil des Äquators gestrichelt (CQ).

Wenn am 21. Juni der Sonnenmittelpunkt auf dem Wendekreis des Krebses KR mittags in K angekommen ist, läuft der Schatten des Zeigers auf CL hin ins Unendliche. Geht an diesem Tage der Sonnenmittelpunkt in U unter, so erhält man aus dem bei N rechtwinkligen Kugeldreieck PNU :

$\sin \epsilon = \cos \varphi \cdot \cos \gamma$, also $\cos \gamma = \frac{\sin \epsilon}{\cos \varphi}$, und der Schatten des Zeigers hat die Länge $CA = q \cdot \cot \gamma$.

In A endet die Schattenkurve des Sommersolstitaltages. (Sie ist gestrichelt fortgesetzt.) Ist am Nachmittag der Sonnenmittelpunkt in F , so fälle man von F auf ZKr das Lot $FT=f$. Man findet dann für f aus dem rechtwinkligen Dreieck FTZ :

$$\sin f = \sin s \cdot \cos \varepsilon. \quad (I)$$

Der Strahl FC ist gegen die Bildebene unter dem Winkel f geneigt; der die Spitze des Zeigers treffende Strahl hat die gleiche Richtung. Mithin ist die Schattenlänge zur Nachmittagssonnenzeit s , $CF_1 = q \cdot \cotg f$. Die Lage dieses Schattens von C an links neben CZ' findet man aus dem Bogen ZT . Zunächst hat man im rechtwinkligen sphärischen Dreieck PFT :

$$\cos(90^\circ - \epsilon) = \cos f \cdot \cos PT \text{ oder}$$

$$\frac{\sin \epsilon}{\cos f} = \sin(90^\circ - PT) = \sin TQ. \quad (II)$$

Setzt man in (I) und (II) statt ϵ eine beliebige Sonnendeklination δ , so sind beide Formeln mit dem Text in vollständigem Einklang. TQ ist der im Gedächtnis bewahrte Bogen. Liegt T nördlich des Zenits, ist also $TQ > \varphi$, so ist $TQ - \varphi = TZ$, und es ist $90^\circ - TZ = NT$. Der Scheitelwinkel von $\text{arc} NT$ liegt südlich der Linie des Horizonts, und der eine Schenkel dieses Winkels gibt die Lage des Schattens. Ist ferner $TQ < \varphi$ (wie in der Abbildung), so ist $\varphi - TQ = ZT$. $90^\circ + TZ = \text{arc} NT$ ist wiederum der Bogen, dessen Scheitelwinkel die Lage des Schattens gibt usw.

Alles andere ist hiernach wohl leicht verständlich, und wenn s nach 3 Stunden (für $\delta = 0^\circ$) $= 45^\circ$ ist, so ist eben die Schattenlänge $= q \cdot \cotg 45^\circ = q$. Da nach unserer Abbildung die Morgenweite $= 90^\circ - \gamma$ ist, so ist die Linie des Horizontes $AC = q \cdot \cotang \gamma$.

»Und ich habe eine Tafel für das Azimut der Sonne in der Breite 30° auf den Flächen des Nordsüdvertikals berechnet. Du gewinnst damit die Mittagslinie, falls der Schatten des šahs diesem an Länge gleich ist (?). Und ich tätigte dies von Grad zu Grad bis ($\lambda =$) 90° . Du kannst es in jedem Grade (der Ekliptik) kennen lernen, wie wir es bei der Deklination und in anderen Fällen machten. Es folgt nun die Tafel der Azimute auf dem Nordsüdvertikal, wenn der Schatten des šahs diesem an Länge gleichkommt für jedes Zeichen...«

TAFEL DES AZIMUTS AUF DEM NORDSÜDVERTIKAL, WENN DER SCHATTEN DEM GNOMON GLEICH IST

λ	Azimut				λ	Azimut				λ	Azimut				λ	Azimut							
1 ^o	0 ^o	33'	57''		19 ^o	10 ^o	39'	53''		37 ^o	19 ^o	55'	28''		55 ^o	27 ^o	36'	44''		73 ^o	32 ^o	45'	26''
2	1	7	53		20	11	4	27		38	20	23	28		56	27	58	20		74	32	56	53
3	1	41	49		21	11	41	55		39	20	51	32		57	28	19	42		75	33	7	43
4	2	15	43		22	12	14	12		40	21	19	38		58	28	40	28		76	33	17	54
5	2	49	35		23	12	46	20		41	21	47	22		59	29	0	33		77	33	27	24
6	3	23	25		24	13	18	18		42	22	14	49		60	29	20	27		78	33	36	12
7	3	57	14		25	13	50	4		43	22	41	54		61	29	39	39		79	33	44	30
8	4	30	59		26	14	21	42		44	23	8	37		62	29	58	16		80	33	51	45
9	5	4	42		27	14	53	3		45	23	35	0		63	30	16	26		81	33	58	31
10	5	38	18		28	15	24	16		46	24	0	58		64	30	34	7		82	34	4	32
11	6	11	52		29	15	55	13		47	24	26	40		65	30	50	58		83	34	9	54
12	6	45	21		30	16	26	0		48	24	51	52		66	31	7	29		84	34	14	35
13	7	18	44		31	16	56	31		49	25	16	43		67	31	23	16		85	34	18	31
14	7	52	1		32	17	26	50		50	25	41	8		68	31	38	30		86	34	21	45
15	8	25	14		33	17	56	31		51	26	5	6		69	31	53	6		87	34	24	56
16	8	58	20		34	18	26	42		52	26	28	42		70	32	7	7		88	34	26	3
17	9	31	19		35	18	56	13		53	26	51	26		71	32	20	34		89	34	27	9
18	10	4	10		36	19	25	31		54	27	14	30		72	32	33	21		90	34	27	30

Wie man sieht, ist in dieser Tabelle unter Azimut der Winkel des Schattens mit dem Durchmesser des Äquators QQ_1 verstanden. Welche weitergehende Bedeutung Ibn Yûnus dieser Gleichheit von Schatten und Schattenwerfer beimisst, ist aus dem Text nicht zu ersehen. Delambre hält dafür, dass religiöse Praktiken dabei in Frage kommen dürften. Seine diesbezügliche Stelle lautet: «Quand QS (Stundenwinkel) sera de 45° , l'ombre sera égale au style. J'ignore si les Musulmans avaient quelque devoir religieux à remplir quand l'ombre était égale au style, c'est-à-dire vers le quart du jour; mais on voit plusieurs vestiges de l'importance qu'ils attachaient à cette égalité, que les gnomonistes modernes négligent entièrement.» (a. a. O. S. 131.) Die Zeit, wo die Gleichheit von Stäbchen und Schattenlänge auf dem Nordsüdvertikal eintritt, ist vermutlich die des Nachmittagsgebets (aṣr). Ich habe dergleichen bei anderen arabischen Astronomen vergeblich gesucht. Leider macht Ibn Yûnus auch keine näheren Angaben. Die kleinen Handschriften über Gebetszeiten u. ä., deren ich mehrere der Kgl. Bibliothek zu Berlin angehörige konsultierte, sind in der Hauptsache kurze Abrisse der Astronomie, die kaum irgendwelche Details geben.

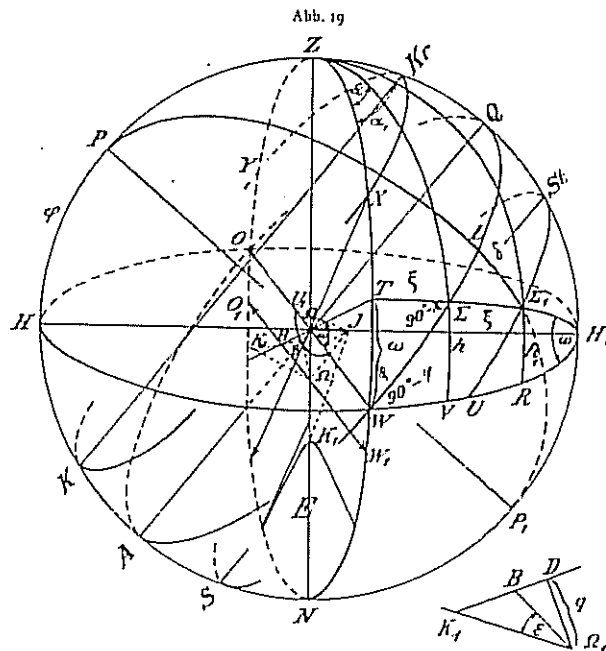
Übrigens ist der geometrische Ort dieser Gleichheit von Schlagschatten und Gnomon ein Kreisbogen, beschrieben mit q als Radius um den Fußpunkt des Gnomons; dieser Kreisbogen reicht vom Äquator bis zur Amplitude $34^\circ 27' 30''$.

2. DER OSTWESTVERTIKAL

Zum leichteren Verständnis des Folgenden sei eine kurze Erläuterung des Sachverhalts am Ostwestvertikal vorausgeschickt. Abbildung 19 sei die Himmelskugel mit

der Uherebene E , die durch die Schnittpunkte des Äquators AQ mit dem Horizonte HH_1 geht, d. h. die Ostwestlinie OW enthält. Der Uhrzeiger $\Omega J = q$ ist nach dem Südpunkt H_1 gerichtet. Die Schattenlinie für den Tag des Äquinoktiums O_1W_1 liegt unterhalb Ω und geht, mit OW gleichlaufend, durch Ω_1 , so dass der Mittagsschatten am 21. März und 23. September die Länge $\Omega\Omega_1 = q \cdot \tan(90^\circ - \varphi) = q \cdot \cotg \varphi$ hat. Wenn der Sonnenmittelpunkt in K_r , dem Kulminationspunkt des Krebses, angekommen ist, so fällt der Schatten der Gnomonspitze nach K_1 hinab, und es ist $\Omega K_1 = q \cdot \cotg(\varphi - \epsilon)$; entsprechend erhält man für den Wendekreis des Steinbocks $\Omega S_1 = q \cdot \cotg(\varphi + \epsilon)$. Im Auf- und Untergangspunkt O und W

der Sonne zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche laufen die Sonnenstrahlen parallel der Ebene E und der Schatten der Gnomonspitze fällt auf O_1W_1 , jeweils in unendliche Ferne. Der Wendekreis des Krebses durchsetzt E in den Punkten X und Y ; sie liefern unendlich ferne



Punkte der Krebshyperbel. Das Abbild des Krebses liegt zum Teil auf der Nordfront von E . Die Untergangspunkte der Sonne im Steinbock liegen vor der Bildebene E . Mithin fehlen der Steinbockshyperbel die unendlich fernen Punkte; ein Ast derselben endigt z. B. in U_1 . Die Stundenlinien werden sich auf letzterer Hyperbel zusammendrängen; nach der Krebshyperbel aber stark divergieren.

Eine erschöpfende Behandlung dieses Vertikals gibt nur al-Marrākūṣī. Zuerst lehrt er die Bestimmung der Sonnenhöhe über der Ebene des Ostwestvertikals, wobei er das Azimut der Sonne $\alpha = \text{arc } PP'$ und ihre Erhebung über dem Horizont $\text{arc } SF$ oder $\text{arc } S_1V_1 = h_1$ als bekannt voraussetzt. Dann errechnet sich die gesuchte Größe $\text{arc } TZ$ oder $\text{arc } T_1S_1$, resp. ξ oder ξ_1 , leicht aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $TZ\Sigma$ oder $TZ\Sigma_1$. Es ist nämlich (1) $\sin \xi = \cos h \cdot \sin \alpha$, für das Dreieck $TZ\Sigma$, und ganz ähnlich findet man $\xi + \xi_1$ (Σ ist ein Sonnenort des Himmelsäquators, Σ_1 ein solcher des Steinbocks). Wie man weiter sieht, ist alsdann $q \cdot \cotg \xi$, resp. $q \cdot \cotg (\xi + \xi_1)$, die Schattenlänge. Es ist also erst aus der Größe des Stundenwinkels für eine gegebene Stunde die Sonnenhöhe und das Azimut zu berechnen, eine Aufgabe, über deren Lösung frühere Kapitel Aufschluss geben. Die Schattenrichtung auf der Ebene des Ostwestvertikals wird von der Grundlinie OW aus gezählt, so dass beispielsweise $\text{arc } P'S = \omega$ für den Sonnenort S die Schattenrichtung darstellt. Da $TZ = 90^\circ - \omega$ ist, so hat man aus denselben sphärischen Dreiecken:

$$(1) \quad \sin \omega = \frac{\sin h}{\cos \xi}, \quad \text{resp.} = \frac{\sin h_1}{\cos (\xi + \xi_1)}.$$

Beide Formeln lehrt al-Marrākūṣī¹⁾, und sie stellen die vollständige Theorie des Ostwestvertikals dar. Dabei unterscheidet der Autor 5 Fälle für die Ortsbreite 0° , $\varphi > \varepsilon$, $\varphi = 90^\circ - \varepsilon$, $\varphi > 90^\circ - \varepsilon$; $\varphi = 90^\circ$ ²⁾. Er gibt dazu einige bildliche Illustrationen und Tafelchen für Schattenlänge und Azimut (ω) für 6 Stunden und die Zeit des Beginns des 'aṣr. Im Krebs fällt ein Teil des Sonnenscheins auf die Nordwand des Zifferblattes; auch diese Tatsache findet gehörige Berücksichtigung. Erwähnt sei noch, dass al-Marrākūṣī statt Schattenlänge und -richtung bei den Vertikaluhren auch die rechtwinkligen Koordinaten der den Temporalstunden zugehörigen Punkte der Hyperbeln berechnet, bezogen auf die Horizontale des Vertikals als Abszissenachse und die Zenitlinie als Ordinatenachse. Der Fußpunkt des Gnomons ist Koordinatenanfang.

Wie zu erwarten, hat sich auch Ibn Yūnus mit dem Ostwestvertikal beschäftigt, und zwar im 26. Kapitel der Hākimitischen Tafeln. Seine Art der Behandlung ist etwas eigentümlich und in ihrem Endzweck nicht ganz klar. Der Autor sagt: »Das 26. Kapitel: über die Kenntnis der Höhe der Stunden, welche auf dem laḥ (lūh) sind, und das ist die Kenntnis der Höhe aus dem Azimut in der senkrecht in der Ostwestlinie aufgerichteten Fläche, und ich kenne keine Erwähnung durch einen Vorgänger. Beachte folgendes: Wenn die Zahl der Stunden, von denen du die Kenntnis ihrer Höhen willst, weniger als 6 ist, so multipliziere sie mit 15, und wenn sie größer als 6 ist, so ziehe sie von 12 Stunden ab; und was bleibt, das multiplizierst du mit 15, und was sich ergibt, das ist der Grad des Azimuts (der Richtung). Kenne den Sinus davon, und er ist der Sinus des Azimuts, und ebenso den Kosinus, der der Kosinus des Azimuts ist. Was aber den Sinus der Richtung anbelangt, so behalte ihn für den (späteren) Gebrauch im Gedächtnis, und was den Kosinus anbetrifft, so multipliziere ihn mit dem Sinus der Ortsbreite und teile das Ergebnis durch den Sinus totus; was herauskommt ist sein (eines Sinus) Bogen, und was auch immer sein Bogen ist, ziehe ihn von 90° ab und nimm den Sinus des Restes, den du Divisor nennst. Multipliziere

¹⁾ a. a. O., S. 332 und 333.

²⁾ a. a. O., S. 311—320.

alsdann den Sinus der Richtung mit dem Sinus der Ortsbreite und teile das Produkt durch den Divisor; was sich ergibt, das ist sein Bogen, und er ist der erste Bogen. Und bewahre ihn mit diesem, seinem Namen im Gedächtnisse und unterscheide ihn in zwei Fällen: Im einen von ihnen belässt du ihn in seinem Zustande für den späteren Gebrauch¹⁾; im anderen Fall ziehst du ihn (den Bogen) von 90° ab und nimmst den Sinus des Restes, den du mit dem Sinus der Richtung multiplizierst und durch den Sinus totus dividierst. Was herauskommt, ist der Sinus seines Bogens, und der Bogen selbst ist die Höhe jener Stunde im Beginn des Widders oder der Wage.

Und wenn die Sonne eine Deklination hat, so nimm den Sinus ihrer Deklination und multipliziere ihn mit dem Kosinus des ersten Bogens; das Produkt teilst du durch den Kosinus der Ortsbreite; das Ergebnis ist sein (eines Sinus) Bogen, und dieser Bogen ist der zweite Bogen. Behalte ihn im Gedächtnisse! Alsdann beachte: Wenn Sonnendeklination und Ortsbreite verschiedensinnig sind, so zähle den ersten und zweiten Bogen zusammen; wenn die beiden aber gleichsinnig sind, so ziehe den kleineren der zwei Bögen vom größeren ab, und was nach der Addition oder Subtraktion sich ergibt, das ziehst du von 90° ab, nimmst den Sinus dessen, was bleibt, multiplizierst ihn mit dem Sinus der Richtung und teilst das Produkt durch den Sinus totus. Was dann herauskommt, bestimmt einen Bogen, und der Bogen selbst ist die Höhe jener Stunde, doch bei Gott ist der Erfolg.

Zur Aufhellung vorstehenden Textes soll Abbildung 19 beitragen. Die Richtung oder das Azimut der Stunden, die auf dem lauh sind, kann nur der Winkel ω sein, den der Strahl ΩT mit der Ostwestlinie bildet. Wenn aber der Kairiner Astronom die Peripherie des Zifferblattes OW in 12 gleiche Teile von je 15° teilt und zu $\omega = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, \dots, 90^\circ$ die entsprechenden Sonnenhöhen über dem Horizonte (z. B. $\Sigma V = h$) berechnet, warum nennt er dann die Teile auf dem lauh Stunden? Diese »Azimut-Stunden« eignen sich nicht zur Zeitmessung. Man könnte denken Ibn Yûnus wollte nur h ermitteln und damit die Konstruktion des Zifferblattes bewerkstelligen, aber der Richtigkeit aller derartigen Vermutungen steht der Ausdruck: »Stunden, welche auf dem lauh sind« entgegen. Der Autor scheint den lauh, was Tafel, Tablette, Brett bedeutet, in der eben beschriebenen Fertigstellung als veritable Stundenuhr angesehen zu haben, wenn schon er über ihren Gebrauch als solche nichts sagt.

Die trigonometrischen Regeln lassen sich mittels vorstehender Abbildung 19 leicht verifizieren. Angenommen, die Sonne stehe im Himmelsäquator in Σ ; ihre Höhe über dem lauh sei $\text{arc } T\Sigma = \angle \xi$, die gesuchte Erhebung über dem Horizont sei $\text{arc } \Sigma V = \angle h$. Und $\angle \omega$ definiere eine gegebene »Azimutstunde«. Nennen wir den Winkel $T\Sigma W$ des bei T rechtwinkligen sphärischen Dreiecks noch $90^\circ - \chi$, so haben wir der Reihe nach:

$$\sin \chi = \sin \omega \cdot \cos \eta, \quad (I)$$

woraus sich χ berechnen lässt. Mittels des Sinussatzes gewinnt man aus demselben Dreieck:

$$\sin \xi = \frac{\sin \omega \cdot \sin \eta}{\cos \chi} \quad (II)$$

und mit Kenntnis von ξ gibt das rechtwinklige Kugeldreieck $T\Sigma Z$:

$$\sin h = \sin \omega \cdot \cos \xi \quad (III)$$

q. e. d. Man erkennt demnach, dass $\xi = \text{arc } T\Sigma$ der erste Bogen ist.

Es habe jetzt die Sonne eine Deklination, und zwar stehe sie im Beginn des Steinbocks, und wiederum sei nach ihrer Höhe $h = \text{arc } R\Sigma$ gefragt, falls durch den Winkel ω

¹⁾ D. h. als Sinus des ersten Bogens, wie er ja aufritt.

die Stunde auf dem lauh gegeben ist. Wir nennen den Bogen $\Sigma\Sigma_1$, der der zweite Bogen ist: ξ_1 , und es sei $\text{arc } \Sigma_1 L = \delta$. Diesmal führt die Betrachtung der zwei rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $W T \Sigma$ und $\Sigma L \Sigma_1$ zum Ziel. Im ersten ist:

$$\cos \chi = \frac{\cos \varphi}{\cos \xi}, \quad (\text{IV}\alpha)$$

im anderen:

$$\cos \chi = \frac{\sin \delta}{\sin \xi_1}, \quad (\text{IV}\beta)$$

Durch Vergleich von (IV α) mit (IV β) folgt:

$$\sin \xi_1 = \frac{\sin \delta \cos \xi}{\cos \varphi} \quad (\text{V})$$

q.e.d. Nach der Abbildung ist $T\Sigma_1 = \xi + \xi_1$, und damit gibt das rechtwinklige Dreieck $T\Sigma_1 Z$:

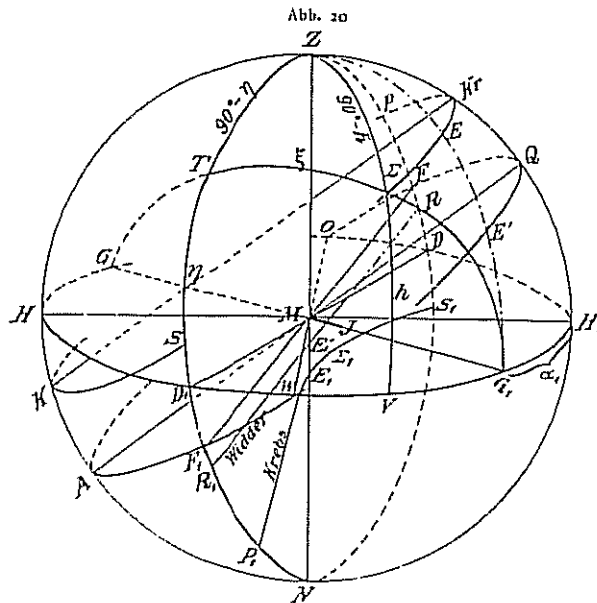
$$\sin h_1 = \sin \omega \cdot \cos (\xi + \xi_1), \quad (\text{IV})$$

womit die trigonometrische Deduktion des Autors in allen Teilen bewiesen ist. Für eine positive Sonnendeklination ist die Beweisführung ganz analog.

3. DEKLINIERENDE (ABWEICHENDE) VERTIKALUHREN

(französisch: Déclinants)

Das Zifferblatt einer solchen Sonnenuhr ist in der Ebene DZD_1N (Abb. 20) enthalten, die von der Ostwestrichtung um den Winkel $D_1M W = \alpha$ abweicht. Der Gnomon JM ist



horizontal nach dem Punkte Z , gerichtet ($\angle H_1 M G_1 = \alpha_1$). Die Schnittlinie des Horizonts mit dem Deklinant ist DD_1 ; über ihr steigt der Durchschnitt mit dem Äquator ostwärts an zur Höhe $DF = h_1$, wenn FF_1 die Durchdringungsspur von Äquator- und Schattenebene bedeutet. Diese Höhe h_1 findet sich leicht aus dem rechtwinkligen Kugeldreieck OFD mittels der Formel:

$$\tan h_1 = \sin \alpha \cdot \cot \varphi.$$

Doch kommt sie bei arabischen Astronomen nicht vor. Dieses nach Südwesten gewandte Zifferblatt wird von der Sonne erst beschienen, wenn sie vormittags in den Vertikalkreis $ZPFD$ tritt. Punkt P gehört dem Krebs, F dem Widder oder der Wage an.

Der P entsprechende Schatten fällt in der Richtung nach P , hin ins Unendliche; ebenso läuft der Schatten des Zeigers $MJ = q$ auf FF_1 über F_1 hin nach dem Unendlichen, falls die Sonne im Himmelsäquator steht. Je mehr sich die Sonne der Mittelebene ZMG nähert, die senkrecht auf der Uhrebene steht, desto mehr verkürzen sich die Schatten. Die Sonne stehe alsdann in E und E' , und die zugehörigen Schatten fallen senkrecht nach E_1 und E'_1 hinab.

Verläßt endlich die Sonne in S die Ebene des Deklinant, so fällt der Schatten des Gnomons abermals über S , ins Unendliche hin. Die Bilder des Himmelsäquators und des Krebses sind die gerade Linie RR_1 , resp. die Hyperbel $P_1E_1\Sigma_1S_1$. Nach diesen kurzen Bemerkungen dürfte die nebenstehende Zeichnung dem Verständnis keine Schwierigkeiten mehr machen.

Wenn man aber die Größen φ , δ , s und α als gegeben betrachtet, so ist die Ermittlung der Sonnenhöhe $T\Sigma=\xi$ über der Ebene des Deklinants und die zugehörige Richtung $D_1T=\eta$ ziemlich kompliziert. Jedenfalls hätte sie, wie ja aus meiner allgemeinen Theorie der ebenen Sonnenuhren sofort ersichtlich ist, die Kräfte der Araber überstiegen. Sie erleichterten sich die Behandlung eines solchen munharif dadurch, dass sie die Höhe der Sonne über dem Horizont, h , sowie das zugehörige Azimut α ($=VII$) als gegeben betrachteten, oder wie Ibn Yûnus sich ausdrückt: »dass Höhe und Azimut auf der basiqa gegeben sind, und meistens ist dies der Fall«¹⁾. Da alsdann $\alpha+\alpha_1=\text{arc } D_1V$, sowie $\text{arc } \Sigma V=h$ gegeben sind, so gibt das bei T rechtwinklige sphärische Dreieck ΣTZ sofort:

$$\sin \xi = \cos h \cdot \sin (\alpha + \alpha_1) \quad (I)$$

und ganz ebenso erhält man:

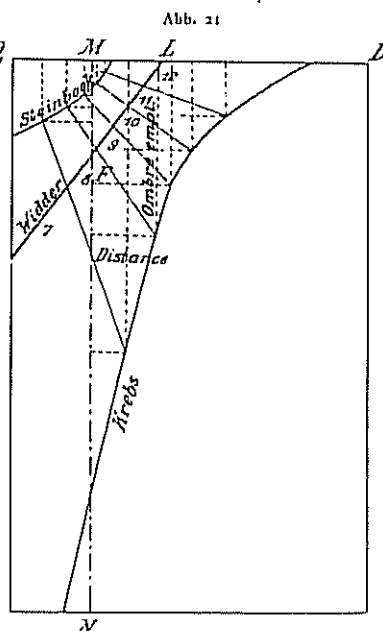
$$\sin \eta = \frac{\sin h}{\cos \xi}, \quad (II)$$

und das ist es, was Ibn Yûnus¹⁾ und al-Marrâkuṣī²⁾ zur Konstruktion des munharif lehren. Wiederum unterscheidet letzter Autor fünf Fälle für die verschiedenen Breiten, und ähnlich wie bei anderen Vertikalen, gibt er auch hier die rechtwinkligen Koordinaten der Kurvenpunkte. Der Fußpunkt des Gnomons ist Nullpunkt der Zählung; DD_1 und MN sind die Achsen. Die Abszisse eines Punktes heißt »Distance«, die zugehörige Ordinate »Ombre employée«³⁾. Es folgt hier das Bild des Zifferblattes eines munharif für $\varphi=30^\circ$, $\alpha=45^\circ$ (nach al-Marrâkuṣī, a. a. O. Pl. 24, Abb. 103).

4. DIE INKLINIERENDE UND DEKLINIERENDE UHREBENE

Eine ausführliche Behandlung derselben findet man bei al-Marrâkuṣī⁴⁾. Der Gnomon kann senkrecht zur Uhrfläche stehen oder der Horizontebene parallel laufen. Wie man aus meiner einleitenden, allgemeinen Theorie der ebenen Uhren erkennt, ist die Konstruktion dieses Zifferblattes am kompliziertesten, und es ist nicht uninteressant zu sehen, wie al-Marrâkuṣī das Problem löst. Der Autor sagt:

»In diesem Fall betrachte die inklinierende Ebene als eine horizontale, die einem anderen Ort angehört. Die Höhe des Poles dieses Horizontes über dem Horizont deines Beobachtungs-ortes ist bekannt, weil sie dem Komplement der Neigung der Ebene (zum Horizont) gleich ist.



¹⁾ Oxford Mskr. Nr. 311, Kap. 26, Fol. 64r

²⁾ a. a. O. Kap. 78, S. 333 ff. und S. 320 ff.

³⁾ Oder arabisch: al-bu'd und al-'ill al-musta'mil.

⁴⁾ a. a. O. Kap. 80, S. 338.

Das Azimut des angenommenen Ortes bezüglich seines Beobachtungsortes wird auch bekannt sein, weil es dem Azimut der inklinierenden Ebene gleich ist und auf der entgegengesetzten Seite liegt.

Danach sind die Breite und die Länge dieses Ortes bekannt. Und wenn man Breite und Länge eines beliebigen Ortes kennt, ist es leicht für diesen Ort die verflossene Zeit des Tages dieses Ortes zu haben. Und wenn diese verflossene Zeit für den angenommenen Ort bekannt ist, ist es auch die Höhe der Sonne über diesem Horizont; d. h. es wird die Höhe über der inklinierenden Ebene bekannt sein.

Endlich wird man mit der Höhe der Sonne über diesem Horizont auch den Horizontalschatten dieser Höhe kennen, welcher ja gesucht ist.

Beispiel.

Die Ebene sei unter 45° zum Zenit eines Ortes geneigt, dessen Breite $29^\circ 55'$ (n) und dessen Länge $64^\circ 50'$ beträgt¹⁾, und das Azimut dieser inklinierenden Ebene sei 45° (Süd-Ost). Wenn wir sie als Horizont eines angenommenen Ortes betrachten, so wird die Höhe des Zenits dieses Ortes $= 45^\circ$ und sein Azimut $= 45^\circ$ (Nord-West) sein. Suche die Breite dieses Ortes nach den früher gegebenen Regeln.

Zu dem Zweck multipliziere $42^\circ 26'$, den Kosinus der Höhe des Zenits dieses angenommenen Ortes, mit $\frac{42}{60} + \frac{26}{3600}$, dem Kosinus seines Azimuts, das Produkt, 30° , ist der Sinus des ersten Bogens.

Multipliziere den Sinus der Höhe des Zenits des angenommenen Ortes mit 60 und teile das Produkt durch $51^\circ 58'$, den Kosinus des ersten Bogens; der Quotient $49^\circ 00'$ ist der Sinus der Meridianhöhe des ersten Bogens, nämlich $54^\circ 45'$.

Zähle diese Meridianhöhe des ersten Bogens zur Meridianhöhe des Äquators in dem gegebenen Ort, weil die Äquatorhöhe in diesem Ort von entgegengesetztem Vorzeichen mit der Zenithöhe des angenommenen Ortes ist. Die Summe ist $65^\circ 10'$ und heiße Gleichung.

Multipliziere $51^\circ 58'$, den Kosinus des ersten Bogens, mit $\frac{54}{60} + \frac{27}{3600}$, dem Sinus der Gleichung. Das Produkt, $47^\circ 9' 35$, ist ein Sinus, dessen Bogen $51^\circ 49'$ die nördliche Breite des angenommenen Ortes ist.

Multipliziere den Sinus des ersten Bogens mit 60 und teile das Produkt durch den Kosinus der Entfernung des angenommenen Ortes vom Äquator, welcher Kosinus $37^\circ 5'$ ist; der Quotient $48^\circ 32'$ ist der Sinus des Bogens $54^\circ 00'$; er ist gleich der Längendifferenz.

Ziehe diese Längendifferenz von der Länge des gegebenen Ortes ab, die $64^\circ 50'$ beträgt, weil das Zenit des angenommenen Ortes westlich liegt: der Rest wird die Länge des angenommenen Ortes sein.

Setze jetzt voraus, dass die Sonne im Anfang des Steinbocks steht und dass eine Stunde des Tages verflossen ist, und suche die in dem angenommenen Ort seit dem letzten Mittag verflossene Zeit, gemäß der Stunde, die in dem angenommenen Ort ist. Du findest 8 Stunden und 50 Minuten.

Was dir $14^\circ 12'$ für die Höhe der Sonne über dem Horizont des angenommenen Ortes gibt; mithin ist $47^\circ 25'$ der gesuchte Schatten und $81^\circ 39'$ dessen Azimut.

So wenig als Ibn Yûnus, gibt auch al-Marrâkuši irgendeine Erläuterung zu dem von ihm Gelehrten. Deshalb möge hier anschließend eine solche beigefügt werden. Wir beziehen uns dabei auf Abbildung 7. Z' ist das Zenit der Ebene E , wenn man darunter den

¹⁾ Das ist also Miṣr oder Kairo, und man darf vermuten, dass das Beispiel von Ibn Yûnus stammt.

höchsten Punkt versteht, und $\text{arc } O, G'$ ist das Azimut, und in unserem Fall $= \text{arc } GH = 45^\circ$. Wir fallen jetzt von Z' ein sphärisches Perpendikel auf den Meridian und betrachten die zwei rechtwinkligen Kugeldreiecke $Z'HZ'$ und $Z'PH$. Dann liest man folgende Beziehungen ab:

$$\sin Z' H = \cos O, G' \cdot \cos Z' G' = \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \quad (I)$$

$$Z' H = \text{erster Bogen} = 30^\circ$$

$$\cos ZZ' = \cos HZ' \cdot \cos HZ$$

$$\sin Z' G' = \cos HZ' \cdot \sin HZ$$

$$\sin HZ = \frac{\sin Z' G'}{\cos HZ'} \quad (II)$$

$$HZ = 54^\circ 45' = \text{Meridianhöhe des ersten Bogens.}$$

Da $HP = 29^\circ 55'$ und $PZ = 60^\circ 5'$ ist, so bleibt für HZ $35^\circ 15'$ übrig. Die Summe der Bögen $HZ + ZQ = 35^\circ 15' + 29^\circ 55' = 65^\circ 10'$ ist die Gleichung. Also:

$$\text{arc } HZ = \text{Gleichung} = 65^\circ 10' \quad (III)$$

Man denke sich ferner einen Quadranten von P über Z' nach dem Äquator gezogen. Dann hat man

$$\sin (90^\circ - PZ') = \cos HZ' \cdot \sin HZ \quad (IV)$$

(aus Dreieck $PZ'H$)

$$\text{arc } (90^\circ - PZ') = 51^\circ 49' = \text{nördliche Breite.}$$

Aus dem gleichen Dreieck folgt weiter:

$$\sin HZ' = \sin \angle Z' P H \cdot \cos (90^\circ - PZ')$$

oder

$$\sin \lambda = \frac{\sin HZ'}{\cos (90^\circ - PZ')} \quad (V)$$

falls wir $\angle Z' P H$ zur Abkürzung mit λ bezeichnen ($\lambda = 54^\circ$). Damit bereitet der obige Text dem weiteren Verständnis keine Schwierigkeiten mehr.

Ist die Inklination einer Uhrebene der Erhebung des Himmelsäquators an diesem Orte gleich, so fällt ein ihr perpendikulärer Gnomon mit der Weltachse zusammen, d. h. wir haben eine abendländische Äquatorialuhr. Bei einer Sonnenuhr, deren Zeiger in der Weltachse liegt, fällt der Schatten des Stylus bei dem Stundenwinkel σ stets in ein und dieselbe Linie; d. h. die Lage des Schattens ist von der veränderlichen Sonnendeklination unabhängig. Dabei ist die Orientierung der Uhrebene gleichgültig. Auch diese Art von Sonnenuhren ist bei al-Marrākuṣī ausführlich behandelt¹⁾ und durch die Abbildungen 104–108 illustriert²⁾. Der Autor betont, dass ein so orientiertes Zifferblatt für $\delta = 0^\circ$ keinen endlichen Schatten liefern könne, dass deshalb erst dem Widder und der Wage benachbarte Parallelkreise zur Abbildung kommen könnten, dass die Höhe der Sonne über einer in der Äquatorebene liegenden Fläche der Sonnendeklination gleich sei, und dass bei positiver Sonnendeklination die obere Hälfte des Plans, bei negativer dessen untere Fläche den Schatten auffange. Teilt man das Abbild eines Tageskreises der Sonne in 12 gleiche Teile, so hat man die temporalen Stunden; teilt man aber die Kreisperipherie in 24 gleiche Teile, so erhält man die gleichen Stunden. Beide Arten von Stunden bringt der marokkanische Astronom zur Anschauung.

Dennoch kann man al-Marrākuṣī nicht als Erfinder der modernen Sonnenuhr, nach welchem man bis heute vergeblich fragt, ansprechen. Er hat den Vorteil des der Weltachse

¹⁾ z. z. O., Buch III, Kap. VII, S. 324 ff.

²⁾ D. h. die Äquatorialuhren.

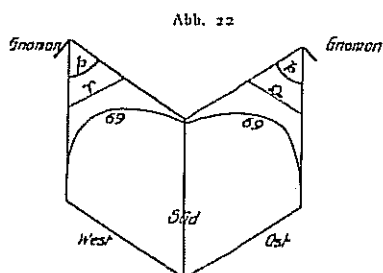
parallelen Gnomons gegenüber einem zum Zenit oder horizontal gerichteten nicht erkannt. Für ihn ergab sich dieser Typus nur aus der Rektangularität des Gnomons mit einem der Äquatorebene parallelen Inklinant. Die Verallgemeinerung: Beliebige orientierte Uhrfläche mit Stift parallel der Weltachse macht al-Marrâkuši nicht. *a.*

Dagegen finden wir bei ihm eine gründliche Beantwortung der Frage nach der Natur der Tageskurven. »Le premier chapitre du livre III prouve, un peu longuement, que la marche de l'ombre doit être une ligne droite aux équinoxes¹⁾, une hyperbole toutes les fois que le Soleil peut se coucher, une parabole, quand il ne fait que raser l'horizon, une ellipse en été dans la zone glaciale, ou enfin un cercle, quand l'observateur est au pôle. Je n'ai vu cette doctrine dans aucun auteur plus ancien; il est à croire cependant qu'elle n'est pas d'Aboul Hhasan, puisqu'il ne dit pas comme il fait en plusieurs endroits, que personne encore n'en a parlé et qu'il en a eu la première idée.« (Delambre, a. a. O., S. 522.) *b.*

Die Konstruktion der Kegelschnitte erfolgt nach den Lehren des Apollonius (vergl. Conica, ed. v. J. L. Heiberg; Lips. 1891—93), der Autor (al-Marrâkuši) erwähnt, Seite 419, dass er auch einen Kegelschnittszirkel (al-birkâr at-tâmm) verwende. Diesen beschrieb er in einem verlorengegangenen Werke.

5. ÜBER SONNENUHREN, DEREN AUFFANGFLÄCHE AUS ZWEI IM VORHERGEHENDEN BESCHRIEBENEN EBENEN ZUSAMMENGESETZT IST

Man könnte diese Gebilde als kombinierte Uhren bezeichnen. Sie sind bei al-Marrâkuši ohne bildliche Darstellung kurz beschrieben²⁾. Aus dem Text zu schließen sind sie wohl mit älteren Formen dieser Art nahe verwandt³⁾. Ich lasse jetzt den Sédillotschen



Text verdeutscht folgen, der keiner weiteren Erläuterung bedarf als eines Hinweises auf die zwei Abbildungen 22 und 23, die ich dem Ganzen hinzufügen möchte. Der Marokkaner sagt:

»Es gibt mehrere Zusammenstellungen von früher besprochenen Ebenen: man versteht hier unter Komposition die Zusammenfügung einer Ebene mit einer andern in der Weise, dass sie zwischen sich einen Winkel einschließen. Wir werden die bemerkenswertesten Typen kurz beschreiben:

1. Die Muğannaha⁴⁾ oder die Geflügelte.

Sie besteht aus zwei Tafelchen, die rechtwinklig zum Horizonte stehen, in der Art, dass der Rücken des Winkels, den die zwei Tafelchen einschließen, ebenfalls perpendicular dem Horizonte ist, dass die Mittagslinie den Winkel in zwei gleiche Teile teilt, und dass auf dem östlichen Flügel sich die Stunden der ersten Hälfte des Tages auf dem westlichen sich die Stunden der anderen Tageshälfte finden. Die Bilder des Krebses berühren sich auf dem Rücken der Muğannaha für Orte mit nördlicher Breite; für Orte mit südlicher Breite hat dies für den Anfang des Steinbocks statt. Und wenn die zwei Flügel in den Azimuten des Auf- und Untergangs der Sonne zu Beginn des Krebses liegen, so werden diese Stunden

¹⁾ Dies erwähnt auch Ibn Yünus

²⁾ a. a. O., S. 609 ff.

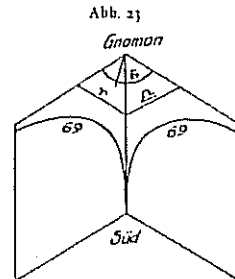
³⁾ Vergl. Martini: Abhandlung von den Sonnenuhren der Alten, Leipzig 1777, Abb. 9; die eine konkave Zylinderfläche mit zwei Flügeln darstellt. Herrn Professor J. Drecker aus Aachen verdanke ich die Angabe, dass er im Museum zu Leiden einen Flügel mit griechischer Inschrift sah.

⁴⁾ Vom Verbum ḡannāḥ = mit Flügeln versehen.

allgemein Stunden des Vertikals über der Ostwestlinie genannt, und für diese Stunden berührt der Parallel des Krebses niemals den Horizont (?).

2. Der Mutakâfi¹⁾ (einander entsprechend, genügend).

Er besteht ebenfalls aus zwei ebenen Tafelchen, die in der Weise senkrecht zum Horizonte stehen, dass sie einen Winkel einschließen, der durch die Mittagslinie in zwei gleiche Teile geteilt wird, dass der Rücken gegen den sichtbaren Himmelspol gewendet ist, und dass die Linie des Winkels die Mittagslinie sei, d. h., dass der Schatten des Gnomons im Mittag in die Linie des Winkels fällt. Die Stunden sind auf den Innenflächen der zwei Tafelchen konstruiert, wie bei anderen Deklinants, für die ein Gnomon genügt, was augenscheinlich ist. Es besteht zwischen dieser und der ersten Komposition nur der eine Unterschied, dass die Stundenlinien hier auf der Innen-, dort auf der Außenseite der Flügel verzeichnet sind.



3. Die Miknasa (Besen; Mehrzahl: makânis).

Sie besteht aus zwei Tafelchen, die um den gleichen Betrag zum Horizont geneigt sind. Die Stunden des Tages sind auf die zwei sichtbaren Flächen der Tabletten eingezeichnet, in der Art, dass die Linie des Winkels die Mittagslinie ist.

4. Die Miknasa, bei der der Rücken des Winkels in der Ostwestlinie ist.
Die Stundenlinien sind auf den sichtbaren Flächen gezogen.

5. Die deklinierenden Makânis.

Das sind diejenigen, bei denen der Rücken des Winkels zum Meridian und der Ostwestlinie geneigt ist. Die Tagesstunden sind auf den sichtbaren Flächen verzeichnet.

6. Die Makânis, deren Rücken mit der Mittagslinie in der Ebene des Meridians liegt.
Die Stundenlinien sind auf den inneren Flächen dargestellt. (Der Rücken muss also inklinierend sein.)

7. Die Makânis, deren Rücken mit der Ostwestlinie in der Ebene des ersten Vertikals liegt.

Die Stundenlinien sind auf den inneren Flächen verzeichnet. (Rücken wiederum inklinierend zum Horizont.)

8. Die Makânis, deren Rücken zur Mittags- und Ostwestlinie dekliniert.

Die Stundenlinien sind auf den inneren Flächen verzeichnet. (Der Rücken ist windschief.)

¹⁾ Vom Verbum *iktafa* = einander entsprechen, sich begnügen.

IX. KAPITEL

KONSTRUKTION DER ZYLINDER-, KEGEL- UND KUGELUHREN

Von Sonnenuhren mit krummer Auffangfläche ist in der arabischen Gnomonik vor al-Marrākuṣi bis jetzt kaum etwas bekannt. Doch begegnet man bei ihm einer so erschöpfenden Behandlung aller drei Typen, dass man zu der Vermutung geführt wird, es müssten doch schon früher andere muslimische Astronomen derlei Uhren konstruiert haben. Der Autor selbst sagt, dass niemand vor ihm jemals eine Sonnenuhr auf krummer Oberfläche entworfen habe, aber Delambre entgegnet hierauf »... Il est bien mal informé ou il ne parle que des Arabes, car sans parler de Bérosee, ni d'Aristarque de Samos, nous avons dans Vitruve et Stuart, la preuve qu'on avait fait des cadrans de toute espèce« (a. a. O., S. 522).

Wir erwähnen zuerst die Kugeluhren, deren Besprechung sich hier mit dem kurzen Hinweis erledigt, dass sie alle, wie sie uns al-Marrākuṣi vorführt, völlig identisch sind mit den Hemicyklen und Skaphen der Alten, die nach G. Biffinger bekanntlich den Zweck hatten, »die auffangende Fläche zum genauen Gegenbilde der Himmelskugel, die Schattenwege zu genauen Abbildern der Sonnenwege zu machen«).

Von den Kegeluhren sagt der marokkanische Astronom sehr wenig; er verweist auf das, was er über die Zylinderuhren vorgebracht hat (a. a. O., S. 602), aus deren Konstruktion diejenige des Konus unmittelbar hervorgeht. Bemerkenswert ist sein Schlusssatz: »Les constructions sur le cône sont plus parfaites que celles sur le cylindre, parceque l'ombre ne s'étend jamais au delà de la surface du cône.«

Zu dem Inhalt einer kleinen Schrift des Muḥ-'Abdallāh b. Qāsim 'Abdallāh Yahjā as-Ṣiqilī (des Sizilianers), deren arabischen Text Cheikh in al-Maṣriq (Bd. 10, 1907, S. 75 ff.) veröffentlicht hat, vergleiche man E. Wiedemann und J. Würschmidt¹⁾. Es ist darin die Konstruktion einer arabischen Reise-Sonnenuhr behandelt, der als Zifferblatt die Mantelfläche eines Kegelstumpfes dient. Die Zeit der Abfassung der Schrift lässt sich nicht näher angeben, doch dürfte der sizilianische Muslim vor dem 13. Jahrhundert gelebt haben. Der Name der kegelförmigen Sonnenuhr ist Mukḥula. Hiezu sagt Wiedemann (a. a. O., S. 359) folgendes: »Der Name unseres Instrumentes, Mukḥula, bedeutet in der gewöhnlichen Sprache ein Instrument, in dem man den Kuhl (den als Augenschminke benutzten, fein gepulverten Spießglanz) aufbewahrt. Die Mukḥula wird auch als eine Vorrichtung bezeichnet, in die man Charrāqat Naft [d. h. Naphtabrennstoffe (Journ. asiat. 1850, S. 248)] tut. Bei Gazari kommt das Wort als Bezeichnung für einen Pfeiler vor. Hier wird es für eine kegelförmige Sonnenuhr benutzt. Als eine besondere Uhr führt die Mukḥula der Enzyklopädist Chwārizmī in den Maṣāṭih al-'Ulūm²⁾ auf; sie war also schon im 10. Jahrhundert bekannt.«

Was die Einrichtung und Benützung dieser Sonnenuhr angeht, so wird sie anschaulich charakterisiert durch die Worte Würschmidts (a. a. O., S. 360 ff.):

»Während vielfach bei den sonst beschriebenen Sonnenuhren das Azimut zur Zeitbestimmung verwandt wird, indem man entweder aus dem Azimut des Schattens eines

¹⁾ Die Zeitmesser der antiken Völker, Stuttgart 1886, S. 27.

²⁾ Über eine arabische kegelförmige Sonnenuhr (Arch. f. d. Gesch. d. Naturw. u. d. Techn. VII, 1916, S. 359 ff.).

³⁾ Vergl. E. Wiedemann-Beiträge XVIII, S. 11.

festen Zeigers von passender Länge die Zeit graphisch bestimmt, oder aus dem Winkel ermittelt, den der der Sonne nachgedrehte Zeiger mit dem Meridian bildet, soll unsere Sonnenuhr als Reiseuhr verwendet werden, d. h. ohne dass man den Meridian zu bestimmen braucht. Also muss die Zeitbestimmung auf die Sonnenhöhe allein zurückgeführt werden, und deshalb wird auch, wie aus der folgenden Beschreibung hervorgeht, der Zeiger stets nach der Sonne gerichtet. Da aber die Sonnenhöhen in den höheren geographischen Breiten sich stark mit den Jahreszeiten ändern, so muss auf der kegelförmigen Sonnenuhr diese Abhängigkeit der Sonnenhöhen von den Jahreszeiten und damit auch der Schattenlängen graphisch dargestellt sein. Zu diesem Zweck wird die Peripherie der Sonnenuhr in 12 Teile geteilt, die den 12 Monaten entsprechen, diese wieder in 4 Unterabteilungen, die annähernd eine Woche darstellen; die gleiche Teilung sei auf der Deckfläche angebracht, um deren Mittelpunkt der horizontale Stab drehbar ist. Zur Benutzung stellt man diesen auf die dem betreffenden Jahrestag entsprechende Zahl der Peripherie, dann die Sonnenuhr, ohne den Zeiger nochmals zu ändern, durch Drehen des auf einem Sockel stehenden Kegels so ein, dass der Zeiger nach der Sonne zeigt, dann fällt der Schatten auf die dem betreffenden Tage entsprechende Mantellinie, und sein Ende bestimmt die Stunde.»

Da die Uhr als Reiseuhr dienen sollte, so veränderte der Autor für verschiedene geographische Breiten die Länge des Zeigers derart, dass er für die Mittagsstunde jedesmal die gleiche Schattenlänge warf. Dann sollte die Uhr annähernd richtig gehen¹⁾.

Wiedemann und Würschmidt haben im physikalischen Institut der Universität zu Erlangen nach der Beschreibung der Uhr ein Modell konstruiert und dessen Photogramm ihren ausführlichen Darlegungen als Abbildung 4 beigelegt.

Es soll jetzt auf die arabischen Zylinderuhren etwas näher eingegangen werden. Al-Marrâkušî lehrt die Konstruktion der Bilder des Krebses, Widders und Steinbocks, sowie der Stundenlinien auf der konvexen Oberfläche eines Zylinders in den verschiedensten Fällen. Der Zylinder kann senkrecht stehen:

1. zum Horizont,
2. zum Meridian,
3. zum ersten Vertikal,
4. zu einer inklinierenden Ebene ohne Deklination zum Meridian,
5. zu einer inklinierenden Ebene ohne Deklination zum ersten Vertikal,
6. zu einer inklinierenden Ebene, die gleichzeitig vom Meridian und ersten Vertikal abweicht.

Hier soll nur der erste Fall einer näheren Betrachtung unterzogen werden, da die anderen im Prinzip ihm ähnlich sind. Der Autor lehrt:

Man entnehme für den Wendekreis des Krebses die Länge der Vertikalschatten, die man bei gegebener Ortsbreite und Gnomonshöhe — diese letztere betrug immer 12 Finger — berechnet hat, einer Tabelle und trage sie vom oberen Rande des Zylinders auf dessen

¹⁾ Würschmidt berechnet unter der Annahme $\varphi_1 = 33^\circ$ und $\varphi_2 = 37^\circ 30'$, bei gleicher Mittagsschattenlänge ($\lambda_0 = 23,86$ cm, wenn $\eta = 8,074$ cm) die Differenzen der Schattenlängen für die anderen Stunden. Sie sind für die erste, zweite ... Nachmittagsstunde bez. 1,93 cm, 1,79 cm, 1,28 cm, 0,79 cm, 0,38 cm (z. a. O., S. 367). Delambre (z. a. O., S. 517 ff.) führt eine ähnliche Rechnung für einen «Cadran cylindrique propre à toutes les latitudes» unter Zugrundelegung der Breiten $\varphi_1 = 66^\circ 0' 30''$ $\varphi_2 = 19^\circ 30' 0''$ aus. Er sagt:

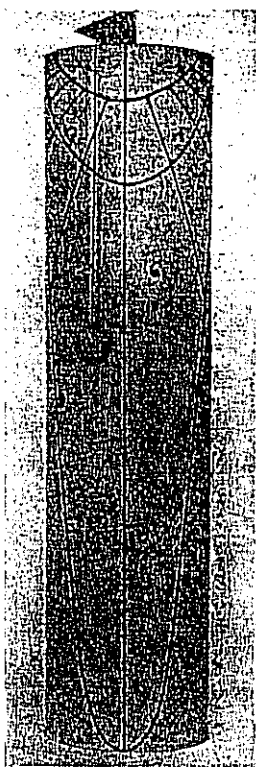
$$\begin{aligned} \sin h &= \cos(\varphi - \delta) - 2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cdot \cos \delta \\ &= \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos(\varphi - \delta) \sin^2 \frac{1}{2} \varphi - \cos(\varphi + \delta) \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \\ &= \cos(\varphi - \delta) \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - \cos(\varphi + \delta) \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \end{aligned}$$

Il y a donc toujours un terme qui dépend de $\cos(\varphi + \delta)$ c'est-à-dire de la hauteur méridienne de la saison opposée, et si vous supposez donnés $(\varphi + \delta)$ et $(\varphi - \delta)$; φ et δ sont dès-lors déterminés, et le calcul ne conviendra qu'à une seule latitude.

E. v. Bassermann-Jordan, Zeitmessung und Uhren. Bd. I, Lfg. F.

Mantellinien nach unten ab. Zuvor aber sind die Deckkreise des Zylinders in 360 Grade eingeteilt. Die Zählung dieser Grade beginnt beim Südpunkt, so dass die fortschreitende Gradzahl gleichzeitig mit dem Azimut (α) der Sonne identisch ist¹⁾. Durch Verbindung gleicher Azimute erhält man auf dem Zylinder die eben besagten Mantellinien. Man hat also zu einem gegebenen Stundenwinkel erst das Azimut der Sonne zu bestimmen, vielmehr aus Azimuttabellen zu entnehmen und die Vertikalschattenlänge dem ihr entsprechenden Azimut zuzuordnen. Tut man dies für alle 12 (temporalen) Stunden des Tages, so erhält man in der Verbindung aller Schattenenden auf dem Zylinderumfang das Abbild des Wendekreises des Krebses. Auf ganz dieselbe Weise ermittelt man das Bild des Steinbocks und des Äquators, welches natürlich keine gerade Linie sein kann.

Abb. 24



Die Abbildungen dieser drei Kugelkreise auf dem Zylindermantel bestehen zunächst aus 12 Stundenmarken. Eine Stundenlinie ist die Verbindung aller *aquihorären* Punkte der Projektionen sämtlicher Parallelkreise. Wie ist nun eine solche Stundenlinie auf der krummen Oberfläche konstruiert? Auf diese Frage ist bei unserm Autor nicht näher eingegangen. Bei ihm liegen auch nur drei zu verbindende Punkte vor. Er hat selbstverständlich das Netz der Schattenlinien auf dem abgerollten Zylindermantel gezeichnet, und in seiner diesbezüglichen Figur erscheinen die temporalen Stundenlinien als Gerade.

Zur Benützung dieser Uhr bringt man auf der Zylinderachse über der Deckfläche einen beweglichen Gnomon an, wie ihn Abbildung 24 zeigt. Er ragt um die Länge von 12 Fingern über den Rand der Deckfläche hervor. Ein Bleilot ist an dem horizontalen Zeiger so befestigt, dass es den Mantel des Zylinders entweder tangiert oder doch nur einen sehr geringen Abstand von demselben hat. Will man nun die Zeit wissen, so dreht man zunächst den Zeiger der Uhr so weit, bis sein Schatten mit dem Faden des Bleilotes zusammenfällt. Die Stundenmarke, auf welche das Ende des Schattens fällt, gibt die augenblickliche Zeit an, während man aus der Größe der Drehung gleichzeitig das Azimut der Sonne an dem genau nach den Kardinalrichtungen orientierten Zylinder ablesen kann.

Obenstehende Abbildung 24 wurde dadurch gewonnen, dass die Abbildung 128 des *Traité des instr. etc.* zum Zylinder aufgerollt und dann photographiert wurde. Der Gnomon ist nach al-Marrâkušis Angaben konstruiert und befestigt ($\eta = 30^\circ$).

¹⁾ d. h. nach abendländischer Zählweise.

X. KAPITEL

BESTIMMUNG DER GEOGRAPHISCHEN BREITE EINES ORTES AUS DER LINEATUR DER SONNEN- UHR, DIE URSPRÜNGLICH FÜR DIESEN ORT KONSTRUIERT WAR

Da die Abbildung des Tageslaufs der Sonne auf eine Schattenfläche, d. h. die Projektion des Sonnenparallels durch die Spitze eines Gnomons, in ihrer Lage und Gestalt u. a. auch von der geographischen Breite des Aufstellungsortes der Sonnenuhr abhängt, so wird man umgekehrt aus den verzeichneten Schattenkurven wiederum auf die Ortsbreite, für die die Uhr »richtig geht«, zurückschließen können. Tatsächlich finden sich, wie wir sahen, bereits bei Ibn Yûnus Andeutungen, die Sonnenuhr zur Breitebestimmung auszunützen¹⁾, und al-Marrâkuši geht so ausführlich auf diesen Gegenstand ein²⁾, dass man den Gedanken, es könnte sich nur um eine Art Spielerei des der Gnomonik ergebenden Astronomen handeln, fallen lassen muss. Vielmehr scheinen diese merkwürdigen Praktiken auf eine gewisse religiöse Verpflichtung des Islamgläubigen Bezug zu nehmen, den hağğ oder die Pilgerfahrt nach Mekka. Nicht gleichgültig und der Astronomie fremd, durchwanderten mathematisch gebildete Mekkapilger die weiten Räume Nordafrikas und die Mittelmeergestade. Bemühungen, die geographische Lage einer jeden passierten Stadt zu erkunden, entsprachen ganz ihren wissenschaftlichen Neigungen. Was lag dabei aber näher, als die pro loco konstruierte Sonnenuhr, die Ortsuhr, nach der Breite zu fragen, zumal ihre Erstellung in den muhammedanischen Ländern des Ostens und Westens sehr beliebt, ja gleichsam religiöse Pflicht war?

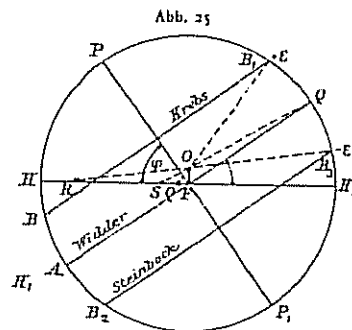
Es sollen deshalb im folgenden einige dieser gnomonisch-konstruktiven Methoden der Breitebestimmung besprochen werden. Ausführlicheres darüber findet man in meiner Dissertationsschrift: Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhenbestimmung bei den ältern Völkern³⁾.

1. BREITEBESTIMMUNGEN MITTELS DER BASÎTA (nach al-Marrâkuši)

a) Falls eine solche basîta gegeben ist, sei nach dem Wege gefragt, die Breite des Ortes zu bestimmen, für den sie konstruiert wurde, wenn diese Breite unbekannt ist.

»Die Antwort ist die, dass, da der Gnomon bekannt ist, sowie auch seine Schatten(längen) für den Mittag des Anfangs des Widders, Steinbocks und Krebses, die Breite des Ortes gegeben ist durch den Gnomon und einen dieser Schatten.«

In Abbildung 25 sei $OF = q$ der Gnomon, welcher bei der Sonnenhöhe H , $FB_1 = 90^\circ - \varphi + \epsilon$ den Schatten $FQ = m$ (Sonne im Krebs), am Mittag des Anfangs des Widders, wo die Sonnenhöhe $= 90^\circ - \varphi$ ist, den Schatten $FS = m_1$, endlich zur selben Zeit im Steinbock bei der



¹⁾ Gewisse Spuren, den Gnomon, resp. das ebene Horologium (discus in planities) zur Bestimmung der geographischen Breite zu verwenden, findet man sogar schon bei den Griechen. (Vergl. den trefflichen Artikel: Horologium v. A. Rehm, z. a. O. S. 2421.)

²⁾ z. a. O. S. 612–619.

³⁾ Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte, XXXIV. Jahrg. 1911, S. 24–34.

Sonnenhöhe = $90^\circ - \varphi - \epsilon$ einen solchen $FR = m_2$ wirft. In Abbildung 13 sind die Schattenkurven für die zwei Solstitiale und die Tag- und Nachtgleiche gezeichnet. F ist der Fußpunkt des Gnomons. Aus Abbildung 25 liest man leicht ab:

$$21. \text{ Juni: } \frac{q}{m} = \tan [90^\circ - (\varphi - \epsilon)] = \cotg (\varphi - \epsilon),$$

$$21. \text{ März, } 23. \text{ Sept.: } \frac{q}{m_1} = \tan (90^\circ - \varphi) = \cotg \varphi,$$

$$21. \text{ Dezember: } \frac{q}{m_2} = \tan [90^\circ - (\varphi + \epsilon)] = \cotg (\varphi + \epsilon),$$

woraus, wie behauptet, φ jedesmal gefunden werden kann.

β) »Im Falle aber der Gnomon nicht bekannt ist, sei es deshalb, weil er verloren gegangen ist, oder dass, weil seine Gestalt kegelförmig ist, man den senkrechten Abstand der Spitze vom Fußpunkt (Pfeilhöhe) nicht genau haben kann, die der wahre Gnomon ist, lautet die Antwort, dass, da der Schatten des wahren Mittags (des Tages des Beginns) des Steinbocks und derjenige seines *asr* bekannt sind, die Differenz dieser beiden Schatten gleich der Länge des Gnomons ist«, womit diese Aufgabe auf α) zurückgeführt ist.

γ) Wir führen noch den schwierigeren Fall an, dann die Breite zu finden, wo weder der Gnomon und sein Fußpunkt noch das *asr* bekannt sind, bezweifeln jedoch, dass Hasan wirklich im Ernste daran dachte, in einem solch prekären Fall die Uhr nach der Breite zu fragen, für die sie erstellt wurde, sondern halten den Traktat lediglich für ein mathematisches Kuriosum, das uns aber beweist, auf welcher Höhe der marokkanische Meister gestanden ist.

Zuerst zieht er die Linie AB welche gleich ist dem Teil des Äquatorbildes, welches der Schatten des Stabendes zur Zeit der Äquinoktien vom Kulminationspunkt bis zu Beginn der vierten Stunde nachmittags (gleiche Stunden) bestreicht. Hierauf wird in A der Winkel ϵ der Ekliptikschiefe angetragen und der Strahl AC gezogen. Der Punkt D auf demselben wird dadurch gefunden, dass man von B aus mit jenem Teil der Nordsüdlinie einen Kreisbogen durch AC beschreibt, der zwischen Widder und Steinbock liegt. Das Lot von A auf die Verlängerung von DB , nämlich AE , ist gleich der Länge des Gnomons und Winkel BAE gleich der verlangten Breite φ . Den Beweis hierzu findet man im Archiv der Deutschen Seewarte, Seite 26.

2. DAS AUFSUCHEN DER BREITE AM NORDSÜDVERTIKAL

Er eignet sich dazu ganz besonders, und der marokkanische Gelehrte macht uns mit vier Fällen der Breitebestimmung bekannt.

α) Zunächst liefert das Abbild des Äquators in seiner Neigung zur Linie des Horizonts die gesuchte Ortsbreite; denn diese Neigung ist $= 90^\circ - \varphi$.

β) Und wenn dieser Winkel $90^\circ - \varphi$ im Zentrum des Gnomons nicht abgegriffen werden kann, weil sich der Gnomon nicht wegheben lässt, so nehme man auf dem Widder irgendeinen andern Punkt (z. B. M_1 , s. Abb. 18) an und ziehe durch ihn eine Parallele zur Horizontalen, so schließt auch sie mit dem Bilde des Äquators den Winkel $90^\circ - \varphi$ ein.

γ) Wenn aber der Gnomon und sein Zentrum unbekannt (zerstört) sind, so fülle man die Vertiefung aus, verebne den Verschluss, ziehe eine Horizontale von Nord nach Süd hindurch und zerlege den Teil AB , den sie aus den Bildern der beiden Wendekreise ausschneidet, in zwei gleiche Stücke: die Mitte C von AB wird dann das Zentrum des

Gnomons sein. Alsdann nehme man die Schattenlänge des Gnomons auf dem Widder 3 Stunden vor oder nach dem Höchststand der Sonne, und man hat die Länge des Gnomons.

δ) Wenn es aber heißt, dass der Parallel des Widders und der Gnomon unbekannt sind, so lautet die Antwort: Beschreibe aus dem Zentrum *C* des Gnomons einen Kreisbogen, welcher im Schnittpunkt *A* des (Bildes des) Krebses mit der Horizontalen beginnt und auf demselben Parallel (in *D*) endigt, so wird dieser Bogen der doppelten Breite (2φ) gleich sein; teile ihn in zwei gleiche Teile, so ist ein Teil gleich der gesuchten Breite. Eine Senkrechte zu der Winkelhalbierenden (Weltachse) durch den Punkt *C* geführt, wird den Widder darstellen. Die Länge des Gnomons findet sich genau wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Diese Vorschriften al-Marrākušis sind nach dem, was im Kapitel über den Nord-südvertikal gesagt ist, sofort verständlich. In den beiden letzten Fällen wird vorausgesetzt, dass die Stundenlinien des Zifferblattes erhalten sind.

3. WIE MAN DIE BREITE AN DER VERTIKALUHR ÜBER DER OSTWEST-LINIE FINDEN KANN.

Der Autor sagt:

α) Es sei ein solcher Vertikal über der Ostwestlinie gegeben; man verlangt die Breite, für welche er konstruiert worden ist. Sie ergibt sich leicht aus dem Vertikalschatten des wahren Mittags im Widder und der Länge des Gnomons.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $\Omega, \Omega J$ der Abbildung 19 liest man ab:

$$\Omega \Omega_1 = q \cdot \tan(90^\circ - \varphi) = q \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

β) »Wenn man aber sagt, dass die Länge des Gnomons unbekannt ist, sei es wegen seiner konischen Form, oder weil er verloren ging, obwohl der Schatten des wahren Mittags unbekannt ist, sei es, weil das Zentrum des Gnomons zerstört wurde, oder dass es auf seinem Standort festgemacht ist, so kann man zur Ermittlung der geographischen Breite also verfahren:

Wenn der Gnomon unbekannt ist, so nehme man mit dem Zirkel den Teil des Parallels des Widders, der zwischen der Mittagslinie und dem Beginn der vierten Stunde liegt, und trage ihn als Strecke Ω, B auf; hierauf mache man Winkel $B \Omega, K_1 = \varepsilon$ gleich der Schiefe der Ekliptik. Von *B* aus ermittle man den Punkt *K*, durch Abtragen jenes Teils der Mittagslinie, der zwischen dem Anfang des Widder- und Krebsparallels liegt, auf dem freien Schenkel des Winkels ε . Dann ziehe man durch *CB* eine Gerade bis zu dem beliebigen Punkte *E* und lasse von Ω , das Lot Ω, D auf sie herab; diese Strecke wird gleich der Länge *q* des Gnomons, Winkel Ω, BE gleich der gesuchten Polhöhe φ sein.«

Den Beweis habe ich im Archiv usw., Seite 29 ff., gegeben.

4. Auch an der ABWEICHENDEN VERTIKALUHR lehrt al-Marrākušī die Bestimmung der Ortsbreite. Doch dürften seine Vorschriften diesmal mehr theoretisches Interesse als praktischen Nutzen haben. Auch ist die französische Übersetzung nicht frei von Unklarheiten, so dass ich hier auf den Gegenstand nicht näher eintreten möchte. Ich habe jedoch die einzelnen Fälle in meiner schon genannten Dissertationsschrift soweit als möglich aufgehell¹⁾ und möchte mich mit diesem Hinweis begnügen.

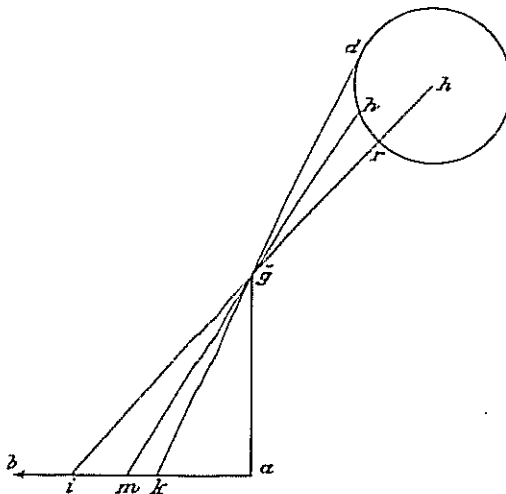
¹⁾ Seite 31–33.

ZU KAPITEL III

a. Der Beweis hierzu findet sich im XI. Kapitel des Mskr. 143 (Leiden), S. 238, mit untenstehender Abbildung 26. Er ist im folgenden in wörtlicher Übersetzung wiedergegeben:

»Abhandlung über den Schatten. Es haben einige der Vorgänger die Teile des Schattenmessers zu 12, andere zu 60 in den Berechnungen angenommen, und ich kenne nur diese beiden Einteilungen des Gnomons. Die Mehrzahl der Gelehrten aber haben ihren Berechnungen 60 Teile zugrunde gelegt. Und es wird der Schatten vor dem Zawāl zill, nach demselben aber fai' genannt; so wird in der guten arabischen Sprache gesagt. Der Schatten aber, den die Männer der Wissenschaft meinen, ist jener Teil des Sonnenscheins, den ein senkrecht auf dem Horizont stehender Gegenstand (Gnomon) verdeckt. Und alle sind, soviel ich weiß, der Meinung, dass der durch Beobachtung gewonnene Schatten der augenblicklichen Höhe des Sonnenmittelpunktes entspreche. Alle aber irren, und dabei ist einer ohne Nach-(Be-)denken dem andern gefolgt, weil sie zu wenig Kritik üben. Das Richtige jedoch ist, dass, falls wir in der Fläche des Höhenkreises eine Gerade durch die Spitze des Gnomons gehen lassen, diese den Sonnenball in seinem höchsten Punkte berührt, und sie läuft in gerader Richtung zur Fläche, auf die der Schatten fällt. Denn jener Punkt gibt das Ende des Schattens, den man durch die Beobachtung erhält, und die Höhe jenes Schattens gibt die Höhe jenes Punktes, in welchem die gezogene Linie die Sonnenkugel tangiert. Und es befindet sich zwischen dieser Höhe und der Höhe des Sonnenmittelpunktes der halbe Durchmesser des Sonnenballs, wie deutlich gemacht ist im kitāb al-akrūsā¹⁾, und das was ich eben dargelegt habe, wird sicher durch einen geometrischen Beweis. Mögen die Gelehrten mittels des geometrischen Beweises des Gesagten Richtigkeit erkennen, so Gott will. — Ich stelle nun den allgemein zugegebenen Satz, über den man nicht streiten kann, auf, dass von jedem Punkte in Gedanken (theoretisch) eine gerade Linie nach dem Sonnenball gezogen werden kann, so lange kein Hindernis besteht, dass jener Punkt im Sonnenschein

Abb. 26



liegt, und dass von keinem Punkte im Geiste eine gerade Linie zur Sonnenkugel gezogen werden kann, wenn ein Hindernis besteht, d. h. jener Punkt im Schatten ist. Beweis dafür: Wenn wir eine gerade Linie ziehen und den Abschnitt derselben betrachten, der die Bedingungen für die Schattenfläche erfüllt, und wenn wir alsdann den Höhenkreis gerade strecken zur Linie ab , und es sei der auf ihr senkrecht stehende Gnomon die Linie ag , und wenn wir ferner aus der Fläche des Höhenkreises die Sonnenscheibe durch den Kreis dhr mit dem Mittelpunkt h heraus schneiden, und wir ziehen darauf zwei gerade Linien in der Fläche des Höhenkreises, eine durch Sonnenmittelpunkt h und Gnomonspitze g , d. h. Linie ig , die die Linie ab im Punkte i trifft, und eine andere, die die

¹⁾ Ich kenne das Buch *akrūsā* nicht, das der Autor hier erwähnt. Das arabische Wort ist im Manuskript so deutlich, dass eine irige Lesung nicht möglich ist. Herrn Professor C. F. Seybold verdanke ich den freundlichen Hinweis, dass man vielleicht an *akrūsā* = Vorlesungen, Kollegien, Studien oder ähnliches denken könnte.

Sonne in d berührt und der Linie ab im Punkte k begegnet, so liefert die Linie ai die Höhe des Sonnenmittelpunktes und die Linie ak die Höhe des Punktes d . Nun behaupte ich, dass die Strecke zwischen den Punkten i und k im Sonnenschein liegt. Beweis dafür: Wenn wir vom Punkte m , einem Punkte zwischen i und k , eine Gerade zur Sonnenkugel ziehen, nach einem Punkte, der zwischen d und r liegt, indem dafür kein Hindernis besteht, die also durch g nach k geht, und darüber hinaus; die aber Punkt d nicht erreicht, so ist klar, dass Punkt m im Sonnenschein liegt, weil es doch im Geiste klar ist, dass von ihm eine gerade Linie ausgeht, und noch viele gerade Linien (sind möglich) zwischen den Punkten r und d , ohne dass ein Hindernis dafür besteht, und zwar für Punkte zwischen i und k . Und das war es, was wir beweisen wollten, und bei Gott ist die Leitung zum Richtigen.

Man vergleiche hierzu die ausführliche Studie Ibn al-Haitams: »Über die Beschaffenheit der Schatten«, die uns E. Wiedemann in seinen »Beiträgen« (XIII, 1907) zugänglich gemacht hat (S. 226—244).

b. Dazu findet sich im *Almagest* des Abû'l Wafâ' (Paris, Nr. 2494, doch nicht vollständig; nach Carra de Vaux, *Journ. asiat.* 1892, S. 420) folgende bemerkenswerte Stelle »qu'on croirait écrite de nos jours«: »Und so ist es klar, dass, wenn man den Gnomon zur Einheit wählt, dann das Verhältnis des Sinus des Bogens zu seinem Kosinus der Vertikalschatten wird, und dass das Verhältnis des Kosinus des Bogens zu seinem Sinus der Horizontalschatten ist.« Carra de Vaux hat »Vertikalschatten« und »Horizontalschatten« durch »la tangente« und »la cotangente« wiedergegeben. Abû'l Wafâ' bleibt auch für $q=1$ der Bezeichnung »Schatten« treu.

Freilich sind dadurch die beiden Schatten völlig identisch mit unserer Tangens- und Kotangensfunktion; ich glaube aber nicht, dass Abû'l Wafâ' eine Tabelle mit dem *miqjäs* $q=1$ eingerichtet und sie rein trigonometrisch verwandt hat, und wenn eine solche Tafel auch faktisch existierte, so wurde sie nachher wohl kaum mehr benutzt. Dies ist auch die Ansicht H. Suters. (Die astronom. Tafeln usw., S. 77.) Viel weitergehende Schlüsse ziehen A. v. Braunmühl in seinen »Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie« (I, Leipzig 1900, S. 57) und A. Björnbo in der »Festskrift til H. G. Zeuthen, 1909, Kopenhagen« (Al-Chwârizmîs Trigonometriske Tavler, S. 16/17). Etwas wesentlich Neues ist eine solche Tafel nicht; da nur statt *partes minutæ*, statt *minutæ secundæ* usw. zu setzen ist. (Vergl. auch für Abû'l Wafâ's Tangentenrechnung seine Bestimmung der Qibla, für diejenige Našîr ed-dîns dessen Schrift »Šakl al-Qaṭṭā'« (Traité du quadrilatère attribué à Nassiruddin-el-Toussy v. A. Caratheodory, Constantinople 1891).

ZU KAPITEL IV

a. Hierzu sei folgendes Zahlenbeispiel des Autors angeführt: »Die Sonne im Beginn des Widders; ihre augenblickliche Höhe 40° und die Ortsbreite 30° . Der Schatten des 60^{er} Gnomons z. Zt. des Widderanfangs ist $34^\circ 38' 25''$ und das ist es, was in der Schattentafel der Zahl 60° gegenübersteht, und es steht ferner der (Zahl) 40° in der Tafel des 60^{er} Schattens $71^\circ 30' 20''$ gegenüber. Du multiplizierst den Schatten zu Beginn des Widders mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Schatten der Höhe. Der Quotient ist $29^\circ 4' 2''$. Der zugehörige Bogen, und er ist das Azimut der Sonne für die Höhe von 40° im Anfang des Widders oder der Wage, ist $28^\circ 58' 36''$, und dies (ist der Fall) beim 60^{er} Schatten. — Falls du dies mit dem Schatten des 12^{er} Gnomons willst, so multipliziere den Schatten zu Beginn des Widders, und er ist $6^\circ 45' 44''$, mit dem Sinus-totus und teile das Produkt durch den Schatten der Höhe 40° , und der ist $14^\circ 18' 4''$. Was aus der Division hervorgeht, ist $29^\circ 4' 4''$. Der zugehörige Bogen ist $28^\circ 58' 38''$.«

δ Da ich derartigen Tabellen in der arabischen Astronomie noch nirgends begegnet bin, so reproduziere ich hier beide. Sie stehen auf S. 307, Kap. XVIII des Leidener Manuskripts, Nr. 143. Dabei ist die geographische Breite von Bagdad zugrunde gelegt. Der Autor berichtet in Kap. XI der Hākimitischen Tafeln, S. 223, dass die Söhne des Mūsā ben Šākir im Jahre 237 der Ara Jezdeğerd die Breite Bagdāds zu $33^{\circ} 20'$ bestimmt hätten, welcher Wert heute noch als richtig angesehen wird¹⁾. Da der iḥtilāf al-ufq eine Strecke ist, so drückt er sich in partes und dessen Unterabteilungen aus ($r=60^p$).

¹⁾ Nach der Rückwärtsrechnung aus Tafel I und II ist für Bagdad die Breite von $33^{\circ} 25'$ angenommen. Das ist der Wert, den Abū'l Wafā' für Bagdad angibt. Derjenige der Söhne des Mūsā b. Šākir ist viel genauer; denn nach Delambre (Hist. d. l'astr. d. moy. âge, S. 125) hat Beauchamp die Breite Bagdāds zu $33^{\circ} 19' 40''$ bestimmt.

I. TAFEL DES İHTİLÂF AL-UFQ FÜR DIE BREITE VON BAĞDÂD

h	İhtilâf al-ufq				h	İhtilâf al-ufq				h	İhtilâf al-ufq				h	İhtilâf al-ufq				h	İhtilâf al-ufq			
1°	0P	41'	27"		19°	12P	53'	19"		37°	23P	49'	22"		55°	32P	25'	44"		73°	37P	51'	29"	
2	1	12	54		20	13	32	23		38	24	22	28		56	32	49	11		74	38	3	15	
3	2	4	19		21	14	11	13		39	24	54	48		57	33	12	6		75	38	14	20	
4	2	45	41		22	14	49	47		40	25	26	47		58	33	34	22		76	38	24	43	
5	3	27	1		23	15	28	5		41	25	58	19		59	33	56	0		77	38	34	23	
6	4	8	17		24	16	6	6		42	26	29	22		60	34	17	2		78	38	43	20	
7	4	49	28		25	16	43	50		43	26	59	16		61	34	37	27		79	38	51	37	
8	5	30	34		26	17	21	55		44	27	30	0		62	34	57	14		80	38	59	10	
9	6	11	35		27	17	58	21		45	27	59	34		63	35	16	22		81	39	6	2	
10	6	52	28		28	18	35	7		46	28	28	37		64	35	34	53		82	39	12	9	
11	7	33	13		29	19	11	33		47	28	56	9		65	35	52	43		83	39	17	34	
12	8	13	51		30	19	47	38		48	29	25	10		66	36	9	55		84	39	22	15	
13	8	54	19		31	20	23	21		49	29	52	38		67	36	26	27		85	39	26	14	
14	9	37	38		32	20	58	42		50	30	19	34		68	36	42	19		86	39	29	29	
15	10	14	46		33	21	33	40		51	30	45	56		69	36	57	30		87	39	32	1	
16	10	54	43		34	22	8	14		52	31	11	44		70	37	12	1		88	39	33	49	
17	11	34	27		35	22	42	24		53	31	36	58		71	37	25	51		89	39	34	54	
18	12	14	0		36	23	16	9		54	32	1	38		72	37	39	1		90	39	35	16	

II. TAFEL DES SINUS DER MORGENWEITE FÜR DIE BREITE VON BAĞDÂD

l	sin m				l	sin m				l	sin m				l	sin m				l	sin m			
1°	0P	30'	7"		19°	9P	21'	47"		37°	17P	18'	28"		55°	23P	33'	19"		73°	27P	30'	9"	
2	1	0	13		20	9	50	10		38	17	42	21		56	23	50	33		74	27	38	43	
3	1	30	19		21	10	18	23		39	18	5	55		57	24	4	10		75	27	46	45	
4	2	0	0		22	10	46	27		40	18	29	10		58	24	23	21		76	27	54	18	
5	2	30	24		23	11	14	14		41	18	52	4		59	24	39	5		77	28	1	20	
6	3	0	22		24	11	41	11		42	19	14	37		60	24	54	22		78	28	7	51	
7	3	30	18		25	12	9	15		43	19	36	50		61	25	9	12		79	28	13	51	
8	4	0	9		26	12	36	26		44	19	58	40		62	25	23	34		80	28	19	20	
9	4	29	56		27	13	3	23		45	20	20	9		63	25	37	28		81	28	24	19	
10	4	59	38		28	13	30	6		46	20	41	15		64	25	50	55		82	28	28	26	
11	5	29	15		29	13	56	34		47	21	1	59		65	26	3	53		83	28	32	41	
12	5	58	47		30	14	22	47		48	21	22	22		66	26	16	22		84	28	36	6	
13	6	28	10		31	14	48	43		49	21	42	17		67	26	28	23		85	28	38	59	
14	6	57	27		32	15	14	24		50	22	1	51		68	26	39	55		86	28	41	21	
15	7	27	36		33	15	39	48		51	22	21	1		69	26	50	56		87	28	43	11	
16	7	55	38		34	16	4	55		52	22	39	45		70	27	1	29		88	28	44	30	
17	8	24	30		35	16	29	44		53	22	58	5		71	27	11	32		89	28	45	17	
18	8	53	14		36	16	54	15		54	23	16	0		72	27	21	6		90	28	45	33	

ZU KAPITEL VI

a. Im 11. Kapitel der Hākimitischen Tafeln gibt Ibn Yūnus (S. 222) eine kurze geschichtliche Übersicht über die Werte der Ekliptiksschiefe ϵ , der wir folgendes entnehmen: Nach Ptolemaeus hätten Eratosthenes und Hipparch der Ekliptiksschiefe einen Betrag von $\frac{1}{4}$ des Kreisumfangs $= 23^{\circ} 51' 20''$ beigelegt. „Und keine Beobachtung kenne ich für die größte Deklination zwischen Ptolemaeus und den Autoren der erprobten Tafeln außer jener, die im Jahre 160 und etliche der Hīgra war, und ihr Beobachter erwähnt, dass die größte Deklination $23^{\circ} 31'$ sei.“ Die Astronomen al-Ma'mūns fanden aus ihren Beobachtungen zu as-Šammasija [Stadtviertel und Tor in Surrmanra'ā oder Samarrā] $\epsilon = 23^{\circ} 33'$, und es erwähnen dieselbe Zahl Muḥammed b. Mūsā al-Ḥuārizmī in seinem Tafelwerk (ziğ) und Muḥammed b. Kaṭir al-Fargānī in seinem Buch über den Gebrauch des Astrolabiums. Ferner erwähnen die Astronomen zu Damaskus, die nach dem Tode des Yahjā b. abi Mansūr mit dem Instrument beobachteten, das ihnen al-Ma'mūn anzuwenden befahl, als er gegen die Rumäer zog, nämlich Ḥalid b. Abd al-Malik al-Merwarrūdī, Abū'l Sened b. Tajjib 'Alī und 'Alī b. 'Isā al-Aṣṭarlābī u. a., dass sie $\epsilon = 23^{\circ} 33' 52''$ gefunden hätten. Es fand ihre Messung im Jahre 201 der Ära Jezdeğerd statt. Die Söhne des Mūsā b. Šākir berichten, dass sie im Jahre 237 derselben Ära beim Tor des Mauerbogens von Medinat as-Salām (Bagdād) ϵ zu $23^{\circ} 35'$ bestimmt hätten. In den Tafeln der „al-taqwīm“ gibt Aḥmed b. Abdallāh Ḥabaš die folgenden zwei Werte für die Ekliptiksschiefe an: $23^{\circ} 35'$ und $23^{\circ} 33'$, und es musste doch nur einer sein. Im Jahre 243 der Hīgra, und das ist im Jahre 226 der Ära Jezdeğerd, hat al-Māhānī ϵ zu $23^{\circ} 35' 30''$ bestimmt. „Und es sprach Abū'l Ḥasan Tābit b. Qorra, ich habe alte Verfahren vor Ptolemaeus gefunden, die darauf hinweisen, dass die größte Deklination $23^{\circ} 35'$ ist, und es berichtet Muḥammed b. Ġābir b. Sinān al-Battānī, dass er sie aus seiner Messung zu $23^{\circ} 35'$ gefunden habe.“ Ferner fanden der Scherif al-Fādil Abū'l Qāsim 'Alī b. al-Ḥusain Muḥ. b. abi 'Isā, der unter dem Namen Ibn al-'Alam bekannt ist, und Abū'l Ḥasan Šūfi 'Abderrahman b. 'Omar bez(ü)glich die Werte $\epsilon = 23^{\circ} 34' 2''$ und $23^{\circ} 34' 45''$. Ibn Yūnus gibt dann noch seine Bestimmung der Ekliptiksschiefe an, auf die er viele Sorgfalt verwandt und dann $23^{\circ} 35'$ gefunden hätte.

b. Teilt man den Tagesbogen der Sonne oder die Zeit zwischen ihrem Auf- und Untergang in 12 gleiche Teile, so ist ein solcher Teil der Stundenwinkel oder die Dauer einer temporalen Stunde, eine mit Sonnendeklination und Polhöhe veränderliche Größe. Sie ist jedoch leicht in äquinoktialen Stundenmaß auszudrücken. Ist der halbe Tagesbogen

$$s_0 = \arccos(-\tan \varphi \cdot \tan \delta),$$

so ist die Zahl der zur Temporalstunde gehörigen Bogengrade $= \frac{s_0}{6}$. Für eine äquinoktiale Stunde hat man die Proportion:

$$\frac{s_0}{24} = \frac{\pi}{12},$$

mithin kann man schreiben

$$\frac{\text{tempor. Stunde}}{\text{äquinokt. Stunde}} = \frac{1}{6} \arccos(-\tan \varphi \cdot \tan \delta) : \frac{\pi}{12},$$

oder

$$1 \text{ tempor. Stunde} = \frac{2}{\pi} \arccos(-\tan \varphi \cdot \tan \delta) \cdot 1 \text{ äquinokt. Stunde},$$

und wenn wir die äquinoktiale Stunde zur Zeiteinheit wählen:

$$\text{Tempor. Stunde} = \frac{2}{\pi} \arccos(-\tan \varphi \cdot \tan \delta) \quad (I)$$

ZU KAPITEL VI₂

Nachträglich bin ich durch die Güte der Herren Dr. Cowley in Oxford und Baron Carra de Vaux in Paris in den Besitz zweier Handschriften gekommen, in denen von der Bestimmung der Qiblarichtung gehandelt wird. Die erste hat den berühmten Mathematiker Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haiṭam zum Verfasser und findet sich in der Bibl. Bodleyana zu Oxford (I, 877, 4°), die zweite ist ein Stück aus dem *Almagest* des Abū'l Wafā' al-Būzḡānī, von dem noch eine arabische Handschrift in der Biblioth. nat. zu Paris (2494) existiert, und wo der große arabische Mathematiker und Astronom ebenfalls eine kurze Anleitung zur Auffindung der Qibla gibt. Hier will ich mich auf wenige Daten aus diesen beiden Manuskripten beschränken. Ibn al-Haiṭam lehrt folgendes:

Man beschreibe mit beliebigem Radius den Kreis $ABGD$ um den Mittelpunkt H . Darauf ziehe man die beiden senkrechten Durchmesser AG und BD . Von A aus trage man auf dem Umfang des Kreises, der den Horizont des Ortes, in dem man die Qibla ziehen will, vorstellt, einen Bogen AC ab, der gleich der Breite Mekkas $= \varphi_2$ ist. Ebenso sei Bogen GR über dem anderen Ende des Durchmessers gleich der Breite des Ortes $= \varphi_1$. Endlich bedeute Bogen $AN = \lambda_2 - \lambda_1$ den Längenunterschied der beiden in Frage kommenden Orte. Nun werde von C auf AH das Lot CT gefällt und mit dem Radius HT ein Kreisbogen um H geschlagen, der HN in E trifft, ferner $EF \perp AH$ gezogen. Auf dem Radius HR wird von H aus $HK = CT$ abgetragen, in K auf HR die Senkrechte errichtet und $KM = FH$ gemacht. Von M falle man nunmehr das Lot MQ und trage es von F nach S ab, so dass also $FS = MQ$ ist. Dann ist $\angle ESF = \angle \alpha$ dem Winkel, den die Qiblarichtung zum Meridian des Ortes bildet.

Der Beweis wird bei unserem Autor in sehr weitschweifiger Weise in der Art geführt, dass er das Dreikant: Pol — Mekka — Ort in die Ebene des Horizontes des Ortes umlegt, in dem die Qibla gewünscht wird. Indessen lässt sich die Richtigkeit der Haiṭam-schen Konstruktion auch leicht in folgender Weise bestätigen: Setzt man den Kreisradius $HA = 1$, so hat man der Reihe nach:

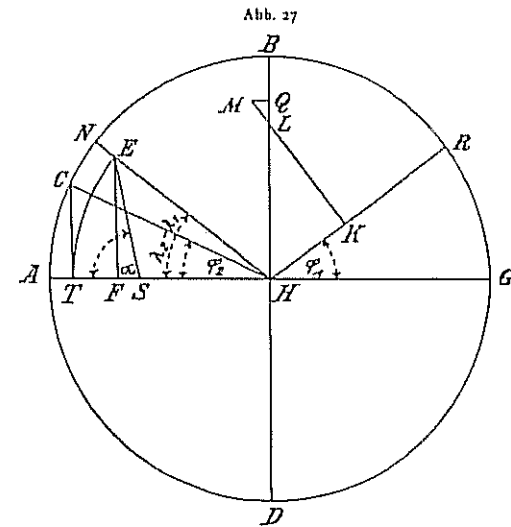
$$HT = \cos \varphi_2; \quad FH = \cos \varphi_2 \cdot \cos (\lambda_2 - \lambda_1) = KM$$

$$CT = \sin \varphi_2 = HK; \quad HL = \frac{HK}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1}$$

$$KL = HK \cdot \cotg \varphi_1 = \sin \varphi_2 \cdot \cotg \varphi_1$$

$$ML = KM - KL = \cos \varphi_2 \cdot \cos (\lambda_2 - \lambda_1) - \sin \varphi_2 \cdot \cotg \varphi_1$$

$$EF = \cos \varphi_2 \cdot \sin (\lambda_2 - \lambda_1).$$



Aus den rechtwinkligen ähnlichen Dreiecken HKL und LMQ folgt ferner:

$$\frac{MQ}{ML} = \frac{HK}{HL}; MQ = ML \cdot \frac{HK}{HL},$$

$$\begin{aligned} MQ &= [\cos \varphi_2 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1) - \sin \varphi_2 \cdot \cotg \varphi_1] \cdot \sin \varphi_1 \\ &= \cos \varphi_2 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1. \end{aligned}$$

Endlich ist:

$$\cotg a = \frac{FS}{EF} = \frac{MQ}{EF} = \frac{\cos \varphi_2 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1}{\cos \varphi_2 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

oder:

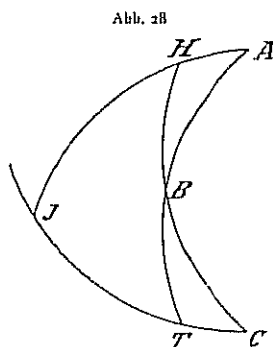
$$\cotg a = \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1) - \cos \varphi_1 \cdot \tan \varphi_2}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

welche letztere Formel aber nichts anderes als der bekannte Kotangentensatz der sphärischen Trigonometrie ist, angewandt auf das Dreieck: Nordpol — Mekka — Ort, dessen Qibla man will. Diese Formel gibt den Winkel a direkt. Man sieht, von einem Näherungsverfahren ist hier keine Rede; ja Ibn al-Haitam diskutiert sogar eingehend alle möglichen Fälle der Lage des Ortes zu Mekka, worauf jedoch näher einzutreten hier nicht der Ort ist. Zahlenbeispiele gibt der Autor nicht.

Berechnung der Qiblarichtung nach Abū'l Wafā' (2494, fol. 66^v).

»Über die Kenntnis des Azimuts der Qibla. Es sei Punkt A das Zenit der Bewohner des Ortes, deren Qibla wir wissen wollen, und Punkt B das Zenit der Bewohner Mekkas, und der Horizont des Ortes, der unter dem Punkt A liegt, sei Kreis CTI . Der Kreisbogen der Längendifferenz (der beiden Orte) sei BH . Wir beschreiben den Bogen AIT , und es sei arc AB der Abstand des Ortes von Mekka. Das Azimut seiner Qibla ist alsdann Bogen IT , und das ist das Verlangte. Und ich behaupte nun, dass

$$\frac{\sin IT}{\sin BH} = \frac{\sin AT}{\sin AB} \text{ ist, wobei } AT = 90^\circ.$$



Berechnung des Azimuts der Qibla aus dem Abstand der zwei Orte.

Wenn wir das Azimut der Qibla des Ortes wissen wollen, so teilen wir den Sinus des Bogens, der die Längendifferenz der zwei Orte¹⁾ fasst, durch den Sinus ihrer Distanz. Das Ergebnis ist der Sinus des Azimuts der Qibla. Beispiel: Wenn wir das Azimut der Qibla für Bagdad wissen wollen, so teilen wir den Sinus der Gleichung der Länge, nämlich $2^\circ 54' 40'' 26''''$, durch den Sinus des Bogenabstandes Bagdads von Mekka, nämlich $12^\circ 11' 17''$, und es geht aus der Teilung der Quotient $14^\circ 19' 53'' 37''''$ hervor. Wir machen dies zu Bogen, und es gibt $13^\circ 49' 9'' 19''''$, und das ist das Azimut der Qibla für Bagdad.

¹⁾ Der Autor nennt den Bogen BH : $12^\circ 11' 17''$, wörtlich »Gleichung der Länge«.

Berechnung der Gleichung der Länge.

Falls wir dies wollen, so multiplizieren wir den Kosinus der Gleichung der Breite mit der Tangente des Abschnitts zwischen den Längen (in Minuten), und was daraus hervorgeht, das ist die Tangente der Gleichung der Länge.

Beispiel zudem Vorhergehenden: Wir multiplizieren den Kosinus der Gleichung der Breite, $55^{\circ} 37' 53''$, mit der Tangente des Längenabschnitts, $3^{\circ} 8' 40'' 5''$, und es kommt $2^{\circ} 54' 13'' 46''$ heraus. Dazu suchen wir den Bogen in der Tangenten(-Schatten)-tafel und finden $2^{\circ} 46' 14'' 57''$ als Ausgleichung der Länge.

Kenntnis des Azimuts der Qibla.

Ich sage, dass

$$\frac{\text{tang } IT}{\text{tang } HB} = \frac{\sin AB}{\sin HA}$$

ist, wobei HA der Abschnitt zwischen der Breite des Ortes und der Gleichung der Breite (des Ortes) ist.

Berechnung des Azimuts der Qibla.

Falls wir dies wissen wollen, teilen wir die Tangente der Gleichung der Länge durch den Sinus des Abschnitts dessen, was zwischen der Breite des Ortes und der Gleichung seiner Breite ist (in Minuten); was sich ergibt, ist die Tangente des Azimuts der Qibla.

Beispiel zum Vorausgehenden: Wir teilen den Schatten der Gleichung der Länge, $2^{\circ} 54' 13'' 46''$, durch den Sinus des Abschnittes, von dem, was zwischen der Breite Bagdads und der Gleichung seiner Breite (in Minuten) ist, und das ist $5^{\circ} 11' 7'' 55''$. Dann kommt aus der Teilung $14^{\circ} 45' 39'' 53''$ heraus. Wir suchen den zugehörigen Bogen in der Schattentabelle und finden $13^{\circ} 49' 15'' 55''$ als Azimut der Qibla für Bagdad, und ich beendige damit den vierten Teil des Magesti des Abū'l Wafā' al-Būzğānī, und Lob sei Gott und sein Segen über Mohammed und dessen Familie!

Dies die Behandlung der Qiblafrage bei Abū'l Wafā'. Wie man erkennt, basieren seine Lösungen auf dem Satz des Menelaus und der sog. »Tangenten- oder Schattenregel«. Näheres über die Trigonometrie des Abū'l Wafā' erfährt man bei Carra de Vaux¹⁾, A. von Braunmühl²⁾ und Delambre³⁾.

Hier sei noch bemerkt, dass sich bei Ibn as-Šāṭir (in dem Gothaer Fragment 1403, S. 72—75) eine Orstabelle von 150 Orten findet, wo außer Länge und Breite auch der Inḥirāf der Qibla angegeben ist.

ZU KAPITEL VIII₁

a. Die Wiederaufindung der Länge des verlorengegangenen Gnomons einer Sonnenuhr scheint ein beliebtes Kapitel der arabischen Sonnenuhrkunde zu sein. So widmet ihm besonders auch Ibn Yūnus große Aufmerksamkeit, und ich setze seine Darlegungen (Oxf. 331), ungekürzt hier hin. Er sagt:

»Das 35. Kapitel: Wenn der miqjās der Stunden einer basiṭa verloren ging und auch die Ortsbreite unbekannt ist, und du wünschest die Kenntnis dieser Breite und die Länge des miqjās, so beschreibst du um den Mittelpunkt des ṣaḥṣ einen Kreis von einem Destūr,

¹⁾ Journal asiatique, Serie 8, XIX, S. 408—471.

²⁾ Vorlesungen I, S. 58 ff.

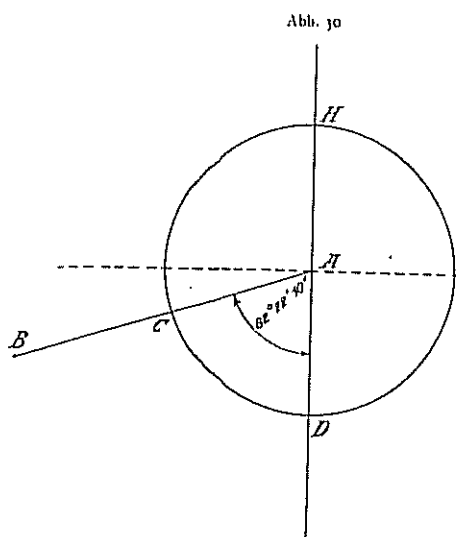
³⁾ Histoire de l'astr. d. moy. Age, S. 160 und Abb. 45.

ich meine einen Kreis, der in 360° eingeteilt ist. Auch ist dir bekannt, dass der Bogen des Tageskreises zu Beginn des Widders und der Wage in jeder Breite 180° beträgt, und dass auf jede Stunde 15° entfallen. Ziehe von der Spitze des Schattens einer beliebigen Stunde der Stunden des ersten Widders eine dünne (Hilfs-)Linie nach dem Mittelpunkt des Kreises und mache dort, wo diese Hilfslinie den Kreis durchschneidet, eine Marke. Setze alsdann den einen Fuß des Zirkels auf diese Marke und öffne den andern Zirkelfuß, bis dass er den Durchschnittspunkt der Mittagslinie mit diesem Kreise erreicht. Dann überträgst du den Zirkel in seinem Zustand auf den Destûr und wisse, wie groß der Betrag dieser Öffnung in Teilen des Kreises ist, und was er ist, das ist der (Winkel-)Abstand dieser Stunde von der Mittagslinie. Und wisse dessen Sinus, und er ist der erste Sinus; behalte ihn im Gedächtnis. Darauf beachte: Wenn die von der Schattenspitze (nach dem Mittelpunkt) gezogene Linie der ersten Stunde angehört, so nimmst du ihre Teile — und es sind 15 — und ziehst sie von 90° ab, und nimmst den Sinus des Restes, und das ist der Sinus von 75° . Und wenn du von der Schattenspitze die Linie, die der zweiten Stunde entspricht, nach dem Kreismittelpunkt gezogen hast, so nimmst du die Teile von zwei Stunden, und das sind 30° . Alsdann ziehst du sie von 90° ab und nimmst den Sinus des Restes, und das ist der Sinus von 60° . Und ebenso ist es, wenn du von der Schattenspitze der dritten Stunde eine Linie nach dem Kreismittelpunkt ziehst: Du nimmst die Teile von drei Stunden, und das sind 45° , ziehst sie wiederum von 90° ab, und es verbleiben 45° . Davon nimmst du den Sinus, und so machst du es mit jedem Rest der Stunden, und du kennst seinen Sinus und nennst ihn zweiten Sinus. Alsdann multiplizierst du den Sinus des Restes mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den ersten Sinus; der entsprechende Bogen ist die Ergänzung der Höhe. Du ziehst sie von 90° ab, was bleibt, das ist die Höhe dieser Stunde zu Beginn des Widders in dieser Breite. Nimm ihren Sinus, und das ist der Sinus der Höhe jener Stunde, von deren Schattenspitze die Linie nach dem Kreismittelpunkt gezogen wurde, und wisse die Teile dieser Stunde und den entsprechenden Sinus. Dann multipliziere den Sinus der Höhe mit dem Sinus totus und teile das Produkt durch den Sinus der Teile jener Stunde; das Ergebnis ist der Sinus eines Bogens, und dieser Bogen selbst ist die Äquatorhöhe in dieser Breite. Du ziehst sie von 90° ab; was verbleibt, ist die Breite des Ortes.

Und wenn die Ortsbreite (wieder) bekannt ist, ergibt sich die Höhe der Stunden des Widders. Und wenn die Höhe bekannt ist, so ist der Schatten bekannt, und damit sind auch die Teile des miqjäs bekannt, doch bei Gott ist der Erfolg. Und falls die Höhe 90° ist, so hat der Ort die Breite Null. Beispiel: Der Mittelpunkt des sahs sei der Punkt A . Beschreibe um ihn einen Kreis, der gleich ist dem in 360° eingeteilten; es sei der Kreis ACD , und sein Mittelpunkt ist Punkt A . Die Mittagslinie ist Linie ADH . Du machst die Konstruktion für die erste Stunde der Stunden des Beginns des Widders oder der Wage, und es sei die Spitze ihres Schattens der Punkt B , und es liegt zwischen den Punkten A und B die gerade Linie ACB , und sie möge den Kreis im Punkte C schneiden; du nimmst mit dem Zirkel den Bogen CD und er betrage $82^\circ 22' 10''$, oder in Zahlen $82^\circ 22' 10''$ geschrieben¹⁾; aber nur selten ereignet sich solch ein Beispiel, weil nur mit 10 bei der Ausführung diese Sekunden sich finden. Und das ist die (Winkel-)Entfernung der Richtung der ersten Stunde der Stunden zu Beginn des Widders von der Mittagslinie in dieser Breite; ihr Sinus ist $59^\circ 28' 7''$, und das ist der erste Sinus. Die Teile einer Stunde — und sie ist eine der Stunden zu Beginn des Widders — sind 15° . Du ziehst sie von 90° ab, und es bleiben 75° . Der Sinus hiervon ist $57^\circ 57' 20''$. Du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst

¹⁾ Der Autor schreibt die Zahl vorher in Worten.

das Produkt durch den Sinus der Entfernung der Richtung von der Mittagslinie, ich meine durch den ersten Sinus; es kommt $58^{\circ} 28' 24''$ heraus; der zugehörige Bogen ist $70^{\circ} 2' 51''$, und dies ist die Ergänzung der Höhe der ersten Stunde von den Stunden zu Beginn des Widders. Du ziehst sie von 90° ab, und es resultiert die Höhe der ersten Stunde von den Stunden zu Beginn des Widders: $12^{\circ} 57' 9''$. Der Sinus hiervon ist $13^{\circ} 26' 50''$. Du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Produkt durch den Sinus der Teile der ersten Stunde, — und er ist $15^{\circ} 31' 45''$ — dann kommt $51^{\circ} 57' 41''$ heraus. Der zugehörige Bogen ist $60^{\circ} 0' 0''$. Und das ist die Äquatorhöhe des Ortes. Du ziehst sie von 90° ab, und es bleibt $30^{\circ} 0' 0''$, und das ist die Ortsbreite. Darauf nimm die Teile des Schattenmessers zu 12, multipliziere sie mit dem Kosinus der Höhe, und der ist $58^{\circ} 28' 24''$, und teile das Produkt durch den Sinus der Höhe, er ist $13^{\circ} 26' 54''$, und es kommt der Schatten der ersten Stunde heraus, der Stunde von den Stunden zu Beginn des Widders, nämlich $52^{\circ} 10' 30''$, und es wird die Länge des miqjäs der ruhāma 12 Teile sein. Und



wenn du willst, so multipliziere den Sinus der Höhe, und er ist $13^{\circ} 26' 54''$, in die Teile des miqjäs, und diese betragen 12, und teile das Ergebnis durch den Kosinus der Höhe, und es kommt $2^{\circ} 35' 46''$ heraus, und wenn du den Schatten der ersten Stunde von den Stunden zu Beginn des Widders — und das ist die Linie AB — durch 12 gleiche Teile teilst, so ist die Länge des Vertikalschattens 2 Teile, 35 Minuten und 46 Sekunden, und das ist annähernd $2\frac{1}{3}$ der Teile. Es folgt jetzt das Bild der Figur¹⁾.

Diese Darlegungen des Autors bedürfen in Anbetracht ihrer Ausführlichkeit wohl keines weiteren Kommentars. Die im Text ausgesprochenen Rechenvorschriften gehen unmittelbar aus dem sphärischen Dreieck Zenit — Pol — Sonne unter Beachtung, dass die Sonnendeklination = 0° ist, und nebenstehender Abbildung 30 hervor.

b. Es mögen hier die von Ibn Yūnus gegebenen Zahlenbeispiele angeschlossen werden. Der Autor fährt fort:

»Beispiel über die Berechnung der Linie des Horizonts. Berechne diese für die Zeit, in welcher der Mittelpunkt der Sonne im Horizontkreise steht, und zwar zu Beginn des Krebses und des Steinbocks auf dem Nordsüdvertikal.

Die Morgenweite in der Breite 30 zu Beginn des Krebses und des Steinbocks ist = $27^{\circ} 30' 54''$; die eine der beiden ist nördlich, die andere südlich. Der Sinus hiervon ist $27^{\circ} 43' 7''$, der Kosinus der Morgenweite aber $53^{\circ} 12' 48''$. Du multiplizierst den Sinus der Morgenweite, weil sie das Komplement der Höhe über dem Nordsüdvertikal ist, mit den Teilen des Gnomons und teilst das Produkt durch den Kosinus der Morgenweite: das Ergebnis ist $6^{\circ} 15' 3''$, und du verfähst ebenso mit dem Sechzigernommon, dann kommt $31^{\circ} 15' 15''$ heraus. Und was auch immer bei diesen beiden Gnomones für die Schattenzahl sich ergibt, du benötigst eine Verbesserung, wie du sie anwendest beim Horizontal-

¹⁾ An Stelle der Abbildung ist im Oxforder Manuskript ein leerer Platz.

schatten, nämlich, dass du die Ergänzung der Morgenweite um den Halbmesser der Sonne vermehrest, und was dann sich ergibt, davon bestimme den Sinus und Kosinus; alsdann multiplizierst du den Kosinus (der Ergänzung) mit den Teilen des miqjäs und teilst das Produkt durch deren Sinus, und was herauskommt, ist der Schatten, doch bei Gott ist die Leitung zum Richtigen.

Beispiel über den Schatten zu Beginn des Widders oder der Wage. Wir nehmen als Beispiel für die Berechnung des Schattens die erste Stunde von den Stunden zu Beginn des Widders oder der Wage. Die Zahl der Grade einer solchen Stunde ist 15; der Sinus hievon ist $15^{\circ} 31' 45''$, der Kosinus = $57^{\circ} 57' 20''$. Du multiplizierst $15^{\circ} 31' 45''$ mit den Teilen des miqjäs, unter der Voraussetzung, dass es 12 sind, und teilst das Produkt durch $57^{\circ} 57' 20''$; es kommt $3^{\circ} 12' 55''$ heraus, und das ist der Schatten der ersten Stunde für den Zwölfergnomon, und für den Sechzigergnomon beträgt er $16^{\circ} 2' 35''$. Und nun vermindest du 15° oder vermehrest 75° um den halben Durchmesser der Sonnenscheibe, und der ist an dieser Stelle 16 Minuten und es ergibt sich $75^{\circ} 16'$, davon nimmst du Sinus und Kosinus; dann multiplizierst du den Kosinus mit den Teilen des miqjäs und teilst das Produkt durch den Sinus von $75^{\circ} 16'$, das Ergebnis ist der Schatten, doch Alläh macht das Richtige treffen, und was das Azimut dieses Schattens anbetrifft, so ist es 60° , gezählt von der Linie des nördlichen Horizonts.

Beispiel über die Berechnung des Schattens und Azimuts einer Stunde der Stunden zu Beginn des Krebses. Die Hälfte des Tagesbogens bei Beginn des Krebses ist in der Breite von 30° : $104^{\circ} 35' 56''$, und $17^{\circ} 25' 59'' 20'''$ ist danach der Betrag der ersten Stunde von den Stunden zu Beginn des Krebses in der Breite von 30° . Du ziehst diesen Betrag von der Hälfte des Tagesbogens ab, und es bleibt $87^{\circ} 9' 57''$; der Sinus hiervon ist $59^{\circ} 55' 36''$, der Kosinus der Deklination zu Beginn des Krebses ist $54^{\circ} 59' 19''$. Multipliziere den einen der zwei Sinusse in den andern und teile das Ergebnis durch den Sinus totus; es kommt $54^{\circ} 55' 17''$ heraus (annähernd). Der zugehörige Bogen ist die Höhe des Sonnenmittelpunktes über dem Nordsüdvertikal, nämlich $66^{\circ} 15' 23''$. Du ziehst ihn von 90° ab, und es bleibt $23^{\circ} 45' 37''$; der Sinus hiervon ist $24^{\circ} 9' 31''$, und das ist der Kosinus der Höhe. Du multiplizierst ihn mit den Teilen des miqjäs in der Annahme eines Zwölfergnomons, und teilst das Ergebnis der Multiplikation durch den Sinus der Höhe der Sonne über dem Nordsüdvertikal, er ist $54^{\circ} 55' 17''$, und es kommt $5^{\circ} 16' 43''$ heraus, und das ist der Schatten der ersten Stunde von den Stunden zu Beginn des Krebses in der Breite von 30° auf dem Nordsüdvertikal, bei Voraussetzung eines Zwölfergnomons. Und wenn du den Schatten für einen Sechzigergnomon wissen willst, so multipliziere den Kosinus der Höhe — und er ist $24^{\circ} 9' 31''$ — mit 60 und teile das Resultat durch $54^{\circ} 55' 17''$, was sich ergibt, ist der Sechzigerschatten, nämlich $26^{\circ} 23' 33''$, doch bei Gott ist die Leitung zum Richtigen.

Berechnung des Azimuts dieser Stunde auf dem Nordsüdvertikal. Der Sinus der Deklination zu Beginn des Krebses ist $24^{\circ} 0' 18''$. Du multiplizierst ihn mit dem Sinus totus und teilst das Ergebnis der Multiplikation durch den Kosinus der Höhe des Sonnenmittelpunktes über dem Nordsüdvertikal; es ergibt sich $59^{\circ} 37' 7''$. Der entsprechende Bogen ist $83^{\circ} 32' 9''$. Wir ziehen von ihm die Ortsbreite ab — und sie ist 30° —, und es bleibt $53^{\circ} 32' 9''$. Dies ziehen wir von 90° ab, dann bleibt $36^{\circ} 27' 51''$ und das ist das Azimut der Sonne, gezählt von der Linie des Horizontes, und wenn du willst, so ziehe $83^{\circ} 32' 9''$ von 120° ab, so bleibt $36^{\circ} 27' 51''$, wie es vorhin herauskam, und das ist das Azimut. Und wisse, dass du für die Kenntnis des Azimuts eine Ergänzung zur Höhe des Sonnenmittelpunktes machen musst, wegen der Verschiedenheit unter den Regeln in der Berechnung des Azimuts an jedem Orte, und bei Gott ist der Erfolg.

ZU KAPITEL VIII₂

a. Hierzu gibt der Autor folgende Zahlenbeispiele: »Es sei eine jener Stunden vom Tag vergangen; die Ortsbreite ist sich gleichbleibend 30, und der Ort der Sonne sei zuerst der Beginn des Widders; es werde die Stunde in Grade verwandelt, indem man sie mit 15 multipliziert, und das sind 15° der Richtung (des Azimuts); der Sinus des Azimuts ist 15° 31' 45'', der Kosinus des Azimuts 57° 57' 20''. Du multiplizierst den Kosinus der Richtung mit dem Sinus der Ortsbreite — sie ist 30 — und teilst das Produkt durch den Sinus totus; es kommt 28° 58' 40'' heraus; dies ist der Sinus eines Bogens; der Bogen selbst ist 28° 52' 45''; den ziehst du von 90° ab, und es bleibt 61° 7' 15''; der Sinus hiervon ist 52° 32' 18'', und das ist der Divisor. Nun multipliziere man den Sinus des Azimuts — er ist 15° 31' 45'' — mit dem Sinus der Ortsbreite — und sie ist 30 — und teile das Produkt durch den Divisor, und er ist 52° 32' 18'', und es kommt 8° 52' 2'' heraus, und das ist ein Sinus; sein Bogen ist 8° 29' 55''; er ist der erste Bogen. Sein Komplement ist 81° 30' 5'', der Sinus hierzu 59° 20' 28''. Du multiplizierst ihn mit dem Sinus der Richtung, und der ist 15° 31' 45'' und teilst das Produkt durch den Sinus totus; es kommt 15° 21' 30''. Dies ist ein Sinus, sein Bogen ist 14° 49' 53''. Dies ist die Höhe der ersten Stunde von den Stunden des lauh bei Beginn des Widders und der Wage, an einem Ort, dessen Breite 30 ist, doch mit Gott gelangt man zum Richtigen.

Wenn die Sonne aber nicht im Beginn des Widders oder der Wage sich befindet, sondern an irgendeiner anderen Stelle, so möge für den Beginn des Steinbocks noch ein Beispiel vorgeführt werden. Dort ist die Deklination der Sonne 23° 35'; der Sinus hiervon 24° 0' 18''. Doch es war der erste Bogen 8° 29' 55''; der Sinus seiner Ergänzung (zu 90°) 59° 20' 28''. Ich multipliziere ihn mit dem Sinus der Sonnendeklination und teile das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite. Es kommt 27° 24' 51'' heraus; der zugehörige Bogen ist 27° 11' 45'' und das ist der Bogen der Gleichung; und er ist derjenige, den ich zweiten Bogen nannte. Ich vereinige den ersten und zweiten Bogen, weil die Deklination südlich und die Breite des Ortes nördlich ist, und so kommt 35° 41' 10'' heraus; das ziehe ich von 90° ab; es bleibt 54° 18' 50''; der Sinus hiervon beträgt 48° 44' 31''; ich multipliziere ihn mit dem Sinus der Richtung — er ist 15° 31' 45'' — und teile das Produkt durch den Sinus totus; es kommt 12° 36' 47'' heraus (annähernd). Der zu diesem Sinus gehörige Bogen ist 12° 8' 3'', und das ist die Höhe der Sonne über dem Horizontkreise, wenn vom Tag eine Stunde der Stunden des lauh vergangen war, im Beginn des Steinbocks und der Breite 30 usw.«

ZU KAPITEL VIII₄

ad a. Wer ist der Urheber dieser Simplifikation, resp. glücklichen Neuerung? Wir wissen es keineswegs. Schwerlich können die Araber selbst dazu den Anstoß gegeben haben, geschweige denn, dass sich in ungelesenen arabischen Manuskripten die neue Art von Sonnenuhren bereits vorfände, und die Meinung R. Wolfs: »... und wenn auch der Gnomon bei den Arabern immer noch vorherrschte, so scheint doch auch der Polos kultiviert worden zu sein, da man sich sonst nicht erklären könnte, wie derselbe schon bei den ersten betreffenden Schriftstellern des Abendlandes, welche sich nach eigener Angabe zunächst auf die Araber stützten, sich in gleichem Maße wie der Gnomon entwickelt findet, ja der Stylus von dieser Zeit an fast ausschließlich in der Weltachse liegt... «¹⁾ basiert eben

¹⁾ Geschichte der Astronomie, München 1877, S. 142.

auf keiner bestimmten Quelle. Ich möchte ihr das mir mehr zusagende Urteil Delambres gegenüberstellen, das er zum Schluss seiner Betrachtungen über die arabische Gnomonik zum Ausdruck bringt: «... Nous n'avons trouvé chez eux aucun vestige du cadran universel de Régiomontan, non plus que des cadrans analemmatiques qui donnent l'heure par la hauteur du Soleil; ils n'avaient aucune idée des angles au centre des divers cadrans.

Nous trouverons ces angles et diverses autres nouveautés, dans les premiers auteurs européens qui ont écrit sur la Gnomonique; mes ces géomètres, ne se donnent pas pour les inventeurs de ces innovations heureuses. Il y a donc dans l'histoire de la Gnomonique une lacune qu'il nous a été impossible de remplir. Nous voyons des progrès marqués sans savoir précisément à qui nous en avons obligation. Ces découvertes ont précédé probablement l'invention de l'imprimerie. Les découvrages originaux se seront perdus; la tradition nous a transmis ce qu'ils renfermaient de plus utile. Les plus anciens d'entre ces auteurs, Münster et Schoner ont affecté d'imiter les Arabes, en supprimant toutes les démonstrations, comme Albatagnius et Ebn-Jounis; ils se sont bornés à donner des constructions reposant sur des principes qui n'ont été exposés nulle part; il en résulte une obscurité qu'il n'est pas aisé de dissiper»¹⁾.

ad b. So schrieb bereits im 9. Jahrhundert Tābit ben Qorra eine Schrift, die sich, dem Titel nach, mit der Gestalt der Schattenkurven beschäftigt. Er lautet (nach Ibn al-Qiftis *Tārīḥ al-hukamā'*): «Das Buch über die Figuren der Endlinien, über welche der Schatten des Gnomons hingeht.» Es befindet sich angeblich als Manuskript Nr. 955 im Escorial. Casiri (*Bibliotheca arabico-hispania escorial. S. 387^b*) hat den lateinischen Titel: «De figura linearum, quas Gnomonometrum percurrit», unter dem die wohl noch nie gelesene Schrift z. B. auch von R. Sonndorfer²⁾ zitiert wird. Ebenso tun Chasles³⁾ und S. Günther⁴⁾ ihrer Erwähnung⁵⁾.

¹⁾ z. z. O., S. 544/45.

²⁾ Theorie und Konstruktion der Sonnenuhren, Wien 1864, S. 13.

³⁾ Geschichte der Geometrie (deutsch v. L. A. Sohncke, Halle 1839, S. 573).

⁴⁾ Handbuch der mathematischen Geographie, Stuttgart 1890, S. 185.

⁵⁾ Jetzt in deutscher Bearbeitung durch E. Wiedemann und J. Frank erschienen: «Über die Konstruktion der Schattenlinien auf horizontalen Sonnenuhren von Tābit ben Qorra.» (Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Math.-fys. Meddelelser, 1922, IV, 9).

NAMEN- UND SACHNACHWEIS

	Seite		Seite		Seite
Abenddämmerung	44 ¹	Azimut, Berechnung 18, 19, 20, 21		Cowley, A.	83
Abū Ḥanifa	45	Azimut der Qibla 34, 35, 38,		Craig, I.	43 ³
Abū'l Farāğ	75	39, 40, 41, 84, 85			
Abū'l-Idā'	34 ⁹	Azimutinstrument	28	Dā'ir	19, 60
Abū'l Ḥasan al-Marrākusi		Azimutstunde	65	Dā'ira hindija	8
s. al-Marrākusi				Deklinant	66, 67
Abū'l Ḥasan Šūfi	82	Bağdād 30 ² , 80 ¹ , 81, 82, 84, 85, 86		Deklination der Sonne 17, 23,	
Abū'l Sened b. Tajjib 'Alī. 82		basā'	27	45, 62, 65, 66, 90	
Abū'l Wafā' 3, 11, 20, 20 ¹ ,		Basīra	8, 27, 28, 34, 45, 75	Deklination, größte	82
80 ¹ , 83, 84, 86		Bassermann-Jordan, E. von 1		Delambre, B. 115, 29 ¹ , 35 ⁴ ,	
Abū Naṣr b. 'Irāq	37	al-Battāni 1, 3, 5, 10, 11, 27,		63, 73 ¹ , 80 ¹ , 863, 91	
Abū Tālib al-Mekki	44	28, 35 ⁴ , 36, 37, 40, 59		Delisle	55
Abweichende Vertikaluhr	77	Beauchamp	80	Destür	86
Aden	34	Becker, C.	443	Differenz auf dem Horizont	21
Agzā'	11	Beigel, G. W. S.	17 ¹ , 343	Differenzglied, zweites	10 ¹
Aḥmed b. 'Abdallāh Ḥabas		Berchem, M. van	3	Discus in planitia	27, 27 ² , 75 ¹
s. Ḥabas al-Ḥāsib		Berlin (Biblioth.) 3, 118, 173, 30 ² ,		Discriminante	25
Albacete	27 ¹	35 ² , 52, 63		Distance	67
Albategnius	3, 91	Bérose	72	Distance au méridien	285
'Alī b. 'Isā al-Aṣṭorlābi	82	Besen	71	Drecker, J.	27 ² , 29, 703
'Alī Schāh Olai	36	Bibliotheca arabico-hispan.	91	Dugat, G.	59
Almuqantarāt	23 ¹	Bibliotheca mathematica	37 ¹	Durchmesser des Schattens	10
Ambrosiana (Biblioth.)	3, 5, 35	Bilfinger	72		
Andronikos Kyrrhestes	59	Björnbo A.	79	Ekliptik	27, 55, 57, 62
Annalen der Hydrographie 75,		al-birkār at-tāmm	70	Ekliptikschiefe 214, 28, 56 ¹ , 76,	
17, 58 ¹		al-Bīrūnī 3, 56, 83, 10 ¹ , 173,		77, 82	
Apollonius (Conica)	70	35, 37, 44 ¹		Elementare Theorie der ebenen	
Äquator	61, 69	Bogen der Gleichung	39, 40	Sonnenuhren	22, 23, 25
Äquator, Abbild des	26	Breite, geographische	7, 56	Ellipse	25, 26
Äquatorialuhr	69	Breite, ihre Bestimmung 75, 76, 77		Eratosthenes	27 ⁴
Aquileia	6	Breitendifferenz	35	Escorial (Biblioth.)	11
Arachne des Eudoxus	27	al-bu'd	673	Essen	55, 57
Archiv d. Deutsch. Seewarte 753,				Eudoxus	27
76, 77		Ca'ba	34	al-Faḍil Abū'l Qāsim	82
Arendonk, C. van	117	Cadran cylindrique	73	faḍl ad-dā'ir	285
Aristarch von Samos	27, 72	Cantor, M.	373	fagr	44 ¹
Asin-Palacios	117	Caratheodory, A.	79	fai'	9, 78
Astrolab(ium)	5, 82	Carra de Vaux 114, 203, 79,		fazāri	54 ¹
Astronomie, sphärische	38 ²	83, 86 ¹		Finger (12. Teil d. Gnomons)	5
'Aṣr	1, 43, 44, 57, 63, 64	Casiri	91	Fosṭāṭ	34 ⁹
'Aṣr-awwal	44, 53	Chalife	34	Frank, J.	915
'Aṣr-Gleichung	49	Charrāqat Naṣf	72	Fußpunkt (des Gnomons)	28
'Aṣr-Kurven	45, 47, 49, 52	Chāzini	8, 72		
'Aṣr-tāni (sany)	44, 44 ¹ , 51	Cheikho	72	Ğāğmini	353
Auffangfläche	6	al-Chwārizmi	79	ğāib (Sinus)	9
'Awāli	44	Connaissance des Temps	55	ğāib at-tamām (Kosinus)	10
Azimut	17	Cotangente	79	gannah	70 ⁴
Azimutale Karten	43 ²	Cotangententabelle	57		

	Seite		Seite		Seite
Gaubil	55, 56	halazûn	58	Jahreszeitenstunden	19, 28 ²
Gazari	72	Ĥalid b. 'Abd al-Malik	82	Jezdegerd, Āra	82
Gazna	30 ²	Hamadân	36	Jourdain, A.	5 ¹⁰
ġedwal az-zill	10	Ĥambal	45	Journal asiatique	86 ¹
Gebet	43	Hamburger, J.	33		
Gebetsnische (mihrâb)	41	Hammer, E. von	43	Ka'ba	33 ² , 35, 36
Gebetsplatz (sağâda)	34 ⁷	Hankel, H.	37	Kartogramm	43
Gebetssteppich	34 ⁷ , 35	Harâm	33	Kartograph. u. schulgeograph.	
Gebetszeiten	34 ⁶ , 63	Hauser, F.	44 ⁴	Zeitschr.	43 ⁵
Gebetszimmer	34	Hauptparallel ($\varphi = 30^\circ$)	55	Kegelförmige Sonnenuhr	72
Geßfögelte, die	70	Heiberg, J. L.	70	Kegelschnittszirkel	70
Gegenazimut	43	Hemicykeln	72	Khorassan	5
Geographie, mathematische	33, 91 ⁴	Herkules horarius	6	Kibla	33
Geometrie, religiöse	43	Heuschreckenbein	55	kitâb al-akrûsâ	78, 78 ¹
Geschichte der Astronomie	90 ¹	Ĥiğra	82	kitâb al-taḥḥim	5 ⁶ , 35 ²
Geschichte der Geometrie	91 ³	Himmelsäquator	25, 65, 69	Kosinus	10
Geschichte der griechischen		Himmelskugel	63	Kosinussatz d.sphär. Trigonom.	37
Astronomie	27 ⁴	Himmelspol	71	Kotangente	18
Geschichte der Mathematik	37 ² , 37 ³	Ĥiṣṣa	20, 21	Kotangententafel	10
Geschichte der Trigonometrie		Histoire de l'astron. du moy. âge		Kotangentensatz d. sphärischen	
20 ¹ , 38 ¹ , 79		863, 91		Trigonometrie	84
Gleichheit von Schatten und		Histoire des Arabes	59	Kombinierte Uhren	70
Gnomon	62, 63	Hochheim	35 ³	Krebs(Parallelkreis) 27, 67, 73, 89	
Gleichung der Breite	84, 85	Höhe der Sonne	17, 34	Kugeluhr	72
Gleichung der Länge	85, 86	Höhe des Zenits	37	Kuhl	72
Gnomik	17 ¹	Höhe ohne Azimut	7	Kulminationshöhe der Sonne	47
Gnomon 5, 6, 64, 7, 17, 19, 22,		Höhenkreis	23		
27 ² , 28, 45, 55 ² , 63, 67,		Höhentafel des Azimuts d. Qibla		Lane, E. W.	45 ¹
71, 75, 75 ¹ , 78		41, 42		Lauh (luh)	8, 64, 65
Gnomon, beweglicher 54, 55, 74		horae aequinoctiales	28 ²	Leiden (Biblioth.) 1, 6, 9 ¹ , 93,	
Gnomonhöhe (Länge) 9, 10, 11,		horae temporales	28 ²	10 ² , 105, 11, 17 ² , 21 ² , 30 ¹ , 44 ¹	
47, 56 ¹ , 73, 76, 77		Horizont 9, 18, 19, 22, 67, 70, 71		Leuchtturm	34 ²
Gnomonik	29, 75	Horizontalebene	22, 47, 67	Linie des Horizontes	60, 88
Gnomon im Kreise	57	Horizontalschatten	9, 11	Littmann, E.	34 ²
Gnomonique	91	Horizontalschatten, Tafel d. 12—17		Lochnommon	6
Gnomonische Projektion	49	Horizontalsonnenuhr	26, 27		
Gnomon, perpendikulärer	69	Horizontkreis	22, 90	Maḥāṭiḥ al-'Ulûm	72
Gnomon, 60er	5, 79, 89	Horologium	75 ¹	magrib	44
Gnomonschatten	67	Ĥwârizmî (Chwârizmî, Khwâ-		al-Māhānî	82
Gnomon, spitz auslaufender 55, 27		rizmî)	103, 11, 72, 79	Mālik	45
Gnomonspitze	7, 63	Hyperbel	23, 25, 26, 28	al-Ma'mûn	82
Gnomon, verllorener	86			Manitius, K.	283
Gnomon, 12er	5, 79, 89	Ibn al-'Alam	82	Marāġa (Mérāġah)	5 ¹⁰
Goldziher, I.	44	Ibn al-Qiṣṭî	91	Marmorblock zu Tenos	59
Gotha (Bibl.)	43, 86	Ibn as-Sāṭir	43, 86	Marrākusi 3, 34, 8, 11, 27, 287,	
Graphikon	54, 55	Ibn Yûnus 1, 3, 6, 9, 10, 11,		44 ¹ , 45, 54, 55, 57, 58, 59, 64,	
Griffini	3	17, 19, 21, 30, 34 ⁸ , 36, 44 ¹ ,		67, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 77	
Günther, S.	91 ⁴	52, 59, 63, 64, 65, 67, 75, 82, 86		Martini	703
		ihṭilâf al-manẓar	9	Medina	44
Ĥabas al-Ĥāsib	30 ² , 44 ¹	ihṭilâf al-ufq	21, 81	Medinat as-Salâm	82
Ĥāfir	57, 58	iktafa	71 ¹	Mekka 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 43	
Ĥağğ	75	Imâm	44, 45	Mekkarichtung	37, 39, 44
Ĥaiṭam, ibn al- 3, 35, 79, 83, 84		inḥirâf der Qibla	36, 41	Mémoire sur les instr. astron.	5 ⁸
Ĥākimiſche Tafeln 1, 3, 5, 35,		inklinierende Uhrebene	67	Mémoire sur l'observatoire de	
36, 59, 64, 80		'isâ'	44	Mérāġah	5 ¹⁰

	Seite		Seite		Seite
Menelaus, Satz des	86	Ortsuhr	34, 75	sai'	5
mihrāb	41	Ostwestlinie S. 26, 35, 65, 71, 77		sahs	5, 9, 62
miqjās	5, 86, 87, 88, 89	Ostwest-Vertikal	17, 63, 64	sakl al-qaggā'	79
miqjās muḥaddid	55	Palästina	33	Schatten	10, 17, 76, 78, 87
Miknasa (Makānis)	71	Parabel	25, 26	Schatten, erster	11
mināre	34, 34 ²	Parallelkreis	20, 23, 69	Schattenfläche	8, 75
Miram Čelebi	20, 20 ⁴	Paris (Bibl.)	35, 36, 83	Schattenkurve	23, 24
Misr	68 ¹	Pein, A.	38 ²	Schattenlänge	11, 44, 61
Mittabstandstreue	43	Polhöhe	23, 82	Schatten, längster	61
Mittag	9	Polos	90	Schattenlinie	63
Mittagshāfir	58 ¹	Projektion, gnomonische	49	Schattenmesser	5
Mittagslinie	35, 40, 41	Projektion, orthographische	47	Schattenrichtung	17, 65
Mittagsschatten	56	Prolégomènes des tables astron.	8	Schatten, 60er	19, 89
al-mizān al-qarāri	55	usw.	8	Schattenspitze	23
Montucla	33, 43	Ptolemäus, Cl.	28, 82	Schattentafel	10
Morata, N.	11	qām	9	Schattenwerfer	5
Morgenweite	21, 88	al-qā'ima 'alā ḥaṭṭ al-masriq usw.	8	Schatten, zweiter	11
Moschee	33, 34	al-qā'ima 'alā ḥaṭṭ niṣf an-nahār	8	Schaubach, J. R.	27
Mossul	5	al-qānūn al-mas'ūdi	173, 302, 44 ¹	Schiaparelli	289
Muğannaḥa	70	al-Qarāfa	75	Schlagschatten	63
Muḥammed	33	qarāri	54, 55	Schnecke	58
Muḥ. 'Abdallāh b. Qāsim	72	Qibla	1, 3, 32, 34—43, 79, 83, 86	Schneckenlinie	58
Muḥ. b. Gābir b. Sinān al-Batāni	82	Qiblakarte	435	Schoy, K. 75, 172, 291, 362, 552, 753	
Muḥ. b. Kaṭir al-Fergāni	82	qiblij	34 ⁴	Sédillot, J. J.	3, 86, 44 ¹ , 59
Muḥ. b. Mūsā al-Chwārizmi	82	Quatremère	54 ¹	Sédillot, L. Am. 3, 5, 84, 28,	
Mukḥula	72	Radius d. Himmelskugel	28 ¹	semī	34 ² , 36 ²
munḥarif	8, 67	ar-Raḡqa	289	Senkel (saqūl)	17
muqbil wa mudbir	6	Real-Encyklop. f. Talmud usw.	334	Seybold, C. F.	7 ¹
Murcia	27 ¹	Récréations mathémat. usw.	335, 43 ¹	Sibī al-Māridini	1, 78 ¹
Mūsā b. Šakir	80, 82	Refraktion	9	simūt	4, 95
Muslim b. Aḥmed al-Leṭī	35	Regiomontan	20 ¹ , 91	Sinūs, erster	38, 39, 40, 87
Musulman	43	Rehm, A.	6 ¹ , 75 ¹	Sinussatz	37
Mutakāfi	71	Reinoud, J.	34 ⁴	sinus totus	19, 37, 38, 39, 40, 41
Muwaqqit	34	Reisebeschreibung n. Arabien	336	sinus versus	28
Nachmittagsstunde	71 ¹	Reisesonnenuhr	72, 73	Sinūs, zweiter	38, 39, 40, 87
Nadir	17, 18	Reland	333	Skaphen	72
Näherungsverfahren zur Bestimmung der Qibla	35, 84	Religionskult, islām.	33	Sohncke, L. A.	913
an-Nairizi	35	Richtung (semī)	17	Sokotra	43
Nallino, C. A. 4, 52, 174, 281, 34, 36		Richtung der Qibla	35	Solstitialschatten	56
Naṣir ad-dīn aṣ-Ṭūsī	5, 79	Risāla	40, 41	Sonnendorfer, R.	91
Niebuhr, Carsten	33	Rücken der Miknasa	71	Sonnenmittelpunkt	60, 61, 79, 89
Nivellierinstrument	7, 72	Rudloff	353	Sonnenscheibe	60 ¹
Nordsüdlinie	8, 51	ruhāma	3, 8, 27, 289	Sonnenuhr 1, 3, 22, 23 ¹ , 44, 72,	
Nordsüdvertikal	60, 62, 76	Sağāda	347	73, 86	
Oberer Sonnenrand	9	as-sā'āt al-muta'dila	282	Steinbock (Parallelkreis)	27, 76, 88
Observatoire de Mēragah	510	as-sā'āt az-zamānija	19, 282	Sternbilder	31, 32
d'Ohsson Muradgea	347, 44	sāq al-garāda	55	στρογγίον	5 ¹
Opus astronomicum 3, 52, 54,		sāḥ	8	Stuart	72
81, 82, 92, 104, 113, 214, 275,		as-sāḥ al-mail	8	Stunden, gleiche (äquinoktiale)	
281, 363, 591		as-safaq	44 ¹	28, 282, 82	
Ortsbreite 59, 60, 64, 73, 75, 79,		Šāfi'i	44	Stunden, zeitliche (temporale)	
87, 89, 90				19, 28, 282, 82	
				Stundenlinien	27, 29, 58
				Stundentafel	302

	Seite		Seite		Seite
Stundenwinkel	28	temporale Stunden	19, 28, 29	Wedemeyer, A.	1, 58
Stylus (στυλός)	22, 27, 69, 90	Temporalstunde	28, 29	Weltachse	18, 22, 69, 90
Sure, II.	33	Traité des instr. astron. etc. 86, 55 ¹		Welpol	22
Suter, H.	3, 35 ¹ , 37 ¹	Trigonometrie, sphärische 24, 37		Wendekreise	27, 61, 63, 73, 74
ṣāhib al-qibla	35	Trigonometrische Tavler	79	Wendepunkt	52, 57
Ṣalāt	43	Turm der Winde zu Athen	59	Wendetangenten	50
ṣalāt al-ḡum'a	44			Widder 17, 18, 19, 60, 65, 73,	
ṣubḥ	44	Uhrebene	61, 63, 67, 69	77, 79, 87, 89, 90	
ṣubḥ al-kādib	44 ¹	Uhren, ebene	22, 67	Wiedemann, E. 53, 56, 8, 83,	
		Uhren, kombinierte	70	44 ¹ , 44 ¹ , 72, 72 ¹ , 79, 91 ⁵	
Ṭābit b. Qorra	3, 82, 91, 91 ⁵	Uhrfläche	22, 26, 27	Wiederauffindung des verlore-	
Tableau général etc.	347, 44 ⁶	Uhrzeiger	63	nen Gnomons	87
Tables ilkanienues	5	Ullmann, L.	33 ¹	Wintersonnenwende	56 ¹
ta'dil al-ṭūl	84 ¹	Ulūḡ Beg (Oloug Beg) 84 ¹ , 11 ⁸ ,		Wolf, R.	90
Tafel auf d. Nordsüdvertikal	62	20 ⁴ , 21		Würschmidt, J.	72, 73, 73 ¹
— d. Azimuts d. Qibla	41	ustuwāna	55		
— d. Bogengrade v. d. Tages-				Zawāl	9, 78
mitte usw.	53	Vermischte Aufgaben d. sphär.		Zenit	22, 37, 40, 62, 70
— d. Höhe d. Azimuts d. Qibla 42		Astronomie usw.	29 ¹	zig	82
— d. Horizontalschatten	11—17	Vertikal, abweichender	77	zill	9, 78
— d. Ihtilāf al-uṣṭ	81	— deklinierender	26, 66	zill awwal	9
— d. Sechzigerschatten	19	— erster	73	— basit	9, 27
— d. Sinus d. Morgenweite	81	Vertikalkreis	23	— mabsūt	9, 27
Tafeln, astronom. v. al-Khwā-		Vertikalschatten	9, 55, 79	— ma'kūs	9
rizmi	103, 112	Vertikal über der Ostwestlinie		— musta'mil	67
— astronom. v. Ulūḡ Beg 11, 204		26, 77		— mustawi	9
— Hākimitishe, s. Hākim. Taf.		Vitruve	72	— qā'im	9
Tagesbogen	19, 60, 82	Vorderseite (qibal)	33	— ṭāni	9
Tagesmitte	53	Vorlesungen üb. Geschichte d.		Zodiakallicht	44 ¹
ta'liq	3	Math. s. Geschichte d. Math.		zuhr	44, 44 ²
Talmud	33	Vorlesungen üb. Geschichte d.		Zylinder	55, 74
tangente, la	79	Trigonom. s. Geschichte der		Zylinderfläche	70
Tangenswerte	11	Trigonometrie		— mantel	74
Tangenten, senkrechte	49, 51	Vorwärts- und Rückwärtsgehen 6		— uhren	73
— wagrechte	50, 52			— umfang	74
Tārīḥ al-ḥukamā'	91	Wage 17, 18, 19, 60, 65, 79, 89, 90		ώραι καρικται	28 ²
Teile der Stunden	31, 32	waqqat	34 ⁵	ώραι ληνμεριβαι	28 ²
Tempel	33, 34				

ERGÄNZUNGEN UND BERICHTIGUNGEN

- S. 4, Z. 7 v. u. Durch wiederholte hochherzige materielle Unterstützungen des Herrn Prof. G. Eneström (Stockholm), die mir den Erwerb der Photos verschiedener arabischer Schriften astronomischen und mathematischen Inhalts ermöglichten, bin ich jetzt auch in den Besitz der Schrift des Muḥ Sibī al-Māridīnī († 1495) »Über die Berechnung von Tafeln zur Konstruktion der munḥarifāt« (geneigten Sonnenuhren) gekommen, die ich gelegentlich an anderer Stelle zu veröffentlichen hoffe.
- S. 21, letzte Z. ist dem Wort »verleichtert« der Buchstabe *b* für die entsprechende Note des Anhangs hinzuzufügen, ebenso S. 29, Zeile 14 v. o. nach dem Wort »beschränken«.
- S. 23, Fußnote 1 muß es für die Einzahl »Almuqantara« heißen. Die Note gibt die Pluralform.
- S. 34, Anmerk. 3 lies »Fundgruben«.
- S. 43, Z. 8 v. u. lies »as-Ṣāṭir«.
- S. 43, Z. 9 v. o. lies »Marrākusi«.

The Hakemite Tables of Ebn Jounis.

By J. H. REYNOLDS.

ON Nov. 8, 1929, the last occasion on which the late Dr. Knobel attended a meeting of the Royal Astronomical Society, he presented to the Society a rare copy of the Hakemite Tables of Ebn Jounis, translated by "Citoyen" Caussin, professor of Arabic in the College of France, An XII de la Republique (= A.D. 1804). This valuable and interesting book throws a strong light on the high standard of accuracy in observation which had been reached by the Arab and Egyptian astronomers. At the time the tables were compiled (circa A.D. 1000) the semi-barbaric European nations were seldom at peace, either internally or externally, and all learning had suffered grievously from civil disturbances and the neglect and ignorance of the ecclesiastical foundations. In the Near East at that time astronomy and mathematics were considered to be an intrinsic part of the education of Mohammedan princes, and astronomers were therefore often attached to their courts. It is true that astrology and prognostics were the *vera causa* of this princely interest in the majority of cases, but that did not make the observational work of the Arab astronomers any less valuable in the ultimate event.

The original Arabic MS. from which the translation was made was, and still is, in the library of the University of Leyden, and it was lent to the Institut de France by the Dutch Government of the time. There is no record of how it came into the possession of the University of Leyden, but it was undoubtedly a copy of the original MS., transcribed about seven hundred years ago. There were several copies of the work originally in the library of the Alhazar University in Cairo, and it is possible that the Leyden MS. may be part of one of these, as many of the MSS. of the library were scattered and destroyed in the repeated conquests and sackings of Cairo in the Middle Ages. Caussin was of the opinion that the Leyden MS. contained about half of the original observations made by Ebn Jounis, and that there were two volumes.

Besides a long preface, the whole work originally contained eighty-one chapters, the title of each being given in the introduction. The twenty-second chapter in the last which appears in the Leyden MS., so the greater part of the work is unfortunately totally lost to us. The titles of some of the chapters sound sufficiently modern: for example, Chap. iii., On mean time and true (solar) time—how to convert one into the other, and different methods employed by various authors of tables; Chap. x., On chords of a circle, on sines, and how to use them in calculating from the tables; Chap. xi., On the obliquity of the ecliptic, on the dimensions of the earth's shadow, and tables relative thereto; Chap. lxxvii., On radiation from the stars, according to general opinion. Other chapters introduce us to matters which, fortunately, do not affect us to-day: Chap. xv., On arcs diurnal and nocturnal; on fractions of the hour by day and night; on equal and unequal time. Chap. xvi., On the twelve houses of the sun. Chap. lxxxi., On the revolutions of the years of the earth, and on nativities.

Caussin's translation only includes the introduction and the fourth, fifth, and sixth chapters, so there is still ample work to be done in the way of translation by Arabic scholars.

An Arabic MS. in the French Bibliothèque Nationale contains the tables of the sun and moon by this author, amongst various tables taken from the works of the other astronomers. These tables form part of a work entitled "Al zij Almosthal ali", which seems to have been composed in the fourteenth century of

our era. Caussin remarks: "Le titre encore plus récent qui est à la tête, l'attribue à Ebn Jounis, apparemment pour lui donner plus de prix. C'est une supercherie dont les Orientaux se servent quelquefois vis-à-vis des Européens qui achètent des manuscrits sans les lire".

Ebn Jounis came of an ancient Arab-Egyptian family. Like many of his contemporaries, he was something of a poet and a musician, as well as an astronomer. The date of his birth is unknown, but he died on May 31, 1008. There seem to have been two editions of his astronomical tables, one written about 990, in the reign of the Caliph Aziz, to whom it was dedicated, and the second, a corrected and extended series of observations, being written in the reign of his son Hakem, and dedicated to him, whence the title of the Hakemite Tables is derived.

Ebn Jounis's observatory was on a rocky spur of the Mokattam Hills near Fustat (Old Cairo), at a place called Birket Alhabash, originally a reservoir on the east side of the Nile, afterwards turned into a garden. This was probably near the old aqueduct to the citadel built by Nasir in 1311, parts of which are still standing.

In one of the Arabic texts there is mention of observations at 'Holwon', to which Caussin adds the following note: "Holwon, quelques lieues au-dessous du Caire, sur le bord oriental du Nil". This is without doubt the present town of Helwan, near which the modern observatory was erected in 1904 under the supervision of Sir Henry Lyons.

Ebn Jounis presupposed in the table a knowledge of Ptolemy's work, and his first aim was to assemble all that related to practical observation, calculation, and the use of tables. His ultimate object was to correct the tables current in his time, and his own observations were therefore of great assistance in the new tables. A quarter of the MS. is devoted to the chronology of the *Hegira*, and is omitted in the French translation, as it is comparatively unimportant. The commencement of the preface is worth translation and reproduction here:

"In the name of Allah, the compassionate, the merciful! The study of the heavenly bodies is not unconnected with religion. By this alone can be known the hours of prayer; the time of sunrise, when he who observes a fast should abstain from drinking and eating; the end of the evening twilight, the term of vows and religious obligations; the time of the eclipses, of which a man should be forewarned, so that he may prepare himself with the special prayer proper for such an occasion.

"The same study is necessary for turning in prayer always towards the Kaaba (Mecca), for determining the commencement of the months, for knowing certain doubtful days, the time for seeding, the budding of the trees, the picking of fruits, the position of one place with regard to another, and for journeying in a definite direction without straying.

"The movement of the heavenly bodies being thus allied to many divine precepts, and the observations made in the time of the Caliph Almamoun (at Bagdad) being already out of date, and containing errors similar to those made aforetime by Archimedes, Hipparchus, Ptolemy, and others, our Lord and master the Commander of the Faithful Abou Ali Almansour al imam al hakem bams Allah (May God bless him, his virtuous ancestors, and his noble descendants), has ordered me to observe anew the heavenly bodies whose movement is more or less in accord, and many

of those whose progress is slow compared with the existing tables.

"First of all I assured myself of the excellency of the instruments with which I made my observations. I constructed them with greatest care, and divided them with the finest accuracy I could command. I spent much time in examining them and verifying their divisions. I compared them one with the other to assure myself of their reliability; and when I had found with certainty the places of the planets, I used, in order to determine their mean motions, the observations of the ancients, since it is in this way alone that such a correct determination can be made."

The principal instruments used by Ebn Jounis were the armillary sphere and the azimuth circle. The larger the diameter of these, the greater the accuracy with which they could be divided. Unfortunately, no details are given as to their dimensions and construction, so we have to fall back on descriptions of such instruments constructed at Cairo after the death of Ebn Jounis and contained in Caussin's notes.

The armillary sphere was a series of rings, the outer and principal one representing the meridian. Then came a movable declination ring pivoted on the poles, containing on its inner edge two other pivots 23° from the poles, and on these pivots were fixed two other rings at right angles to each other, representing the ecliptic and colures. Still another sliding inner ring with sights at the ends of a diameter enabled readings to be taken both in latitude and longitude. These were made up to 2 ft. in diameter and probably more, as the azimuth circle constructed by the order of Alfdel a hundred years later was 200 inches in diameter.

Numerous references are made in the introduction and Chap. iv. to the "Verified Table". This table was compiled by order of the Caliph Almamoun at Bagdad about fifty years before Ebn Jounis worked out his own Tables. Several astronomers were engaged in this compilation, the principal being Jahn Aboumansour. An Arabic MS. of this Verified Table was, and presumably is now, in the library of the Escurial.

Ebn Jounis devotes the whole of Chap. iv. to a comparison between recent observation and calculation by the Verified Table, especially with regard to eclipses of the sun and moon. He was specially critical of tables of the sun's longitude, which he found to be largely in error. He points out that the armillary sphere of Jahn ebn Aboumansour was only divided to $10'$ of arc, and was not, therefore, of the accuracy required for close determinations of the sun's place. As an example of the refinement of accuracy attempted by the Arab astronomers, Ebn Jounis cites results obtained for the mean motion of the sun in a Persian year of 365 days. The sons of Moussa ebn Shaker at Bagdad gave this as $359^\circ 45' 39'' 58''' 2''''$. The division of the second into sixty thirds, and that again into sixty fourths, and on occasion even to fifths, must come as a great surprise to present-day astronomers, for a fifth was only equal to 0.0004, a quantity representing less than probable instrumental error even to-day. Of course, the figures given were simply obtained by continuing division.

A list of conjunctions of the planets with each other and with the 'Lion's Heart' (Regulus) are given with considerable detail. One observed by Habash at Bagdad on Oct. 10, A.D. 864, was that of Mars and Venus in Virgo, so close as to appear one planet. "We have obtained their conjunction in this manner in the table Alshemashia by adding to

the epicycle of Venus, and to the mean motion of the sun in the table $4^\circ 30'$; next deducting from the epicycle of Mars $30'$, and deducting the result from the mean motion of the sun."

Some partial eclipses of the sun visible in Cairo were observed with great interest by Ebn Jounis and his friends, who assembled at the Mosque of Abou-Isafer Almagrebi for the purpose. One on Dec. 12, A.D. 977, was evidently a great astronomical occasion. The names of many of those in attendance were given, of whom he says: "These persons were instructed without being versed in the practice of judiciary astronomy (prognostics)". The eclipse was first seen when the sun was between 15° and 16° above the horizon. Its greatest phase was estimated at 8 digits (twelfths of the diameter) in magnitude. "When the sun seemed to regain all its brilliancy I found its altitude to be about $33^\circ 20'$, all being in agreement as to the end of the eclipse." Next appears a list of determinations of the vernal and autumnal equinoxes, made by various astronomers, commencing with one by Ptolemy in the third year of the reign of Antoninus Pius, at Alexandria. Many observations by Arab astronomers at Bagdad and Damascus, from A.D. 830 to A.D. 851, appear also in the text.

Chap. v. contains various determinations of the sun's mean motion in the Persian year of 365 days, almost all of them being in agreement with a value of $359^\circ 45' 39''$, differing only in thirds. All of the astronomers arrived at their results by dividing the number of solar revolutions by the number of Persian years which had elapsed between the time of their observations and the original observation of Hipparchus. By the same method Ebn Jounis arrived at a slightly larger value— $359^\circ 45' 40'' 3''' 4''''$. He is especially interested in various estimates of the position of the 'Lion's Heart'. "I am going to give particulars of these differences, so that those who wish to know the science of calculation and observation of the heavenly bodies, by comprehending every difficulty and by seeing how much trouble is involved in arriving at the truth, may be more disposed to excuse errors which escape the notice of persons who give themselves up to this kind of study; and Allah conducts whom he will in the path of exactitude."

The differences in the positions of Regulus were found to range from $3'$ to $33'$ for the same year by interpolation from various observations made in previous and subsequent years. The Arab astronomers who contributed the results are mentioned individually and their calculated places given in detail.

Chap. vi. is entitled: "On the mean motions of the Verified Table, on its equinoxes, and on the position of its apogees: on the mean motions of the present Table, on its equations and its apogees". This chapter consists entirely of comparisons between various determinations by Ptolemy and others of the mean motions and other elements of the sun, moon, and planets and Ebn Jounis' own results. It is scarcely of sufficient general interest to quote extracts here. Caussin had evidently intended to translate and publish the rest of the Leyden MS., but this unfortunately he never accomplished. He ends the volume by giving various small extracts from other Arabic astronomical MSS., with a computation based on the Tables.

All the way through, the actual Arabic text is given on one page with the French translation on the other. The text is fully annotated with references to Arab astronomers, their instruments, and their methods of observation. Evidently, Caussin was a master both of classical written Arabic and Arab literature, and his work deserves the grateful appreciation of scientific historians.

فهرس المحتويات

- دُلامبر، جان-بتيست جوزف: تاريخ الفلك في القرون الوسطى. صفحة
١ ٧٦-١٧٠: ابن يونس وأبو الرفاء. (بالفرنسية)
- ٩٧ سيديو، لوي-أملي: الزيج الكبير الحاكمي لابن يونس. (بالفرنسية)
- ١٠٢ قُشتائين، أرمن: خسوفات القمر وكسوفات الشمس التي رصدها ابن يونس
في القاهرة ومقارنتها بما ورد في كتاب الخسوفات والكسوفات لأبُلُتسر.
(بالألمانية)
- ١٠٥ شوي، كارل: الفصل العشرون من كتاب الزيج الكبير الحاكمي لابن يونس:
«في معرفة السمات من الارتفاع والارتفاع من السمات». (بالألمانية)
- ١٢٠ شوي، كارل: حول طريقة عربية لاستخراج درجات العروض من ارتفاع
الشمس في الربع الأول (ارتفاع بدون السمات). (بالألمانية)
- ١٣١ شوي، كارل: استخراج العرض الجغرافي للبلاد من قياس ارتفاع الشمس
فوق خط الزوال أو بواسطة معرفة ارتفاعين آخرين لها مع سمتيهما كما يرد
في الزيج الكبير الحاكمي لابن يونس. (بالألمانية)
- ١٥٠ شوي، كارل: مقالات في حساب المثلثات العربي (دراسات لنصوص استناداً
إلى مخطوطات فلكية عربية لم تنشر بعد). (بالألمانية)



طبع في ١٠٠ نسخة

نشر بمعهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
بفرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية
طبع في مطبعة شتراوس، مورلنباخ، ألمانيا الاتحادية

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٢٥

ابن يونس

أبو الحسن علي بن عبد الرحمن
(توفي ٣٩٩هـ)

نصوص ودراسات

القسم ٢



جمع وإعادة طبع

فؤاد سزكين

بالتعاون مع

كارل إيرج-إيجرت، مازن عماوي، إكهارد نوباور

١٤١٨هـ - ١٩٩٧م

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
سلسلة الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي
المجلد ٢٥

منشورات
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

يصدرها
فؤاد سزكين

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٢٥

ابن يونس
أبو الحسن علي بن عبد الرحمن
(توفي ٣٩٩هـ)

نصوص ودراسات
القسم ٢

جمع وإعادة طبع

١٤١٨هـ - ١٩٩٧م
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية